

Дифференциальная геометрия

Глава 1. Векторные и аффинные пространства

- §1. Векторное пространство (напоминание)
- §2. Евклидово пространство (напоминание)
- §3. Обобщенное векторное произведение
- §4. Аффинное пространство

Глава 2. Кривые

- §1. Определение кривой
- §2. Векторные функции скалярного аргумента
- §3. Регулярность. Длина кривой
- §4. Эквивалентность кривых
- §5. Кривые единичной скорости
- §6. Касание плоских кривых
- §7. Репер Френе плоской кривой
- §8. Локальное строение плоских кривых (особые точки)
- §9. Некоторые плоские кривые
- §10. Кривые Безье
- §11. Кривые общего вида

Глава 3. Поверхности

- §1. Вектор-функции векторного аргумента. Дифференциал отображения
- §2. Определение поверхности
- §3. Примеры поверхностей
- §4. Первая фундаментальная форма. Внутренняя геометрия поверхности
- §5. Замена параметров. Изометричность поверхностей
- §6. Внешняя геометрия поверхностей. Основной оператор гиперповерхности
- §7. Матрица основного оператора гиперповерхности. Кривизны и главные направления. Линии кривизны.
- §8. Локальное строение гиперповерхностей
- §9. Нормальная кривизна. Асимптотические линии

Глава 1. Векторные и аффинные пространства

§1. Векторное пространство (напоминание)

Напомним, что **векторное (или линейное) пространство** - это непустое множество L , на котором введены 2 операции:

сложение векторов, $\vec{x} + \vec{y} \in L$;

умножение на число, $\alpha \vec{x} \in L$;

удовлетворяющие ряду условий (аксиом).

Элементы пространства L называются “векторами”. Если $\alpha \in \mathbb{R}$, то L — вещественное пространство, если $\alpha \in \mathbb{C}$, то L — комплексное.

Для векторных пространств можно ввести ряд важных понятий:

Размерность — максимальное число линейно независимых элементов.

Базис — максимальная линейно независимая система (или полная линейно независимая система).

Линейная оболочка системы векторов: $S = \{\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^k\}$ — множество всех возможных линейных комбинаций векторов.

$$\text{Разложение вектора } \vec{x} \text{ по базису: } \vec{x} = \sum_{i=1}^m \vec{e}_i x^i = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n] \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{bmatrix} = \beta X.$$

Замена базиса: $\beta' = \beta T$, T — матрица перехода.

Вектор можно разложить как по старому, так и по новому базису: $\vec{x} = \beta X = \beta' X' = \beta T X'$, откуда в силу единственности разложения по базису $X = T X'$, $X' = T^{-1} X$. Т.е. координаты X преобразуются с помощью матрицы, обратной матрице перехода.

Арифметическое векторное пространство \vec{R}^m - это пространство размерности m над полем \mathbb{R} действительных чисел, $\vec{R}^m = \left\{ \begin{bmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{bmatrix} \middle| x^i \in \mathbb{R} \right\}$.

Обозначение R^m без стрелочки мы оставим для аффинного пространства. Стандартный (канонический) базис в \vec{R}^m :

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \vec{e}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ориентация.

Вспомним про правые и левые тройки векторов в трехмерном пространстве и дадим следующее определение.

О. Два базиса называются одинаково ориентированными, если $\beta' = \beta T$ и $\det T > 0$. Стандартный базис считается положительно ориентированным.

Обозначения Эйнштейна.

Договоримся, что если в записи встречаются одинаковые индексы на разных уровнях (внизу и вверх), то по этим индексам производится суммирование, например $x_i y^i = \sum_i x_i y^i$, $g_{ij} x^i y^j = \sum_{i,j} g_{ij} x^i y^j$. Обозначения эти весьма удобны, в особенности при записи громоздких выражений.

§2. Евклидово пространство (напоминание)

Евклидово пространство — линейное пространство с заданным на нем скалярным произведением (симметричной положительно определенной билинейной формой) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

С помощью скалярного произведения могут быть определены длины и углы:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}, \quad \cos \phi = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}| |\vec{y}|}.$$

Матрица Грама системы векторов — матрица G с элементами $g_{ij} = \langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle$.

Если $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ образуют базис, то скалярное произведение $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = g_{ij} x^i y^j$, где x^i и y^j — координаты векторов в этом базисе.

Элементы матрицы Грама в этом случае удовлетворяют условиям:

- 1) $g_{ii} > 0$,
- 2) $g_{ij} = g_{ji}$,
- 3) G положительно определена (удовлетворяет критерию Сильвестра).

Объем параллелоэдра, построенного на векторах $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$: $V = \sqrt{\det G}$.

Эту формулу легко проверить в случае, если $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ образуют ортогональный базис:

$$\det G = \det \begin{bmatrix} \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle \vec{a}_2, \vec{a}_2 \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \langle \vec{a}_n, \vec{a}_n \rangle \end{bmatrix} = |\vec{a}_1|^2 |\vec{a}_2|^2 \dots |\vec{a}_n|^2 = V^2.$$

§3. Обобщенное векторное произведение

О. Обобщенным векторным произведением линейно независимых векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{m-1} \in \bar{R}^m$ назовем вектор $\vec{N} \in \bar{R}^m$, обладающий следующими свойствами:

1. \vec{N} перпендикулярен векторам $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{m-1}$,
2. $|\vec{N}| = \sqrt{\det G}$, где G — матрица Грама системы векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{m-1}$,
3. $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{m-1}, \vec{N}$ образуют базис положительной ориентации.

Обозначение: $\vec{N} = \vec{x}_1 \times \vec{x}_2 \times \dots \times \vec{x}_{m-1}$.

Согласно данному определению, длина вектора $|\vec{N}| = \sqrt{\det G}$, то есть она численно равна объему параллелоэдра, построенного на векторах $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{m-1}$. В частности, при $m = 3$ длина численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{x}_1, \vec{x}_2 , а, следовательно, в этом случае \vec{N} является обычным векторным произведением.

Т.о., вектор \vec{N} является многомерным аналогом векторного произведения в трехмерном пространстве. В случае $m = 2$ указанная конструкция дает вектор, перпендикулярный данному $a = (a^1, a^2)^T$, $\vec{N} = (-a^2, a^1)^T$.

Нахождение координат вектора \vec{N} , являющегося обобщенным векторным произведением для $m = 2, 3, 4$, производится путем подсчета определителей:

$$\begin{vmatrix} a^1 & \vec{e}_1 \\ a^2 & \vec{e}_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & \vec{e}_1 \\ a^2 & b^2 & \vec{e}_2 \\ a^3 & b^3 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 & \vec{e}_1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & \vec{e}_2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & \vec{e}_3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & \vec{e}_4 \end{vmatrix}$$

Как и в трехмерном случае, в \bar{R}^m мы часто будем использовать эту конструкцию для нахождения вектора, перпендикулярного $m - 1$ данному.

§4. Аффинное пространство

Мы уже привыкли работать с векторными пространствами. Однако для построения полноценной геометрии одних векторов недостаточно, и ниже мы определим понятие аффинного пространства, включающего как точки, так и вектора.

О. Аффинным пространством называется тройка $(V, \vec{V}, +)$, где V — множество точек, \vec{V} — векторное пространство, “+” — операция откладывания вектора от точки, причем:

1) $\forall p \in V, \forall \vec{x} \in \vec{V} \exists! q : q = p + \vec{x}$.

2) $\forall p, q \in V \exists! \vec{x} : q - p = \vec{x}$ (существует единственный вектор, соединяющий две данные точки).

3) $\forall p \in V, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{V} : p + (\vec{x} + \vec{y}) = (p + \vec{x}) + \vec{y}$.

Отметим, что знак “+” здесь используется в двух разных смыслах — при сложении векторов и при откладывании вектора от точки. Приведенные выше аксиомы вполне естественны и привычны. Аксиомы 2), 3) равносильны одной аксиоме треугольника $(p - q) + (q - r) = p - r$.

О. Размерностью аффинного пространства $(V, \vec{V}, +)$ называется $\dim \vec{V}$.

О. Репером в аффинном пространстве $(V, \vec{V}, +)$ называется упорядоченный набор $(p, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m)$, где p называется началом координат, а $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m)$ — базис \vec{V} .

В частности, в качестве точки p можно взять начало координат — точку $O(0, \dots, 0)$, а в качестве базиса — стандартный базис $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ пространства \vec{R}^m . Договоримся называть репер $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ стандартным.

О. Координатами точки q в репере $(p, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m)$ называются координаты вектора \overrightarrow{pq} в базисе $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m)$.

О. Аффинное пространство $(V, \vec{V}, +)$, называется евклидовым, если \vec{V} — евклидово пространство.

Аффинное евклидово пространство является метрическим (т.е. в нем задано расстояние между точками). Расстояние между точками p и q определяется как длина вектора: $|\overrightarrow{pq}|$.

Глава 2. Кривые

§1. Определение кривой

Как дать определение кривой?

1 попытка. Определим кривую как график функции, $\Gamma = \{(x, y) | y = f(x), x \in (a, b)\}$. Конечно, Γ – это кривая. Но не всякая линия есть график однозначной функции.

2 попытка. Вспомним аналитическую геометрию и рассмотрим множество точек, удовлетворяющих уравнению $F(x, y) = 0$. Если $F(x, y)$ – многочлен, то соответствующие линии – алгебраические кривые. Многочлены 1-й и 2-й степени – прямая и кривые второго порядка (эллипс, гипербола, парабола).

Однако, функции, имеющие счетное множество нулей, задают лишь набор отдельных точек:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0, \text{ решение } \emptyset;$$

$$x^2 + y^2 = 0, \text{ решение – т. } (0, 0);$$

$$\sin^2 x + \sin^2 y = 0, \text{ решение – точки } (\pi k, \pi n), k, n \in \mathbb{Z}.$$

Попробуем теперь определить линию как множество точек, удовлетворяющих уравнению $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ – гладкая функция 2-х переменных с несчетным множеством нулей, т.е. как прообраз нуля при отображении F :

$$F^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | F(x, y) = 0\}.$$

Но всегда ли мы получим объект, удовлетворяющий нашему интуитивному представлению о кривой?

$$\text{Пример. } F(x, y) = \begin{cases} \exp \frac{1}{1-x^2-y^2}, & x^2 + y^2 > 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

Прообраз нуля – круг $x^2 + y^2 < 1$, см. рис.1. Он, конечно, мало похож на кривую. Более того, произвольное замкнутое множество точек на плоскости можно задать уравнением вида $F(x, y) = 0$. Имеет место

Т. Уитни (б/д). Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ – произвольное замкнутое множество точек на плоскости. Тогда \exists всюду гладкая функция $F(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $M = F^{-1}(0)$.

Мы видим, что отнюдь не каждое уравнение вида $F(x, y) = 0$ задает линию. Для задания линии необходимы дополнительные условия.

Прообраз нуля $F^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | F(x, y) = 0\}$ является линией, если выполнены условия теоремы о неявной функции: $F(x, y)$ – гладкая, множество $M = F^{-1}(0) \neq \emptyset$ и $\text{grad } F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) \neq \bar{0} \quad \forall m_0 \in M$. Тогда для точки $(x_0, y_0) \in M$ существует окрестность, в которой M представляет собой график гладкой функции $y = y(x)$ или $x = x(y)$.

Если мы теперь попробуем дать определение на основе использования неявных функций, оно, очевидно, получится достаточно громоздким.

Учитывая сказанное выше, будем рассматривать **линию как траекторию движущейся точки** (Жордан).

Параметрическое задание:

$$\text{прямая } x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, \text{ или } \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{q}t;$$

$$\text{эллипс } x = a \cos t, y = b \sin t \text{ (окружность при } b = a);$$

$$\text{гипербола } x = a \operatorname{ch} t, y = b \operatorname{sh} t.$$

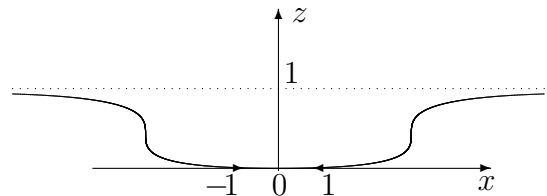


Рис. 1.

Если представлять себе линию как траекторию движущейся точки, то параметр t – это время.

О. Гладкой кривой в аффинном пространстве \mathbb{R}^m называется гладкая вектор-функция $\alpha(t) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Множество $\alpha(I) = \{\alpha(t) | t \in I\}$ – образ кривой $\alpha(t)$ в пространстве \mathbb{R}^m .

Иными словами, кривая – это гладкое отображение интервала $I \subseteq \mathbb{R}$ в множество точек аффинного пространства.

§2. Векторные функции скалярного аргумента

Пусть $\vec{x} : I \rightarrow \vec{R}^m$ – непрерывная векторная функция скалярного аргумента (вектор-функция),

$$\vec{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^m(t))^T,$$

где t – параметр, а $I \subseteq \mathbb{R}$ – открытый интервал, т.е. множество одного из видов (a, b) , $(-\infty, b)$, (a, ∞) , $(-\infty, \infty)$.

О. Пусть $t \in I$ и $t + \Delta t \in I$. Предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}},$$

если он существует, называется производной вектор-функции \vec{x} в точке t , а вектор-функция \vec{x} дифференцируемой в т. t .

О. Вектор-функция $\vec{x}(t) : I \rightarrow \vec{R}^m$ называется гладкой, если все ее координатные функции $x^k(t)$ имеют на I непрерывные производные сколь угодно высокого порядка. (Класс C^∞).

Вектор-функция $\vec{x} : I \rightarrow \vec{R}^m$ принадлежит классу гладкости C^k , если имеет непрерывные производные до k -го порядка включительно.

Рассмотрим скалярное произведение $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

Утверждение 1.

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \frac{d\vec{x}}{dt}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \frac{d\vec{y}}{dt} \rangle$$

Доказательство:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = g_{ik} x^i(t) y^k(t), \quad \frac{d}{dt} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = g_{ik} \left(\frac{dx^i}{dt} y^k + x^i \frac{dy^k}{dt} \right) = \langle \frac{d\vec{x}}{dt}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \frac{d\vec{y}}{dt} \rangle.$$

Утверждение 2.

$$\text{Если } \vec{x}(t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in I, \text{ то } \frac{d}{dt} |\vec{x}(t)| = \frac{d}{dt} \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \frac{2 \langle \vec{x}, \dot{\vec{x}} \rangle}{2 \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}} = \frac{\langle \vec{x}, \dot{\vec{x}} \rangle}{|\vec{x}|}.$$

Утверждение 3.

$$|\vec{x}(t)| = c = \text{const} \Leftrightarrow \forall t \in I : \vec{x}(t) \perp \dot{\vec{x}}(t)$$

$$\begin{aligned} \text{Доказательство: } |\vec{x}(t)| = c &\Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = c^2 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \dot{\vec{x}} \rangle + \langle \dot{\vec{x}}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \\ &\langle \dot{\vec{x}}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x}(t) \perp \dot{\vec{x}}(t). \end{aligned}$$

Упражнения.

1) Доказать, что значения трех вектор-функций

$$\vec{x}_1(t) = (\cos t, \sin t, e^2 t)^T, \quad \vec{x}_2(t) = (-\sin t, \cos t, 2e^2 t)^T, \quad \vec{x}_3(t) = (-\cos t, -\sin t, 4e^2 t)^T,$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ образуют базис в \mathbb{R}^3 .

§3. Регулярность. Длина кривой.

Поскольку разность между точками является вектором, то

$$\dot{\alpha}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}$$

– вектор. Предельное положение секущей прямой, проходящей через точки $\alpha(t + \Delta t)$, $\alpha(t)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ – касательная прямая, см. рис.3. Следовательно, $\dot{\alpha}(t)$ является направляющим вектором касательной в момент времени t и одновременно – вектором (мгновенной) скорости в точке $\alpha(t)$.

Если $\dot{\alpha}(t_0) \neq \vec{0}$, то уравнение касательной в точке t_0 имеет вид

$$p = \alpha(t_0) + u\dot{\alpha}(t_0),$$

где p – произвольная точка касательной, $u \in \mathbb{R}$ – параметр.

Посмотрим теперь, что может произойти в точке, где производная $\dot{\alpha}(t) = \vec{0}$. Это точка остановки – в ней скорость перемещения по кривой $|\dot{\alpha}(t)|$ обращается в ноль.

Пример.

Кривая $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; \alpha(t) = (t^2, t^3)^T$.

Нетрудно заметить, что $x^3 = y^2$ или $y = \pm\sqrt{x^3}$ – это так называемая полукубическая парабола.

$\dot{\alpha}(t) = (2t, 3t^2)^T$; $\dot{\alpha}(0) = (0, 0)^T$, а значит $\alpha(0) = (0, 0)^T$ – точка остановки. В ней (см. рис.3) направление движения меняется на противоположное, это точка возврата. Мы видим, что поведение кривой в точках, где $\dot{\alpha}(0) = \vec{0}$, достаточно сложно и их лучше изучать отдельно.

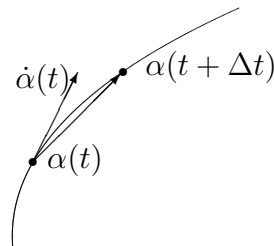


Рис. 2.

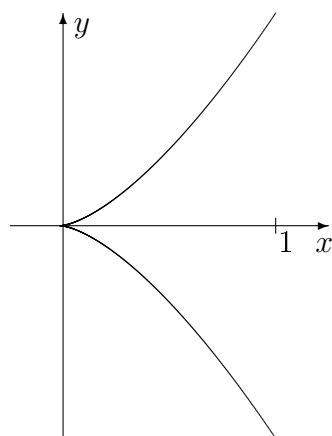


Рис. 3.: Полукубическая парабола.

О. Гладкая кривая $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется регулярной в момент $t \in I$, если $\dot{\alpha}(t) \neq \vec{0}$. Кривая $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется регулярной на интервале I , если она регулярна $\forall t \in I$.

Цитата из книги (С.В.Сизый. Лекции по дифференциальной геометрии): “Регулярные кривые – это храбрые джигиты, которые на интервале I нигде не тормозят” (точнее – нигде не останавливаются).

Определим теперь **длину кривой**. Разобьем временной интервал I на промежутки Δt_k , v_k – скорость на k -м участке. Пройденный путь $l = \lim_{\max|\Delta t_k| \rightarrow 0} \sum_k |v_k| \Delta t_k = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt$.

О. Длиной $l[\alpha]$ кривой $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется интеграл от модуля скорости этой кривой:

$$l[\alpha] \Big|_a^b = \int_a^b |\dot{\alpha}(t)| dt.$$

Упражнения.

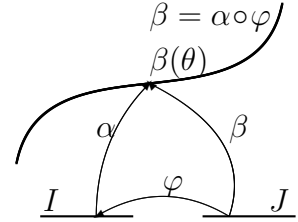
- 1) Найти выражение для длины дуги кривой, заданной:
 - а) в декартовых координатах;
 - б) в полярных координатах.
- 2) Найти длину первого витка спирали Архимеда $\rho = a\varphi$.

3) Найти длину кардиоиды $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

§4 Эквивалентность кривых

Очевидно, что среди различных вектор-функций (кривых) есть много с одинаковыми образами. Их точки проходят этот образ с разными скоростями. Здесь мы попробуем разбить множество всех кривых на классы, имеющие одинаковые образы.

О. Пусть $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ – две гладкие кривые, заданные на соответствующих интервалах. Кривая β получается из кривой α заменой параметра φ , если \exists гладкое отображение φ такое, что:



1. $\varphi : J \rightarrow I$, т.е. φ – сюръекция (образ J есть все I)
2. $\dot{\varphi}(\theta) \neq 0 \quad \forall \theta \in J$
3. $\beta(\theta) = \alpha(\varphi(\theta)) \quad \forall \theta \in J$

Т. Бинарное отношение между кривыми “быть связанной заменой параметра” является отношением эквивалентности (т.е. рефлексивно, симметрично, транзитивно).

Доказательство:

- рефлексивность
очевидна: $\varphi : I \xrightarrow{\text{на}} I$, где $\varphi(\theta) = \theta$ – тождественное отображение, $\dot{\varphi} = 1$
- симметричность
 $\dot{\varphi}(\theta) \neq 0 \Rightarrow \varphi(\theta)$ – монотонна \Rightarrow отображение φ биективно $\Rightarrow \exists \psi = \varphi^{-1}$, производная $\dot{\psi} = \frac{1}{\dot{\varphi}} \neq 0$ и конечна
- транзитивность
 $K \xrightarrow{\phi} J \xrightarrow{\varphi} I$, $\varphi(\phi(\theta))$ – биективное отображение.

О. Кривые, связанные заменой параметра, называются эквивалентными кривыми. Соответственно, классы эквивалентных кривых иногда называют “непараметризованными кривыми”, а конкретные вектор-функции (которые мы называем “кривыми”), “параметризованными кривыми”.

О. Две кривые $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ называются положительно эквивалентными, если они связаны заменой параметра $\varphi : J \rightarrow I$ и $\dot{\varphi}(\theta) > 0 \quad \forall \theta \in J$ (другими словами – если замена сохраняет направление движения).

Пример. Три кривые $\alpha(t), \beta(\theta), \gamma(\tau) : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$, определенные на одном и том же интервале $(0, 1)$:

- 1) $\alpha(t) = (t, t)^T$, $\dot{\alpha}(t) = (1, 1)^T \neq \vec{0} \quad \forall t \in I$,
- 2) $\beta(\theta) = (\theta^3, \theta^3)^T$, $\dot{\beta}(\theta) = (3\theta^2, 3\theta^2)^T \neq \vec{0} \quad \forall \theta \in J$,
- 3) $\gamma(\tau) = (1 - \tau, 1 - \tau)^T$, $\dot{\gamma}(\tau) = (-1, -1)^T \neq \vec{0} \quad \forall \tau \in K$.

Кривые эквивалентны: $t = \varphi(\theta) = \theta^3$, $\varphi : J \rightarrow I$; $t = \psi(\tau) = 1 - \tau$, $\psi : K \rightarrow I$. Первые две кривые положительно эквивалентны: $\dot{\varphi}(\theta) = 3\theta^2 > 0$, $\dot{\psi}(\tau) = -1 < 0$.

Т. Свойство регулярности и длина кривой инвариантны относительно замены параметра.

Доказательство:

- регулярность

Пусть $\alpha(\varphi(\theta)) = \beta(\theta)$, α – регулярна (т.е. $\dot{\alpha} \neq 0$) \Rightarrow
 $\dot{\beta}(\theta) = \alpha'_{\varphi}(\varphi(\theta)) \cdot \dot{\varphi}(\theta) \neq 0 \Rightarrow \beta(\theta)$ – регулярна.

- длина

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\beta : [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\varphi(a_0) = a \quad \varphi(b_0) = b$$

$$\ell[\beta] = \int_{a_0}^{b_0} |\dot{\beta}(\theta)| d\theta = \int_{a_0}^{b_0} \left| \frac{d}{d\theta}(\alpha(\varphi(\theta))) \right| d\theta = \int_{a_0}^{b_0} |\alpha'_{\varphi}(\varphi(\theta))| |\dot{\varphi}(\theta)| d\theta = \int_a^b |\alpha'_{\varphi}(t)| dt = \ell[\alpha]$$

§5 Кривые единичной скорости

Итак, мы установили, что множество всех кривых разбивается на классы положительно эквивалентных кривых. Каждый представитель класса имеет один и тот же образ. Теперь мы выберем из каждого класса по одному представителю, а именно, кривую, у которой точка равномерно движется по образу кривой.

О. Кривая $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется кривой единичной скорости, если $|\dot{\alpha}| \equiv 1$ на I .

Наглядный образ отображения, отвечающего кривой единичной скорости: вкладываем гибкий (но нерастяжимый!) шнурок в \mathbb{R}^m .

Свойства кривых единичной скорости

1. регулярность $|\dot{\alpha}| \equiv 1 \neq 0$
2. $\ddot{\alpha} \perp \dot{\alpha}$ т.к. $|\dot{\alpha}| = \text{const}$ (а производная вектора постоянной длины ему \perp)
3. $\ell[\alpha] = \int_a^{a+s} |\dot{\alpha}| dt = \int_a^{a+s} 1 dt = t|_a^{a+s} = s$, где s – длина дуги.

Т. Всякая регулярная кривая положительно эквивалентна некоторой кривой единичной скорости.

Доказательство: Пусть $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ регулярна и $t_0 \in I$.

Длина дуги $s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\alpha}(\theta)| d\theta$ – некоторая функция от t , $\dot{s} = |\dot{\alpha}(t)| > 0 \Rightarrow$

отображение $s(t)$ взаимно однозначно $\Rightarrow \exists s^{-1} = \varphi(s) : J \rightarrow I$, $\varphi(s(t)) = t$, $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} \dot{s} = 1$. Рассмотрим замену параметра $t = \varphi(s)$ и новую кривую $\beta(s) = \alpha(\varphi(s))$, у которой параметр – длина дуги s . $\forall s \in J \quad \dot{\beta}(s) = \frac{d\varphi}{ds} \dot{\alpha} = \frac{1}{\dot{s}} = \frac{1}{|\dot{\alpha}(t)|} > 0$, т.е. $\beta(s) = \alpha(\varphi(s))$ – положительно эквивалентные кривые. Далее, $|\dot{\beta}(s)| = |\alpha'_{\varphi}(\varphi(s)) \dot{\varphi}(s)| = |\dot{\alpha}(t) \frac{1}{|\dot{\alpha}(t)|}| = 1$, т.е. $\beta(s)$ – кривая единичной скорости.

Итак, чтобы из регулярной кривой $\alpha(t)$ получить кривую единичной скорости, надо заменить ее параметр на длину дуги $s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\alpha}(\theta)| d\theta$.

О. Кривая $\beta(s)$ называется натурально параметризованной, если параметром является длина дуги кривой, отсчитанная от некоторой точки этой кривой.

§6 Касание плоских кривых

Выпишем здесь уравнения касательных при различном задании линии.

1. Линия – образ гладкой кривой $\alpha(t) = (x(t), y(t))^T$.
Уравнение: $p(u) = \alpha(t_0) + u\dot{\alpha}(t_0)$ или в развернутой записи $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$,
где $\dot{\alpha}(t_0)$ – направляющий вектор касательной.
2. Линия – график гладкой функции $y = f(x)$, т.е. образ кривой $\alpha(t) = (t, f(t))^T$.
Уравнение: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$ или, после исключения параметра u ,
 $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$.
3. Линия – прообраз нуля функции $F(x, y)$, $F(x, y)$ – гладкая и $\text{grad } F \neq \bar{0}$ в точках $F^{-1}(0)$.
Дифференцируем $F(x(t), y(t)) \equiv 0$, получаем $F'_x \cdot \dot{x} + F'_y \cdot \dot{y} = 0$ или, что тоже самое,
 $\langle \text{grad } F, \dot{\alpha}(t) \rangle = 0$, т.е. направляющий вектор касательной перпендикулярен градиенту.
Уравнение: $F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$.

Говорят, что две кривые касаются в некоторой точке, если они имеют в этой точке общую касательную прямую. Очевидно, касание это может быть различным – какие-то кривые долго идут “рядом”, а какие-то сразу “разбегаются” в разные стороны.

О. Кривая $\alpha(t)$ в т. $t_0 \in I$ имеет с линией $F^{-1}(0)$ касание порядка k , если для функции $f(t) = F(\alpha(t))$ выполнены условия:

$$f(t_0) = 0, f'(t_0) = 0, \dots, f^{(k)}(t_0) = 0, f^{(k+1)}(t_0) \neq 0.$$

Функцию $f(t)$ можно трактовать как меру отличия указанных кривых (при $f(t) = F(\alpha(t)) = 0$ точка $\alpha(t)$ лежит на кривой $F(x, y) = 0$). При касании порядка k эта мера отличия есть бесконечно малая величина k -го порядка, $f(t) = o(t - t_0)^k$.

Теперь мы можем дать определения соприкасающейся окружности и кривизны кривой.

О. Окружность, имеющая в некоторой точке $\alpha(t_0)$ кривой $\alpha(t)$ порядок касания не ниже второго, называется соприкасающейся. Радиус окружности R называется радиусом кривизны в точке $\alpha(t_0)$, а центр окружности – центром кривизны в точке $\alpha(t_0)$.

Кривизна $= 1/R$.

§7 Репер Френе плоской кривой

Рассмотрим плоскую регулярную кривую $\alpha(t)$. В каждой точке, определяемой значением параметра t , у нее есть единичный вектор касательной $\vec{\tau}(t)$ и единичный вектор нормали $\vec{\nu}(t)$ (обозначения – τ от латинского tangential (касательный) и ν от normal). Можно представить себе, как при изменении параметра t пара $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$, образующая ортонормированный базис, “ползет” по кривой (отсюда часто употребляемый термин “подвижный репер вдоль кривой”).

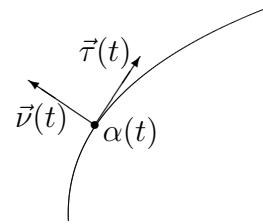


Рис. 5.: Репер Френе

О. Репер $(\alpha(t); \vec{\tau}(t), \vec{\nu}(t))$ называется репером Френе плоской регулярной кривой $\alpha(t)$: $I \rightarrow \mathbb{R}^2$, если $\forall t \in I$:

- 1) $\vec{\tau}(t)$ сонаправлен с вектором скорости $\dot{\alpha}(t)$,
- 2) пара $(\vec{\tau}(t), \vec{\nu}(t))$ образует ортонормированный базис положительной ориентации.

Пара $(\vec{\tau}(t), \vec{\nu}(t))$ без начальной точки – базис Френе, причем, согласно данному определению $|\vec{\tau}(t)| = |\vec{\nu}(t)| = 1, \langle \vec{\tau}(t), \vec{\nu}(t) \rangle = 0$.

Для кривой единичной скорости $\alpha(s)$ (s - длина дуги) имеем: $\vec{\tau}(s) = \dot{\alpha}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))^T$, $\vec{\nu}(s) = (-\dot{y}(s), \dot{x}(s))^T$, причем пара $(\vec{\tau}(t), \vec{\nu}(t))$ положительно ориентирована: $\begin{vmatrix} \dot{x} & -\dot{y} \\ \dot{y} & \dot{x} \end{vmatrix} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = |\dot{\alpha}|^2 = 1 > 0$.

Т. Френе-Серре. Пусть $\alpha(s) : I \rightarrow R^2$ - кривая единичной скорости. Тогда существует гладкая скалярная функция $k(s) : I \rightarrow R$ такая, что $\forall s \in I$:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(s) = \vec{\tau}(s) \\ \dot{\vec{\tau}}(s) = k(s)\vec{\nu}(s) \\ \dot{\vec{\nu}}(s) = -k(s)\vec{\tau}(s) \end{cases}$$

Эти уравнения называются уравнениями Френе¹. Функция $k(s)$ называется кривизной кривой $\alpha(s)$.

Доказательство:

1) $|\vec{\tau}| \equiv 1 \Rightarrow \vec{\tau} \perp \dot{\vec{\tau}}$ (как производная вектора постоянной длины) $\Rightarrow \dot{\vec{\tau}} \parallel \vec{\nu} \Rightarrow$ и \exists скалярная функция $k(s)$ такая, что $\dot{\vec{\tau}} = k(s)\vec{\nu}$. Домножим последнее равенство на $\nu(s)$:

$\langle \dot{\vec{\tau}}, \vec{\nu} \rangle = k(s) \langle \vec{\nu}, \vec{\nu} \rangle = k(s) \Rightarrow k(s)$ — гладкая функция как скалярное произведение гладких функций.

2) аналогично, $|\vec{\nu}| \equiv 1 \Rightarrow \dot{\vec{\nu}} \perp \vec{\nu}, \dot{\vec{\nu}} = m(s)\vec{\tau}(s)$

3) $\langle \dot{\vec{\tau}}, \vec{\nu} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{\vec{\tau}}, \vec{\nu} \rangle + \langle \vec{\tau}, \dot{\vec{\nu}} \rangle = 0$, подставляя из пункта 1) и 2) получаем: $\langle k(s)\vec{\nu}, \vec{\nu} \rangle + \langle \vec{\tau}, m(s)\vec{\tau} \rangle = 0, k(s) + m(s) = 0 \Rightarrow m(s) = -k(s)$.

Матричная форма уравнений Френе:

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{\tau}} & \dot{\vec{\nu}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\tau} & \vec{\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{bmatrix}$$

Уравнения Френе — это разложение скоростей (производных векторов базиса Френе) по базису Френе.

Т.к $\dot{\vec{\tau}}(s) = k(s)\vec{\nu}(s)$, то $|\dot{\vec{\tau}}| = |k(s)|$, т.е. $k(s)$ — величина скорости вращения касательного вектора. Чем больше кривизна, тем быстрее поворачиваются ее касательный и нормальный векторы (они жестко связаны) при равномерном движении вдоль кривой.

Сам вектор $\dot{\vec{\tau}} = \ddot{\alpha}$ называют вектором кривизны кривой единичной скорости — его длина равна кривизне, а направление совпадает с направлением нормали $\vec{\nu}$.

Рассмотрим теперь **линии постоянной кривизны**.

Т. Пусть $\alpha(s) : I \rightarrow R^2$ — кривая единичной скорости, $k(s)$ — ее кривизна, $M = \alpha(I)$ — образ кривой на плоскости. Тогда:

1) $k = 0 \Leftrightarrow M$ — прямая или ее часть.

2) $k = \text{const} \neq 0 \Leftrightarrow M$ — окружность радиуса $\frac{1}{|k|}$ или ее часть.

Доказательство:

1) $k = 0 \Rightarrow \ddot{\alpha} = \dot{\vec{\tau}} = k\nu = \vec{0}$. Интегрируем: $\int_{s_0}^s \ddot{\alpha} ds = \dot{\alpha}(s) - \dot{\alpha}(s_0) = \vec{0} \Rightarrow \dot{\alpha} = \text{const}$.

$\int_{s_0}^s \dot{\alpha} ds = \dot{\alpha}(s_0) \int_{s_0}^s ds = \dot{\alpha}(s_0)(s - s_0) = \alpha(s) - \alpha(s_0)$. Мы получили

¹ Уравнения Френе независимо получили французские математики Жан Фредерик Френе (1816-1900) в 1847г (опубликованы в 1852г.) и Жозеф Альфред Серре (1819-1885) в 1851г. Ранее, в 1831г., эквивалентные им соотношения для скалярных произведений (вида $\langle \dot{\vec{\tau}}, \vec{\nu} \rangle = -\langle \dot{\vec{\nu}}, \vec{\tau} \rangle = k$) были для трехмерных кривых получены Иоганном Бартельсом (1769-1836) во время его работы в Казанском университете.

$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \dot{\alpha}(s_0)(s - s_0)$ — уравнение прямой.

Обратное очевидно (два раза дифференцируем уравнение прямой, $\ddot{\alpha} = 0 \Rightarrow k = 0$).

2) $k = \text{const} \neq 0$. Рассмотрим точку $p(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k}\vec{\nu}(s)$.

$$\dot{p}(s) = \frac{d}{ds}(\alpha(s) + \frac{1}{k}\vec{\nu}(s)) = \dot{\alpha}(s) + \frac{1}{k}\dot{\vec{\nu}}(s) = \vec{\tau}(s) + \frac{1}{k}(-k\vec{\tau}(s)) = 0$$

Т.е. точка $p(s) = \text{const} = p_0$ — неподвижна $\Rightarrow \alpha(s) - p_0 = -\frac{1}{k}\vec{\nu}(s)$

$|\alpha(s) - p_0| = \frac{1}{|k|}$, т.к. $|\vec{\nu}(s)| = 1$. Т.е. все точки кривой находятся на расстоянии $1/|k|$ от точки $p_0 \Rightarrow \alpha(s)$ — окружность радиуса $R = \frac{1}{k}$.

Докажем обратное: Имеем $\alpha(s) = p_0 - \vec{\nu}(s)R$ — уравнение окружности радиуса R .

$$\dot{\alpha}(s) = -R\dot{\vec{\nu}}(s) = \vec{\tau} \Rightarrow \dot{\vec{\nu}}(s) = -\frac{1}{R}\vec{\tau}(s) \Rightarrow \frac{1}{R} = k.$$

Радиус соприкасающейся окружности

$$R = |\alpha(s_0) - p(s)| = \frac{1}{|k(s_0)|}$$

Центр соприкасающейся окружности — точка

$$p(s) = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}\vec{\nu}(s_0)$$

называется центром кривизны кривой $\alpha(s)$ в момент s_0 .

Уравнения Френе произвольной плоской кривой.

Выше мы рассматривали кривые единичной скорости, теперь перейдем к произвольным регулярным кривым.

Единичный касательный вектор кривой $\alpha(t) : I \rightarrow R^2$ $\tau(t) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|}$.

Пусть $\alpha(t) = \beta(s(t))$, где $\beta(s)$ — кривая единичной скорости.

Т.к. $s(t) = \int_{s_0}^s |\dot{\alpha}(t)| dt$, то $\dot{s}(t) = |\dot{\alpha}(t)|$. Касательный вектор $\vec{\tau}_\alpha(t) = \vec{\tau}_\beta(s(t))$, $\dot{\vec{\tau}}_\alpha(t) = \dot{\vec{\tau}}_\beta(s(t))\dot{s}(t) = \dot{\vec{\tau}}_\beta(s)|\dot{\alpha}(t)|$. Аналогично находим $\dot{\vec{\nu}}$.

Используя уравнения Френе для кривой единичной скорости для $\dot{\vec{\tau}}_\beta(s), \dot{\vec{\nu}}_\beta(s)$, получим:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = |\dot{\alpha}(t)|\vec{\tau}(t) \\ \dot{\vec{\tau}}(t) = |\dot{\alpha}(t)|k(t)\vec{\nu}(t) \\ \dot{\vec{\nu}}(t) = |\dot{\alpha}(t)|(-k(t))\vec{\tau}(t) \end{cases}$$

Нахождение кривизны плоской кривой.

Кривизна плоской кривой дается формулой

$$k = \frac{\det[\dot{\alpha} \ddot{\alpha}]}{|\dot{\alpha}|^3}.$$

Для ее вывода найдем определитель $\det[\dot{\alpha} \ddot{\alpha}]$. Пусть $\alpha(t) = \beta(s(t))$, где $\beta(s)$ — кривая единичной скорости. Считаем, используя соотношение $\dot{s}(t) = |\dot{\alpha}(t)|$ и уравнения Френе:

$$\dot{\alpha} = \beta'_s(s(t))\dot{s}(t) = \vec{\tau}(s(t))|\dot{\alpha}(t)|,$$

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{d}{dt}(\vec{\tau}(s(t))|\dot{\alpha}(t)|) = \vec{\tau}'_s(s(t))\dot{s}|\dot{\alpha}(t)| + \vec{\tau}(s(t))\frac{d}{dt}|\dot{\alpha}(t)| = \vec{\nu}(s(t))k|\dot{\alpha}(t)|^2 + \vec{\tau}(s(t))\frac{d}{dt}|\dot{\alpha}(t)|,$$

Мы получили разложение вектора $\ddot{\alpha}$ по базису Френе – на касательную и нормальную составляющие. Далее,

$$\det[\dot{\alpha} \ddot{\alpha}] = \det[|\dot{\alpha}|\vec{\tau}, |\dot{\alpha}|^2 k \vec{\nu} + \frac{d}{dt}|\dot{\alpha}(t)|\vec{\tau}] = \det[|\dot{\alpha}|\vec{\tau}, |\dot{\alpha}|^2 k \vec{\nu}] = |\dot{\alpha}|^3 k \det[\vec{\tau} \vec{\nu}] = |\dot{\alpha}|^3 k,$$

откуда и следует приведенная выше формула. Отметим, что вторая формула представляет собой разложение $\ddot{\alpha}(t)$ на касательную и нормальную составляющие.

Пример. Найти кривизну кривой $\alpha(t) = (t, t^3)^T$.

Эта кривая – кубическая парабола, $\det[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}] = 6t$, кривизна $k = \frac{6t}{(1+9t^4)^{3/2}}$ меняет знак в точке перегиба при переходе через $t = 0$. Если знаки кривизны в двух точках различаются, то в этих точках соприкасающиеся окружности (и соответственно центры кривизны) лежат по разные стороны кривой.

Натуральные уравнения плоской кривой.

По функции кривизны $k(s)$ и начальным условиям $\alpha(s_0) = (x_0, y_0)$ и θ_0 (углу между осью Ox и вектором $\vec{\tau} = \tau(s_0)$ кривая единичной скорости восстанавливается однозначно.

Имеем $\vec{\tau} = (\dot{x}(s), \dot{y}(s)) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ – вектор единичной длины. Продифференцируем $\dot{\vec{\tau}} = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))\dot{\theta}(s) = \vec{\nu}(s)\dot{\theta}(s)$ и сравним с уравнением Френе $\dot{\vec{\tau}} = k(s)\vec{\nu}$, откуда

$$\dot{\theta}(s) = k(s).$$

Интегрируем:

$$\begin{aligned}\theta(s) &= \theta(s_0) + \int_{s_0}^s k(s) ds, \\ x(s) &= x(s_0) + \int_{s_0}^s \cos \theta(s) ds, \\ y(s) &= y(s_0) + \int_{s_0}^s \sin \theta(s) ds.\end{aligned}\tag{1}$$

О. Уравнение $k = k(s)$ или равносильные ему параметрические уравнения $k = k(t)$, $s = s(t)$ называются натуральными уравнениями кривой $\alpha(s)$.

Натуральные уравнения определяют кривую с точностью до положения на плоскости (т.е. изометрии – поворотов и сдвигов).

Эволюта и эвольвента.

Рассмотрим точку $P = \alpha(t_0) + \frac{1}{k}\nu(t_0)$. Она является центром кривизны кривой $\alpha(t)$ в т. $\alpha(t_0)$.

О. Эволюта $\beta(t)$ кривой $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ – множество всех точек, которые являются центрами кривизны кривой $\alpha(t)$ (то есть множество центров всех ее соприкасающихся окружностей).

Уравнение эволюты: $\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}\nu(t)$.

О. Кривая $\alpha(t)$ называется эвольвентой для кривой $\beta(t)$, если $\beta(t)$ – эволюта кривой $\alpha(t)$.

Упражнения.

- Найти выражения для вычисления кривизны при задании кривой:
 - в декартовых координатах, т.е. уравнением $y = y(x)$ [$k = \frac{y''}{(1+y')^2}$].
 - в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$ [$k = \frac{-\ddot{\rho}\rho + 2\dot{\rho}^2 + \rho^2}{(\dot{\rho}^2 + \rho^2)^{3/2}}$].
- Показать, что в каждой точке лемнискаты $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ кривизна пропорциональна радиус-вектору этой точки [$k = 3\rho/a^2$].
- Записать натуральное уравнение окружности радиуса 5.

§8 Локальное строение плоских кривых (особые точки)

Наша задача здесь – описать, как ведет себя кривая в малой окрестности некоторой своей точки, и, в особенности, в окрестности своих особых точек.

Точки кривой, заданной параметрически:

Регулярная точка: $\dot{\alpha} \neq 0$.

Бирегулярная точка: $\ddot{\alpha} \nparallel \dot{\alpha}$.

Точка распрямления: $\dot{\alpha} \neq 0$, но $\ddot{\alpha} \parallel \dot{\alpha}$.

Особая точка: $\dot{\alpha} = 0$.

Можно наглядно представить, как точка $\alpha(t)$ со скоростью $|\dot{\alpha}(t)|$ движется по кривой, то медленнее, то быстрее, останавливаясь в особых точках. В особых точках направление движения может остаться прежним, а может и измениться на противоположное (так называемая точка возврата). Там, где кривая регулярна, направляющий вектор касательной – это $\dot{\alpha}(t)$. А что будет в особой точке – какая там касательная, когда меняется или не меняется направление?

Запишем формулу Тейлора для вектор-функции $\alpha(t)$:

$$\alpha(t) - \alpha(t_0) = \dot{\alpha}(t_0) \frac{t - t_0}{1!} + \ddot{\alpha}(t_0) \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \dots + \alpha^{(n)}(t_0) \frac{(t - t_0)^n}{n!} + R_n.$$

Здесь мы перенесли $\alpha(t_0)$ налево, чтобы слева стоял направляющий вектор секущей, проходящей через точки $\alpha(t)$, $\alpha(t_0)$, см. рис. 6. Предельное положение секущей прямой, проходящей через точки $\alpha(t)$, $\alpha(t_0)$ при $t \rightarrow t_0$ – касательная прямая.

О. Определим тип точки кривой $\alpha(t)$ как пару чисел (p, q) , где p – порядок первой отличной от нуля производной $\alpha^{(p)} \neq 0$, а q – порядок производной, следующей за p -й, не коллинеарной $\alpha^{(p)}$.

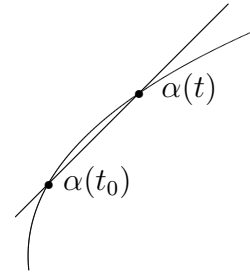


Рис. 6.

Точка	Тип
Особая: $\dot{\alpha}(t_0) = 0$	(p, q) , $p > 1$
Регулярная: $\dot{\alpha}(t_0) \neq 0$	$(1, q)$, $q > 1$
Бирегулярная: $\dot{\alpha} \nparallel \ddot{\alpha}$ (кривизна $k \neq 0$)	$(1, 2)$
Распрямления: $\dot{\alpha}(t_0) \neq 0$, $\dot{\alpha} \parallel \ddot{\alpha}$ (кривизна $k = 0$)	$(1, q)$, $q > 2$
Для точки типа (p, q) обозначим	

$$\alpha^{(p)}(t_0) = \bar{a}, \quad \alpha^{(q)}(t_0) = \bar{b}$$

Разложим все векторы-производные $\alpha^{(i)}(t_0)$ в формуле Тейлора по базису \bar{a}, \bar{b} и приведем подобные, $\alpha(t) - \alpha(t_0) = ((t - t_0)^p/p! + \xi_1(t - t_0)^{p+1}/(p+1)! + \dots)\bar{a} + ((t - t_0)^q/q! + \dots)\bar{b}$. Отбрасывая в каждой скобке бесконечно малые более высокого порядка, получим

$$\alpha(t) - \alpha(t_0) \approx \bar{a} \frac{(t - t_0)^p}{p!} + \bar{b} \frac{(t - t_0)^q}{q!}.$$

Направляющий вектор секущей, проходящей через точки $\alpha(t)$, $\alpha(t_0)$, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка равен \bar{a} , а значит \bar{a} – касательный вектор в точке $\alpha(t_0)$.

Знаки перед векторами \bar{a} и \bar{b} (определяющие, в какой четверти координатной плоскости $(\alpha(t_0), \bar{a}, \bar{b})$ находится точка $\alpha(t)$, определяются в свою очередь знаками $(t - t_0)^p$ и $(t - t_0)^q$,

При положительном $t - t_0$ оба знака положительны и точка $\alpha(t)$ находится в первой четверти. Для отрицательных $t - t_0$ составим таблицу.

p	q	знак перед \bar{a}	знак перед \bar{b}	четв.	тип точки
неч	неч	-	-	3	перегиба
неч	чет	-	+	2	изгиба
чет	неч	+	-	4	возврата 1-го рода
чет	чет	+	+	1	возврата 2-го рода (“клюв”)

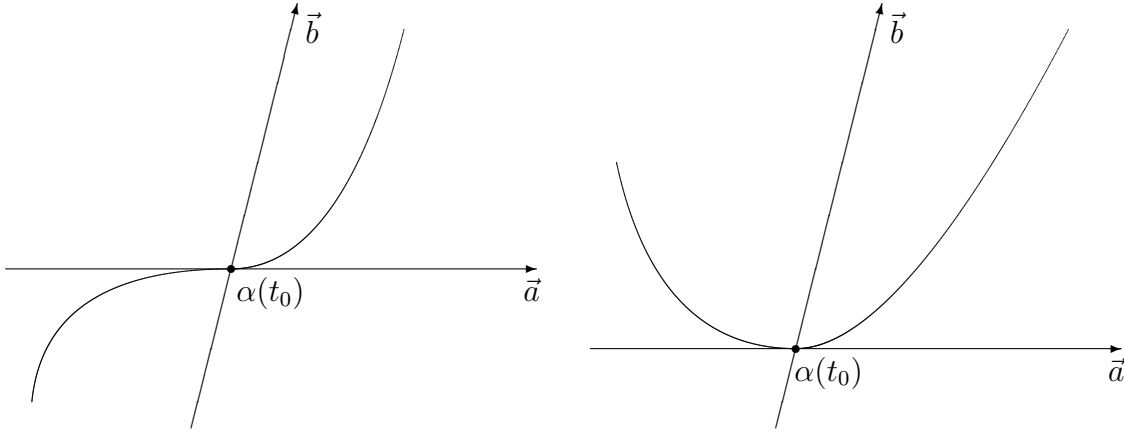


Рис. 7.

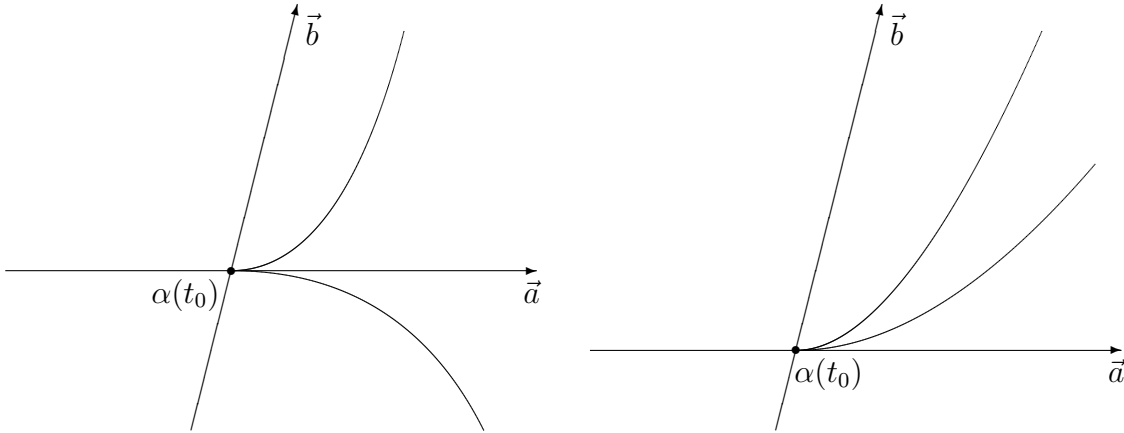


Рис. 8.

Для точки возврата 1-го рода ветви кривой располагаются по разные стороны от касательной, для точки возврата 2-го рода – по одну.

Особые точки кривой, заданной уравнением $F(x, y) = 0$.

Регулярная точка: $F(x_0, y_0) = 0$ (точка лежит на кривой) и по крайней мере одна из производных $F'_x(x_0, y_0)$, $F'_y(x_0, y_0)$ отлична от нуля.

Дифференциал $dF(x, y) = F'_x dx + F'_y dy$. Найдем в точке (x_0, y_0) направление, где приращение dF обращается в 0: $dF = F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$. Это уравнение прямой (с нормалью (F'_x, F'_y) и направляющим вектором $(-F'_y, F'_x)$), являющейся касательной к нашей кривой в точке (x_0, y_0) .

Особая точка: $F(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0) = F'_y(x_0, y_0) = 0$.

Второй дифференциал $d^2 F(x, y) = F''_{xx}(x - x_0)^2 + 2F''_{xy}(x - x_0)(y - y_0) + F''_{yy}(y - y_0)^2$ (если не

все вторые частные производные равны нулю) представляет собой квадратичную форму с определителем $\Delta = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}$. Будем искать в т. (x_0, y_0) направления, по которым d^2F обращается в 0.

Если $\Delta > 0$ (квадратичная форма положительно или отрицательно определена), то $d^2F(x_0, y_0)$ обращается в ноль только в точке (x_0, y_0) – изолированной особой точке.

Если $\Delta < 0$, то форма не является знакоопределенной и в некотором базисе она может быть приведена к каноническому виду, $d^2F = a^2(\tilde{x} - \tilde{x}_0)^2 - b^2(\tilde{y} - \tilde{y}_0)^2 = 0$. Это уравнения пары пересекающихся прямых (касательных) в точке самопересечения кривой (узле).

Если $\Delta = 0$, и хотя бы одна из производных отлична от нуля, то канонический вид $a^2(\tilde{x} - \tilde{x}_0)^2 = 0$, т. (x_0, y_0) – точка возврата (1 или 2 рода) или точка самоприкосновения (касательная $\tilde{x} = \tilde{x}_0$), или узел.

§9 Некоторые плоские кривые, или кривые вокруг нас

Алгебраические кривые второго порядка (они же конические сечения) – это хорошо знакомые нам эллипс, гипербола и парабола. Они задаются уравнением $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ – многочлен второго порядка.

Алгебраические кривые третьего порядка (кубики) задаются уравнением $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ – многочлен третьего порядка. Первую классификацию кубик дал Ньютон в 1704 году, полную классификацию дал немецкий математик и физик Юлиус Плюккер (1801-1868).

Изучение кубик долгое время считалось примером чистой математики, не имеющей никакого применения. Однако, в последние 20 лет XX века были придуманы криптографические алгоритмы, использующие глубокие свойства кубик, которые сегодня используются (в частности) при банковском шифровании, что дало толчок изучению свойств кубик (так называемая эллиптическая криптография). Некоторые кубические кривые представлены на рис. ???

Циклоида $\alpha(t) = (rt - r \sin t, r - r \cos t)^T$.

Определяется кинематически как траектория фиксированной точки окружности (колеса) радиуса r , катящейся без скольжения по прямой (дороге). Циклоида – периодическая функция по оси абсцисс, с периодом $2\pi r$. За границы периода удобно принять особые точки (точки возврата) вида $t = 2\pi k$, где k – целое число. Среди трансцендентных кривых, то есть кривых, уравнение которых не может быть записано в виде многочлена от x, y , циклоида – первая из исследованных. Название «циклоида» предложил Галилей. На циклоиде активно оттачивались методы появившегося математического анализа. Эволютой циклоиды также является циклоида.

«Перевёрнутая» циклоида является кривой скорейшего спуска (брахистохроной). Более того, она имеет также свойство таутохронности: тяжёлое тело, помещённое в любую точку арки циклоиды, достигает горизонтали за одно и то же время. Задача о брахистохроне была поставлена 1696 году Иоганном Бернулли. На его статью откликнулись Исаак Ньютон, Яков Бернулли, Г.В.Лейбниц, Г.Ф.Лопиталь, Э.В.Чирнхаус. Все они, как и сам Иоганн Бернулли, решили задачу разными способами. Метод решения, полученного в 1697 г. Исааком Ньютоном, лег в основу вариационного исчисления.

Период колебаний материальной точки, скользящей по перевёрнутой циклоиде, не зависит от амплитуды. Этот факт был использован Гюйгенсом (1629-1695) для создания точных механических часов. В таких часах в то время очень нуждались мореплаватели для определения долготы.

Цепная линия $y = a \operatorname{ch}(\frac{x}{a})$. форму цепной линии принимает гибкая однородная нерастяжимая тяжелая нить или цепь (отсюда название) с закрепленными концами в однородном гравитационном поле.

Пока углы подъема малы, цепная линия очень близка к параболе, что отмечал еще Галилей (1638г). Вскоре, однако, было показано, что линия провисания цепи параболой не является. Уравнение цепной линии было практически одновременно (в 1691г) получено Лейбницем, Гюйгенсом и Иоганном Бернулли.

Перевернутая цепная линия — идеальная форма для арок. Однородная арка в форме перевернутой цепной линии испытывает только деформации сжатия, но не излома.

Трактриса $\alpha(t) = (\pm a \cdot (\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t), a \cdot \sin t)^T$.

Трактрису (линию влечения — от лат. trahere — тащить) описывает предмет (изначально лежащий на оси Oy на расстоянии a от начала координат), волочащийся на верёвке длины a за точкой, движущейся по оси абсцисс (трактором, выезжающим из начала координат). Для трактрисы длина отрезка касательной от точки касания до точки пересечения с фиксированной прямой (осью Ox), по которой едет трактор, является постоянной величиной — длиной веревки a . Эволюта трактрисы — цепная линия. Открытие и первое исследование трактрисы (1670 год) принадлежит французскому инженеру, врачу и любителю математики Клоду Перро, брату знаменитого сказочника. Новая кривая заинтересовала математиков, её свойства выясняли Ньютон (1676), Гюйгенс (1692) и Лейбниц (1693).

Клотоида (она же спираль Корню или спираль Эйлера).

Кривая, у которой кривизна k пропорциональна длине дуги s , натуральное уравнение $k = as$.

Для вывода параметрического уравнения воспользуемся уравнениями (1). Полагая, что $\theta(0) = 0$, т.е. касательная в начале координат параллельна оси Ox , получим $\theta(s) = \int_0^s k(s)ds = as^2/2$. Далее,

$$x(s) = \int_0^s \cos \frac{as^2}{2} ds, \quad y(s) = \int_0^s \sin \frac{as^2}{2} ds.$$

Эти интегралы не выражаются через элементарные функции. Если положить $a = 2$, то получим так называемые интегралы Френеля $x(s) = C(s), y(s) = S(s)$.

Клотоида используется как переходная дуга в дорожном строительстве. Когда участок дороги имеет форму клотоиды, руль поворачивается равномерно. Такая форма дороги позволяет преодолевать поворот без существенного снижения скорости. Так что, когда мы едем по автомобильным и железным дорогам, мы двигаемся, как правило, по прямой — клотоиде — окружности — клотоиде — прямой. Таким образом, центробежная сила (обратно пропорциональная радиусу кривизны) изменяется постепенно, и мы можем поворачивать руль постепенно вместо того, чтобы делать это резко.

По-видимому, первым изучать клотоиду начал швейцарский математик Якоб Бернулли в 1694 году, в контексте задачи теории упругости. Эта задача была решена в 1744 году математиком и физиком Леонардом Эйлером, который дал характеристику кривой. Примерно в 1818 г. французский физик Огюстен Жан Френель переоткрыл клотоиду, изучая дифракцию света, и с помощью интегралов получил параметризацию этой кривой, эквивалентную параметризации Эйлера. В 1874 году французский физик Мари Альфред Корню использовал данное выражение, чтобы точно построить кривую. А позже, в 1890 году, американский инженер Артур Талбот еще раз переоткрыл клотоиду в поисках кривой перехода для железных дорог.

§10 Кривые Безье

Кривая Безье² n -го порядка — это параметрическая кривая, задаваемая выражением

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i \mathbf{b}_{i,n}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2)$$

²Кривые Безье были разработаны в 60-х годах XX века независимо друг от друга Пьером Безье (Pierre Bezier) из автомобилестроительной компании «Рено» и Полем де Кастельжо (Paul de Faget de Casteljau)

где \mathbf{P}_i — набор из $n + 1$ точки, а $\mathbf{b}_{i,n}(t)$ — базисные функции кривой Безье, называемые полиномами Бернштейна³,

$$\mathbf{b}_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i},$$

где $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ — биномиальный коэффициент (число сочетаний из n по i), n — степень полинома, i — порядковый номер опорной вершины.

Иными словами, кривая Безье n -го порядка — это параметрическая кривая n -го порядка, записанная в специальном базисе. Степень кривой на единицу меньше числа опорных точек \mathbf{P}_i .

Форма кривой, очевидно, полностью определяется опорными точками. Опорные точки \mathbf{P}_0 и \mathbf{P}_n задают начало и конец кривой. Действительно, при $t = 0$ и $t = 1$ сумма (2) содержит только одно (соответственно, первое или последнее) слагаемое, $\mathbf{B}(0) = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{B}(1) = \mathbf{P}_n$.

При $n = 1$ кривая

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1, \quad t \in [0, 1],$$

представляет собой отрезок прямой линии, соединяющий точки \mathbf{P}_0 и \mathbf{P}_1 .

Квадратичная кривая Безье ($n = 2$)

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^2\mathbf{P}_0 + 2t(1-t)\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2, \quad t \in [0, 1],$$

задается 3 опорными точками и представляет собой отрезок параболы.

Производные $\mathbf{B}'(0) = 2(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$, $\mathbf{B}'(1) = 2(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$, соответственно направляющие вектора касательных в точках \mathbf{P}_0 и \mathbf{P}_2 — это вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$. Следовательно, точка \mathbf{P}_1 — это точка пересечения касательных к кривой в точках \mathbf{P}_0 и \mathbf{P}_2 , см. рис. 9.

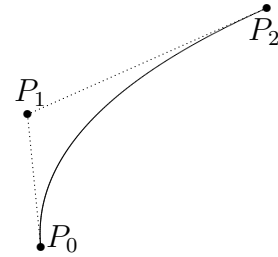


Рис. 9.

Кубическая кривая Безье ($n = 3$) описывается следующим уравнением:

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3, \quad t \in [0, 1].$$

На рис. 10 изображены две кубические кривые Безье, отличающиеся порядком промежуточных опорных точек. Касательные в начальной и конечной точках кривой задаются векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$. В отличие от квадратичной кривой, кубическая может иметь точку возврата 1-го рода или точку самопересечения.

Нетрудно записать уравнение кривой Безье в стандартном базисе $1, t, t^2, \dots$. Например, при $n = 3$ имеем

$$\mathbf{B}(t) = [t^3 \ t^2 \ t \ 1] M_B [\mathbf{P}_0 \ \mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2 \ \mathbf{P}_3]^T, \quad M_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где строки матрицы Безье M_B — это коэффициенты разложения многочленов Бернштейна по стандартному базису.

Некоторые свойства кривых Безье:

из компании «Ситроен», где применялись для проектирования кузовов автомобилей. Несмотря на то, что открытие де Кастельжо (1959) было сделано несколько ранее Безье, его исследования не публиковались и скрывались компанией как производственная тайна до конца 1960-х. Впервые кривые были представлены широкой публике в 1962 году французским инженером Пьером Безье, который, разработав их независимо от де Кастельжо, использовал их для компьютерного проектирования автомобильных кузовов. Кривые были названы именем Безье, а именем де Кастельжо назван разработанный им рекурсивный способ построения кривых (алгоритм де Кастельжо).

³Описаны в 1912г С.Н.Бернштейном. С.Н.Бернштейн (1880-1968) — российский и советский математик.

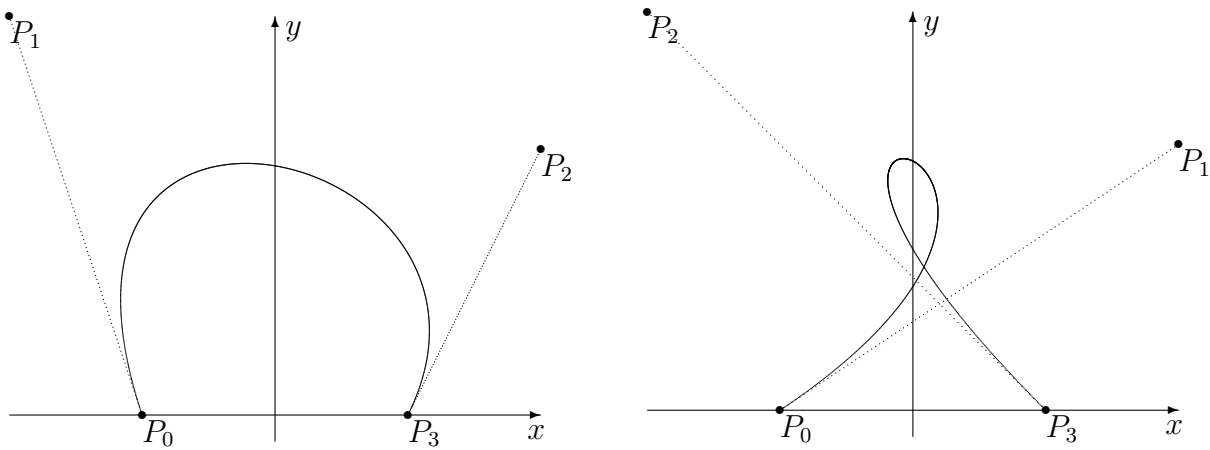


Рис. 10.

- кривая целиком лежит в выпуклой оболочке своих опорных точек;
- изменение координат хотя бы одной из точек ведет к изменению формы всей кривой;
- прямая линия образуется при коллинеарном (на одной прямой) размещении управляющих точек;
- любой частичный отрезок кривой Безье также является кривой Безье.

Благодаря простоте задания и манипуляции, кривые Безье нашли широкое применение в системах автоматизированного проектирования и компьютерной графике для моделирования гладких линий. Интуитивно понятное управление параметрами кривой в графическом интерфейсе производится передвижением её опорных точек.

Наибольшее значение имеют кривые Безье второй и третьей степеней. Кривые высших степеней при обработке требуют большего объёма вычислений и для практических целей используются реже. Для построения сложных по форме линий отдельные кривые Безье могут быть последовательно соединены друг с другом в сплайн Безье. Для того, чтобы обеспечить гладкость линии в месте соединения двух кривых, три смежные опорные точки обеих кривых должны лежать на одной прямой⁴.

§11 Кривые общего вида

О. Кривая $\alpha : I \rightarrow R^m$ называется кривой общего вида, если $\forall t \in I$ векторы $\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dots, \alpha^{(m-1)}(t)$ линейно независимы.

При $m = 2 : \dot{\alpha}(t) \neq (0, 0)^T$ — регулярные кривые.

При $m = 3 : \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$ линейно независимы — бирегулярные кривые.

Утверждение. Пусть α — кривая общего вида, кривая β получается из α заменой параметра или изометрией. Тогда β — кривая общего вида.

Доказательство*:

1) Замена параметра: $\beta = \alpha(\phi(t)), \dot{\phi}(t) \neq 0$.

$$\dot{\beta} = \dot{\alpha}(\phi) \dot{\phi}$$

⁴В современных графических системах и форматах, таких как PostScript (а также основанные на нём форматы Adobe Illustrator и Portable Document Format (PDF)), Scalable Vector Graphics (SVG), Metafont, CorelDraw и GIMP для представления криволинейных форм используются сплайны Безье, составленные из кубических кривых. SVG также позволяет работать со сплайнами Безье 4-й степени.

$$\ddot{\beta} = \ddot{\alpha}(\phi)\dot{\phi}^2 + \dot{\alpha}(\phi)\ddot{\phi}$$

\vdots

$$\beta^{(k)} = \alpha^{(k)}\phi^k + \dots$$

$$[\dot{\beta} \quad \ddot{\beta} \quad \dots \quad \beta^{(m-1)}] = [\dot{\alpha} \quad \ddot{\alpha} \quad \dots \quad \alpha^{(m-1)}] \begin{bmatrix} \dot{\phi} & \ddot{\phi} & \dots \\ 0 & \dot{\phi}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dot{\phi}^{m-1} \end{bmatrix}$$

Определитель матрицы перехода $\dot{\phi}\dot{\phi}^2 \dots \dot{\phi}^{m-1} = (\dot{\phi})^{(m-1)m/2} \neq 0 \Rightarrow \dot{\beta}, \ddot{\beta}, \dots, \dot{\beta}^{m-1}$ — линейно независимы.

2) Изометрия (сдвиги, отражения, повороты):

$\dot{A}p = p_0 + Qp$, Q — ортогональная матрица, $\det Q = \pm 1$; $\beta = p_0 + Q\alpha$, откуда

$$\dot{\beta} = Q\dot{\alpha}, \ddot{\beta} = Q\ddot{\alpha}, \dots$$

\Downarrow

$\dot{\beta}, \ddot{\beta}, \dots, \beta^{(m-1)}$ — линейно независимы (т.к. Q — невырожденная матрица перехода).

О. Подвижный репер $\{\alpha(t); E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t)\}, t \in I$ вдоль кривой $\alpha : I \rightarrow R^m$ называется репером Френе кривой $\alpha(t)$, если $\forall t \in I$:

1) $E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t)$ образуют ортонормированный базис пространства R^m .

2) Системы векторов $(E_1(t), E_2(t), \dots, E_i(t))$ и $(\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dots, \alpha^{(i)}(t))$ порождают одни и те же подпространства $V_i, i = 1, \dots, m-1$, положительная ориентация в которых задается базисом $(\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dots, \alpha^{(i)}(t))$.

3) Ориентация базиса $E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t)$ положительна.

Отметим, что п. 2) можно сформулировать, используя понятие орфлага.

О. Пусть упорядоченная система векторов (a_1, a_2, \dots, a_m) линейно независима. Орфлаг (ориентированный флаг) $\vec{V}_1 \subset \vec{V}_2 \subset \dots \subset \vec{V}_i \subset \dots \subset \vec{V}_m$ порожден векторами (a_1, a_2, \dots, a_m) , если:

1) каждое подпространство V_i порождено векторами (a_1, a_2, \dots, a_i) , т.е. V_i — линейная оболочка (a_1, a_2, \dots, a_i) ;

2) ориентацию в каждом пространстве задает базис (a_1, a_2, \dots, a_i) .

При различном упорядочивании одной и той же системы векторов мы получаем различные орфлаги. П.2 определения репера теперь можно записать так:

2) Системы векторов $(E_1(t), E_2(t), \dots, E_{m-1}(t))$ и $(\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dots, \alpha^{(m-1)}(t))$ порождают один и тот же орфлаг.

Т. Для всякой кривой общего вида $\alpha : I \rightarrow R^m$ существует единственный репер Френе. Доказательство:

Применяя процесс ортогонализации Шмидта к линейно независимым векторам $\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dots, \alpha^{(m-1)}(t)$, получаем $m-1$ вектор репера Френе. Последний вектор задается как обобщенное векторное произведение $E_m = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{m-1}$.

В случае R^3 (как и в R^2) для построения репера не требуется ортогонализации.

$$E_1 = \frac{\dot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|} \text{ — касательный вектор } \tau.$$

$$E_3 = \frac{\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|} \text{ — бинормаль } \beta.$$

$$E_2 = E_3 \times E_1 \text{ — нормаль } \nu \text{ (порядок умножения — чтобы тройка } E_1, E_2, E_3 \text{ была правой).}$$

E_1, E_2 — определяют соприкасающуюся плоскость.

E_2, E_3 — определяют нормальную плоскость.

Теорема. Пусть $\alpha : I \rightarrow R^m$ — кривая общего вида, E_1, E_2, \dots, E_m — ее базис Френе. Тогда существуют гладкие скалярные функции k_1, k_2, \dots, k_{m-1} такие, что $\forall t \in I$:

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} = |\dot{\alpha}| E_1 \\ \dot{E}_1 = |\dot{\alpha}| k_1 E_2 \\ \dot{E}_2 = |\dot{\alpha}| (-k_1 E_1 + k_2 E_3) \\ \vdots \\ \dot{E}_i = |\dot{\alpha}| (-k_{i-1} E_{i-1} + k_i E_{i+1}) \\ \vdots \\ \dot{E}_m = |\dot{\alpha}| (-k_{m-1} E_{m-1}) \end{array} \right. \quad 2) \text{ Кривизны } k_1, k_2, \dots, k_{m-2} > 0$$

Матричная форма:

$$[\dot{E}_1 \quad \dot{E}_2 \quad \dots \quad \dot{E}_m] = |\dot{\alpha}| [E_1 \quad E_2 \quad \dots \quad E_m] \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & \dots & 0 \\ k_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -k_{m-1} \\ 0 & \dots & k_{m-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Доказательство.

1) Т.к. E_1, E_2, \dots, E_m – базис в \vec{R}^m , то вектора $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dots, \dot{E}_m$ можно по нему разложить, $\dot{E}_j = E_k \omega_j^k$. Домножим это равенство скалярно на E_i :

$$\langle \dot{E}_j, E_i \rangle = \omega_j^k \langle E_k, E_i \rangle = \omega_j^k \delta_{ki} = \omega_j^i(t) \quad (4)$$

$\Rightarrow \omega_j^i(t)$ – гладкие функции.

Пусть $X = [E_1 \quad \dots \quad E_m]$ – матрица, состоящая из векторов-столбцов E_j базиса Френе, тогда $\dot{X} = X\omega$. Т.к. E_j образуют ортонормированный базис, то X – ортогональная матрица, $X^T X = 1_m$. Дифференцируя это равенство, получим:

$$0_m = \dot{X}^T X + X^T \dot{X} = (\omega^T X^T) X + X^T (X\omega) = \omega^T (X^T X) + (X^T X) \omega = \omega^T + \omega,$$

т.е. $\omega^T = -\omega$ – антисимметричная матрица, $\omega_j^i = -\omega_i^j$.

Далее, пусть $\vec{V}_j = \vec{V}_j(t)$ – подпространство, порожденное $\dot{\alpha}, \dots, \alpha^{(j)}$; $E_j \in \vec{V}_j$ и его можно разложить, $E_j = \xi_1 \dot{\alpha} + \dots + \xi_j \alpha^{(j)}$, дифференцируем, $\dot{E}_j = \xi_1 \ddot{\alpha} + \xi_1 \ddot{\alpha} + \dots + \xi_j \alpha^{(j+1)}$, т.е. $\dot{E}_j \in \vec{V}_{j+1}$ и в его разложении E_{j+2}, \dots, E_m не участвуют, $\omega_j^i = 0$ при $i > j+1$. В силу антисимметричности ω все ее элементы нулевые, кроме ω_j^{j+1} и ω_{j+1}^j .

Обозначим

$$k_j(t) = \frac{\langle \dot{E}_j, E_{j+1} \rangle}{|\dot{\alpha}(t)|} = \frac{\omega_j^{j+1}}{|\dot{\alpha}(t)|}.$$

где мы воспользовались формулой (4), откуда $\dot{X} = |\dot{\alpha}(t)| X\omega$, где ω – трехдиагональная антисимметричная матрица в (3).

2) – б/д.

В R^3 имеем 2 кривизны, обозначаемые обычно как $k = k_1$ – кривизна, $\varkappa = k_2$ – кручение. $E_1 = \vec{\tau}$ – касательный вектор, $E_2 = \vec{\nu}$ – вектор нормали, $E_3 = \vec{\beta}$ – вектор бинормали,

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{\tau}} & \dot{\vec{\nu}} & \dot{\vec{\beta}} \end{bmatrix} = |\dot{\alpha}| \begin{bmatrix} \vec{\tau} & \vec{\nu} & \vec{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\varkappa \\ 0 & \varkappa & 0 \end{bmatrix}.$$

$(\vec{\nu}, \vec{\beta})$ – нормальная плоскость, ортогональная $\vec{\tau}$.

$(\vec{\tau}, \vec{\nu})$ – соприкасающаяся плоскость, ортогональная $\vec{\beta}$, причем $\vec{\beta} = \text{const} \Leftrightarrow \varkappa = 0$.

Действительно, если $\varkappa \equiv 0$, то $\dot{\vec{\beta}} = -|\dot{\alpha}| \varkappa \vec{\nu} = 0 \Rightarrow \vec{\beta} = \text{const}$, т.е. вся кривая лежит в

одной плоскости. При $\varkappa \neq 0$ кривая как бы “выкручивается” из плоскости.

Т. Кривизна и кручение кривой в \mathbb{R}^3 находятся по формулам:

$$k = \frac{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|}{|\dot{\alpha}|^3}, \quad \varkappa = \frac{(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha})}{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|^2}, \quad (5)$$

где $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = \det[\dot{\alpha} \ \ddot{\alpha} \ \ddot{\alpha}]$ – смешанное произведение.

Первую формулу мы докажем ниже, основываясь на общем результате для \mathbb{R}^m .

Кривая постоянной ненулевой кривизны и кручения $k \neq 0, \varkappa \neq 0$ – винтовая линия.

Построение базиса Френе:

В пространстве R^2 : $\vec{\tau} = \frac{\dot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|}$, $\vec{\nu} \perp \vec{\tau}$.

В пространстве R^3 : $\vec{\tau} = \frac{\dot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|}$, $\vec{\beta} = \frac{\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|}$, $\vec{\nu} = \vec{\beta} \times \vec{\tau}$.

В пространстве R^m : $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)})$ – ортогонализация, $E_m \sim \dot{\alpha} \times \dots \times \alpha^{(m-1)}$.

Т. (инвариантность кривизны относительно движения).

Пусть $Ap = p_0 + Qp$ – изометрия пространства R^m , являющаяся движением (т.е. $\det Q = +1$); Q – ортогональный оператор; p_0 – точка, $\tilde{\alpha}(t) = A\alpha(t)$ – новая кривая, $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_m$ – ее базис Френе и $\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_{m-1}$ – ее кривизны.

Тогда:

$$|\dot{\tilde{\alpha}}| = |\dot{\alpha}|, \quad \tilde{E}_i = QE_i, \quad \tilde{k}_i = k_i.$$

Доказательство.

$\dot{\tilde{\alpha}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (A\alpha(t + \Delta t) - A\alpha(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (p_0 + Q\alpha(t + \Delta t) - p_0 - Q\alpha(t)) = Q\dot{\alpha}(t)$. Далее, $\ddot{\tilde{\alpha}}(t) = Q\ddot{\alpha}(t), \dots, \tilde{\alpha}^{(m-1)}(t) = Q\alpha^{(m-1)}(t)$. Т.к. Q – ортогональный оператор, то длины не меняются. Кривизна также не меняется:

$$\tilde{k}_i(t) = \frac{\langle Q\dot{E}_i, QE_{i+1} \rangle}{|\dot{\tilde{\alpha}}(t)|} = \frac{\langle \dot{E}_i, E_{i+1} \rangle}{|\dot{\alpha}(t)|} = k_i(t).$$

Т. Основная теорема локальной теории кривых (б/д).

Пусть $I \subseteq R$ – интервал и $0 \in I$. Пусть $k_1, \dots, k_{m-1}: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ – гладкие функции, причем $k_1(s), \dots, k_{m-2}(s) > 0 \ \forall s \in I$. Тогда \exists единственная кривая общего вида единичной скорости $\alpha(s): I \rightarrow \mathbb{R}^m$:

- 1) $\alpha(0) = 0$;
- 2) $E_i(0) = \vec{e}_i$ (где \vec{e}_i – i -й вектор стандартного базиса \mathbb{R}^m);
- 3) k_1, \dots, k_{m-1} – кривизны $\alpha(s)$.

О. Уравнения $k_i = k_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, m-1$, называются натуральными уравнениями кривой $\alpha(s): I \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Т. о последней кривизне (б/д).

Пусть $\alpha(t): I \rightarrow \mathbb{R}^m$ – кривая общего вида. Тогда следующие условия эквиваленты:

- 1) образ $\alpha(t)$ лежит в некоторой гиперплоскости (т.е. в подпространстве, размерность которого на 1 меньше размерности окружающего пространства);
- 2) $\det[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m)}] = 0$;
- 3) $k_{m-1} = 0$.

Пара векторов $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$ (или получающаяся из нее ортогонализацией пара E_1, E_2 векторов базиса Френе) задают соприкасающуюся плоскость. Кривизна k_1 определяется $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$.

Кривизны же k_i , $i > 1$, образно говоря, ответственны за “выкручивание” кривой из этой плоскости.

Рассмотрим для наглядности сначала кривую единичной скорости. Для нее касательный вектор $\tau = E_1 = \dot{\alpha}$, вектор главной нормали $\nu = E_2 = \ddot{\alpha}/|\ddot{\alpha}|$ (т.к. $|\dot{\alpha}| = 1 = \text{const}$, то $\ddot{\alpha} \perp \dot{\alpha}$),

$$k_1 = \frac{\langle \dot{E}_1, E_2 \rangle}{|\dot{\alpha}|} = \langle \ddot{\alpha}, \frac{\ddot{\alpha}}{|\ddot{\alpha}|} \rangle = |\ddot{\alpha}|.$$

Сам вектор $\ddot{\alpha}$ называется вектором кривизны кривой единичной скорости – его направление совпадает с вектором главной нормали, а длина равна кривизне.

Пусть теперь $\alpha(t)$ – кривая общего вида, $\alpha(t) = \beta(s(t))$, где $\beta(s)$ – эквивалентная $\alpha(t)$ кривая единичной скорости,

$$\dot{\alpha}(t) = \tau(s(t))|\dot{\alpha}(t)|, \quad \ddot{\alpha}(t) = \tau(s(t))\frac{d}{dt}|\dot{\alpha}(t)| + \vec{\tau}'_s(s(t))|\dot{\alpha}(t)|^2.$$

Здесь мы учли, что $\dot{s}(t) = |\dot{\alpha}(t)|$. Последнюю формулу, дающую разложение $\ddot{\alpha}(t)$ на касательную и нормальную компоненту ($\tau'_s(s) \perp \tau(s)$ как производная вектора постоянной длины), мы уже использовали выше при нахождении кривизны кривых в \mathbb{R}^2 . Входящий в правую часть вектор $\vec{\tau}'_s(s) = \beta''_{ss}(s)$ – это вектор кривизны эквивалентной кривой единичной скорости $\beta(s)$. Соответственно, вектор кривизны кривой $\alpha(t)$

$$w = \beta''_{ss}(s(t)) = \frac{\ddot{\alpha}(t) - \tau(s(t))\frac{d}{dt}|\dot{\alpha}(t)|}{|\dot{\alpha}(t)|^2} = \frac{\ddot{\alpha}(t) - \langle \ddot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle |\dot{\alpha}(t)|^{-2} \dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|^2},$$

(где мы учли, что $\frac{d}{dt}|\dot{\alpha}(t)| = \langle \ddot{\alpha}(t), \frac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|} \rangle$), а кривизна

$$k_1 = |w| = \frac{\sqrt{|\dot{\alpha}|^2 |\ddot{\alpha}|^2 - \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle^2}}{|\dot{\alpha}|^3}.$$

В \mathbb{R}^3 числитель дроби равен $|\dot{\alpha}||\ddot{\alpha}|\sqrt{(1 - \cos^2 \varphi)} = |\dot{\alpha}||\ddot{\alpha}|\sin \varphi = |\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|$, где φ – угол между векторами $\dot{\alpha}$ и $\ddot{\alpha}$, и мы получаем формулу (5).

Глава 3. Поверхности

§1. Вектор-функции векторного аргумента. Дифференциал отображения

Кривые мы определили как гладкие векторные функции одного аргумента t , $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))^T$, $\alpha(t) : I \rightarrow R^m$. Естественно попытаться определить поверхности как гладкие вектор-функции нескольких аргументов. Рассмотрим отображение $f : U \subseteq R^n \rightarrow R^m$,

$$f(u) = (f^1(u), \dots, f^m(u))^T = (f^1(u^1, \dots, u^n), \dots, f^m(u^1, \dots, u^n))^T,$$

f^i – координатные функции этого отображения.

О. Предел $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u_0^1, \dots, u_0^i + h, \dots, u_0^n) - f(u_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial u^i}(u_0)$, если он существует, называется частной производной отображения $f : U \subseteq R^n \rightarrow R^m$ в точке $u_0 \in U$.

Обозначается: $\frac{\partial f}{\partial u^i}(u_0) = f'_{u^i}(u_0) = f'_{u^i}|_{u_0}$.

О. Отображение $f : U \subseteq R^n \rightarrow R^m$ называется гладким, если у каждой координатной функции f^i существуют и непрерывны все возможные производные (сколь угодно высокого порядка k) $\frac{(\partial f^i)^k}{(\partial u^1)^{k_1} \dots (\partial u^n)^{k_n}}, k_1 + \dots + k_n = k$.

Класс гладкости C^k – если \exists непрерывные производные до k -го порядка включительно.

Геометрический смысл частных производных.

Числитель дроби – разность точек пространства R^m , т.е. вектор, а значит производная f'_{u^i} – вектор из R^m .

Рассмотрим функцию $\alpha(t) = f(u_0^1, \dots, t, \dots, u_0^n)$, $t = u^i$, при фиксированных u_0^k . Это функция одной переменной t , она задает кривую $\alpha(t) : I \rightarrow R^m$, образ этой кривой лежит в образе $f(U)$ отображения f . Очевидно, частная производная $f'_{u^i}(u_0) = \dot{\alpha}(u_0^i)$ есть касательный вектор кривой $\alpha(t)$.

Поэтому вектора частных производных (и их линейные комбинации) мы будем называть касательными векторами к отображению $f : U \subseteq R^n \rightarrow R^m$.

Поверхность $U \subseteq R^n \rightarrow R^m$, параметры u^1, \dots, u^n .

Кривая $I \subseteq R \rightarrow R^m$, параметр t .

Примеры:

1. Прямая.

$f(u) = q_0 + u\vec{a}$, q_0 – начальная точка, $f'_u = \vec{a}$ – направляющий (он же касательный) вектор.

2. Плоскость.

$f(u, v) = q_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, $f'_u = \vec{a}$, $f'_v = \vec{b}$ – касательные векторы.

О. Отображение $f : U \subseteq R^n \rightarrow R^m$ называется дифференцируемым в точке $u_0 \in U$, если в некоторой окрестности $O(u_0)$ точки u_0 приращение $f(u_0 + \vec{h}) - f(u_0) = df_{u_0}(\vec{h}) + o(u_0, \vec{h})$, где:

1) $\vec{h} \in R^n$ такой, что $u_0 + \vec{h} \in O(u_0)$.

2) df_{u_0} – линейный оператор, действующий из R^n в R^m (главная или линейная часть отображения f).

3) $|o(u_0, \vec{h})| \rightarrow 0$ при $|\vec{h}| \rightarrow 0$.

Линейный оператор df_{u_0} называется дифференциалом отображения $f : U \subseteq R^n \rightarrow R^m$.

Обозначается $D_{u_0} = Df(u_0) = df_{u_0}$.

Как обычно, рассмотрение локальных свойств отображения основано на замене приращения f в точке u_0 на дифференциал df_{u_0} (т.е. на его главную, или линейную часть).

Найдем матрицу оператора df_{u_0} . Пусть $\vec{h} = (h^1, \dots, h^n)^T$,

$$\begin{aligned} f(u_0 + \vec{h}) - f(u_0) &= \\ \begin{bmatrix} f^1(u_0 + h) - f^1(u_0) \\ \dots \\ f^m(u_0 + h) - f^m(u_0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^1}{\partial u^i} h^i + o^1(h) \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^m}{\partial u^i} h^i + o^m(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial u^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial u^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^1 \\ \dots \\ h^n \end{bmatrix} + o(\vec{h}) \end{aligned}$$

Матрица

$$[df(u_0)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial u^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial u^n} \end{bmatrix}$$

называется **матрицей Якоби** или **производной отображения** $f : U \subseteq R^n \rightarrow R^m$. Ее столбцы – векторы частных производных (касательные векторы) отображения f . Обозначения: $[df(u_0)] = f'(u_0)$.

Дифференциал вектора \vec{x} : $df_p(\vec{x}) = [df(u_0)][x^1 \dots x^n]^T = x^i f'_{u_i}(p)$, т.е. вектор $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$ переводится в линейную комбинацию частных производных, коэффициентами которой являются координаты исходного вектора.

§2. Определение поверхности

О. Пусть $U \subseteq R^n$ – открытая связная область. Гладкое отображение $f : U \subseteq R^n \rightarrow R^m$ называется **n -мерной поверхностью**, вложенной в R^m , если $\forall p \in U$ ранг матрицы Якоби отображения f :

$$\text{rang}[f'(p)] = n.$$

Образ поверхности – множество всех точек $f(U)$.

Поскольку $\text{rang}[f'(p)] = \text{rang}(f'_{u^1}, \dots, f'_{u^n}) = n$, то в каждой точке $p \in U$ производные отображения линейно независимы.

Необходимость условия максимальности ранга видна на следующем примере.

Пример: отображение $f(u^1, u^2) = (u^1 - u^2, u^1 - u^2, u^1 - u^2)^T$.

$$[f'(p)] = [f'_{u^1}, f'_{u^2}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{rang}[f'(p)] = 1. \text{ Это отображение не 2-мерная поверхность,}$$

а прямая – биссектриса 1 и 7 координатных октантов.

О. Образ дифференциала поверхности $f : U \subseteq R^n \rightarrow R^m$, $[df_p(\vec{x})] = [f'_p][x^i]$, $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$, называется **касательным пространством** к поверхности f в точке $p \in U$ и обозначается $T_p f$. (Другими словами $T_p f$ – это все возможные линейные комбинации касательных векторов, буква T здесь означает tangential – касательный).

Заметим, что $[df_p(\vec{e}_i)] = [f'_{u^i}(p)]$ (i -й столбец матрицы $[f'(p)]$), т.е. вектора стандартного базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ пространства \mathbb{R}^n переходят в линейно независимые вектора $f'_{u^1}(p), \dots, f'_{u^n}(p)$ – вектора **стандартного базиса касательного пространства** $T_p f$.

Рассмотрим в области $U \subseteq R^n$ прямые \parallel осям координат $u_i(t) = p + t\vec{e}_i$. При всех возможных p они образуют координатную сеть в области U . Образы этих прямых на поверхности называются координатной сетью поверхности $f : U \subseteq R^n \rightarrow R^m$ или поверхностной системой координат.

(u^1, \dots, u^n) – **поверхностные** или **криволинейные** координаты.

$(x^1, \dots, x^m) = (f^1(u^1, \dots, u^n), \dots, f^m(u^1, \dots, u^n))$ – **пространственные** или **абсолютные** координаты.

Криволинейные системы координат в R^n

Рассмотрим случай $U \subseteq R^n \rightarrow R^m$ при $n = m$. Это отображение задает не какую-либо поверхность, а криволинейные координаты в n -мерном пространстве.

Пример. Отображение $f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T$ связывает полярные (криволинейные) координаты r, φ и декартовы координаты x^1, x^2 в \mathbb{R}^2 .

§3. Примеры поверхностей (“зоопарк”)

1) Двумерная сфера в R^3

$$f(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)^T,$$

поверхностные (криволинейные) координаты: u – широта, v – долгота, $u \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $v \in (-\pi; \pi)$.

Южный полюс $u = -\frac{\pi}{2}$, северный полюс $v = \frac{\pi}{2}$.

$$[f'(p)] = \begin{bmatrix} -R \sin u \cos v & -R \cos u \sin v \\ -R \sin u \sin v & R \cos u \cos v \\ R \cos u & 0 \end{bmatrix} \text{ — матрица Якоби.}$$

$\langle f'_u, f'_v \rangle = 0$, т.е. меридианы ортогональны параллелям;

параллели $u = \text{const}$ – окружности,

меридианы $v = \text{const}$ – полуокружности.

Наша “сфера” не содержит полюсов и линий перемены дат. При $u = \pm \frac{\pi}{2}$ $f'_v = 0$ и условие максимального ранга $\text{rang}[f'(p)] = 2$ нарушается.

2) Поверхности вращения в R^3

Вращаем заданную плоскую кривую $\alpha(u) = (x(u), 0, z(u))^T$, $u \in I$, вокруг оси Oz :

$$f(u, v) = A(v)\alpha(u) = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(u) \\ 0 \\ z(u) \end{bmatrix} = (x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u))^T$$

$$f(u, v) = (x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u))^T, \quad u \in I, \quad -\pi < v < \pi$$

Проверим условие максимальности ранга $[f'_p]$:

$$[f'_p] = \begin{bmatrix} \dot{x}(u) \cos v & -x(u) \sin v \\ \dot{x}(u) \sin v & x(u) \cos v \\ \dot{z}(u) & 0 \end{bmatrix}$$

$$f'_u \times f'_v = (-\dot{z}(u)x(u) \cos v, -\dot{z}(u)x(u) \sin v, \dot{x}(u)x(u))$$

$|f'_u \times f'_v| = x(u)\sqrt{\dot{z}^2(u) + \dot{x}^2(u)} \neq 0$ — регулярные точки поверхности (в этих точках ранг максимален).

Условие регулярности нарушается в точках $x(u) = 0$ (пересечение с осью Oz) или $\dot{z}^2(u) + \dot{x}^2(u) = |\dot{\alpha}(u)|^2 = 0$ (это особые точки кривой $\alpha(u)$).

3) Тор.

а) “Бублик” – получается вращением окружности $\alpha(u) = (a + b \cos u, 0, b \sin u)^T$,

$$f(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)^T,$$

где u, v – углы поворотов или тороидальные координаты точки $f(p)$.

б) Прямое произведение двумерных окружностей – двумерная поверхность, вложенная в четырехмерное пространство

$$f(u, v) = (a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v)^T.$$

$$f'_u = (-a \sin u, a \cos u, 0, 0), f'_v = (0, 0, -b \sin v, b \cos v), \text{rang}[f'(p)] = 2.$$

4) Зонтик Уитни

$$y^2 - x^2 z = 0$$

горизонтальные сечения:

при $z < 0$: $x = y = 0$ (ручка зонтика);

при $z = 0$: $y = 0$;

при $z > 0$: пара пересекающихся прямых

вертикальные сечения: при $x = \pm a$ $y^2 = a^2 z$ – параболы ветвями вверх

Параметрическое задание. Пусть $x = u$, $z = v^2$ (теперь $z > 0$, обломали ручку), $y = uv$, тогда

$$f(u, v) = (u, uv, v^2)^T$$

$$f'_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & u \\ 0 & 2v \end{bmatrix}, \text{ производные } f'_u, f'_v \text{ линейно зависимы только при } u = v = 0. \text{ Координатная}$$

сеть – вертикальные параболы и горизонтальные пересекающиеся прямые. $\langle f'_u, f'_v \rangle = uv$, т.е. координатная сеть неортогональна.

Упражнения.

1) параметрическое задание цилиндра

2) параметрическое задание конуса

§4. Первая фундаментальная форма. Внутренняя геометрия поверхности

Как считать длины, углы, площади, объемы на поверхности?

О. Первой фундаментальной формой $I_p(X, Y)$ поверхности $f(U) : U \subseteq R^n \rightarrow R^m$ в точке $p \in U$ называется скалярное произведение в касательном пространстве $T_p f$, индуцированное из окружающего пространства \vec{R}^m ,

$$I_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle_{R^m}, \quad \text{где } X, Y \in T_p f.$$

Первая фундаментальная форма поверхности – это симметричная билинейная форма, но часто она по старой традиции называется “первой квадратичной”.

Обозначения: $I_p(X, Y) = I(p; X, Y)$. Последнее подчеркивает зависимость скалярного произведения от точки поверхности. Каждое касательное пространство превращается в Евклидово, но при этом в каждом касательном пространстве скалярное произведение, вообще говоря, свое!

Вычисление.

Разложим вектора $X, Y \in T_p f$ по стандартному базису касательного пространства:

$$X = x^i f'_{u^i}(p), Y = y^j f'_{u^j}(p).$$

$$I_p(X, Y) = \langle x^i f'_{u^i}(p), y^j f'_{u^j}(p) \rangle = \langle f'_{u^i}, f'_{u^j} \rangle x^i y^j = g_{ij} x^i y^j$$

$g_{ij} = \langle f'_{u^i}, f'_{u^j} \rangle$ – метрические коэффициенты поверхности, элементы матрицы Грама $[I_p] = [g_{ij}]$ – матрицы 1-й фундаментальной формы.

Эта матрица:

- 1) симметрична;
- 2) положительно определена (удовлетворяет критерию Сильвестра);
- 3) $V = \sqrt{\det[g_{ij}]}$ – объем параллелепипеда, построенного на базисных векторах.

О. Все свойства поверхности $f(U) : U \subseteq R^n \rightarrow R^m$, которые могут быть выражены **только** через коэффициенты $g_{ij}(p)$ первой фундаментальной формы, называются **свойствами внутренней геометрии** поверхности.

Длина кривой вдоль поверхности.

Пусть:

$f : U \subseteq R^n \rightarrow R^m$ – поверхность,

$u(t) : (a, b) \rightarrow U \subseteq R^n$ – некоторая кривая в области $U \subseteq R^n$,

$\alpha(t) = f(u(t)) : (a, b) \rightarrow f(U) \subseteq R^m$ – кривая вдоль поверхности f .

По определению, длина кривой $l[\alpha]_a^b = \int_a^b |\dot{\alpha}(t)| dt$.

$\dot{\alpha}(t) = \frac{d}{dt} f(u(t)) = f'_{u^i}(u(t)) \dot{u}^i(t) = [f'_{u^1} \dots f'_{u^n}] [\dot{u}^1 \dots \dot{u}^n]^T$. Мы получили разложение вектора $\dot{\alpha}(t)$ по стандартному базису касательного пространства $T_p f$,

$$|\dot{\alpha}(t)|^2 = \langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle = \langle f'_{u^i} \dot{u}^i(t), f'_{u^j} \dot{u}^j(t) \rangle = \dot{u}^i(t) \dot{u}^j(t) \langle f'_{u^i}, f'_{u^j} \rangle = \dot{u}^i(t) \dot{u}^j(t) g_{ij}.$$

В результате для **длины дуги** получаем:

$$l[\alpha]_a^b = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i(t) \dot{u}^j(t)} dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij} du^i du^j}.$$

Последнее выражение удобно, когда явная параметризация неизвестна, но известно соотношение между дифференциалами du^i (т.е. когда кривая задана изначально уравнением в поверхностных координатах).

Как обычно, обозначим как $s = s(t)$ натуральный параметр (длину дуги) кривой $\alpha(t)$,
 $s(t) = \int_0^t |\dot{\alpha}(\theta)| d\theta$, **дифференциал дуги**

$$ds = |\dot{\alpha}(t)| dt = \sqrt{g_{ij} du^i du^j}.$$

Соответственно, $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$ – квадратичная форма с той же матрицей, что и первая фундаментальная форма, отсюда и не совсем корректное название “первая квадратичная” форма (вместо “первой фундаментальной”).

Углы на поверхности.

Рассмотрим пару кривых вдоль поверхности f :

$$\alpha_1(t) = f(u_1(t)), \alpha_2(\theta) = f(u_2(\theta)).$$

Пусть они пересекаются в точке $p = u_1(t_0) = u_2(\theta_0) \in U$;

это означает, что они пересекаются на поверхности в точке $f(p)$:

$$\begin{aligned}\alpha_1(t_0) &= \alpha_2(\theta_0) = f(p) \\ \dot{\alpha}_1(t_0) &= f'_{u^i}(p) \dot{u}_1^i(t_0) \\ \dot{\alpha}_2(\theta_0) &= f'_{u^i}(p) \dot{u}_2^i(\theta_0)\end{aligned}$$

$$\cos \varphi = \frac{\langle \dot{\alpha}_1(t_0), \dot{\alpha}_2(\theta_0) \rangle}{|\dot{\alpha}_1(t_0)| |\dot{\alpha}_2(\theta_0)|} = \frac{g_{ij} \dot{u}_1^i(t_0) \dot{u}_2^j(\theta_0)}{\sqrt{g_{ij} \dot{u}_1^i(t_0) \dot{u}_1^j(t_0)} \sqrt{g_{ij} \dot{u}_2^i(\theta_0) \dot{u}_2^j(\theta_0)}}$$

Объем поверхности.

Объем n -мерного параллелотопа, построенного на векторах a_1, \dots, a_n : $V = \sqrt{\det G}$, где $G_{ij} = \langle a_i, a_j \rangle$ – матрица Грама векторов a_1, \dots, a_n .

Терминология:

при $n = 1$ – длина

при $n = 2$ – площадь

при $n \geq 3$ – объем

Соответственно, объем параллелотопа, построенного на векторах стандартного базиса касательного пространства $T_p f V(f'_{u^1}, \dots, f'_{u^n}) = \sqrt{\det[g_{ij}(p)]}$ (иногда используется обозначение $g = \det[g_{ij}]$)

Считаем объемы “чешуек” в касательном пространстве

$$V(\Delta u^1 f'_{u^1}, \dots, \Delta u^n f'_{u^n}) = \Delta u^1 \dots \Delta u^n V(f'_{u^1}, \dots, f'_{u^n}) = \sqrt{\det g(p)} \Delta u^1 \dots \Delta u^n$$

Интегральная сумма

$$V[f] = \sum_{p_k} \sqrt{\det g(p_k)} \Delta u^1 \dots \Delta u^n.$$

О. Объемом n -мерной инъективной поверхности называется число:

$$V[f] = \int_U \sqrt{\det g(p)} du^1 \dots du^n.$$

При $n = 1$ имеем $\det g = g_{11} = \langle f'_t, f'_t \rangle = \langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle$, и для длины дуги кривой получаем уже известную нам формулу $V(\alpha) = \int_U \sqrt{\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle} dt = \int_U |\dot{\alpha}| dt$.

Криволинейные системы координат в \mathbb{R}^n .

Рассмотрим подробнее случай отображения $U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, которое, как мы уже отмечали выше, задает не какую-либо поверхность, а криволинейные координаты в n -мерном пространстве.

Обычно используются *ортогональные* криволинейные координаты, поскольку формулы для определения длин и углов выглядят в ортогональных координатах гораздо проще, чем в общем случае, т.к. матрица первой фундаментальной формы в системах с ортонормированным базисом является диагональной.

На диагонали матрицы $[g_{ij}]$ стоят положительные коэффициенты g_{ii} . Коэффициенты $H_i = \sqrt{g_{ii}}$, зависящие от точки пространства, называются коэффициентами Ламе или масштабными коэффициентами. Коэффициенты Ламе показывают, сколько единиц длины содержится в единице координат в данной точке и используются для преобразования векторов при переходе от одной системы координат к другой. Длины, углы и объемы находятся по тем же формулам, что и для поверхностей.

Для различных задач используются разные ортогональные криволинейные системы координат. В \mathbb{R}^2 , кроме полярных, также используются эллиптические, параболические и биполярные координаты, в \mathbb{R}^3 – тороидальные, конические и др.

Примеры. В полярных координатах $f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T$: $H_r = |f'_r| = 1$, $H_\varphi = |f'_\varphi| = r$, $\sqrt{\det g} = r$, $dx dy = r dr d\varphi$. В сферических координатах: $H_r = 1$, $H_\theta = r$, $H_\varphi = r \sin \theta$, $\sqrt{\det g} = r^2 \sin \theta$, $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$.

§5. Замена параметров. Изометричность поверхностей

О. Пусть $\Phi : U \rightarrow V$ — гладкое отображение области $U \subseteq R^n$ на область V и существует обратное отображение $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$, которое также является гладким. Тогда Φ называется **диффеоморфизмом** области $U \subset R^n$ на область V .

Коротко, диффеоморфизм — это гладкое взаимнооднозначное отображение. Свойства:

- 1) Матрица Якоби $[\Phi'_p]$ является квадратной.
- 2) Обратимость, то есть $\det[\Phi'_p] \neq 0$

О. Две поверхности $f : U \subseteq R^n \rightarrow R^m$ и $\tilde{f} : \tilde{U} \subseteq R^n \rightarrow R^m$ связаны заменой параметров Φ , если:

- 1) $\Phi : U \xrightarrow{\text{на}} \tilde{U}$ — диффеоморфизм
- 2) \forall точки $u \in U$ $f(u) = \tilde{f}(\Phi(u))$

Это соотношение эквивалентности. Образы эквивалентных поверхностей совпадают.

Непараметризованная поверхность — класс эквивалентных поверхностей.

Параметризованная поверхность — каждое конкретное отображение f из этого класса.

Диффеоморфизм $\Phi : U \rightarrow \tilde{U}$ производит **замену поверхностных координат** (u^1, \dots, u^n) на $(\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^n)$.

Как преобразуется $g_{ik} = \langle f'_{u^i}, f'_{u^k} \rangle$ при замене координат $\tilde{u} = \Phi(u)$? Учитывая, что

$$[g_{ij}] = [f'_u]^T [f'_u], \quad [\tilde{g}_{ij}] = [\tilde{f}'_{\tilde{u}}]^T [\tilde{f}'_{\tilde{u}}], \quad [f'_u] = [\tilde{f}'_{\tilde{u}}][\Phi'_u] \quad (\text{дифференцируем } f(u) = \tilde{f}(\Phi(u))),$$

получим

$$[g_{ij}(u)] = [f'_u]^T [f'_u] = [\Phi'_u]^T [\tilde{f}'_{\tilde{u}}]^T [\tilde{f}'_{\tilde{u}}] [\Phi'_u] = [\Phi'_u]^T [\tilde{g}_{ij}(\tilde{u})] [\Phi'_u].$$

Т.о., при замене координат имеем

$$[g_{ik}] = [\Phi'_u]^T [\tilde{g}_{ik}] [\Phi'_u] \quad (*)$$

— правило преобразования матрицы билинейной формы при замене базиса.

О. Изометричные поверхности $f : U \subseteq R^n \rightarrow R^m$, $\tilde{f} : \tilde{U} \subseteq R^n \rightarrow R^m$ — это инъективные поверхности, связанные диффеоморфизмом $\Phi : U \rightarrow \tilde{U}$, матрицы $[g_{ij}(u)]$ и $[\tilde{g}_{ij}(\tilde{u})]$ в соответствующих точках $\tilde{u} = \Phi(u)$ связаны соотношением (*).

(Диффеоморфизм Φ — изометрия поверхностей f и \tilde{f}).

Изометричные поверхности обладают одинаковой внутренней геометрией (площади, длины, объемы), но это, вообще говоря, разные поверхности.

Примеры изометричных поверхностей:

- цилиндр и плоскость
- конус и плоскость
- катеноид и геликоид

Пример.

Цилиндр $f(u, v) = (R \cos v, R \sin v, u)$ и плоскость $f(u, v) = (u, v, 0)$, соответственно

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}, \quad [\tilde{g}_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица для цилиндра заменой параметра $v = \tilde{v}/R$ приводится к единичной, и в такой параметризации матрицы первой фундаментальной формы цилиндра и плоскости совпадают.

Цилиндр и плоскость – это различные поверхности, но, используя только 1-ю фундаментальную форму, мы их различить не сможем. Их внутренняя геометрия одинакова. Надо взглянуть на поверхность снаружи.

§6. Внешняя геометрия поверхностей. Основной оператор гиперповерхности

Гиперповерхность $f : U \subseteq R^n \rightarrow R^{n+1}$ – поверхность, размерность которой на 1 меньше размерности окружающего пространства.

Пример гиперповерхности – двумерная поверхность в R^3 :

f'_{u^1}, f'_{u^2} – базис $T_p f$

\vec{N} – единичный нормальный вектор, $|\vec{N}| = 1$

Тройка $f'_{u^1}, f'_{u^2}, \vec{N}$ положительно ориентирована.

Нормальное гауссово поле – это единичное нормальное к гиперповерхности векторное поле:

$$\vec{N}(u) = \frac{f'_{u^1} \times \cdots \times f'_{u^n}}{|f'_{u^1} \times \cdots \times f'_{u^n}|} = \frac{f'_{u^1} \times \cdots \times f'_{u^n}}{\sqrt{\det g}}.$$

Знаменатель – объем параллелепипеда, построенного на векторах базиса касательного векторного пространства.

Добавляя к базису касательного к гиперповерхности пространства вектор $\vec{N}(u)$, мы получим базис $f'_{u^1}, \dots, f'_{u^n}, \vec{N}(u)$ всего пространства R^{n+1} .

Упражнения.

Найти нормальное гауссово поле вдоль гиперповерхностей:

1) $f(u, v) = (R \cos v, R \sin v, u)^T$;

2) $f(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)^T$.

Внешнюю геометрию гиперповерхности мы будем исследовать, изучая поведение нормального вектора $\vec{N}(u) \perp T_p f$ при движении вдоль этой гиперповерхности. Дифференцируя $\langle \vec{N}(u), \vec{N}(u) \rangle = 1$, получаем: $\frac{\partial}{\partial u^i} \langle \vec{N}(u), \vec{N}(u) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{N}'_{u^i}, \vec{N} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{N}'_{u^i} \perp \vec{N}$, то есть $\vec{N}'_{u^i} \in T_p f$ – производная нормального вектора принадлежит касательному пространству. С этим и связано то, что мы рассматриваем именно гиперповерхности – теорию произвольных поверхностей построить сложнее.

Кривая: кривизна = скорость поворота единичного нормального вектора ν при движении вдоль кривой (см. уравнение Френе $\dot{\nu} = -k\tau$).

На поверхности возможны разные направления движения, и мы каждому направлению f'_{u^i} поставим в соответствие скорость поворота \vec{N}'_{u^i} нормального вектора \vec{N} при его движении в этом направлении. Это приводит нас к следующему определению:

О. Линейный оператор $L_p : T_p f \rightarrow T_p f$, действующий по правилу

$$L_p(f'_{u^i}) = -\vec{N}'_{u^i}.$$

называется **основным оператором гиперповерхности** $f : U \rightarrow R^{n+1}$, или оператором Петерсона-Вейнгартена (минус – из соображений удобства, чтобы собственные значения L_p являлись главными кривизнами, см. ниже).

Если $X \in T_p f$, то $X = x^i f'_{u^i}$, $L_p(X) = L_p(x^i f'_{u^i}) = x^i L_p(f'_{u^i})$ [в силу линейности L_p] = $-x^i N'_{u^i}$.

О. Второй фундаментальной формой гиперповерхности $f : U \rightarrow R^{n+1}$ в т. $p \in U$ называется билинейная форма $II_p(X, Y)$, определенная в касательном пространстве $T_p f$:

$$\forall X, Y \in T_p f \quad II_p(X, Y) = \langle L_p(X), Y \rangle.$$

(Билинейность обеспечивается линейностью оператора L_p .)

Матрица второй фундаментальной формы:

$$II_p(X, Y) = II_p(x^i f'_{u^i}, y^j f'_{u^j}) = x^i y^j II_p(f'_{u^i}, f'_{u^j}) = x^i y^j h_{ij},$$

где мы ввели обозначение

$$h_{ij} = II_p(f'_{u^i}, f'_{u^j}) = \langle L_p(f'_{u^i}), f'_{u^j} \rangle = -\langle N'_{u^i}, f'_{u^j} \rangle.$$

Так как $\vec{N} \perp T_p f$, то $\langle \vec{N}, f'_{u^j} \rangle = 0$. Дифференцируя, имеем $\langle N'_{u^i}, f'_{u^j} \rangle + \langle N, f''_{u^i u^j} \rangle = 0$, и получаем второй способ нахождения h_{ij} :

$$h_{ij} = -\langle N'_{u^i}, f'_{u^j} \rangle = \langle N, f''_{u^i u^j} \rangle. \quad (*)$$

Т. Для гиперповерхности $f : U \rightarrow R^{n+1}$:

- 1) вторая фундаментальная форма $II_p(X, Y)$ симметрична,
- 2) основной оператор гиперповерхности L_p — самосопряженный.

Доказательство.

- 1) Т.к. $f''_{u^i u^j} = f''_{u^j u^i}$, то согласно $(*)$
 $h_{ij} = -\langle N'_{u^i}, f'_{u^j} \rangle = \langle N, f''_{u^j u^i} \rangle = \langle N, f''_{u^i u^j} \rangle = -\langle N'_{u^j}, f'_{u^i} \rangle = h_{ji}$, т.е. $II_p(X, Y) = II_p(Y, X)$.
- 2) Самосопряженный (симметричный) оператор: $\forall X, Y \in T_p f : \langle L_p(X), Y \rangle = \langle X, L_p(Y) \rangle$.
 $\langle L_p(X), Y \rangle = II_p(X, Y) = II_p(Y, X) = \langle L_p(Y), X \rangle = \langle X, L_p(Y) \rangle$.

Следствия.

- 1) Все собственные значения L_p — вещественны.
- 2) В $T_p f$ существует ортонормированный базис из собственных векторов L_p .

Вычислительная формула для h_{ij} :

$$h_{ij} = -\langle \vec{N}'_{u^i}, f'_{u^j} \rangle = \langle \vec{N}, f''_{u^i u^j} \rangle = \frac{\langle f'_{u^i} \times \cdots \times f'_{u^n}, f''_{u^i u^j} \rangle}{\sqrt{\det g}} = \frac{\det[f'_{u^1}, \dots, f'_{u^n}, f''_{u^i u^j}]}{\sqrt{\det g}}$$

Частный случай. $f : U \subseteq R^2 \rightarrow R^3$:

$$h_{ij} = \frac{\det[f'_{u^1}, f'_{u^2}, f''_{u^i u^j}]}{\sqrt{\det g}}$$

§7. Матрица основного оператора гиперповерхности. Кривизны и главные направления. Линии кривизны.

Т. В стандартном базисе $f'_{u^1}, \dots, f'_{u^n}$ касательного пространства $T_p f$ матрица оператора L_p имеет вид:

$$[L_p] = [g_{ij}]^{-1} [h_{ij}].$$

Доказательство. Пусть $[L_p] = [a_j^i]$, т.е. $L_p(f'_{u^i}) = a_i^k f'_{u^k}$ (по определению, i -й столбец есть результат действия оператора на i -й базисный вектор).
 $h_{ij} = \langle L_p(f'_{u^i}), f'_{u^j} \rangle = \langle a_i^k f'_{u^k}, f'_{u^j} \rangle = a_i^k \langle f'_{u^k}, f'_{u^j} \rangle = a_i^k g_{kj}$, откуда, в силу симметричности g_{ij} и h_{ij} , $h_{ji} = g_{jk} a_i^k$, или в матричной форме $[h] = [g][L_p]$, $[L_p] = [g]^{-1}[h]$.

О. Пусть $f : U \rightarrow R^{n+1}$ — гиперповерхность, $L_p : T_p f \rightarrow T_p f$ ее основной оператор. Тогда:

- 1) $K(p) = \det [L_p]$ — **полная (Гауссова) кривизна** гиперповерхности f в точке p
- 2) $H(p) = \frac{1}{n} \text{Tr}[L_p]$ — **средняя кривизна** гиперповерхности f в точке p
- 3) Собственные значения $k_1 \dots k_n$ называются **главными нормальными кривизнами**.
- 4) Собственные вектора $X_1 \dots X_n$ оператора L_p называются **главными направлениями**.

Примечание. $K = k_1 \cdot \dots \cdot k_n$; $H = \frac{1}{n}(k_1 + \dots + k_n)$; главные направления попарно ортогональны, т.к. L_p — самосопряженный оператор.

Полная (гауссова) кривизна может быть найдена по формуле

$$K = \det[L_p] = \det([g]^{-1}[h]) = \frac{\det h}{\det g}.$$

Примеры.

1) $\alpha : I \rightarrow R^2$ — плоская кривая единичной скорости. Это гиперповерхность, $\vec{N} = \nu$ — нормальный вектор из базиса Френе, $\dot{\alpha}$ — базис $T_p \alpha$. $L_p(\dot{\alpha}) = -\dot{\nu} = k\dot{\alpha}$, т.к., согласно уравнению Френе $-\dot{\nu} = k\dot{\alpha}$. Собственное значение k оператора L_p — это кривизна гиперповерхности.

2) Гиперплоскость $a^1 x^1 + \dots + a^{n+1} x^{n+1} = a^0$. $\vec{N} = \frac{(a^1, \dots, a^{n+1})^T}{\sqrt{(a^1)^2 + \dots + (a^{n+1})^2}} = \text{const}$, а значит L_p — нулевой оператор.

3) Цилиндр $f(u, v) = (R \cos v, R \sin v, u)^T$. Вектора стандартного базиса касательного пространства $f'_u(u, v) = (0, 0, 1)^T$, $f'_v(u, v) = (-R \sin v, R \cos v, 0)^T$, вторые производные $f''_{uu}(u, v) = f''_{uv}(u, v) = (0, 0, 0)^T$, $f''_{vv}(u, v) = (-R \cos v, -R \sin v, 0)^T$. По формулам находим матрицу основного оператора гиперповерхности L_p :

$$[g] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}, \quad [h] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}, \quad [L_p] = [g]^{-1}[h] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix}.$$

Собственные векторы оператора L_p в базисе f'_u, f'_v — это $(1 \ 0)^T$ и $(0 \ 1)^T$, то есть сами вектора стандартного базиса f'_u, f'_v . Откуда заключаем, что главные кривизны $k_1 = 0$ (в направлении касательного вектора $f'_u(u, v) = (0, 0, 1)$) и $k_2 = 1/R$ (в направлении касательного вектора $f'_v(u, v) = (-R \sin v, R \cos v, 0)$). Действительно, двигаясь по поверхности цилиндра вдоль его оси, мы двигаемся по прямой (нулевая кривизна), а перпендикулярно оси — по окружности радиуса R (кривизна $1/R$).

4) Сфера. Для сферы радиуса R кривизны $k_1 = k_2 = 1/R$, матрица $[L_p]$ кратна единичной и все вектора из $T_p f$ являются собственными векторами L_p .

Для двумерной поверхности в R^3 в собственном базисе оператора L_p : $[L_p] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$,
 $K = k_1 k_2$, $2H = k_1 + k_2 \Leftrightarrow k^2 - 2Hk + K = 0$, т.е. k_1, k_2 — решения этого квадратного

уравнения.

О. Кривая α вдоль гиперповерхности $f : U \rightarrow R^{n+1}$ называется **линией кривизны**, если в каждой ее точке касательный вектор является главным направлением. Касательные к линии кривизны – это собственные вектора оператора L_p . Линии кривизны всегда образуют на поверхности ортогональную сеть, т.к. главные направления ортогональны друг другу.

Как выглядит матрица второй фундаментальной формы в ортогональном или ортонормированном собственном базисе $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ оператора L_p ? В собственном базисе L_p

$$h_{ij} = \langle L_p \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \langle k_i \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = k_i \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = k_i g_{ij}$$

Матрица первой фундаментальной формы в ортогональном базисе диагональна,

$$g_{ij} = g_{ii} \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } i = j \\ 0 & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

а в ортонормированном базисе $g_{ij} = \delta_{ij}$, т.е. $[g_{ij}]$ – единичная матрица. Соответственно, в ортогональном собственном базисе оператора L_p $h_{ij} = k_i g_{ii} \delta_{ij}$, в ортонормированном $h_{ij} = k_i \delta_{ij} = (L_p)_{ij}$.

§8. Локальное строение гиперповерхностей

Здесь мы рассмотрим устройство гиперповерхности в окрестности некоторой своей точки p . Для этого мы перейдем к собственному базису оператора L_p в этой точке.

Т. Пусть $f : U \rightarrow R^{n+1}$ – гиперповерхность, k_1, \dots, k_n – главные нормальные кривизны в точке $p \in U$. Тогда существует окрестность U_0 точки p и декартова прямоугольная система координат такие, что $p \in U_0 \subseteq U$ и $f(U_0)$ является графиком функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \left(k_1 (x^1)^2 + \dots + k_n (x^n)^2 \right) + o(|x|^2), \quad \text{где } x = (x^1 \dots x^n)^T \in U_0.$$

Доказательство. Рассмотрим собственный ортонормированный базис оператора L_p касательного пространства в т. $p \in U$. Это базис из векторов e_i , задающих главные направления в этой точке, $L_p e_i = k_i e_i$. Соответственно, e_1, \dots, e_n, \vec{N} – базис всего пространства R^{n+1} . Начало отсчета расположим в т. p .

Пусть в указанном базисе e_1, \dots, e_n, \vec{N} поверхность задана как

$$f(u) = (f^1(u), \dots, f^n(u), f^{n+1}(u))^T.$$

Дифференцируем в т. $p \in U$:

$$f'_{u^i}(p) = (f'^1_{u^i}(p), \dots, f'^n_{u^i}(p), f'^{n+1}_{u^i}(p))^T.$$

Т.к. $f'_{u^i}(p) \in T_p f$, то $f'_{u^i}(p) \perp \vec{N}(p) = e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$, и $f'^{n+1}_{u^i}(p) = 0$. Это означает, что матрица Якоби $[f'(p)]$, $\text{rang}[f'(p)] = n$, имеет нулевую $n+1$ -ю строку, а следовательно минор из первых n строк не нулевой. Рассмотрим отображение

$$u = (u^1, \dots, u^n)^T \rightarrow (f^1(u), \dots, f^n(u))^T = (x^1, \dots, x^n)^T = x. \quad (*)$$

Так как ранг его матрицы Якоби равен n , то это – замена параметров. Обозначим диффеоморфизм, обратный $(*)$, как Φ , $x \xrightarrow{\Phi} u$. В координатах x^i поверхность задается как

$$\tilde{f}(x) = (x^1, \dots, x^n, \varphi(x))^T, \quad \text{где } \varphi(x) = f^{n+1}(\Phi(x)) = f^{n+1}(u). \quad (**)$$

Итак, мы представили (в собственном ортонормированном базисе L_p) поверхность вокруг исследуемой точки как график функции $\varphi(x)$. В частности, при $n=2$ $\tilde{f}(x, y) = (x, y, z = \varphi(x, y))^T$.

Разложим $\varphi(x)$ в ряд Тейлора.

$\varphi(0) = f^{n+1}(\Phi(0)) = f^{n+1}(p) = 0$, т.к. перенесли начало координат в т.р.

$\varphi'_{x^i}(0) = \sum_j (f^{n+1})'_{u^j}(p) \frac{\partial u^j}{\partial x^i} = 0$, т.к. $f^{n+1'}(p) = 0$, см. выше.

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \varphi''_{x^i x^j}(0) x^i x^j + \bar{o}(x^2)$$

Дважды дифференцируя (**), получим $\tilde{f}''_{x^i x^j}(0) = (0, \dots, 0, \varphi''_{x^i x^j})$, $\vec{N} = (0, \dots, 0, 1)$ и $h_{ij} = \langle \vec{N}, \tilde{f}''_{x^i x^j} \rangle = \varphi''_{x^i x^j}(0) = k_i \delta_{ij}$ (т.к. $[h_{ij}]$ в собственном базисе оператора L_p диагональна, см. конец предыдущего параграфа). Окончательно получим:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_i k_i (x^i)^2 + \bar{o}(|x|^2).$$

Рассмотрим подробно двумерный случай $f : U \subseteq R^2 \rightarrow R^3$,

$$z = \varphi(x, y) = \frac{1}{2} (k_1 x^2 + k_2 y^2) + o(x^2 + y^2). \quad (6)$$

В этом случае знания полной и средней кривизн достаточно для определения главных кривизн k_1 и k_2 . В зависимости от значений K и H имеется 4 типа точек.

1) **Эллиптическая** точка.

$K > 0$ (k_1 и k_2 одного знака) — поверхность вблизи точки $f(p)$ представляет собой эллиптический параболоид (с точностью до $o(x^2 + y^2)$). Поверхность загибается по главным направлениям в одну и ту же сторону (относительно касательной плоскости): точки, близкие к точке $f(p)$, лежат по одну сторону от касательной плоскости.

2) **Гиперболическая** точка.

$K < 0$ (k_1 и k_2 разных знака) — гиперболический параболоид (седло). Поверхность загибается по главным направлениям в разные стороны; точки, близкие к точке $f(p)$, могут лежать по разные стороны от касательной плоскости.

3) **Параболическая** точка.

$K = 0$, $H \neq 0$ — параболический цилиндр (поверхность искривлена только в одном направлении); всегда есть сколь угодно близкие к $f(p)$ точки, лежащие на касательной плоскости.

4) $K = 0$, $H = 0$ — **точка уплощения**.

Локальная структура этой точки *не является квадратичной!*

Пример. Обезьянье седло (Monkey Saddle): $\varphi(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2$.

Каким условиям должны удовлетворять точки на гиперповерхности, чтобы она являлась плоскостью или сферой?

О. Точка $f(p)$ на гиперповерхности $f : U \rightarrow R^{n+1}$ называется **омбилической**, когда в ней выполняется одно из трех эквивалентных требований:

- 1) $k_1 = k_2 = \dots = k_n$ — все нормальные кривизны равны;
- 2) L_p — скалярный оператор, $L_p = k(p) \cdot I$;
- 3) все ненулевые вектора из касательного пространства $T_p f$ являются главными направлениями.

Теорема (б/д). Если $n \geq 2$, область $U \subseteq R^n$ односвязна и у гиперповерхности $f: U \rightarrow R^{n+1}$ все точки омбилические, то образ $f(U)$:

- плоскость или ее часть ($k = 0$)
- сфера или ее часть ($k \neq 0$)

§9. Нормальная кривизна. Асимптотические линии

Выше мы рассмотрели кривизны, отвечающие главным направлениям (собственным векторам оператора L_p). Здесь мы рассмотрим задачу о нахождении кривизны в произвольном направлении вдоль гиперповерхности.

Утверждение (б/д). Пусть $\alpha(t)$ — кривая вдоль гиперповерхности $f: U \rightarrow R^{n+1}$ и $\alpha(t_0) = f(p)$, тогда

$$II_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) = \langle \ddot{\alpha}(t_0), \vec{N}(p) \rangle.$$

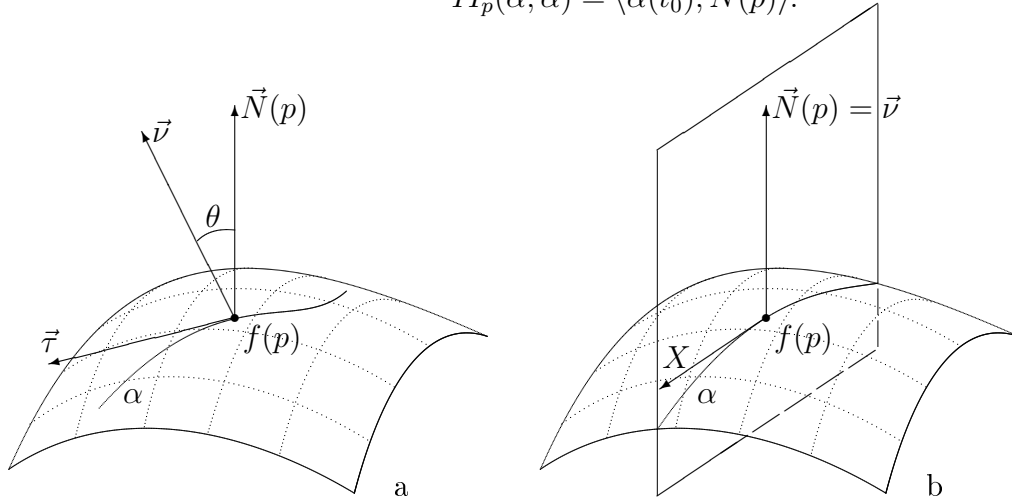


Рис. 11.

Теорема Менье. Пусть $\alpha(t)$ — кривая вдоль гиперповерхности $f: U \rightarrow R^3$, $\alpha(t_0) = f(p)$ и θ — угол между векторами $\vec{N}(p)$ и $\vec{v}(t_0)$ (рис.11a). Тогда

$$k \cos \theta = \frac{II_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})}{I_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})}, \quad (7)$$

где k — кривизна кривой $\alpha(t)$ при $t = t_0$.

Доказательство. $II_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) = \langle \ddot{\alpha}, \vec{N} \rangle = \langle |\dot{\alpha}| \cdot \ddot{\alpha}, \vec{N} \rangle = |\dot{\alpha}|^2 k \langle \vec{v}, \vec{N} \rangle = I_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) k \cos \theta$.
Здесь мы воспользовались уравнением Френе $\ddot{\alpha} = |\dot{\alpha}| k \vec{v}$ и соотношениями $\langle \vec{v}, \vec{N} \rangle = \cos \theta$, $\langle \vec{\tau}, \vec{N} \rangle = 0$, $I_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) = |\dot{\alpha}|^2$.

Формула (7) содержит как характеристики поверхности, так и характеристики кривой, нас же здесь интересует поверхность, а именно, кривизна поверхности в некотором направлении.

Нормальная плоскость к гиперповерхности — это плоскость, натянутая на вектор \vec{N} и некоторый касательный вектор X из $T_p f$ (рис.11b).

Кривая $\alpha(t)$, являющаяся пересечением $f(U)$ и некоторой нормальной плоскости гиперповерхности $f: U \rightarrow R^3$, называется **нормальным сечением**. Для нормального сечения $\vec{v} = \pm \vec{N}$,

$$k = \pm \frac{II_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})}{I_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})}.$$

Нормальной кривизной гиперповерхности $f : U \rightarrow R^{n+1}$ в точке $p \in U$ в направлении вектора $X \in T_p f$ называется число

$$k_N(X) = \frac{II_p(X, X)}{I_p(X, X)}.$$

Если X_i — главное направление, то $k_N(X_i) = k_i$. Действительно,

$$k_N(X_i) = \frac{\langle L_p X_i, X_i \rangle}{\langle X_i, X_i \rangle} = \frac{\langle k_i X_i, X_i \rangle}{\langle X_i, X_i \rangle} = k_i.$$

Т. (б/д) Пусть $X_1 \dots X_n \in T_p f$ — ортонормированный базис из главных направлений гиперповерхности $f : U \rightarrow R^{n+1}$, $k_1 \dots k_n$ — главные нормальные кривизны. Пусть $X \in T_p f$ — ненулевой вектор, образующий углы $\theta_1, \dots, \theta_n$ с $X_1 \dots X_n$ соответственно. Тогда

$$k_N(X) = \sum_{i=1}^n k_i \cos^2 \theta_i$$

Частный случай — теорема Эйлера для $f : U \rightarrow R^3$ — двумерной поверхности в трехмерном пространстве.

В этом случае $\cos \theta_2 = \pm \sin \theta_1$, см. рис.12.

$$k_N(X) = k_1 \cos^2 \theta_1 + k_2 \sin^2 \theta_1 = k_1 + (k_2 - k_1) \sin^2 \theta.$$

Отсюда видно, что k_1 и k_2 — экстремальные значения кривизны, достигаемые на двух взаимноперпендикулярных направлениях.

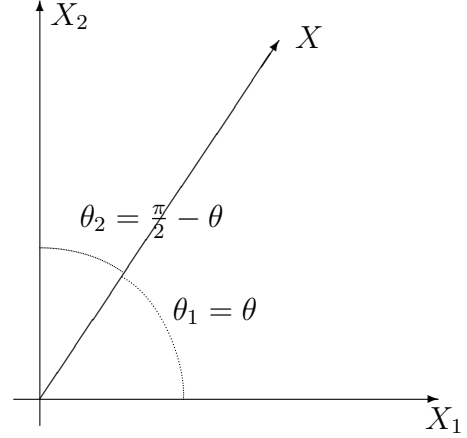


Рис. 12.

Понятие асимптотических векторов. Ненулевой вектор $X \in T_p f$ называется асимптотическим, если $k_N(X) = 0$, то есть если в его направлении кривизна равна 0. Очевидно,

$$\text{вектор } X \text{ является асимптотическим} \Leftrightarrow II_p(X, X) = 0.$$

О. Кривая $\alpha(t) : I \rightarrow f(U)$ вдоль гиперповерхности $f : U \rightarrow R^{n+1}$, называется **асимптотической**, если для любого $t \in I$ ее касательный вектор $\dot{\alpha}(t)$ — асимптотический.

Любая прямая, лежащая на гиперповерхности, является асимптотической линией. Обратное неверно (контрпример — асимптотические линии на торе).

Теорема Бонне (б/д). Всякая гиперповерхность однозначно (с точностью до изометрии объемлющего пространства) определяется своими I и II фундаментальными формами.