Лекции 4-5. Векторы в пространстве.

Определение. Фиксированным вектором называется отрезок AB если указано, какая из точек A или B является его началом, а какая концом. Если A – начало, а B – конец, то фиксированный вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$.

Определение. Длиной фиксированного вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Определение. Фиксированные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ называются, сонаправленными, если $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{A_1B_1}$ и лучи AB и A_1B_1 сонаправлены .

Определение. Два фиксированных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ называются равными, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Пишем $\overrightarrow{AB}$ $=\overrightarrow{A_1B_1}$. Очевидно, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1} \Leftrightarrow$ они совмещаются параллельным переносом.

Для отношения "=" на множестве фиксированных векторов пространства верны следующие свойства:

1. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$,

2. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$,

3. $(\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1} \cap \overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_2B_2}$.

Следовательно, отношение "=" является отношением эквивалентности, и множество фиксированных векторов пространства распадается на классы эквивалентных друг другу фиксированных векторов пространства, непересекающиеся между собой.

Определение. Вектором $\vec{\mathbf{a}}$ называется класс равных между собой фиксированных векторов пространства. Длина вектора $\vec{\mathbf{a}}$ обозначается $|\vec{\mathbf{a}}|$.

Если вектор $\vec{\mathbf{a}}$ задается фиксированным вектором $\overrightarrow{AB}$, то пишем $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{AB}$, и говорим, что $\overrightarrow{AB}$ есть вектор $\vec{\mathbf{a}}$, отложенный из точки A .

Предложение. Для вектороа $\vec{\mathbf{a}}$ и точки A существует и притом единственная точка B, такая , что $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{AB}$.

Доказательство.

Определение. Вектор, имеющий нулевую длину, называется *нулевым* и обозначается $\vec{\mathbf{o}}$. Вектор, длина которого равна 1, называется *единичным*.

Определение. Векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называются *сонаправленными (противоположно направленными),* если задающие их фиксированные векторы сонаправлены (противоположно направлены). Пишем $\vec{\mathbf{a}} \uparrow\uparrow \vec{\mathbf{b}}$ ($\vec{\mathbf{a}} \uparrow\downarrow \vec{\mathbf{b}}$). Два вектора, направления которых совпадают или противоположны, называются коллинеарными. Пишем $\vec{\mathbf{a}} \| \vec{\mathbf{b}}$. Считается, что $\vec{\mathbf{o}}$ коллинеарен каждому вектору. Три и более векторов, параллельных одной плоскости называются *компланарными.*

Определение. Определение суммы двух векторов по правилу треугольника.

Теорема. Данное определение операции сложения корректно.

Доказательство.

Теорема.

$\forall\ \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ верно:

1. $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}$;

2. $(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) + \vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}})$;

3. $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{o}} = \vec{\mathbf{a}}$.

4. $\exists!\ \vec{\mathbf{x}}\ :\ \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$. Такой вектор называется *противоположным* к $\vec{\mathbf{a}}$ и обозначается $-\vec{\mathbf{a}}$.

Доказательство

Определение. Определение суммы двух векторов по правилу параллелограмма.

Определение. *Разностью двух векторов* $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называется такой вектор $\vec{\mathbf{d}}$, что $\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{a}}$. Пишем $\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$.

Теорема. Разность векторов существует и определяется однозначно.

Доказательство.

Определение. *Произведением вектора* $\vec{\mathbf{a}}$ *на число* λ называется такой вектор $\vec{\mathbf{b}}$, что

1. $\vec{\mathbf{a}} \uparrow\uparrow \vec{\mathbf{b}}$, если $\lambda > 0$, и $\vec{\mathbf{a}} \uparrow\downarrow \vec{\mathbf{b}}$, если $\lambda < 0$;

2. $|\vec{\mathbf{b}}| = |\lambda| \cdot |\vec{\mathbf{a}}|$.

Пишем $\vec{\mathbf{b}} = \lambda\vec{\mathbf{a}}$.

Теорема.

1. $\lambda(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = \lambda\vec{\mathbf{a}} + \lambda\vec{\mathbf{b}}$;

2. $\lambda(\mu\vec{\mathbf{a}}) = (\lambda\mu)\vec{\mathbf{a}}$;

3. $(\lambda + \mu)\vec{\mathbf{a}} = \lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{a}}$;

4. $1 \cdot \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}$.

3. ненулевые векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ коллинеарны $\Leftrightarrow$ существует такое число λ, что $\vec{\mathbf{b}} = \lambda\vec{\mathbf{a}}$.

Доказательство.

Определение. Пусть $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ – два ненулевых вектора. Отложим их из одной точки O: $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{OB}$. Тогда углом между векторами $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называется угол между лучами OA и OB, т.е. $\alpha = \angle AOB$. Пишем

$\alpha = \angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})$.

Определение. Скалярным произведением двух векторов $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называется <u>*число*</u>

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}|\,|\vec{\mathbf{b}}| \cos\angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}). \qquad (1)$$

Число $\vec{\mathbf{a}}^2 = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}}$ называется скалярным квадратом вектора $\vec{\mathbf{a}}$.

Теорема. Скалярный квадрат $\vec{\mathbf{a}}^2 = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}}$ вектора равен квадрату его длины $|\vec{\mathbf{a}}|^2$.

2. Для того, чтобы ненулевые векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю ($\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0$).

Доказательство.

Теорема.

1. $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{a}}$;

2. $(\lambda\vec{\mathbf{a}}) \cdot \vec{\mathbf{b}} = \lambda(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})$;

3. $\vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}}$;

4. $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} \geq 0$, и $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = 0 \Leftrightarrow \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{o}}$

Доказательство.

Замечание.

$$\cos\angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) = \frac{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}|\,|\vec{\mathbf{b}}|}\,. \qquad (2)$$

Скалярное произведение обозначается также, как: $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})$.

Теорема. Пусть $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{e}}$ - некомпланарные векторы в пространстве. Для любого вектора $\vec{\mathbf{c}}$ существуют такие числа x_1, x_2, x_3 что

$$\vec{\mathbf{c}} = x_1\vec{\mathbf{a}} + x_2\vec{\mathbf{b}} + x_3\vec{\mathbf{e}} \qquad (3)$$

причём x_1, x_2, x_3 определены однозначно.

Доказательство.

Представление вектора $\vec{\mathbf{c}}$ в виде (3) называется разложением по базису, состоящему из векторов $\{\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{e}}\}$. Числа x_1, x_2, x_3 называются координатами вектора. В этом случае записывают так $\vec{\mathbf{c}} = (x_1, x_2, x_3)$.

Определение. Базис $\{\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{e}}\}$ называется ортонормированным, если

$|\vec{\mathbf{a}}| = |\vec{\mathbf{b}}| = |\vec{\mathbf{e}}| = 1$ и все векторы попарно ортогональны.

Выберем произвольную точку O в пространстве, которую назовём *началом координат*. Прямые l_1, l_2 ,l_3 вместе с выбранными на них фиксированными векторами $\overrightarrow{OA}=\vec{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{\mathbf{e}}$ называются координатными осями. Координатные оси вместе с ортонормированным базисом $\{\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{e}}\}$ и точкой O называются *декартовой системой координат.* Векторы $\{\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{e}}\}$ в этом случае принято обозначать $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ и называть базисными ортами.

Пусть C - произвольная точка в пространстве . Вектор $\vec{\mathbf{c}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ называется *радиус-вектором* точки C в данной системе координат. Координаты (x, y,z) вектора $\vec{\mathbf{c}}$, где $\vec{\mathbf{c}}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ называются координатами точки точки C в данной системе координат и записываются в виде $C(x,y,z)$.

Пусть произвольный вектор $\vec{\mathbf{c}}$ в декартовой СК имеет координаты (x, y,z), т.е. $\vec{\mathbf{c}}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.

Теорема.

$$\vec{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{i}=|\vec{\mathbf{c}}||\mathbf{i}|\cos\angle(\vec{\mathbf{c}},\mathbf{i})=|\vec{\mathbf{c}}|\cos\angle(\mathbf{i},\vec{\mathbf{c}})=x,$$

$$\vec{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{j}=|\vec{\mathbf{c}}||\mathbf{j}|\cos\angle(\vec{\mathbf{c}},\mathbf{j})=|\vec{\mathbf{c}}|\cos\angle(\mathbf{j},\vec{\mathbf{c}})=y,$$

$$\vec{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{k}=|\vec{\mathbf{c}}||\mathbf{k}|\cos\angle(\vec{\mathbf{c}},\mathbf{k})=|\vec{\mathbf{c}}|\cos\angle(\mathbf{k},\vec{\mathbf{c}})=z.$$

Пусть $\alpha=\angle(\mathbf{i},\vec{\mathbf{c}})$, $\beta=\angle(\mathbf{j},\vec{\mathbf{c}})$, $\gamma=\angle(\mathbf{k},\vec{\mathbf{c}})$ Тогда величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{\mathbf{c}}$.

Доказательство.

Теорема. Пусть $\vec{\mathbf{c}}=(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{\mathbf{d}}=(y_1, y_2, y_3)$.Тогда

$$\vec{\mathbf{c}}+\vec{\mathbf{d}}=(x_1\vec{\mathbf{a}}+x_2\vec{\mathbf{b}}+x_3\vec{\mathbf{e}})+(y_1\vec{\mathbf{a}}+y_2\vec{\mathbf{b}}+y_3\vec{\mathbf{e}})=(x_1+y_1)\vec{\mathbf{a}}+(x_2+y_2)\vec{\mathbf{b}}+(x_3+y_3)\vec{\mathbf{e}}.$$

$$\lambda\vec{\mathbf{c}}=\lambda(x_1\vec{\mathbf{a}}+x_2\vec{\mathbf{b}}+x_3\vec{\mathbf{e}})=(\lambda x_1)\vec{\mathbf{a}}+(\lambda x_2)\vec{\mathbf{b}}+\lambda x_3\vec{\mathbf{e}}.$$

Доказательство.

Пусть известны координаты точек $P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(y_1, y_2, y_3)$, а $\vec{\mathbf{d}}=\overrightarrow{PQ}$.

Теорема. $\vec{\mathbf{d}}=\vec{\mathbf{q}}-\vec{\mathbf{p}}$, где $\vec{\mathbf{p}}=(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{\mathbf{q}}=(y_1, y_2, y_3)$, Значит, $\vec{\mathbf{d}}=(y_1-x_1, y_2-x_2, y_3-x_3)$.

Доказательство.

Теорема.

Расстояние между точками $P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(y_1, y_2, y_3)$ в пространстве равно $PQ=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}$.

Доказательство.

Теорема. Пусть $\vec{\mathbf{c}}=(x_1, x_2,x_3)$, $\vec{\mathbf{d}}=(y_1, y_2,y_3)$ декартовы координаты векторов $\vec{\mathbf{c}}$, $\vec{\mathbf{d}}$. Тогда

$$\vec{\mathbf{c}}\cdot\vec{\mathbf{d}}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

Доказательство.

Следствие. Пусть $\vec{\mathbf{c}}=(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{\mathbf{d}}=(y_1, y_2, y_3)$ декартовы координаты векторов $\vec{\mathbf{c}}$, $\vec{\mathbf{d}}$.
Тогда

$$\cos\angle(\vec{\mathbf{c}},\vec{\mathbf{d}})=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}. \qquad (4)$$

Доказательство.

Векторное и смешанное произведение векторов.

Определение. *Векторным произведением двух векторов* $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называется такой *вектор* $\vec{\mathbf{c}}$, что

1. $\vec{\mathbf{c}}\perp\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{c}}\perp\vec{\mathbf{b}}$;
2. $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$ – правая тройка;
3. $|\vec{\mathbf{c}}| = |\vec{\mathbf{a}}|\,|\vec{\mathbf{b}}|\sin\angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})$.

Теорема (свойства векторного произведения.).

Свойства векторного произведения.

1. $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{a}}$,
2. $(\lambda\vec{\mathbf{a}})\times\vec{\mathbf{b}} = \lambda(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})$,
3. $\vec{\mathbf{a}}\times(\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{c}}$.

Доказательство.

Теорема. Векторное произведение двух векторов, заданных в декартовой *системе координат* своими координатами $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$ *и* $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$, вычисляется по формуле:

$$\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} = \qquad (5)$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{k}\ .$$

Доказательство.

Примеры.

Определение. *Смешанным произведением трех векторов* $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ называется число $(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\cdot\vec{\mathbf{c}}$. Оно обозначается $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{c}}$, $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}}$ или $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$.

Теорема. Модуль смешанного произведения трех векторов $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$

численно равен объему параллелепипеда построенного на направленных отрезках $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, представляющих эти векторы, отложенные из одной точки.

Доказательство.

Теорема.

Свойства смешанного произведения.

1. $(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\cdot\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})$;

2. $\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{a}}$.

3. $\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}} = -\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{c}} = -\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{a}}$.

4. $(\lambda\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}}(\lambda\vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}(\lambda\vec{\mathbf{c}}) = \lambda(\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}})$.

5. $(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{d}} + \vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{d}}$.

Доказательство.

Примеры.