Вопрос 1.

<u>Линейный оператор. Примеры.</u>

Оператором называется правило, по которому каждому элементу **x** некоторого непустого множества ***X*** ставится в соответствие единственный элемент **y** некоторого непустого множества ***Y***. Говорят, что оператор действует из ***X*** в ***Y***.

Т.е

$$\boxed{f : X \to Y ; \forall x \in X \exists ! \, y \in Y : f(x) = y}$$

Определение 1. Пусть V и U — векторные пространства над полем K. Отображение

$$\varphi \colon V \to U$$

называется *линейным*, если

1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ для любых $a, b \in V$;
2) $\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$ для любых $\lambda \in K$, $a \in V$.

Примеры

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = e^x$
2. $f : \mathbb{R}^{n \times n} \to R;\ f(A) = \det(A)$
3. $f : P \setminus \{0\} \to \mathbb{Z};\ f(p(x)) = \deg(p(x))$

3'. $f : P \setminus \{0\} \to \mathbb{R};\ f(p(x)) = \deg(p(x))$

4. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}; f(n) = \frac{n-1}{n+1}$

Определение 1. *Линейным оператором* (или *линейным преобразованием*) в векторном пространстве V называется линейное отображение пространства V в себя.

Более подробно, линейный оператор — это отображение $\mathcal{A} \colon V \to V$, удовлетворяющее условиям:

1) $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$ для любых $x, y \in V$;
2) $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}x$ для любых $x \in V$, $\lambda \in K$.

Примеры.

V^2: гомотетия, поворот, проекция на прямую, отражение относительно прямой;

дифференцирование в P_n;

линейные операторы в R^n;

в $R^{n \times n}$ – умножение на матрицу;

Матрица линейного оператора.

ПРИМЕР 7. *Единичные строки*

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),$$
$$e_2 = (0, 1, \ldots, 0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

составляют базис пространства K^n. Координатами строки $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ в этом базисе служат числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Конечно, в пространстве K^n имеются и другие базисы.

Линейное отображение φ: $V \to U$ однозначно определяется образами базисных векторов пространства V. В самом деле, пусть $\{e_i\colon\ i \in I\}$ — базис пространства V; тогда для любого вектора $x = \sum\limits_i x_i e_i$ имеем

$$\varphi(x) = \sum_i x_i \varphi(e_i).$$

С другой стороны, если $u_i \in U$ $(i \in I)$ — произвольные векторы, то отображение φ: $V \to U$, определяемое по формуле

$$\varphi(x) = \sum_i x_i u_i,$$

как легко видеть, является линейным и $\varphi(e_i) = u_i$.

Эти соображения позволяют получить аналитическое описание линейных отображений. Сделаем это для пространств строк. Пусть

$$\varphi\colon K^n \to K^m$$

— линейное отображение. Применим его к единичным строкам $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства K^n (см. пример 1.7.7). Мы получим какие-то строки

$$\varphi(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \in K^m \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Числа a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ образуют матрицу A размера $m \times n$, которая называется *матрицей линейного отображения* φ. (Обратите внимание, что координаты строки $\varphi(e_j)$ записываются в j-м столбце матрицы A.)

Определение 2. *Матрицей линейного оператора* $\mathcal{A}$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ называется матрица $A = (a_{ij})$, определяемая из равенств

$$\mathcal{A} e_j = \sum_i a_{ij} e_i. \qquad (1)$$

Иначе говоря, в j-м столбце матрицы A стоят координаты вектора $\mathcal{A} e_j$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$. (Обратите внимание, что, в отличие от определения матрицы линейного отображения, в этом определении фигурирует только один базис!)

Преобразования, которые можно делать с матрицами линейных операторов и не только:

L; базис Б$=[e_1\ e_2\ \ldots\ e_n]$;

$\mathcal{A}(e_i) = \sum a_{ji} e_j = \text{Б}A^i$; $\mathcal{A}\text{Б} = [\mathcal{A}e_1 \ldots \mathcal{A}e_n] = [\text{Б}A^1 \ldots \text{Б}A^n] = \text{Б}A$

$x = \sum x_i e_i = \text{Б}X$;

$y = \text{Б}Y = \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\sum x_i e_1) = \sum x_i \mathcal{A}(e_i) = \sum\limits_i x_i \sum\limits_j a_{ji} e_j = \sum_j (\sum_i a_{ji} x_i) e_j \Rightarrow Y = AX$

Сделаем это элегантнее, по-винберговски
$y = \text{Б}Y = \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\text{Б}X) =$ (в силу линейности оператора) $= \mathcal{A}(\text{Б})X = (\text{Б}A)X = \text{Б}(AX) \Rightarrow Y = AX$

Утверждения и замечания.

Простое, но важное **Утверждение.** Если $\text{Б}A = \text{Б}B$, где A и B – матрицы $n \times n$, то $A = B$.

Замечание. Похожее утверждение было в первом семестре - о единственности разложения по базису: если $\text{Б}X = \text{Б}Y$, то $X = Y$ (X и Y столбцы). Кстати, это замечание наводит на мысль, что матрицы в этом утверждении не обязаны быть квадратными – они должны быть одинакового размера $n \times k$.

Примеры матриц операторов:

1) Гомотетия в V^3.
2) Поворот в V^2
3) Дифференцирование в P_n.
4) Оператор умножения на матрицу в $\mathbb{R}^n$ (эта матрица и будет матрицей оператора в естественном базисе).
5) Оператор умножения на матрицу в $\mathbb{R}^{n\times n}$ (на примере $n = 2$).

6) Оператор **D** дифференцирования многочленов, $\boldsymbol{M_n}$ ставит в соответствие каждому многочлену $\boldsymbol{P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n}$ из $\boldsymbol{M_n}$ многочлен $\boldsymbol{Q_{n-1}(t) = a_1 + 2a_2 t + \ldots + na_n t^{n-1}}$ из $\boldsymbol{M_{n-1}}$.

В пространстве $\boldsymbol{M_n}$ определен естественный базис $\boldsymbol{1, t, t^2}, \ldots, \boldsymbol{t^n}$, а в пространстве $\boldsymbol{M_{n-1}}$ — базис $\boldsymbol{1, t, t^2, t^{n-1}}$. Поскольку $\boldsymbol{D(1) = 0, D(t) = 1, D(t_2) = 2t, \ldots, D(t_n) = (n-1)t_{n-1}}$, то матрица оператора дифференцирования имеет n строк, (n + 1) столбец:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{D}\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ \ldots \\ (n-1)a_{n-1} \\ na_n \end{pmatrix} = a_1 + 2a_2 t + \ldots + na_n t^{n-1}.$$

7)

Линейные операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ действуют в 3-х мерном линейном пространстве $\boldsymbol{X} = \{\mathbf{x} |\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)\}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{A}(\mathbf{x}) = (2x_1, x_2 + 5x_3, -x_1),\ \boldsymbol{B}(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2, x_3 + x_2, 0) \text{ для всех } \mathbf{x} \text{ из } \boldsymbol{X}.$$

Матрицы операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ имеют соответственно вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 + 5x_3 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Как меняется матрица линейного оператора при замене базиса.</u>

Как меняется матрица оператора при замене базиса.
Пусть C_{12} – матрица перехода от базиса $Б_1$ к базису $Б_2$, то есть

$$Б_2 = Б_1 C_{12}$$

Для упрощения записи матрицу перехода будем обозначать просто C, без индексов.
Преобразуем:
$\mathcal{A}Б_2 = Б_2 A_2 = Б_1 C A_2;$
$\mathcal{A}Б_2 = \mathcal{A}(Б_1 C) = \mathcal{A}(Б_1)C = (Б_1 A_1)C = Б_1(A_1 C)$
$\Rightarrow CA_2 = A_1 C;\ A_2 = C^{-1}A_1 C$ Еще раз запишем в отдельной строке:

$$A_2 = C^{-1}A_1 C$$

А если снова приделать итндексы к C и вспомнить, что $C_{12}^{-1} = C_{21}$, то получится

$$A_2 = C_{21} A_1 C_{12}$$

Подобные матрицы.

Матрицы A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называются подобными ($A \sim B$), если существует матрица C такая, что $A = C^{-1}BC$ (естественно, такая матрица C обязана быть квадратной и невырожденной). Мотивировка такого определения очевидна.

Подобные матрицы можно рассматривать как матрицы одного линейного оператора в разных базисах.

Свойства подобных матриц (которые говорят о том, что подобие является отношением эквивалентности), что приводит в свою очередь к тому, что множество всех матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$ разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных элементов (подобных матриц).

1) $A \sim A$ (рефлексивность)
2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (симметричность)
3) $A \sim B \sim D \Rightarrow A \sim D$ (транзитивность)

Доказательство очевидно, причем к нему можно подойти с двух точек зрения.

Ядро, образ, дефект, ранг линейного оператора.

Определение 2. *Образом* линейного отображения $\varphi\colon V \to U$ называется подмножество

$$\operatorname{Im} \varphi = \{\varphi(a)\colon a \in V\} \subset U,$$

а *ядром* — подмножество

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{a \in V\colon \varphi(a) = 0\} \subset V.$$

В общем случае размерность подпространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ называется *рангом линейного оператора* $\mathcal{A}$ и обозначается через $\operatorname{rk} \mathcal{A}$. В силу следствия 1 теоремы 2.3.3 она равна рангу матрицы оператора $\mathcal{A}$ (в любом базисе).

*Размерность ядра называется **дефектом линейного оператора** $\mathcal{A}$.*

Уже известно, что образ – это линейное подпространство, причем $\mathcal{A}$ – эпиморфизм титтк $\operatorname{Im} \mathcal{A} = V$.

Теорема. Образ оператора совпадает с линейной оболочкой образов элементов базиса.
Почти очевидный факт.

Следствие. Размерность образа совпадает с рангом матрицы в любом базисе.
Это оправдывает название размерности образа оператора рангом оператора.

Уже известно, что ядро – линейное подпространство, и что $\mathcal{A}$ мономорфизм титтк ядро $= \{0\}$.

Теорема. Ядро состоит из векторов, столбцы координат которых образуют множество решений однородной системы $AX = 0$. Почти очевидный факт.

Следствие. Дефект оператора, то есть размерность ядра оператора плюс ранг оператора (то есть ранг матрицы оператора) равно размерность пространства.

Действия над линейными операторами.

Пусть V – линейное пространство размерности n с зафиксированным базисом Б. Рассмотрим множество $L(V, V) = L(V)$ всех линейных операторов на V и сопоставим каждому оператору его матрицу в этом базисе. В результате возникает функция

$$\varphi_{Б} : L(V) \to \mathbb{R}^{n\times n}$$

Вместо $\varphi_{Б}$ будем чаще писать φ.

Наша задача: доказать, что это биекция (то есть инъекция и сюръекция), а также что это линейное отображение (перед этим надо в множестве линейных операторов ввести линейные операции и доказать, что получается линейное пространство). В результате это отображение можно назвать мономорфизмом, эпиморфизмом и значит и изоморфизмом. Но все по порядку.

1) φ – инъекция. Если у двух операторов оказалась одинаковая мотрица, значит, эти операторы переводят базисные векторы в одинаковые векторы, а тогда эти операторы совпадают на всех векторах.

2) φ – сюръекция. Взяли произвольную матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Зададим функцию $\mathcal{A}$ на векторе $x = БX \in V$ формулой $\mathcal{A}(x) = БAX$. Докажем линейность $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}(x + y) = БA(X + Y) = Б(AX + AY) = БAX + БAY = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$

$\mathcal{A}(\lambda x) = БA(\lambda X) = \lambda(БAX) = \lambda\mathcal{A}(x)$.

Ясно, что A – матрица этого оператора. Из 1) и 2) следует, что φ – биекция.

Введем на $L(V)$ линейные операции.

1) $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)(x) = \mathcal{A}_1(x) + \mathcal{A}_2(x)$ 2) $(\lambda\mathcal{A})(x) = \lambda\mathcal{A}(x)$

А заодно введем и умножение: 3) $(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2)(x) = \mathcal{A}_1(\mathcal{A}_2(x))$.

Теорема. $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$; $\lambda\mathcal{A}$; $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 \in L(V)$ (при условии, конечно, что $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A} \in L(V)$.

Доказательство элементарно.

Теорема φ сохраняет все три операции. То есть это не только линейное отображение, но и отображением алгебр.

Из всего этого следует, что $L(V)$ и $\mathbb{R}^{n\times n}$ изоморфны, причем не только как линейные пространства, но и как алгебры. Это помогает иногда перемножать матрицы, возводить в степень. Скажем, матрица, у которой первый столбец есть $(0; 1)^T$, а второй столбец $(-1; 0)^T$ – это матрица поворота плоскости на 90 градусов. Поэтому эта матрица в четвертой степени равна единичной.

Невырожденный оператор.

Линейный оператор наз-ся невырожденным, если он задается невырожденной матрицей.

$\mathcal{A} \in L(V)$; $\mathcal{A}^{-1}$ – это такой оператор, что $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{E}$ – тождественный оператор ("ленивый"оператор), оставляющий все векторы на месте; естественно, матьрица такого оператора единичная.

Теорема. Если обратный оператор существует, то он линеен.

Доказательство. $\mathcal{A}^{-1}(\lambda x + \mu y) = \mathcal{A}^{-1}(\lambda(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})(x) + \mu(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})(y)) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}((\lambda\mathcal{A}^{-1}(x) + \mu\mathcal{A}^{-1}(y)) = \lambda\mathcal{A}^{-1}(x) + \mu\mathcal{A}^{-1}(y)$

Следствие Матрица оператора $\mathcal{A}^{-1}$ обратна матрице оператора $\mathcal{A}$.

Это почти очевидно - поскольку при перемножении операторов матрицы перемножаются, а матрица тожественного оператора единичная, матрица обратного оператора, умноженнвя на матрицу самого оператора, дает единичную матрицу и в том, и в том порядке

Теорема. Критерий существования $\mathcal{A}^{-1}$ - $\det A \neq 0$. Почти очевидный факт.

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Рассмотрим линейный оператор ***A***, действующий в линейном пространстве ***X***: **y** = ***A***(**x**), ∀**x** ∈ ***X***, **y** ∈ ***X***.
Число λ называется *собственным значением* оператора ***A***, если существует такой ненулевой вектор **x**, что справедливо равенство ***A***(**x**) = λ·**x**. Любой ненулевой вектор **x** ≠**0**, удовлетворяющий этому уравнению, называется *собственным вектором оператора **A***, отвечающим собственному значению λ.

$$\boldsymbol{A}(\mathbf{x}) = \lambda\cdot\mathbf{x},\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0},\ \mathbf{x} \in \boldsymbol{X}.$$

Собственные векторы определяют направление прямых, которые под действием оператора переходят в себя.

Характеристический многочлен, характеристическое уравнение.

Характеристическим многочленом f(λ) оператора A называется функция

$$f(\lambda) = \det(A_e - \lambda E)$$

где A_e **-** матрица оператора в некотором базисе е**, E -** единичная матрица. Характеристический многочлен не зависит от выбора базиса.

Теорема. Число λ является собственным значением оператора А тогда и только тогда, когда оно - вещественный корень его характеристического многочлена.

Теорема приводит к следующему способу нахождения собственных векторов оператора:

1) находятся все вещественные корни характеристического многочлена оператора,

2) для каждого вещественного корня λ_k решения x_e = (x1, x2, ... , xn) однородной системы уравнений

$$(A_e - \lambda_k E)\, x_e = 0 \qquad (*)$$

относительно неизвестных x_e дают координаты (x1, x2, ... , xn) собственных векторов u в базисе е.

Пусть λ_k есть собственное значение оператора А. Линейное подпространство L_k пространства V, состоящее из собственных векторов оператора А, отвечающих собственному значению λ_k, называется **собственным подпространством** оператора А.

Теорема. Пусть λ_j - вещественный корень характеристического уравнения кратности k, тогда размерность собственного подпространства L_j не превосходит k.

Оператор простого типа.

Оператор простого типа – если у него есть базис, состоящий из собственных векторов.

Собственный базис линейного оператора – базис, состоящий из собственных векторов этого оператора.

Теорема. Базис собственный => матрица оператора диагональная, на диагонали – собственные значения.

Теорема. Собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям – линейно независимы.

Теорема. Достаточное условие простоты оператора (иными словами достаточное условие существования собственного базиса). Если все корни характеристического уравнения различны и действительные, то это оператор простого типа.

Это условие не является необходимым. Пример – тождественный оператор, все его корни = 1, или любой скалярный оператор – то есть оператор гомотетии.

Критерий простоты оператора. Оператор простого типа тогда и только тогда, когда все корни характеристического уравнения действительные, и размерности собственных подпространств равны кратностям соответствующих корней.

Теорема о линейной независимости собственных векторов с различными собственными значениями.

Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.

В самом деле, пусть **s1 и s2** — собственные векторы, соответствующие собственным значениям **λ1 и λ2**, причем **λ1≠λ2**.

Составим произвольную линейную комбинацию этих векторов и приравняем ее нулевому столбцу:

α1·s1+α2·s2=o. (7.16)

Надо показать, что это равенство возможно только в тривиальном случае, когда $\boldsymbol{\alpha_1=\alpha_2=0}$. Действительно, умножая обе части на матрицу A и подставляя $\boldsymbol{As_1=\lambda_1 s_1}$ **и** $\boldsymbol{As_2=\lambda_2 s_2}$ имеем

$$\mathbf{A}(\alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2)=o\Leftrightarrow\alpha_1 As_1+\alpha_2 As_2=o\Leftrightarrow\alpha_1\lambda_1 s_1+\alpha_2\lambda_2 s_2=o.$$

Прибавляя к последнему равенству равенство (7.16), умноженное на $(-\lambda_2)$, получаем

$$\alpha_1\cdot\lambda_1\cdot s_1-\alpha_2\cdot\lambda_2\cdot s_2=o\Leftrightarrow\alpha_1\cdot(\lambda_1-\lambda_2)\cdot s_1=o.$$

Так как $\boldsymbol{s_1\neq o}$ и $\boldsymbol{\lambda_1\neq\lambda_2}$, делаем вывод, что $\boldsymbol{\alpha_1=0\alpha_1=0}$. Тогда из (7.16) следует, что и $\boldsymbol{\alpha_2=0}$ (поскольку $\boldsymbol{s_2\neq o}$). Таким образом, собственные векторы $\boldsymbol{s_1}$ **и** $\boldsymbol{s_2}$ линейно независимы. Доказательство для любого конечного числа собственных векторов проводится по индукции.

Вопрос 3.

Билинейная и квадратичная форма

Пусть $\varphi(x,y)$ числовая функция, заданная на линейном пространстве, то есть $\varphi: L \times L \to R$. Если $\varphi(x,y)$ линейна по каждому из своих аргументов, то её называют *билинейной формой*. Таким образом билинейная форма – это функция $\varphi(x,y)$ заданная на линейном пространстве L, что при всех $x, y, z \in L$ и $\lambda \in R$ выполняются равенства:

1. $\varphi(x+z,y) = \varphi(x,y) + \varphi(z,y) \quad \varphi(x,y+z) = \varphi(x,y) + \varphi(x,z)$
2. $\varphi(\lambda x,y) = \lambda\varphi(x,y) \quad \varphi(x,\lambda y) = \lambda\varphi(x,y)$.

Билинейная форма называется *симметричной*, если $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

Примером симметричной билинейной формы является скалярное произведение $\varphi(x,y) = (x,y)$.

Если в билинейной форме $\varphi(x,y)$ положить $y = x$, то получим так называемую *квадратичную форму* $\varphi(x,x)$.

Квадратичная форма $\varphi(x,x)$ называется *положительно определённой*, если для $\forall x \in L, x \neq 0$ будет $\varphi(x,x) > 0$. В том случае, когда для $\forall x \in L, x \neq 0, \varphi(x,x) \geqslant 0$ квадратичная форма $\varphi(x,x)$ называется *неотрицательной*. Аналогично определяются *отрицательно определённая и неположительная квадратичные формы*. Положительно определённые и отрицательно определённые квадратичные формы называют также *знакопостоянными*.

Примеры квадратичных форм:

1) $x = (x_1, x_2), x \in L_2, \varphi(x,x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.
2) $x = (x_1, x_2, x_3), x \in L_3, \varphi(x,x) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 - x_3^2$.
3) $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), x \in L_4, \varphi(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.
4) $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), x \in L_4, \varphi(x,x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$.

Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — базис в $\boldsymbol{L}$. И пусть для векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\boldsymbol{L}$ заданы разложения $\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \ldots + x_n \cdot \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{y} = y_1 \cdot \mathbf{e}_1 + y_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \ldots + y_n \cdot \mathbf{e}_n$.

Тогда для билинейной формы $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ справедливо представление

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \varphi(\mathbf{e_i},\mathbf{e_j}) x_i y_j .$$

Обозначим $\varphi_{ij} = \varphi(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j})$. Тогда для билинейной формы формы $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ справедливо матричное представление $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{y}$:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица $\mathbf{\Phi}$ называется *матрицей билинейной* формы.

Ранг матрицы билинейной формы не зависит от выбора базиса и называется *рангом билинейной формы*.
Дефектом билинейной формы называется разность между размерностью пространства и рангом билинейной формы: $d = n - r$.
Билинейная форма называется *невырожденной*, если её дефект равен нулю.

Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса

Теорема 2. Пусть в линейном пространстве V_n заданы два базиса:
$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n)$ (6)
И
$(\bar{e}_{1'}, \bar{e}_{2'}, ..., \bar{e}_{n'})$, (7)
И пусть $B = (b_{ij})$ и $B' = (b_{i'j'})$ — матрицы билинейной формы $b(\bar{x}, \bar{y})$ в базисах (6) и (7) соответственно. Тогда
$B' = T^T B\, T$, (8)
Где T – матрица перехода от (6) к (7).
►Воспользуемся определением билинейной формы и ее матрицы:
$b_{i'j'} = b(\bar{e}_{i'}, \bar{e}_{j'}) = b(t^i_{i'}\bar{e}_i, t^j_{j'}\bar{e}_j) = t^i_{i'} t^j_{j'} b(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = t^i_{i'} t^j_{j'} b_{ij} = t_{i'}{}^{i} b_{ij} t^j_{j'}$. (9)
Заметим, что в правой части равенства (9) индекс i' должен соответствовать номеру строки, а индекс i — номеру столбца (по согласованию с левой частью), поэтому из (9) и вытекает равенство (8).◄
Следствие. Если матрица билинейной формы в одном из базисов пространства V_n не вырождена, то в любом другом базисе матрица этой билинейной формы также не вырождена.

Положительно определенная билинейная форма

Определения. Квадратичная форма называется ***Положительно определенной***, если она принимает положительные значения для любого нетривиального набора переменных.
Квадратичная форма называется ***Отрицательно определенной***, если она принимает отрицательные значения для любого нетривиального набора переменных.
Квадратичная форма называется ***Положительно (отрицательно) полуопределенной***, если для любого нетривиального набора переменных она принимает либо положительное (отрицательное) значение, либо 0.
Квадратичная форма ***Знаконеопределена***, если существует нетривиальный набор переменных, при которых она принимает положительное значение, и существует нетривиальный набор переменных, при котором она принимает отрицательное значение.
Лемма 1. Эквивалентные квадратичные формы принимают одинаковые значения при соответствующих наборах переменных.
Следствие. Если квадратичная форма положительно определена, то все эквивалентные ей квадратичные формы также положительно определены.
Лемма 2 (***Необходимое условие знакоопределенности***). Если квадратичная форма положительно (отрицательно) определена, то все ее коэффициенты при квадратах положительны (отрицательны).

Теорема (Первый критерий знакоопределенности). Для того чтобы квадратичная форма была положительно (отрицательно) определенной необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты какого-либо ее канонического вида были положительными (отрицательными).
Следствие. Матрица положительно определённой квадратичной формы имеет положительный определитель.
Теорема (критерий Сильвестра). Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были положительными. Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы нечетного порядка были отрицательными, а четного – положительными.

Квадратичная форма

Канонический вид квадратичной формы

Мы уже говорили о том, что в каждом базисе линейного пространства V_n квадратичная форма задается однородным многочленом второй степени, который называется видом данной квадратичной формы.

Каноническим видом квадратичной формы называется такой ее вид, в котором коэффициенты при произведениях разноименных переменных равны 0, то есть $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Нормальным видом действительной квадратичной формы называется такой ее канонический вид, в котором отличные от нуля коэффициенты при квадратах равны 1 или -1. Все отличные от нуля коэффициенты при квадратах ***Нормального вида***комплексной квадратичной формы равны 1.

Теорема 1. Для любой квадратичной формы, заданной на линейном пространстве V_n в V_n существует базис, в котором эта квадратичная форма имеет канонический вид, и существует базис, в котором она имеет нормальный вид.

Или (другая формулировка этой же теоремы):

Для любой квадратичной формы от *N* переменных существует линейное невырожденное преобразование переменных, приводящее ее к каноническому виду, и существует линейное невырожденное преобразование переменных, приводящее ее к нормальному виду.

Теорему 1 мы докажем позже, а сейчас только приведем пример приведения квадратичной формы к каноническому виду методом, который называется ***Методом Лагранжа*** или выделения полных квадратов. Он заключается в следующем: выбираем переменную, коэффициент при квадрате которой отличен от 0, и выделяем полный квадрат, включающий в себя все слагаемые с этой переменной. С этой целью записываем перед скобкой число, обратное выбранному коэффициенту, а в скобках — половину производной по выбранной переменной. За скобками остается квадратичная форма, количество переменных которой уже на единицу меньше. После конечного числа шагов получаем канонический вид.

Теорема 2 (***Закон инерции***). Все канонические виды одной квадратичной формы на действительном линейном пространстве имеют одинаковое число положительных коэффициентов и одинаковое число отрицательных коэффициентов. Нормальный вид квадратичной формы определяется однозначно с точностью до порядка следования коэффициентов.

Евкли́дово простра́нство (также эвкли́дово простра́нство) — в изначальном смысле, пространство, свойства которого описываются аксиомами евклидовой геометрии. В этом случае предполагается, что пространство имеет размерность, равную 3.

В современном понимании, в более общем смысле, может обозначать один из сходных и тесно связанных объектов: конечномерное вещественное векторное пространство R^n с введённым на нём положительно определённым скалярным произведением, либо метрическое пространство, соответствующее такому векторному пространству.

Для определения евклидова пространства проще всего взять в качестве основного понятие скалярного произведения. Евклидово векторное пространство определяется как конечномерное векторное пространство над полем вещественных чисел, на векторах которого задана вещественнозначная функция (. , .) обладающая следующими тремя свойствами:

- *Билинейность: для любых векторов u,v,w и для любых вещественных чисел a,b (au + bv, w)=a(u,w)+b(v,w)*
- *Симметричность: для любых векторов u,v (u,v)=(v,u)*
- *Положительная определённость: для любого u (u,u)>=0 причём если (u,u)=0 то u = 0.*

Пример евклидова пространства — координатное пространство R^n состоящее из всевозможных кортежей вещественных чисел (x1,x2, …, xn) скалярное произведение в котором определяется формулой:

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Определение 2. Матрицей Грама системы векторов $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k \in \mathbb{R}^n$ называется $k \times k$-матрица

$$\begin{pmatrix} (\bar{x}_1, \bar{x}_1) & (\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \cdots & (\bar{x}_1, \bar{x}_k) \\ (\bar{x}_2, \bar{x}_1) & (\bar{x}_2, \bar{x}_2) & \cdots & (\bar{x}_2, \bar{x}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\bar{x}_k, \bar{x}_1) & (\bar{x}_k, \bar{x}_2) & \cdots & (\bar{x}_k, \bar{x}_k) \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. *Матрица Грама системы векторов $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k \in \mathbb{R}^n$ вырождена в том и только том случае, когда эта система линейно зависима.*

Доказательство. Предположим, что система векторов линейно зависима и что вектор $\bar{x}_k$ является линейной комбинацией остальных векторов системы: $\bar{x}_k = \alpha_1 \bar{x}_1 + \ldots + \alpha_{k-1} \bar{x}_{k-1}$. Заменим в последнем столбце матрицы Грама в каждом скалярном произведении второй вектор $\bar{x}_k$ на его выражение. Тогда в матрице Грама последний элемент первой строки будет равен

$$\alpha_1(\bar{x}_1, \bar{x}_1) + \alpha_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \ldots + \alpha_{k-1}(\bar{x}_1, \bar{x}_{k-1}),$$

последний элемент второй строки будет равен

$$\alpha_1(\bar{x}_2, \bar{x}_1) + \alpha_2(\bar{x}_2, \bar{x}_2) + \ldots + \alpha_{k-1}(\bar{x}_2, \bar{x}_{k-1}),$$

и так далее. Все это означает, что последний столбец матрицы есть линейная комбинация первых $k-1$ столбцов с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$, соответственно. То-есть наша матрица — вырождена.

Пусть теперь матрица Грама вырождена. Это означает, что ее столбцы линейно зависимы, т.е. существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулю:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} (\bar{x}_1, \bar{x}_1) \\ (\bar{x}_2, \bar{x}_1) \\ \vdots \\ (\bar{x}_k, \bar{x}_1) \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ (\bar{x}_2, \bar{x}_2) \\ \vdots \\ (\bar{x}_k, \bar{x}_2) \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_k \begin{pmatrix} (\bar{x}_1, \bar{x}_k) \\ (\bar{x}_2, \bar{x}_k) \\ \vdots \\ (\bar{x}_k, \bar{x}_k) \end{pmatrix} = \bar{0}.$$

Но сумма в левой части равенства равна

$$\begin{pmatrix} (\bar{x}_1, \alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \ldots + \alpha_k \bar{x}_k) \\ (\bar{x}_2, \alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \ldots + \alpha_k \bar{x}_k) \\ \vdots \\ (\bar{x}_k, \alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \ldots + \alpha_k \bar{x}_k) \end{pmatrix}.$$

Положим $\bar{u} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \ldots + \alpha_k \bar{x}_k$, тогда

$$\begin{gathered} (\bar{x}_1, \bar{u}) = 0 \\ (\bar{x}_2, \bar{u}) = 0 \\ \vdots \\ (\bar{x}_k, \bar{u}) = 0 \end{gathered}$$

Следовательно,

$$0 = \alpha_1(\bar{x}_1, \bar{u}) + \ldots + \alpha_k(\bar{x}_k, \bar{u}) = (\alpha_1 \bar{x}_1 + \ldots + \alpha_k \bar{x}_k, \bar{u}) = (\bar{u}, \bar{u}) = |\bar{u}|^2.$$

Так как длина вектора $\bar{u}$ равна нулю, то этот вектор нулевой, следовательно, система $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$ линейно зависима. □

Длина направленного отрезка определяет числовое значение вектора и называется длиной вектора или модулем вектора. Длинна вектора a1(x1,x2,x3) находится по следующей формуле: |a1|=sqrt(x1^2+x2^2+x3^2). Также длину вектора можно узнать из матрицы Грамма, если таковая имеется, для этого нужно найти квадратный корень из нужного нам элемента.

Неравенство Коши-Буняковского:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2),$$

где ai и bi — действительные числа

Если наборы $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ***рассматривать как координаты векторов n-мерного евклидового пространства, то из неравенства Коши-Буняковского следует, что квадрат скалярного***

<u>произведения двух векторов</u> меньше либо равен произведению квадратов длин этих векторов $(\bar{a}, \bar{b})^2 \leq |\bar{a}|^2 \, |\bar{b}|^2$
причем равенство достигается ли в том случае, когда векторы a ***и*** b ***коллинеарны.***
Из неравенства Коши-Буняковского следует важное неравенство, которое называют <u>неравенством треугольника</u>: $|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|$
длина <u>стороны треугольника</u> меньше длин суммы двух других сторон.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 1

Задание Доказать неравенство Коши-Буняковского.

Доказательство Рассмотрим вектор $\bar{a} + \lambda\bar{b}$, где $\lambda \in R$. Найдем скалярное произведение этого вектора на себя. Из свойств скалярного произведения следует, что

$$(\bar{a} + \lambda b, \bar{a} + \lambda b) \geq 0$$

Раскроем скобки

$$(\bar{a}, \bar{a}) + \lambda(\bar{a}, b) + \lambda(b, \bar{a}) + \lambda^2(b, b) \geq 0?$$

$$\lambda^2(\bar{b}, \bar{b}) + 2\lambda(\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{a}) \geq 0$$

Получили квадратный трехчлен относительно λ, который принимает неотрицательные значения. Такое возможно, когда его дискриминант неположителен, т.е. в случае, если

$$(\bar{a}, \bar{b})^2 - (\bar{a}, \bar{a})(\bar{b}, \bar{b}) \leq 0 \Rightarrow (\bar{a}, \bar{b})^2 \leq (\bar{a}, \bar{a})(\bar{b}, \bar{b}) \Rightarrow (\bar{a}, \bar{b})^2 \leq |\bar{a}|^2 \, |\bar{b}|^2$$

Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 2

Задание Доказать неравенство треугольника $|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|$

Доказательство Рассмотрим векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Найдем скалярный квадрат их суммы

$$|\bar{a} + \bar{b}|^2 = (\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{b}) = (\bar{a}, \bar{a}) + 2\lambda(\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{b}, \bar{b})$$

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что $(\bar{a}, \bar{b}) \leq |\bar{a}||\bar{b}|$, поэтому

$$(\bar{a}, \bar{a}) + 2\lambda(\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{b}, \bar{b}) \leq (\bar{a}, \bar{a}) + 2\lambda|\bar{a}||\bar{b}| + (\bar{b}, \bar{b}) = (|\bar{a}| + |\bar{b}|)^2$$

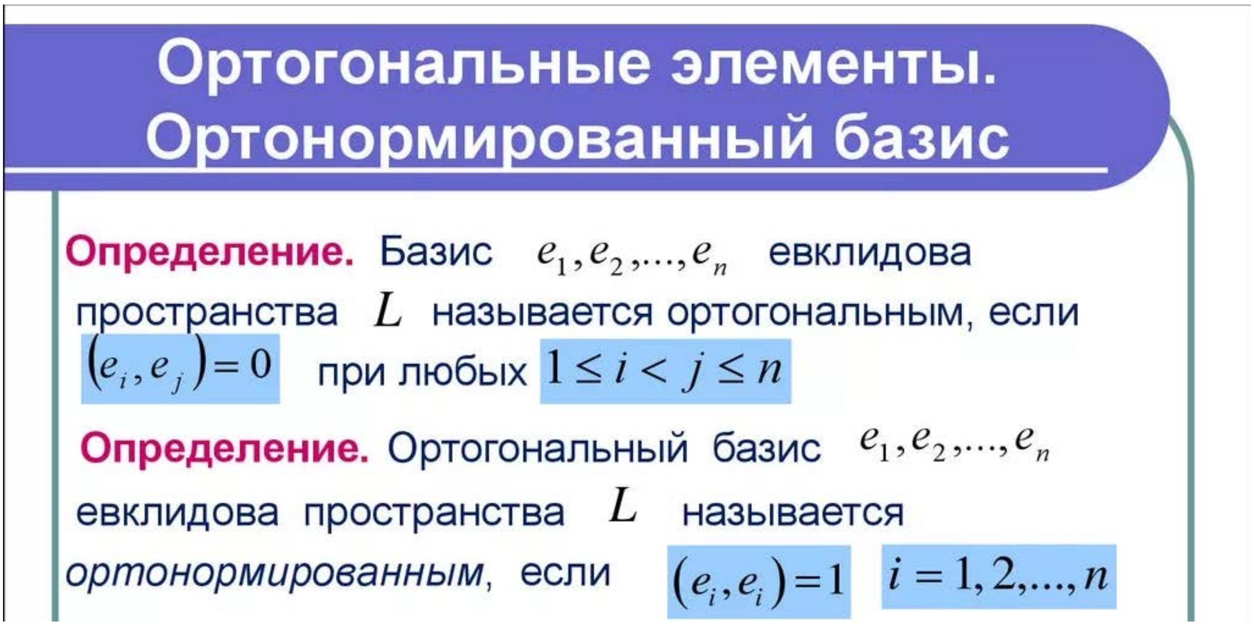
Таким образом, мы доказали, что

$$|\bar{a} + \bar{b}|^2 \leq (|\bar{a}| + |\bar{b}|)^2$$

Что и требовалось доказать.

Заданного на евклидовом пространстве скалярного произведения достаточно для того, чтобы ввести геометрические понятия длинны и угла. Длинна вектора u определяется как $\sqrt{(u,u)}$ ***и обозначается как*** $|u|$***.***
Положительная определённость скалярного произведения гарантирует, что длина ненулевого вектора ненулевая, а из билинейности следует, что $|au| = |a||u|$***, то есть длины пропорциональных векторов пропорциональны. Угол между векторами u и v определяется по формуле***

$\varphi = \arccos\left(\frac{(x,y)}{|x||y|}\right)$ ***. Из теоремы косинусов следует, что для двумерного евклидова пространства (евклидовой плоскости) данное определение угла совпадает с обычным. Ортогональные векторы, как и в трёхмерном пространстве, можно определить как векторы, угол между которыми равен pi/2.***



В ортонормированном базисе евклидова пространства E_n скалярное произведение приобретает особенно простой вид, а именно имеет место следующая теорема.

Теорема. *В ортонормированном и только в ортонормированном базисе евклидова пространства* E_n *скалярное произведение* (x, y) *произвольной пары векторов* x *и* y *равно:*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i \ ,$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – координаты вектора x и $\eta_1, \ldots, \eta_n$ – координаты вектора y .

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис пространства E_n и $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i$ – произвольная пара векторов. Тогда

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_i \eta_j \ , \quad \alpha_{ij} = (e_i, e_j) \ .$$

Но $(e_i, e_i) = 1$ и $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$. Следовательно,

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i \ . \ (*)$$

Обратно, пусть скалярное произведение (x, y) произвольной пары векторов x , y выражается в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$ формулой (3). Так как вектор e_i имеет i -ю координату, равную 1, а остальные его координаты равны пулю, то по формуле (*) получается, что $(e_i, e_i) = 0 \cdot 0 + \ldots + 1 \cdot 1 + \ldots + 0 \cdot 0 = 1$. Аналогично по той же формуле получается при $i \neq j$, что $(e_i, e_j) = 0 \cdot 0 + \ldots + 0 \cdot 1 + \ldots + 1 \cdot 0 + \ldots + 0 \cdot 0 = 0$. Мы видим отсюда, что $e_1, \ldots, e_n$ –

Чтобы в ортнормированном базисе базисе выразить конкретную координату вектора необходимо найти скалярное произведение этого вектора с вектором а1, у которого на все координаты будут равны 0 кроме той, которую нужно выразить а исходного вектора.

Ортогональные операторы в евклидовом пространстве

Так называются операторы, удовлетворяющий равенству

$$(\mathcal{A}(x); \mathcal{A}(y)) = (x; y)$$

для всех векторов x и y.

Таким образом, ортогональный оператор в евкл пр-ве – это оператор, сохраняющий длины векторов и углы между ними. (можно в виде утверждения)

Утверждение Если линейный оператор сохраняет длины векторов, то этот оператор ортогональный.

$\mathcal{A}(\mathcal{A}(x+y); \mathcal{A}(x+y)) = (\mathcal{A}(x); \mathcal{A}(x)) + 2(\mathcal{A}(x); \mathcal{A}(y)) + (\mathcal{A}(y); \mathcal{A}(y))$ и т.д., все понятно

Ортогональный оператор невырожденный Это очевидно из-за сохранения длин - отсюда следует, что в нулевой вектор переходит только нулевой. А из этого в силу конечномерности пространства следует существование обратного оператора.

То, что орт. оп-р переводит ортонорм базис в ортонорм - очевидно. Обратное утверждение.

Утверждение Если лин оп-р переводит орт. базис в ортон базис, то это - ортогон оп-р.

Доказательство. Пусть Б - ортон базис и $\mathcal{A}$(Б) – орт. базис.

$x = $ БX; $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}$(Б)$X$;

Поэтому у векторов x и $\mathcal{A}(x)$ – одинаковые столбцы координат, у одного - в первом базисе, у второго - во втором базисе. А раз базисы ортонормированные, длины этих векторов ищутся по одной формуле - корень из суммы квадратов координат.

Утверждение. Обратный к ортогональному оператору ортогонален.

Почти очевидное утверждение.

Утверждение. Матрица ортогон. оп-ра в ортонормир базисе ортогональна.

Это следует из того, что матрица ортог оп-ра может рассматриваться как матрица перехода от орт б к орт б.

Утверждение. Произведение орт оп явл орт опер. - очевидно.

Утв-е. Если $\mathcal{A}$ – орт оп-р, то $\lambda\mathcal{A}$ является орт оп-ром титтк $\lambda = \pm 1$.

Утв-е. Собств. знач. орт оп могут быть только ± 1 – очевидно

Утв-е. Определитель матрицы орт оп-ра $= \pm 1$ - дублирует свойство орт матрицы.

Определение. Ортогональное дополнение к подпространству $L_1^{\perp} = \{x : \ (x; y) = 0$ для любого вектора $y \in L_1$.

Лемма. $L_1^{\perp}$ является линейным подпространством. – очевидно.

Утв-е. Если L_1 – инвариантное подпространство ортогонального оператора $\mathcal{A}$, то $L_1^{\perp}$ также является инвариантным подпространством.

Доказательство. Берем базис Б_1 в L_1; $\mathcal{A}(\text{Б}_1)$ будет также базисом в L_1. Пусть $x \in L_1^{\perp}$, то есть $(x; e_i) = 0$, а тогда в силу ортогональности $(\mathcal{A}(x); \mathcal{A}(e_i) = 0$, а поскольку образ базиса в $L_1^{\perp}$ является базисом в $L_1^{\perp}$, $\mathcal{A}(x)$ ортогонален всем векторам базиса в $L_1^{\perp}$, а тогда ортогонален и всему ортогональному дополнению.

Чтобы выяснить, к какому виду можно привести матрицу ортогонального оператора, придется доказать важную лемму. Если бы мы работали со случаем поля комплексных чисел, это лемма нам не потребовалась бы.

Лемма. Если $\lambda = \alpha + i\beta; \beta \neq 0$ – комплексный корень характеристического уравнения линейного оператора $\mathcal{A}$, то существуют векторы u и v такие, что выполнены два равенства $\mathcal{A}(u) = \alpha u - \beta v$ и $\mathcal{A}(v) = \alpha v + \beta u$.

Следствие. Любой линейный оператор имеет одномерное идли двумерное инвариантное подпространство.

Доказательство леммы мне хотелось бы пока "замылить".

Определение Линейный оператор $\mathcal{A}^*$ такой, что

$$(\mathcal{A}(x); y) = (x; \mathcal{A}^*(y))$$

для всех векторов пространства, называется сопряженным к $\mathcal{A}$.

Чтобы узнать, какая будет матрица у сопряженного оператора, применим это равенство для элементов базиса, сначала для простоты ортонормированного.

$a_{ij} = (\mathcal{A}(e_j); e_i) - (e_j; \mathcal{A}^*(e_i)) = a^*_{ji}$, поэтому у сопряженного оператора матрица в ортонормированном базисе получается из матрицы самого оператора транспонированием.

Если же базис произвольный, то

$(\mathcal{A}(x); y) = (\mathcal{A}(БX); БY) = (БAX; БY) = (AX)^T GY = X^T A^T GY$;

$(x; A^*(y)) = X^T GA^* Y$,

поэтому $GA^* = A^T G$; $A^* = G^{-1} A^T G$

Свойства сопряжения

0. Сопряженный к тождественному оператору совпадает с тождественным.
1. Повторное сопряжение возвращает нас к первоначальному оператору

2. Сопряжение к сумме

3. Сопряжение к произведению - произведение сопряженных, но в обратном порядке..

4.Числовой множитель выносится из под знака сопряжения

5. Операции сопряжения и перехода к обратному коммутируют.

Доказательство. $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}$; $(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})^* = \mathcal{E}^* = \mathcal{E}$; $(\mathcal{A}^{-1})^*\mathcal{A}^* = \mathcal{E}$, поэтому $(\mathcal{A}^{-1})^*$ является обратным к $\mathcal{A}^T$, что и требовалось.

6. Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству оператора $\mathcal{A}$ является инвариантным подпространством для сопряженнного оператора.

7. Характеристические многочлены $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ совпадают.

Самосопряженные операторы

Если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, то оператор называется самосопряженным. В ортонормированном базисе матрица самосопряженного оператора симметрична.

Свойства

Тождественный оператор самосопряжен.

Нулевой оператор самосопряжен.

Сумма самосопряженных операторов самосопряжена.

Произведение самосопряженного оператора на число - самосопряженный оператор.

Произведение самосопряженных операторов самосопряжено титтк эти операторы перестановочны.

Для любого оператора произведение $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ самосопряжено.

Обратный к невырожденному самосопряженному оператору самосопряжен.

Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству самосопряженного оператора является инвариантным подпространством.

Матрица самосопряженного оператора в ортонормированном базисе симметрична.

Если матрица оператора в ортонормированном базисе симметрична, то оператор самосопряжен.

Все корни характеристического многочлена самосопряженного оператора действительны.

Для доказательства рассмотрим ограничение самосопряженного оператора на двумерное инвариантное подпространство и выберем там ортонормированный базис. Характеристическое уравнение этого ограничения будет иметь вид
$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22}\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0;$
$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$

Следствие У самосопряженного оператора существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов. Иными словами, существует ортонормированный базис, в котором матрица самосопряженного оператора диагональна.

Теорема Невырожденный оператор в евклидовом пространстве может быть разложен в произведение самосопряженного и ортогонального.

Замечание. Самосопряженный оператор может быть выбран с положительными собственными значениями. Иными словами, билинейная форма, порожденная этим самосопряженным оператором, будет положительно определенная. Сам такой оператор также называется положительно определенным, или просто положительным. Такой оператор каждый вектор поворачивает на угол, меньший 90 градусов.

Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду:

1) Для заданной симметрической матрицы A квадратичной формы находим характеристические корни, то есть характеристические корни соответствующего линейного ортогонального преобразования φ.

2) С учётом кратности характеристических корней строим диагональную матрицу B преобразованной квадратичной формы, а значит, и каноническую запись этой формы.

3) Находим собственные векторы симметрического преобразования φ. После ортогонализации и нормирования совокупности собственных векторов получаем базис g. Связь исходного базиса e с базисом g определяется выражением: $g=(g_1, g_2, ..., g_n)=Q\cdot e$.

4) Используя матрицу Q, можем записать выражение новых переменных y квадратичной формы через старые переменные x: $y=Q\cdot x$. Ясно, что одновременно: $x=Q^{-1}\cdot y$

Пример 12–13: Задана квадратичная форма: $f=3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$. Найти её канонический вид, применяя ортогональное преобразование. Само преобразование не находить.

<u>Решение</u>:

1). Матрица квадратичной формы имеет вид: $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ – симметрическая. Составим её характеристический многочлен и найдём его корни:

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0 \to \lambda_1=\lambda_2=4,\ \lambda_3=-2.$

2) Характеристические корни ортогонального преобразования определяют матрицу этого преобразования в ортонормированном базисе: $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3). Запишем квадратичную форму f в каноническом виде: $f=4y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$.

Ответ: квадратичная форма f в каноническом виде: $f=4y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$.

ПРИМЕР С ПРОВЕРКОЙ:

6). Для собственного значения $\lambda_1=-3$ система (10.1) принимает вид:

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1+3x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+3x_3+x_4=0, \\ -x_1+x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases} \quad (10.5)$$

Легко заметить, что ранг системы (10.5) равен 3, то есть независимы три уравнения. Объявляя свободной неизвестной: x_4, получаем одно независимое решение:

b_4=(-1, -1, -1, 1), (10.6)

Легко убедиться, что вектор b_4 ортогонален системе векторов: c_1, c_2, c_3.

7). Остаётся провести нормирование системы векторов c_1, c_2, c_3, b_4:

$$e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right),\ e_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\sqrt{\frac{2}{3}},0\right), \quad (10.7)$$

$$e_3=\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ e_4=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

8). Это значит, что заданная квадратичная форма приводится к главным осям ортогональным линейным преобразованием: $y_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2\right)$,

$$y_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}x_1-\frac{1}{\sqrt{6}}x_2+\sqrt{\frac{2}{3}}x_3\right), \quad (10.8)$$

$$y_3=\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}x_1+\frac{1}{2\sqrt{3}}x_2+\frac{1}{2\sqrt{3}}x_3+\frac{\sqrt{3}}{2}x_4\right).$$

$$y_4=\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4\right).$$