Тема 1. Определители

При каком значении λ алгебраическое дополнение A_{32} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & \lambda & 2 & 2 \\ -2 & 11 & 2\lambda & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 17 & 11 & 5 \\ 1 & 6 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & -\lambda & 1 & -5 \end{pmatrix}$$ равно 9? Выберите верный ответ.

1

2

* 3

4

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 & 2 \\ -2 & 2\lambda & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -\lambda & 1 & -5 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} -2A_1 + A_2 \\ A_1 + A_4 \end{matrix} \right\} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} \overset{A^2\downarrow}{=} -\lambda(-1)\begin{vmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \left\{ A^3 + A^2 \right\} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} -4 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \overset{\overrightarrow{A_3}}{=} -3\lambda \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\lambda(-4+3) = 3\lambda$$

$$A_{32} = 9 \Leftrightarrow 3\lambda = 9 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

Тема 2. Матричные уравнения

Решить матричное уравнение $AXB^{-1} = C$, $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Выберите верный ответ.

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

*$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$X = A^{-1}CB$$

$$\det A = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5-6 = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}XB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Тема 3. Системы линейных алгебраических уравнений.

Найти z_1/z_2, решив систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}(2+3i)z_1+(5-i)z_2=10+i\\ 2z_1-3iz_2=1-4i\end{cases}$$

. Выберите верный ответ.

* $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

$-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

$\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$

$-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2+3i & 5-i\\ 2 & -3i\end{vmatrix}=-6i+9-10+2i=-1-4i\neq 0 \Rightarrow$$

$\exists!$ решение $(z_1,z_2)^T$, $\begin{cases}z_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}\\ z_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}\end{cases}$.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}10+i & 5-i\\ 1-4i & -3i\end{vmatrix}=-30i+3-5+i+20i+4=2-9i$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2+3i & 10+i\\ 2 & 1-4i\end{vmatrix}=2+3i-8i+12-20-2i=-6-7i$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\Delta_1}{\Delta_2}=\frac{2-9i}{-6-7i}=\frac{(2-9i)(-6+7i)}{(-6-7i)(-6+7i)}=\frac{-12+54i+14i+63}{36+49}=$$

$$=\frac{51+68i}{85}=\frac{17(3+4i)}{17\cdot 5}=\frac{3+4i}{5}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$$

Тема 4. Возведение в степень комплексного числа

Пусть $z = \frac{2-i}{-1+3i}$. Найти z^{16}. Выберите верный ответ.

2^8

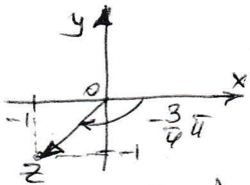
$* \ 2^{-8}$

-2^{-8}

2^{16}

$$z = \frac{2-i}{-1+3i} = \frac{(2-i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} = \frac{-2+i-6i-3}{1+9} = \frac{-5-5i}{10} =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(-1-i) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, e^{i\left(-\frac{3}{4}\pi\right)}$$



$$z^{16} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(-\frac{3}{4}\pi\right)}\right)^{16} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{16} e^{i\left(-\frac{3\cdot 16}{4}\pi\right)} = \frac{1}{2^8} e^{i(-12\pi)} =$$

$$= 2^{-8} e^{i0} = 2^{-8}(\cos 0 + i \sin 0) = 2^{-8}$$

Тема 5. Извлечение корня из комплексного числа

Разложить многочлен $p(z) = z^3 + 64i$ на неприводимые множители над $\boldsymbol{C}$.
Выберите верный ответ.

$p(z) = (z - 4i)(z + 2\sqrt{3} - 2i)(z - 2\sqrt{3} + 2i)$

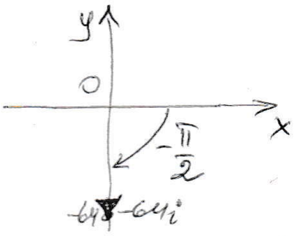
*$p(z) = (z - 4i)(z - 2\sqrt{3} + 2i)(z + 2\sqrt{3} + 2i)$

$p(z) = (z - 4i)(z + 2\sqrt{3} - 2i)(z + 2\sqrt{3} + 2i)$

$p(z) = (z - 4i)(z - 2\sqrt{3} + 2i)(z - 2\sqrt{3} - 2i)$

Найдем корни $p(z)$ – корни третьей степени из $(-64i)$.

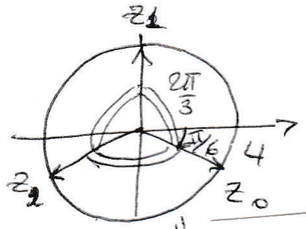
$$-64i = 64e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$



$$z^3 = -64i$$

$$z_k = \sqrt[3]{64}\, e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)}, \quad k=0,1,2$$

$$z_k = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k\right)} \quad k=0,1,2$$



$$z_0 = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 2\sqrt{3} - 2i$$

$$z_1 = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 4e^{i\pi/2} = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4(0 + i1) = 4i$$

$$z_2 = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 4e^{i\frac{7\pi}{6}} = 4\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -2\sqrt{3} - 2i$$

Разложение $p(z)$ на неприводимые множители над $\mathbb{C}$:

$$p(z) = (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) = (z - 2\sqrt{3} + 2i)(z - 4i)(z + 2\sqrt{3} + 2i)$$

Тема 6. Корни многочленов.

Найти все корни многочлена $f(x) = x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 28x + 20$ и их кратности.
Выберите верный ответ.

* 2 - корень кратности $2, (1+2i), (1-2i)$ - корни кратности 1

$(-2), (-4), (-1+i), (-1-i)$ - корни кратности 1

(-2) - корень кратности 2, $(1+2i), (1-2i)$ - корни кратности 1

(-2) - корень кратности 2, $(1+i), (1-i)$ - корни кратности 1

Найдем целочисленные корни многочлена, проверив делители его свободного члена $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$ с помощью схемы Горнера.

	1	−6	17	−28	20
1	1	−5	12	−16	4
−1	1	−7	24	−52	72
2	1	−4	9	−10	0

$\Rightarrow 2$ - корень $f(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = (x-2)g(x) = (x-2)(x^3 - 4x^2 + 9x - 10).$$

Найдем целочисленные корни $g(x)$.

	1	−4	9	−10
2	1	−2	5	0

$\Rightarrow 2$ - корень $g(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = (x-2)^2(x^2 - 2x + 5).$$

$D = 2^2 - 4 \cdot 5 = -16 \Rightarrow$

Найдем корни $x^2 - 2x + 5 = 0$.

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a} = \frac{2 \pm i4}{2} = 1 \pm 2i$$

Следовательно, $f(x)$ имеет корни:

2 - кратности 2,

$1+2i$, $1-2i$ - кратности 1.

Тема 7. Линейные подпространства.

Какое из подмножеств не является линейным подпространством в пространстве многочленов $\boldsymbol{R}[t]$? Выберите верный ответ.

$\{p(t) \mid p(0) = p'(0)\}$

$\{p(t) \mid p(1) = p(0) = 0\}$

$\{p(t) \mid p(t) \vdots (t^2 - 3)\}$

* $\{p(t) \mid p(0) \neq 0\}$

a) $M = \{p(t) \mid p(0) = p'(0)\} \subset \mathbb{R}[t]$

1) $p_1(t), p_2(t) \in M$, т.е. $\begin{cases} p_1(0) = p_1'(0) \\ p_2(0) = p_2'(0) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (p_1+p_2)(0) = p_1(0) + p_2(0) = p_1'(0) + p_2'(0) = (p_1+p_2)'(0) \Rightarrow (p_1+p_2)(t) \in M$

2) $p(t) \in M$, т.е. $p(0) = p'(0)$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda p)(0) = \lambda p(0) = \lambda p'(0) = (\lambda p)'(0) \Rightarrow \lambda p \in M$

1), 2) $\Rightarrow M$ – линейное подпространство $\mathbb{R}[t]$.

в) $M = \{p(t) \mid p(1) = p(0) = 0\} \subset \mathbb{R}[t]$

1) $p_1(t), p_2(t) \in M$, т.е. $\begin{cases} p_1(1) = p_1(0) = 0 \\ p_2(1) = p_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (p_1+p_2)(1) = p_1(1) + p_2(1) = p_1(0) + p_2(0) = 0 + 0 = 0 = (p_1+p_2)(0) \Rightarrow (p_1+p_2)(t) \in M$

2) $p(t) \in M$, т.е. $p(1) = p(0) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda p)(1) = \lambda p(1) = \lambda p(0) = 0 = (\lambda p)(0) \Rightarrow (\lambda p)(t) \in M$

1), 2) $\Rightarrow M$ – линейное подпространство $\mathbb{R}[t]$.

c) $M = \{p(t) \mid p(t) \vdots (t^2-3)\} \subset \mathbb{R}[t]$

1) $p_1(t), p_2(t) \in M$, т.е. $\begin{cases} p_1(t) = (t^2-3)\, q_1(t), \ q_1(t) \in \mathbb{R}[t] \\ p_2(t) = (t^2-3)\, q_2(t), \ q_2(t) \in \mathbb{R}[t] \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (p_1+p_2)(t) = (t^2-3)(q_1(t) + q_2(t)) = (t^2-3)(q_1+q_2)(t)$, $(q_1+q_2)(t) \in \mathbb{R}[t] \Rightarrow$

$\Rightarrow (p_1+p_2)(t) \in M$

2) $p(t) \in M$, т.е. $p(t) = (t^2-3)q(t)$, $q(t) \in \mathbb{R}[t]$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda p)(t) = \lambda p(t) = \lambda (t^2-3) q(t) = (t^2-3)(\lambda q)(t)$, $(\lambda q)(t) \in \mathbb{R}[t] \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda p)(t) \in M$

1), 2) $\Rightarrow M$ – линейное подпространство $\mathbb{R}[t]$

d) $M = \{p(t) \mid p(0) \neq 0\}$

2) $p(t) \in M$, т.е. $p(0) \neq 0$, $0 \in \mathbb{R} \Rightarrow (0p)(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow p(0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (0p)(t) \notin M$, т.е. M не замкнуто относительно умножения на число

$\Rightarrow M$ не является линейным подпространством $\mathbb{R}[t]$

Тема 8. Критерий линейной зависимости.

Какая система векторов линейного пространства C(-∞,∞) непрерывных функций, определенных на (-∞,∞), является линейно зависимой? Выберите верный ответ.

$e^t; e^{-t}; 1$

$e^t; e^{2t}; e^{3t}$

$\operatorname{sh} t; \operatorname{ch} t; 1$

* $e^t; \operatorname{sh} t; e^{-t}$

a) $e^t, e^{-t}, 1$ - линейно независимая система.

Пусть $\begin{cases} \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{-t} + \alpha_3 1 = 0 \\ \alpha_1 e^t - \alpha_2 e^{-t} = 0 \\ \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{-t} = 0 \end{cases}$ Продифференцируем дважды. ⇒ ОСЛАУ ⇒ имеет тривиальное решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} & 1 \\ e^t & -e^{-t} & 0 \\ e^t & e^{t} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists!$$ реш. ОСЛАУ ⇒ ⇒ ∃ только тривиальное реш. ⇒

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

б) e^t, e^{2t}, e^{3t} - линейно независимая система.

Пусть $\begin{cases} \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{2t} + \alpha_3 e^{3t} = 0 \\ \alpha_1 e^t + 2\alpha_2 e^{2t} + 3\alpha_3 e^{3t} = 0 \\ \alpha_1 e^t + 4\alpha_2 e^{2t} + 9\alpha_3 e^{3t} = 0 \end{cases}$ Продифференцируем дважды. ОСЛАУ имеет тривиальное решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} & e^{3t} \\ e^t & 2e^{2t} & 3e^{3t} \\ e^t & 4e^{2t} & 9e^{3t} \end{vmatrix} = e^t \cdot e^{2t} e^{3t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = e^{6t} V[1,2,3] \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists!$ решение ОСЛАУ ⇒ ∃ только тривиальное решение ⇒

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

в) $\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, 1$ - линейно независимая система

Пусть $\alpha_1 \operatorname{sh} t + \alpha_2 \operatorname{ch} t + \alpha_3 1 = 0$ продиф. дважды

$\begin{cases} \alpha_1 \operatorname{ch} t + \alpha_3 \operatorname{sh} t = 0 \\ \alpha_1 \operatorname{sh} t + \alpha_3 \operatorname{ch} t = 0 \end{cases}$ ОСЛАУ имеет тривиальное решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 1 \\ \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t & 0 \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{vmatrix} = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists!$$ реш. ОСЛАУ ⇒

⇒ ∃ только тривиальное решение $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

г) $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} \in L[e^t, e^{-t}] \Rightarrow e^t, \operatorname{sh} t, e^{-t}$ - линейно зависимая система векторов $C(-\infty, \infty)$

Тема 9. Базис линейного пространства

Какая система многочленов является базисом линейного подпространства $M = \{p(t): p''(1) = p'(1)\} \subset P_3$? Выберите верный ответ.

$*\, t^3 + 3t; t^2; 1$

$t^3 + 3t^2; t^2 + 3t; t + 3$

$t^3 + 3t^2; t + 1$

$t^3 - 1; t^2; t$

Найдем общий вид $p(t) \in M$.

$\deg p(t) \leq 3 \Rightarrow p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$

$p'(t) = 3at^2 + 2bt + c \Rightarrow p'(1) = 3a + 2b + c$

$p''(t) = 6at + 2b \Rightarrow p''(1) = 6a + 2b$

$p'(1) = p''(1) \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 6a + 2b \Leftrightarrow c = 3a \Rightarrow$

$\Rightarrow p(t) = at^3 + bt^2 + 3at + d \Leftrightarrow p(t) = a(t^3 + 3t) + bt^2 + d$

Рассмотрим $p_1(t) = t^3 + 3t$,
$p_2(t) = t^2$,
$p_3(t) = 1$.

0) $p_1(t) \in M$ $(a = 1, b = d = 0)$
$p_2(t) \in M$ $(a = d = 0, b = 1)$
$p_3(t) \in M$ $(a = b = 0, d = 1)$

2) $\forall p(t) \in M$ $p(t) = a(t^3 + 3t) + bt^2 + d = ap_1(t) + bp_2(t) + dp_3(t) \Rightarrow$
$\Rightarrow p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ — полная система в M

1) Докажем линейную независимость $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$.
Составим матрицу A, записав координаты этих многочленов в естественном базисе $e = \langle t^3, t^2, t, 1\rangle$ пространства P_3 в её строки.

$p_1(t) = e\begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix}$, $p_2(t) = e\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $p_3(t) = e\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk} A = 3 \Rightarrow$ строки матрицы A линейно независимы $\Rightarrow$
$\Rightarrow p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ — линейно независимая система векторов M.

$\left.\begin{matrix}0)\\1)\\2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \langle p_1(t), p_2(t), p_3(t)\rangle = \langle t^3 + 3t, t^2, 1\rangle$ — базис M.

Тема 10. Размерность линейной оболочки.

Система $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

является полной в линейном пространстве $M \subset \boldsymbol{R}^{2x2}$. Какова размерность M? Выберите верный ответ.

* 2

3

4

$M = L[A_1, A_2, A_3 A_4] \subset R^{2\times 2} \Rightarrow \dim M = rk\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

Естественный базис $R^{2\times 2}$ – $e = \langle E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} \rangle$,

$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Разложение A_1, A_2, A_3, A_4 по базису e.

$A_1 = e\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = e\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = e\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A_4 = e\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Составим матрицу A, записав координаты A_1, A_2, A_3, A_4 в базисе e в её строки, и найдем rkA.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1 \leftrightarrow A_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[3A_1 + A_4]{\substack{-2A_1 + A_2 \\ -A_1 + A_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_2 + A_4]{-A_2 + A_3}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rk\,A = 2$$

$\dim M = rk\{A_1, A_2 A_3, A_4\} = rk\,A = 2$.