$\alpha + \beta + \gamma = \pi$

Семинар 4. 23/09/19

Скалярное произведение геометрич. векторов.

Матрицы, многочлены, ф-ии могут называться векторами.

Вектор — элемент линейного пространства.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{cases} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) & (1) \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & (2) \end{cases}$$

Задача.

Дан 4х угольник $ABCD$

$A = (-3, 1)$
$B = (0, 3)$
$C = (3, -3)$
$D = (-2, 0)$

Док-ть, что диагонали 4х угольника перпендикулярны.

Решение.

$AC = (6, -4)$ $\quad |\vec{AC}| = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$BD = (-2, -3)$ $\quad |\vec{BD}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$(\vec{AC}, \vec{BD}) = -12 + 12 = 0$

$(\vec{AC}, \vec{BD}) = \sqrt{52} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos\angle\alpha$

$0 = \sqrt{52} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = 0$

$\Downarrow$

$\alpha = \angle(\vec{AC}, \vec{BD}) = 90^\circ$

$\Downarrow$

$AC \perp BD$

Задача.

Дано:

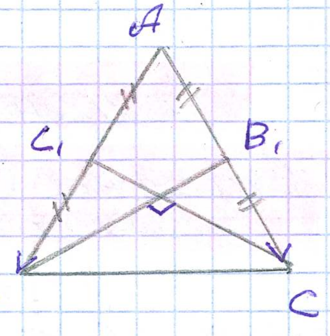
ABC – р/б треуг-ик с вершиной A

BB_1 – медиана, CC_1 – медиана

$BB_1 \perp CC_1$

Найти: $\angle A$

Решение.



Пусть $\overline{AB} = \vec{a}$

$\vec{AC} = \vec{b}$

$$\vec{BB_1} = \frac{1}{2}(\vec{b} - 2\vec{a}) = \frac{b}{2} - a = \frac{1}{2}\bar{b} - \bar{a}$$

$$\vec{CC_1} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b}) = \frac{a}{2} - b = \frac{1}{2}\bar{a} - \bar{b}$$

$$(BB_1, CC_1) = \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}, \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) =$$

$$\frac{1}{4}(\vec{b}, \vec{a}) - \frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{b}) - \frac{1}{2}(\vec{a}, \vec{a}) + (\vec{a}, \vec{b}) =$$

$$= \frac{5}{4}(\vec{a}, \vec{b}) - \frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{b}) - \frac{1}{2}(\vec{a}, \vec{a}) =$$

$$= \frac{5}{4} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) -$$

$$- \frac{1}{2}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{a}|^2 = 0$$

$$-\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{5}{4}a^2 \cdot \cos\angle = 0$$

$$a^2\left(-1 + \frac{5}{4} \cdot \cos\angle\right) = 0$$

$$a^2 \neq 0 \Rightarrow \cos\angle = \frac{4}{5}$$

20 $\angle = \arccos 4/5 \approx 36,9^\circ$

RAD – радианы

DEG – градусы

GRAD – грады

$90^\circ = 100$ град

Задача.

Дано:

$\vec{a} = (-7, \lambda+2)$

$\vec{b} = (-\lambda-1, 6)$

При каких λ:

1) $\vec{a} \parallel \vec{b}$
2) $\vec{a} \perp \vec{b}$

Решение.

$\vec{a} \parallel \vec{b}$, когда

$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pm 1$
(0° или 180°)

$(\vec{a}, \vec{b}) = 7\lambda + 7 + 6\lambda + 12$
$= 13\lambda + 19$

$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|$

① $\vec{a} \parallel \vec{b}$, когда

$$\frac{7}{\lambda+1} = \frac{\lambda+2}{6}$$

$$\frac{42 - (\lambda+1)(\lambda+2)}{(\lambda+1)(\lambda+2)} = 0$$

$42 - (\lambda^2 + 3\lambda + 2) = 0$
$\lambda^2 + 3\lambda - 40 = 0$
$D = 9 + 160 = 169$

$\lambda_1 = \frac{-3-13}{2} = -8$

$\lambda_2 = \frac{-3+13}{2} = 5$

② $\vec{a} \perp \vec{b}$, когда

$(\vec{a}, \vec{b}) = 0$

$7\lambda + 7 + 6\lambda + 12 = 0$

$13\lambda + 19 = 0$

$\lambda = -\frac{19}{13}$

21

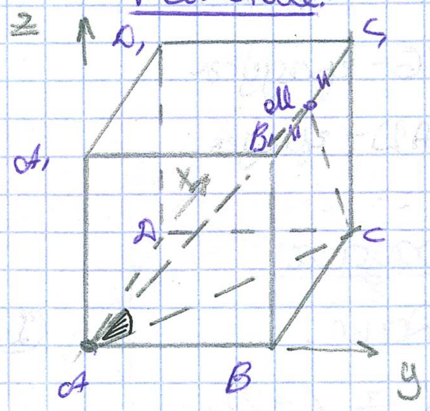
Задача.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб

M – сер. B_1C_1

Найти $\angle MAC$

Решение.



$A = (0, 0, 0)$

$M = (\frac{a}{2}, a, a)$ $\qquad \vec{AM} = (\frac{a}{2}, a, a)$

$C = (a, a, 0)$ $\qquad \vec{AC} = (a, a, 0)$

- $(\vec{AM}, \vec{AC}) = \frac{a^2}{2} + a^2$
- $(\vec{AM}, \vec{AC}) = |\vec{AM}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos L =$

$= \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2 + a^2} \cdot \sqrt{2a^2} \cdot \cos L =$

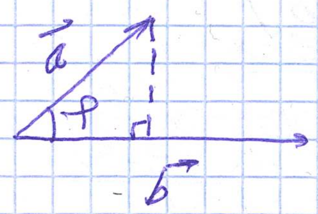
$= \sqrt{\frac{9a^2}{4}} \cdot \sqrt{2a^2} \cdot \cos L = \frac{3a}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot \cos L$

$\frac{3a^2}{2} = \frac{3a^2}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos L$

$\cos L = \frac{3a^2 \cdot 2}{2 \cdot 3a^2 \cdot \sqrt{2}}$

$\cos L = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \angle L = 45^\circ$

3



$(\vec{a}, \vec{b}) =$

$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

(*) Проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$

$pr_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$

$= \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}$

$pr_{\vec{a}} \vec{b} = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|}$

Задача.

Дано:

$\vec{a} = (7, 4, -4)$

$\vec{b} = (0, -7, 1)$

Найти: $pr_{\vec{b}} \vec{a}$

$pr_{\vec{a}} \vec{b}$

Решение.

$(\vec{a}, \vec{b}) = -28 - 4 = -32$

$|\vec{a}| = \sqrt{49 + 16 + 16} = 9$

$|\vec{b}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$pr_{\vec{b}} \vec{a} = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} =$

$= -\dfrac{32}{5\sqrt{2}} = -\dfrac{32\sqrt{2}}{10}$

$pr_{\vec{a}} \vec{b} = -\dfrac{32}{9}$

$\begin{array}{r} 49 \\ +32 \\ \hline 81 \end{array}$

$|(\vec{a}, \vec{b})| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

Решить ур-е

$$2\sqrt{x-1} + 5x = \sqrt{(x^2+4)(x+24)}$$

Решение.

Рассмотрим вектор

$\vec{a} = (\sqrt{x-1}, 5)$ $|\vec{a}| = \sqrt{x-1+25} = \sqrt{x+24}$

$\vec{b} = (2, x)$ $|\vec{b}| = \sqrt{4+x^2}$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 1$$

когда

$$\frac{\sqrt{x-1}}{2} = \frac{5}{x}$$

$$\frac{x\sqrt{x-1} - 10}{2x} = 0$$

$$x \neq 0$$

$$x\sqrt{x-1} = 10$$

$x \geq 1$

$$x^2(x-1) = 100$$

$$x^3 - x^2 - 100 = 0$$

$$x = 5$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - x^2 - 100 & x - 5 \\
\hline
-\ \underline{x^3 - 5x^2} & x^2 + 4x + 20 \\
4x^2 - 100 & \\
-\ \underline{4x^2 - 20x} & \\
-100 + 20x & \\
\underline{-100 + 20x} & \\
0 &
\end{array}
$$

$x^2 + 4x + 20 = 0$

$D = 16 - 80 < 0$

нет корней

Проверка.

$$2 \cdot 2 + 25 = \sqrt{29 \cdot 29}$$

$29 = 29$ верно

Семинар 5. (30/09/19)

Тема 3. Векторное произведение геом. векторов.

⊛ Вектора $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ называются **коллинеарными**, если сущ-ет прямая l такая, что $(\vec{a_1} \parallel l) \wedge (\vec{a_2} \parallel l) \wedge \ldots \wedge (\vec{a_n} \parallel l)$

⊛ Вектора $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ называются **компланарными**, если