Линейная независимость

Определение. Система векторов $S = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\} \in L$ называется ***линейно зависимой***, если найдутся такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in R$, не равные нулю одновременно $({\lambda_1}^2 + \ldots + {\lambda_n}^2 \neq 0)$ такие, что $\lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}$.
Если равенство $\lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}$ возможно, только когда $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, то система векторов $S = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\} \in L$ называется ***линейно независимой***.
Критерий линейной зависимости:
Система векторов $S = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\} \in L$, $n \geq 2$, линейно - зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее векторов можно представить в виде линейном комбинации остальных.

Базис линейного пространства

Определение. Система векторов $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\} \in L$ называется ***полной***, если любой вектор $\vec{x} \in L$ можно представить в виде линейной комбинации векторов системы: $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \cdots + x_n \vec{e}_n$.

Определение. Упорядоченная система векторов $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\} \in L$ называется ***базисом*** линейного пространства L , если она линейно-независимая и полная.
$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \cdots + x_n \vec{e}_n$ – разложение вектора по базису, $(x_1, \dots, x_n)$ – координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$.

Базисы линейных пространств

1) V_2 - пространство геометрических векторов на плоскости. Канонический базис в V_2: $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$. $\mathrm{d}im V_2 = 2$.
   Координаты произвольного вектора $\vec{x} \in V_2$ в каноническом базисе:
   $\vec{x} = x\vec{\imath} + \vec{\jmath} = (x, y)$.
   Координаты базисных векторов в этом же базисе:
   $\bar{\imath} = 1\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} = (1{,}0)$, $\vec{\jmath} = 0\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} = (0{,}1)$.

2) V_3 - пространство геометрических векторов.
   Канонический базис в V_3: $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$, $dim\, V_3 = 3$.
   Координаты произвольного вектора $\vec{x} \in V_3$ в каноническом базисе:
   $\vec{x} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = (x, y, z)$.
   Координаты базисных векторов в этом же базисе:
   $\vec{\imath} = 1\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} = (1{,}0{,}0)$, $\vec{\jmath} = 0\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} + 0\vec{k} = (0{,}1{,}0)$,
   $\vec{k} = 0\bar{\imath} + 0\bar{\jmath} + 1\vec{k} = (0{,}0{,}1)$.

3) R_n- пространство арифметических векторов.
   $\mathrm{d}im R_n = n$. Канонический базис:
   $\vec{e}_1 = (1,0,\ldots,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,\ldots,0)$, …, $\vec{e}_n = (0,0,\ldots,1)$.
   Координаты произвольного вектора:
   $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \cdots + x_n \vec{e}_n = (x_1, \dots x_n)$.

4) $P_n = \{p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n\}$- пространство многочленов степени не выше n.

   Канонический базис: $\vec{e}_0$=1, $\vec{e}_1 = t$, $\vec{e}_2 = t^2$,…, $\vec{e}_n = t^n$. $dim\, P_n = n + 1$.

   Координаты многочлена $p(t)$ в каноническом базисе:

   $p(t) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + \dots + a_n \cdot t^n = (a_0, a_1, \dots, a_n)$.

5) Пространство матриц размера mxn, M_{mxn}.

   Рассмотрим на примере $M_{2\text{x}3} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

   Канонический базис:

   $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

   $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Тогда $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = a \cdot E_1 + b \cdot E_2 + c \cdot E_3 + d \cdot E_4 + e \cdot E_5 + f \cdot E_6$.

   (a, b, c, d, e, f) – координаты матрицы в каноническом базисе.

   $dim\, M_{2\text{x}3} = 2 \cdot 3 = 6$.

Преобразование координат вектора при переходе к другому базису

$S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ – старый базис пространства, $S' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\}$ – новый базис пространства. Если

$\vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n$= $(a_{11} \dots \dots a_{n1})$

…

$\vec{f}_n = a_{1n}\vec{e}_1 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n = (a_{1n} \dots \dots .. a_{nn})$

то P – матрица перехода от старого базиса S к новому базису S' имеет вид:

$$P = P_{S \to S'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Формула преобразования координат при замене базиса:

$$\text{X}' = P^{-1}_{S \to S'} \cdot X,$$

где $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)_S$, и $\text{X}' = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{S'}$ - координаты вектора $\vec{x}$ в базисах S и S'.