Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическая физика и вычислительная математика»

И.В. Дубограй, Е.В. Коломейкина, С.И. Шишкина

ТЕХНИКА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Электронное учебное издание

Методические указания к решению задач
по теме «неопределенные интегралы»

Москва

УДК 517.31

Рецензент: доц., к.ф.-м.н., Маргарита Михайловна Сержантова

Дубограй И.В., Коломейкина Е.В., Шишкина С.И.

Техника интегрирования: электронное учебное издание. - М.: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2010. 63 с.

Издание содержит все методы вычисления неопределенных интегралов, предусмотренные учебным планом МГТУ им. Н.Э.Баумана. Представлен справочный материал, содержащий основные определения, формулировки необходимых теорем. Даны подробные решения задач со ссылками на нужные формулы, предлагаются задачи для самопроверки. В нескольких разделах предложены способы вычисления неопределенных интегралов, отличающиеся от исторически принятых и являющиеся более рациональными.

Для студентов МГТУ имени Н.Э. Баумана всех специальностей.

Электронное учебное издание

Дубограй Ирина Валерьевна

Коломейкина Екатерина Владимировна

Шишкина Светлана Ивановна

ТЕХНИКА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Введение

В данном пособии представлен справочный теоретический материал, необходимый для освоения техники интегрирования, в компактной форме изложены все необходимые сведения из теории, подробно разобраны решения типовых задач.

Разделы «указаний» полностью соответствуют программе обучения студентов, утверждённой методической комиссией МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Авторы преследовали цель активизировать самостоятельную работу студентов, улучшить качество подготовки учащихся по данному разделу математики.

Методические указания предназначены для студентов первого курса всех специальностей, а также будут полезны студентам старших курсов в качестве справочного материала.

Часть 1. Основные сведения

Определение. Функция *F(x)* называется первообразной функции *f(x)* на некотором интервале, если $F'(x) = f(x)$ в каждой точке этого интервала.

Если функция *f(x)* имеет первообразную, то эта первообразная определена неоднозначно, так как $(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$.

Определение. Неопределенным интегралом от функции *f(x)* по переменной *x* называется множество первообразных этой функции, отличающихся друг от друга на произвольную константу.

$$\int f(x)dx = F(x)+C \qquad \textbf{(1.1)}$$

Заметим, что формула (1.1) верна для любой переменной. Так, например, $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$, поскольку $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, а также $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}u + c$, т.к. $(\mathrm{tg}u)'_u = \frac{1}{\cos^2 u}$.

То есть, **неопределенный интеграл инвариантен относительно переменной.** И тогда формулу (1.1) можно записать в следующем виде:

$$\int f(u)du = F(u)+C \qquad \textbf{(1.2)}$$

В формуле (1.2) роль *u* может играть любая независимая переменная, а также переменная, являющаяся функцией другой независимой переменной, например, *u=y(x).*

Задача интегрирования функции *f(u)* по переменной *u* сводится к отысканию ее первообразной *F(u),* то есть такой функции *F(u),* производная которой $\frac{dF(u)}{du} = f(u)$, либо, что равносильно, дифференциал которой $dF(u) = f(u)du$.

Основные свойства неопределенных интегралов **(1.3)**

1. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx.$

2. Интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от соответствующих функций:

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Формулы интегрирования, получающиеся обращением основных формул дифференцирования, сведены в таблицу 1. Кроме них в таблицу включены интегралы, которые позже будут вычислены, но так как их вычисление связанно с затратой некоторого времени, а они довольно часто встречаются в прикладных задачах, то удобно их считать табличными.

Для успешного освоения и приобретения стойких навыков техники интегрирования формулы, приведенные в таблице 1, следует выучить наизусть.

Таблица основных определенных интегралов для функции f(u)

Таблица 1.

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$	2. $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$
3. $\int e^u du = e^u + C$	4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
5. $\int \cos u du = \sin u + C$	6. $\int \sin u du = -\cos u + C$
7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + C$	8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C$
9. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\frac{u}{2}\right\rvert + C$	10. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$.
11. $\int \mathrm{ch} u du = \mathrm{sh} u + C$	12. $\int \mathrm{sh} du = \mathrm{ch} u + C$
13. $\int \frac{du}{\mathrm{ch}^2 u} = \mathrm{th} u + C$	14. $\int \frac{du}{\mathrm{sh}^2 u} = -\mathrm{cth} u + C$
15 $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C = -\arccos\frac{u}{a} + C_1$	16. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C$

17. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a}\,\mathrm{arcctg}\,\frac{u}{a} + C_1$	18. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$
19. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{a^2-u^2} + a^2\arcsin\frac{u}{a}\right) + C$	20. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2\pm a^2} \pm a^2\ln\left\|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right\|\right) + C$

Чтобы вычислить неопределенный интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным, то есть отсутствует в таблице 1 при $u=x$, следует так преобразовать подынтегральное выражение, чтобы можно было воспользоваться свойствами интегралов и таблицей 1 при некоторой переменной $u=u(x)$. Далее рассматриваются основные приемы, которые позволяют решить эту задачу.

Часть 2. Тождественное преобразование подынтегральной функции

Задача интегрирования может быть решена, если удастся так тождественно преобразовать подынтегральную функцию, что после использования свойств интегралов, данный интеграл окажется равен одному или сумме нескольких табличных интегралов. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Вычислим интеграл $I = \int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x}dx$.

Решение. Данный интеграл не является табличным и не похож ни на один интеграл из таблицы 1. Преобразуем подынтегральную функцию, используя формулу $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ и свойства интегралов **(1.3)**

$$I = \int \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}{x}dx = \int \frac{x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1}{x}dx = \int\left(\sqrt{x}+3+\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= \int x^{1/2}dx + 3\int dx + 3\int x^{-1/2}dx + \int\frac{dx}{x}.$$

Каждый из получившихся интегралов можно вычислить, пользуясь **таблицей 1** при $u = x$.

$\int x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C_1$. (См. форм. 1 при n=$\frac{1}{2}$).

$\int dx = x + C_2$. (См. форм. 1 при n=0).

$\int x^{-1/2} dx = 2x^{1/2} + C_3$. (См. форм. 1 при n=-$\frac{1}{2}$).

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_4$. (См. форм. 2).

Ответ. $I = \frac{2}{3} x^{3/2} + x + 2\sqrt{x} + \ln|x| + C$, где C=$C_1 + C_2 + C_3 + C_4$.

Пример 2. Вычислим интеграл $I = \int \frac{dx}{9x^2 + 4}$.

Решение. Данный интеграл не является табличным, но похож на интеграл 17 в **таблице 1.** Если преобразовать подынтегральную функцию, так что знаменатель будет иметь вид $(x^2 + a^2)$, то интеграл можно вычислить по этой формуле при $u = x$. Преобразуем функцию следующим образом: $\int \frac{dx}{9x^2 + 4} = \int \frac{dx}{9(x^2 + \frac{4}{9})} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{4}{9}} = \frac{1}{9} \frac{1}{\sqrt{4/9}} \operatorname{arctg} \frac{3x}{2} + C$.

(См. форм. 17 при $u = x$, $a = \frac{2}{3}$).

Ответ. $I = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{3x}{2} + C$.

Пример 3. Вычислим интеграл $I = \int \frac{x^2}{x^2 - 9} dx$.

Решение. Данный интеграл не является табличным. Его знаменатель похож на знаменатель формулы 18 в **таблице 1** при u=x , a=3. Чтобы воспользоваться этой формулой, необходимо избавиться от x^2 в числителе. Это позволяет сделать следующее тождественное преобразование.

$$I = \int \frac{x^2}{x^2 - 9} dx = \int \frac{\left(x^2 - 9\right) + 9}{x^2 - 9} dx = \int \left(1 + \frac{9}{x^2 - 9}\right) dx = \int dx + 9 \int \frac{dx}{x^2 - 9}.$$

Используя свойства интегралов (1.3), получили сумму двух табличных интегралов при *u*=*x*. Первый из них соответствует формуле 1 при *n*=0, второй – формуле 18, где *a*=3. См. **таблицу 1**.

Ответ. $I = x + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$

Пример 4. Вычислим интеграл $I = \int \mathrm{tg}^2 x dx$.

Решение. Данный интеграл не является табличным, но подынтегральную функцию можно преобразовать следующим образом

$$\int \mathrm{tg}^2\, x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - \int dx .$$

В результате тождественных преобразований и применения свойств (1.3) получили сумму двух табличных интегралов для *u*=*x*. См. **таблицу 1.**

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C$ и $\int dx = x + C$. (См. форм. 7 и форм. 1 при $n = 0$).

Окончательный ответ: $I = \mathrm{tg} x - x + C.$

Задачи для самостоятельной работы

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.	Отв. $\frac{1}{2}\arcsin 2x + C$.	См. **таблицу 1**, форм.15.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$.	Отв. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{2}{3}}\right| + C$.	См. **таблицу 1**, форм. 16.
3. $\int e^{x+5} dx$.	Отв. $e^5 e^x + C$.	См. **таблицу 1**, форм. 3.
4. $\int 3^x e^x dx$.	Отв. $\frac{(3e)^x}{1+\ln 3} + C$.	См. **таблицу 1,** форм.4.
5. $\int \frac{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x} dx$.	Отв. $\ln\left|x\right| - 6\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$.	См. **таблицу 1**, форм. 1 и 2.
6. $\int \frac{x^2}{4x^2+25} dx$.	Отв. $\frac{1}{4}(x - \frac{5}{2}\mathrm{arctg}\frac{2x}{5}) + C$.	См. **таблицу 1**, форм.17 и пр.3.
7. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$.	Отв. $\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \arcsin x + C$.	См. **таблицу 1**, форм.15 и 16.

8. $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$. Отв. $x-\cos x+C$. См. **таблицу 1**, форм.1 и 6.

9. $\int ctg^2 x dx$. Отв. $-ctgx-x+C$. См. **таблицу 1**, форм. 4

Часть 3. Подведение под знак дифференциала

Учитывая, что дифференциал функции $u(x)$ вычисляется по формуле $du(x)=u'(x)dx$, а неопределенный интеграл инвариантен относительно переменной, многие интегралы можно привести к табличным, преобразовав их следующим образом:

$$\int\varphi(x)dx=\int f(u(x))\cdot u'(x)dx=\int f(u(x))du(x)=F(u(x))+C,$$

где $F(u)$ – первообразная функции $f(u)$. Такой способ приведения интеграла к табличному виду *называется методом подведения под знак дифференциала*.

1. В частности, просто приводится к табличному интеграл следующего вида:

$$\boxed{\int f(ax+b)dx=\begin{bmatrix} d(ax+b)=adx \\ dx=\dfrac{1}{a}d(ax+b)\end{bmatrix}=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)=\frac{1}{a}F(ax+b)+C,} \quad (\mathbf{3.1})$$

где $F(u)$ – первообразная функции $f(u)$ при $u=ax+b$.

Пример 5. Вычислим интеграл $\int\sin(5x+3)dx$.

Решение. Данный интеграл не является табличным, но похож на $\int\sin u du$, где роль u должна играть функция $5x+3$. Приведем данный интеграл к табличному следующим образом, (см. (**3.1**)):

$$\int\sin(5x+3)dx=\begin{bmatrix} f(ax+b)=\sin(5x+3) \\ a=5,\ b=3\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\int\sin(5x+3)d(5x+3).$$

(См. таблицу 1, форм. 6 при $u(x)=5x+3$.)

Ответ: $J=-\frac{1}{5}\cos(5x+3)+C$.

Пример 6. Вычислите интеграл $I=\int\frac{dx}{3-4x}$.

Решение. (Поэтапная самопроверка.) Ответьте последовательно на следующие вопросы.

1) Является ли данный интеграл табличным? (Нет.)

2) Можно ли тождественно преобразовать подынтегральную функцию так, что это приведет к одному или нескольким табличным интегралам? (Нет.)

3) Похож ли данный интеграл на какой-либо интеграл из таблицы 1 и, если похож, то на какой именно? (Да, см. форм. 2.)

4) Можно ли преобразовать данный интеграл в выбранный табличный интеграл, и что будет играть роль переменной u?

(Можно, см. форм. 2, $u(x)=3-4x$, см. (**3.1**))

5) Приведите данный интеграл к табличному интегралу и вычислите его. Ответ: $I=-\frac{1}{4}\ln|3-4x|+C$.

2. Если сравнить следующие равенства:

$$\int u'(x)dx=u(x)+C \text{ и } du(x)=u'(x)dx,$$

то очевидно, что **интегрирование и подведение под знак дифференциала – одно и то же действие,** а именно, нахождение функции $u(x)$ по ее производной. Тогда имеет место следующее правило:

Чтобы часть подынтегральной функции подвести под знак дифференциала, следует ее отдельно проинтегрировать, результат интегрирования записать под знак дифференциала. **(3.2)**

Пример 7. Вычислить интеграл $J=\int\frac{xdx}{\sqrt{16-x^4}}$.

Решение. Данный интеграл не является табличным и не похож ни на один интеграл таблицы 1.

Рассмотрим две части подынтегральной функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{16-x^4}}\cdot x.$

$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{16-x^4}}$ невозможно проинтегрировать по переменной x, пользуясь- табличными формулами при $u=x$, а следовательно, эту часть нельзя подвести под знак дифференциала. (См. (**3.2**)). От функции $f_2(x)=x$ можно взять интеграл по x и этот интеграл $\int f_2(x)dx=\int xdx=\frac{x^2}{2}+C.$

Тогда из (**3.2**) следует, что $f_2(x)\cdot dx=x\cdot dx=d(\frac{x^2}{2}+C)=\frac{1}{2}dx^2.$

Теперь данный интеграл можно записать в следующем виде

$$J=\int\frac{xdx}{\sqrt{16-x^4}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{\sqrt{16-x^4}}.$$

Новый интеграл является табличным при $u=x^2$ и a=4. (См. **таблицу *1,*** форм.15).

Ответ: $J=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{4}+C.$

Пример 8 **.**Вычислите интеграл $I=\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$.

Решение. (Поэтапная самопроверка.) Ответьте последовательно на следующие вопросы.

1) Является ли данный интеграл табличным? (Нет.)

2) Можно ли тождественно преобразовать подынтегральную функцию так, что это приведет к одному или нескольким табличным интегралам? (Нет.)

3) Похож ли данный интеграл на какой-либо интеграл из таблицы 1 и, если похож, то на какой именно? (Нет.)

4) Есть ли в подынтегральной функции $f(x)$ часть, которую можно отдельно проинтегрировать по переменной x?

(Да, $f_1(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ и $f_2(x)=\sin x$ можно проинтегрировать по переменной x, см. таблицу *1* форм. 6 и 7.)

5) Можно ли часть подынтегральной функции подвести под знак дифференциала?

(Да, под знак дифференциала можно подвести и $f_1(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, и $f_2(x)=\sin x$.)

6) Подведите под знак дифференциала $f_1(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. Что для этого следует сделать?

(См. (**3.2**)) для подведения под знак дифференциала функции $f_1(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ следует отдельно ее проинтегрировать и результат записать под знак дифференциала.

Получим: $\displaystyle\int \sin x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\left[\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}\,x+C,\ \frac{dx}{\cos^2 x}=d\,\mathrm{tg}\,x.\right]=\int \sin x\,d\,\mathrm{tg}\,x$.)

7) Есть ли в таблице *1* интеграл $\int \sin x\,d\,\mathrm{tg}\,x$ при $u(x)=\mathrm{tg}\,x$?

(Нет, то есть такое подведение под знак дифференциала не позволяет привести данный интеграл к табличному виду.)

8) Подведите под знак дифференциала, пользуясь правилом (**3**.2) функцию $f_2(x)=\sin x$.

$$(\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\sin x dx=\left[\int \sin x dx=-\cos x+C,\ \sin x dx=d(-\cos x)\right]=$$
$$=-\int\frac{1}{\cos^2 x}d\cos x).$$

9) Есть ли подобный интеграл в таблице *1*?

(Да, полученный интеграл выглядит, как табличный интеграл (форм. 1 при $n=-2$), а именно: $-\int u^{-2}du$, где $u=\cos x$.)

10) Вычислите полученный интеграл.

$$\left(\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} = -\int (\cos x)^{-2} d\cos x = -\frac{(\cos x)^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{\cos x} + C.\right)$$

Ответ получен.

Пример 9. Вычислим интеграл $I = \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Решение. Данный интеграл не является табличным, но похож на интеграл 16 из таблицы *1*. Числитель $x+2$ не позволяет сразу его вычислить. Однако этот интеграл можно представить как сумму двух интегралов: $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Данный интеграл равен сумме двух, второй из которых, как мы видим, является табличным при $u=x$ (см. таблицу 1, форм. 16), в первом же интеграле можно подвести под знак дифференциала и x, и $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Рассмотрим оба варианта подведения под знак дифференциала.

а) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{x^2+1}}$, (см. (**3**.2));

б) $\int x \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int x d\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

Полученный в пункте б) интеграл не похож ни на один из интегралов таблицы 1.

Полученный в пункте а) интеграл похож на $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$, который является табличным, но необходимо ещё одно преобразование. А именно:

$\int \frac{dx^2}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$. (См. **(3.1)**). Таким образом, построен табличный интеграл при $u = x^2+1$. (См. **таблицу 1** форм. 1)

Окончательно получаем

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{x^2+1}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-1/2}d(x^2+1) + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + 2\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C.$$

Ответ: $I = \sqrt{x^2+1} + 2\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$.

Пример 10. Вычислим интеграл $I = \int \frac{x\sqrt[3]{\ln(2x^2+3)}}{2x^2+3}dx$.

Решение. Данный интеграл не является табличным. В подынтегральной функции есть две части, которые можно проинтегрировать, а значит, подвести под знак дифференциала. Это $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = \frac{1}{2x^2+3}$. Если выполнить эти действия, то интеграл приведётся к одному из следующих видов:

а) $I = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt[3]{\ln(2x^2+3)}}{2x^2+3}dx^2$; (см. (**3.**2));

б) $I = \int x\sqrt[3]{\ln(2x^2+3)} \cdot \frac{dx}{2(x^2+3/2)} = \frac{1}{2}\int x\sqrt[3]{\ln(2x^2+3)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} d\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}x}$.

В пункте б) при $u(x) = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}$ ничего похожего на табличные интегралы нет. Это действие к успеху не ведет. В пункте а) табличный интеграл ещё не построен, но возможно ещё одно подведение под знак дифференциала, если полученный интеграл преобразовать следующим образом.

$$I=\frac{1}{2}\int\sqrt[3]{\ln(2x^2+3)}\cdot\frac{\frac{1}{2}d(2x^2+3)}{2x^2+3}\quad \text{(См. }\mathbf{(3.1)}\text{)}$$

Часть $\frac{du}{u}$, где $u=2x^2+3$ может быть подведена под знак дифференциала. (См. **(3.**2) и таблицу 1 форм. 2).

Получим $I=\frac{1}{4}\int\sqrt[3]{\ln(2x^2+3)}d\ln(2x^2+3)=\frac{1}{4}\int u^{1/3}du$, где $u=\ln(2x^2+3)$.

Это табличный интеграл (см. **таблицу 1** форм. 1 при $\mathrm{n}=\frac{1}{3}$). И так как $\int u^{1/3}du=\frac{3}{4}u^{4/3}+C$, получаем окончательный ответ: $I=\frac{3}{16}\sqrt[3]{\ln^4(2x^2+3)}+C.$

Замечание. Метод подведения под знак дифференциала является основным методом интегрирования. Поэтому, чем больше будет решено задач, связанных с ним, тем легче будет усвоить следующие методы интегрирования.

Задачи для самостоятельной работы

1. $\int(4x+1)^7dx$	Отв. $\frac{1}{32}(4x+1)^8+C$	См. (3.1), таблицу 1 форм. 1
2. $\int\cos 3x dx$	Отв. $\frac{1}{3}\sin 3x+C$	См. (3.1), таблицу 1 форм. 5
3. $\int\frac{dx}{\sin 2x}$	Отв. $\frac{1}{2}\ln\lvert\mathrm{tg}\,x\rvert+C$	См. (3.1), таблицу 1 форм. 9
4. $\int(\sin x+\cos x)^2dx$	Отв. $x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ См. (3.1), таблицу 1 форм. 6
5. $\int\frac{dx}{6x+5}$	Отв. $\frac{1}{6}\ln\lvert 6x+5\rvert+C$	См. (3.1), таблицу 1 форм. 2

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$	Отв. $\sqrt{2x-3}+C \quad n=-1/2$	См. (3.1), таблицу 1 форм. 2
7. $\int x\cdot 3^{x^2}dx$	Отв. $\frac{1}{2\ln 3}\cdot 3^{x^2}+C$	См. (3.2), таблицу 1 форм. 4
8. $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2+1}dx$	Отв. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x+C$	См. (3.2), таблицу 1 форм. 17 и 1
9. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$	Отв. $\frac{2}{3}\sqrt{\arcsin^3 x}+C$	См. (3.2), таблицу 1 форм. 15 и 1
10. $\int \cos 3x \sin^2 3x dx$	Отв. $\frac{1}{9}\sin^3 3x+C$	См. (3.1), (3.2), таблицу 1 форм. 1
11. $\int \frac{x+5}{x^2-9}dx$	Отв. $\frac{1}{2}\ln\left\|x^2-9\right\|+\frac{5}{6}\ln\left\|\frac{x-3}{x+3}\right\|+C$	См. пример 9, таблицу 1 форм. 2 и 18
12. $\int \frac{3-4x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$	Отв. $\arcsin 3x+\frac{4}{9}\sqrt{1-9x^2}+C$	См. пример 9, таблицу 1 форм. 1 и 15
13. $\int \frac{dx}{1+e^x}$	Отв. $x-\ln(1+e^x)+C$	$\frac{1}{1+a}=\frac{1+a-a}{1+a}$, См. (3.2), таблицу 1 форм. 1 и 2
14. $\int \frac{x+\operatorname{arctg}4x}{1+16x^2}dx$	Отв. $\frac{1}{32}\ln\left\|1+16x^2\right\|-\frac{1}{8}\operatorname{arcctg}^2 4x+C$	См. (3.1), (3.2), таблицу 1 форм. 1 и 2

Часть 4. Интегрирование по частям

Если интеграл можно преобразовать так, что $\int f(x)dx=\int u(x)dv(x)$, но получившийся интеграл нельзя вычислить, применяя уже рассмотренные методы, то имеет место следующая формула, называемая *формулой интегрирования по частям*:

$$\boxed{\int u(x)dv(x)=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)du(x)}, \qquad \textbf{(4.1)}$$

то есть

интеграл от произведения одной функции на дифференциал другой функции равен произведению этих функций минус интеграл, в котором функции поменялись местами.

Смысл применения этой формулы заключается в том, чтобы новый интеграл $\int v du,$ где $du(x) = u'(x)dx,$ оказался проще исходного. Формула (**4.1**) успешно применяется при вычислении неопределенных интегралов от тех элементарных функций, которые отсутствуют в таблице 1, например, от $\operatorname{arctg} x,\ \log_a x$ и т.д., а также от произведений типа $x^n \cdot a^{mn},\ \ x^n \cos bx,\ \ x^n \log_a x,\ \ a^x \cos bx$ и т.д.

Рассмотрим несколько примеров, требующих применения этого метода.

Пример 11. Вычислим интеграл $J = \int \log_2 x dx$.

Решение. Данный интеграл не является табличным и не похож ни на один интеграл из табличных. Функцию $f(x) = \log_2 x$ невозможно преобразовать так, чтоб она стала табличной. Применим к данноиу интегралу формулу (4.1). Подынтегральное выражение имеет вид $u(x)dv(x)$, поэтому в силу формулы интегрирования по частям **(4.1)** получаем:

$$\int \log_2 x dx = \left[\begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du, \text{ где} \\ u(x) = \log_2 x,\ dv(x) = dx, \\ v(x) = x,\ du(x) = u' dx = \dfrac{dx}{x \ln 2} \end{array} \right] = x \log_2 x - \int x \cdot \frac{dx}{x \ln 2} =$$

$$= x \log_2 x - \frac{1}{\ln 2} \int dx = x \log_2 x - \frac{x}{\ln 2} + C.$$

Ответ получен.

Пример 12. Вычислим интеграл $J=\int x\cos x dx$, применяя метод интегрирования по частям.

Решение. Данный интеграл допускает два варианта приведения к виду $\int udv$, так как под знак дифференциала можно подвести как x, так и $\cos x$, см. (**3.**2). Рассмотрим оба варианта.

а) Подведем под знак дифференциала x. Получим интеграл $J=\int \cos x d(x^2/2)$ вида $\int udv$. В результате применения формулы интегрирования по частям получим новый интеграл вида $\int vdu=\int (x^2/2)d\cos x$.

б) Подведем под знак дифференциала $\cos x$. Получим интеграл $J=\int xd\sin x$ вида $\int udv$. В результате применения формулы интегрирования по частям получим новый интеграл вида $\int vdu=\int \sin xdx$.

Из двух полученных новых интегралов проще оказался второй. Поэтому для вычисления исходного интеграла выбираем преобразования, показанные в пункте б). Результат применения формулы (**4.1**) выглядит следующим образом:

$$\int x\cos xdx=\int \underset{u}{x}d\underset{v}{\sin x}=\underset{u}{x}\cdot\underset{v}{\sin x}-\int \underset{v}{\sin x}\,d\underset{u}{x}.$$

Ответ: $J=x\sin x+\cos x+C$.

Пример 13. Вычислите интеграл $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. (Поэтапная самопроверка.) Ответьте последовательно на следующие вопросы.

1) Какую часть подынтегральной функции можно подвести под знак дифференциала? (См. (**3.**2). Под знак дифференциала можно подвести только $\frac{1}{\sqrt{x}}$.)

2) Как будет выглядеть новый интеграл?

(см. таблица *1* форм. 1, $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \int \ln x d2\sqrt{x}$.)

3) Примените к исходному интегралу формулу интегрирования по частям. $\left(\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\int \underset{u}{\ln x}\, d\underset{v}{\sqrt{x}} = 2\left(\sqrt{x}\ln x - \int \underset{v}{\sqrt{x}}\, d\underset{u}{\ln x}\right)\right)$.

4) Новый интеграл в правой части не является табличным, можно ли его преобразовать к табличному интегралу?

(Можно, т.к. $d\ln x = (\ln x)'\, dx = \frac{1}{x}dx$.)

5) Выполнив соответствующее преобразование, вычислите интеграл.

$$\left(\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\left(\sqrt{x}\ln x - \int \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx\right) = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C\right)$$

Ответ получен.

Пример 14. Вычислите интеграл $\int \frac{x}{\cos^2 3x}dx$.

Решение. (Поэтапная самопроверка.) Ответьте последовательно на следующие вопросы.

1) Можно ли подвести под знак дифференциала x, и как тогда будет выглядеть интеграл? $\left(\text{Можно, см. (3.2) } \int \frac{xdx}{\cos^2 3x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\cos^2 3x}.\right)$

2) Можно ли подвести под знак дифференциала $\frac{1}{\cos^2 3x}$, и как будет выглядеть интеграл в этом случае?

$$\left(\text{Можно, см. (3.1) и (3.2) } \int x\cdot\frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3}\int x\cdot\frac{d3x}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3}\int xd\,\mathrm{tg}\,3x.\right)$$

3) В пунктах а) и б) получены интегралы вида $\int udv$. Поменяйте в обоих интегралах функции u и v местами и выберите для дальнейших вычислений тот из них, который проще.

$\left(\text{Из пункта а) следует } \int vdu = \frac{1}{2}\int x^2 d\left(\frac{1}{\cos^2 3x}\right). \right)$

$\left(\text{Из пункта б) следует } \int vdu = \frac{1}{3}\int \operatorname{tg} 3x dx. \right)$

(Второй из полученных интегралов проще, поэтому для вычисления исходного интеграла мы выбираем преобразования из пункта б).)

4) Завершите вычисление интеграла.

$$\left(\int \frac{xdx}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3}\int \underset{u}{x}\, d\underset{v}{\operatorname{tg} 3x} = \frac{1}{3}(\underset{u}{x}\underset{v}{\operatorname{tg} 3x} - \int \underset{v}{\operatorname{tg} 3x}\, d\underset{u}{x}) = \frac{1}{3}\left(x \operatorname{tg} 3x - \int \frac{\sin 3x}{\cos 3x} dx \right) = \right)$$

$$\left(= \frac{1}{3} x \operatorname{tg} 3x - \frac{1}{9}\int \frac{\sin 3x}{\cos 3x} d3x = \frac{1}{3} x \operatorname{tg} 3x + \frac{1}{9}\int \frac{d\cos 3x}{\cos 3x} = \frac{1}{3} x \operatorname{tg} 3x + \frac{1}{9}\ln\left|\cos 3x\right| + C. \right)$$

Ответ получен.

Существуют интегралы, для вычисления которых формулу интегрирования по частям необходимо применить несколько раз.

Пример 15. Вычислите интеграл $J = \int x^2 e^x dx$, применяя метод интегрирования по частям.

Решение. Ответьте последовательно на следующие вопросы.

1) Какую часть подынтегральной функции можно подвести под знак дифференциала? (Под знак дифференциала можно подвести и x^2, и e^x.)

2) Чтобы построить интеграл вида $\int udv$, рассмотрите два возможных варианта: подведите под знак дифференциала x^2, затем e^x.

$$\left(\int x^2e^xdx=\frac{1}{3}\int e^xdx^3 \ \text{ и } \ \int x^2e^xdx=\int x^2de^x, \text{ см. (3.1) и (3.2).}\right)$$

3) Как будет выглядеть новый интеграл вида $\int vdu$ в каждом из этих двух случаев? $\left(\int vdu=\frac{1}{3}\int x^3de^x \ \text{ и } \int vdu=\int e^xdx^2.\right)$

4) Какой из последних интегралов проще для дальнейшего вычисления? $\left(\text{Проще } \int e^xdx^2=\int e^x\cdot 2xdx=2\int xe^xdx.\right)$

5) Примените формулу интегрирования по частям к исходному интегралу, выбрав более простой способ подведения под знак дифференциала.

$$\left(\int x^2e^xdx=\int x^2de^x=x^2e^x-\int e^xdx^2=x^2e^x-2\int xe^xdx.\right)$$

6) В правой части появился интеграл $\int xe^xdx$, для вычисления которого снова необходимо применить формулу интегрирования по частям, подведя под дифференциал ещё раз e^x. Выполните это преобразование и вычислите $\int xe^xdx.$

$$\left(\int xe^xdx=\int xde^x=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x+C.\right)$$

7) Запишите окончательный ответ.

$$\left(\int x^2e^xdx=x^2e^x-2\int xe^xdx=x^2e^x-2\left(xe^x-e^x\right)+C.\right)$$

Ответ получен.

Существуют интегралы, применение к которым формулы интегрирования по частям приводит к уравнению относительно искомого интеграла.

Разберем следующие примеры.

Пример 16. Вычислим интеграл $J=\int\sqrt{a^2+x^2}dx$, используя метод интегрирования по частям.

Решение. Данный интеграл имеет вид $\int udv$, и если применим к нему формулу интегрирования по частям (**4.1**), то получим следующее:

$$\int\underbrace{\sqrt{a^2+x^2}}_{u}\underbrace{dx}_{v}=\underbrace{x}_{v}\underbrace{\sqrt{a^2+x^2}}_{u}-\int\underbrace{x}_{v}d\underbrace{\sqrt{a^2+x^2}}_{u}=\begin{bmatrix} d\sqrt{a^2+x^2}=(\sqrt{a^2+x^2})'dx= \\ =\dfrac{2xdx}{2\sqrt{a^2+x^2}}. \end{bmatrix}=$$

$$=x\sqrt{a^2+x^2}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Последний интеграл не является табличным, и никакое подведение под знак дифференциала не приводит его к табличному виду. Преобразуем этот интеграл следующим образом:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\int\left(\frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)dx=$$

$$=\int\sqrt{a^2+x^2}dx-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Теперь для исходного интеграла мы имеем следующее:

$$\underline{\int\sqrt{a^2+x^2}dx}=x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}-\underline{\int\sqrt{a^2+x^2}dx}.$$

Получили уравнение, из которого можно выразить искомый интеграл. Перенесем последнее слагаемое в левую часть и окончательно получим:

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|\right)+C.$$

Ответ получен.

Таким образом вычислен один из табличных интегралов (См. **табл. 1**, форм.20). Подобным образом решается и следующий пример.

Пример 17. Вычислим интеграл $J=\int e^x\sin x dx$, применяя метод интегрирования по частям.

Решение. В данном интеграле под знак дифференциала можно подвести и e^x, и $\sin x$:

а) $\int e^x\sin x dx=\int \sin x de^x$; б) $\int e^x\sin x dx=-\int e^x d\cos x$.

Если в обоих интегралах вида $\int udv$ поменять функции u и v местами, то интегралы вида $\int vdu$ будут выглядеть следующим образом:

а) $\int vdu=\int e^x d\sin x$; б) $\int vdu=-\int \cos x de^x$.

Нельзя сказать какой из них проще, поэтому для вычисления исходного интеграла может быть выбрано любое из этих преобразований. Преобразуем интеграл, как это было сделано в пункте а), и применим к нему формулу интегрирования по частям (См.(**4.1**):

$$J=\int e^x\sin x dx=\int \sin x de^x=e^x\sin x-\int e^x d\sin x=\begin{bmatrix} d\sin x=(\sin x)'dx= \\ =\cos x dx. \end{bmatrix}=$$

$$=e^x\sin x-\int e^x\cos x dx.$$

Новый интеграл, полученный в правой части, практически не отличается от исходного. Преобразуем его, подведя под знак дифференциала опять функцию e^x, а затем применим снова формулу интегрирования по частям:

$$J_1=\int e^x\cos x dx=\int \cos x de^x=e^x\cos x-\int e^x d\cos x=\begin{bmatrix} d\cos x=(\cos x)'dx= \\ =-\sin x dx. \end{bmatrix}=$$

$$=e^x\cos x+\int e^x\sin x dx.$$

Тогда для исходного интеграла получим следующее уравнение:

$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$. Или $J = e^x(\sin x - \cos x) - J$.

Из данного уравнения выразим исходный интеграл:

$$J = \int e^x \sin x = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

Ответ получен.

Задачи для самостоятельной работы

1. $\int \operatorname{arcctg} x dx$	Отв. $x \operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$	См. (4.1)
2. $\int x^2 \ln x dx$	Отв. $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$	См. (3.2) и (4.1)
3. $\int \frac{\log_2 x}{x^2} dx$	Отв. $-\frac{1}{x}\log_2 x - \frac{1}{x\ln 2} + C$	См. (3.2) и (4.1)
4. $\int x e^{3x} dx$	Отв. $\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$	См. (3.2) и (4.1)
5. $\int x \sin 2x dx$	Отв. $-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$	См. (3.2) и (4.1)
6. $\int x^2 \cos x dx$	Отв. $x^2 \sin x + 2x\cos x - \sin x + C$	См. (3.2), (4.1) и пример ***15***
7. $\int 2^x \sin x dx$	Отв. $\frac{\ln 2 \cdot \sin x - \cos x}{1+\ln^2 x} \cdot 2^x + C$	См. пример ***17***
8. $\int \cos\ln x dx$	Отв. $\frac{1}{2}x \cdot (\cos\ln x + \sin\ln x) + C$	См. (4.1) и пример ***17***
9. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x} dx$	Отв. $-\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{\operatorname{ctg} x}{2} + C$	См. (3.2) и (4.1)

Часть 5. Метод подстановки (замена переменной)

Если интеграл $\int f(x)dx$ нельзя взять, применяя ранее предложенные методы, причем в подынтегральной функции есть часть $\varphi(x)$, которая выглядит “инородной”, то можно попробовать ввести новую переменную $\varphi(x)=t$. Если выразить затем переменную $x=\psi(t)$, вычислить дифференциал $dx=\psi'(t)dt$ и подставить всё в подынтегральную функцию, то исходный интеграл преобразуется следующим образом:

$$\int f(x)dx=\int f(\psi(t))\psi'(t)dt=\int f^{*}(t)dt.$$

Если получившийся интеграл можно вычислить, то

$$\int f(x)dx=F^{*}(t)+C=F^{*}(\varphi(x))+C,$$

где $F^{*}(t)$ – первообразная функции $f^{*}(t)$.

Рассмотрим несколько примеров, в которых используется данный метод.

Пример 18. Вычислим интеграл $J=\int\frac{dx}{2+\sqrt{3x+1}}$.

Решение. Данный интеграл не является табличным, не похож ни на один из табличных интегралов. Используя свойства интегралов, невозможно представить этот интеграл в виде суммы табличных интегралов. В подынтегральной функции отсутствует часть, которую можно было бы подвести под знак дифференциала. Данный интеграл нельзя вычислить, используя формулу интегрирования по частям. Попробуем упростить подынтегральную функцию, заменив ее знаменатель новой переменной t:

$$J=\int\frac{dx}{2+\sqrt{3x+1}}=\left[\begin{array}{l}2+\sqrt{3x+1}=t,\\ x=\dfrac{(t-2)^2}{3},\\ dx=\dfrac{2}{3}(t-2)dt\end{array}\right]=\int\frac{\frac{2}{3}(t-2)}{t}dt=\frac{2}{3}\int\frac{t-2}{t}dt.$$

Новый интеграл, получившийся после предложенной замены легко вычисляется.

$$J_1=\int\frac{t-2}{t}dt=\int\left(1-\frac{2}{t}\right)dt=t-2\ln|t|+C.$$

Вернувшись к старой переменной $t=2+\sqrt{3x+1}$, окончательно имеем: $\int\frac{dx}{2+\sqrt{3x+1}}=\frac{2}{3}\left(2+\sqrt{3x+1}-2\ln\left|2+\sqrt{3x+1}\right|\right)+C.$

Ответ получен.

Пример 19. Вычислите интеграл $J=\int\cos\sqrt{x}dx$.

Решение. (Поэтапная самопроверка.) Ответьте последовательно на следующие вопросы.

1) Является ли данный интеграл табличным? (Нет.)

2) Похож ли он на один из табличных интегралов?

(Похож на интеграл $\int\cos udu$.)

3) Можно ли какую-либо часть подынтегральной функции подвести под знак дифференциала? (Нет.)

4) Хотелось бы упростить какую-либо часть функции, заменив её простой переменной? (Да, $\sqrt{x}$).

5) Сделав замену $\sqrt{x}=t$, преобразуйте данный интеграл.

$$\left(\int\cos\sqrt{x}dx=\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=t,\ x=t^2,\\ dx=2tdt.\end{array}\right]=2\int t\cos tdt.\right)$$

6) Знаком ли вам последний интеграл? Каким методом можно его вычислить? (Методом интегрирования по частям, см. часть 4.)

7) Применив нужный метод интегрирования, вычислите интеграл.

$$\int t\cos t dt = \int \underset{u}{t}\, d\underset{v}{\sin t} = \underset{u}{t}\cdot\underset{v}{\sin t} - \int \underset{v}{\sin t}\, d\underset{u}{t} = t\cdot\sin t + \cos t + C.$$

8) Выпишите окончательный ответ, не забыв вернуться к старой переменной. Ответ: $J = 2\left(\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}\right) + C.$

Задачи для самостоятельной работы

1. $\int x(2x+3)^7 dx$ Отв. $\dfrac{(2x+3)^9}{36} - \dfrac{3(2x+3)^8}{32} + C$ $2x+3=t$

2. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}+2}$ Отв. $2\left(\sqrt{x}+2-2\ln(\sqrt{x}+2)\right)+C$ $\sqrt{x}+2=t$

3. $\int e^{\sqrt{x}}dx$ Отв. $2\left(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}\right)+C$ $\sqrt{x}=t$

4. $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$ Отв. $e^{\sqrt[3]{x}}\left(3\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} + 6\right)+C$ $\sqrt[3]{x}=t$ и (4.1)

5. $\int \dfrac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$ Отв. $\dfrac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7} - \dfrac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5} + 2\sqrt[3]{x+1} -$
$- 6\sqrt[6]{x+1} + \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1} + C$ $\sqrt[6]{x+1}=t$

6. $\int \dfrac{\sqrt[6]{x}dx}{4\sqrt[3]{x}+1}$ Отв. $\dfrac{3}{10}\sqrt[6]{x^5} - \dfrac{1}{8}\sqrt{x} + \dfrac{3}{32}\sqrt[6]{x} - \dfrac{3}{64}\operatorname{arctg} 2\sqrt[6]{x} + C$ $\sqrt[6]{x}=t$

Часть 6. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен

Рассмотрим некоторые интегралы вида $\int f(x, ax^2+bx+c)dx$ и способы их вычисления.

1. $\int \dfrac{dx}{(ax^2+bx+c)^k}$, $k = \left\{\dfrac{1}{2}, 1\right\}$ **(6.1)**

Для вычисления интеграла такого вида достаточно выделить полный квадрат в квадратном трехчлене $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2+B$, что приведет к табличному интегралу при $u=x-x_0$.

2. $\int\frac{mx+n}{(ax^2+bx+c)^k}dx$, $k=\left\{\frac{1}{2},1\right\}$ **(6.2)**

Для вычисления интеграла такого вида существует два способа.

Первый способ. Выделив полный квадрат, преобразовать квадратный трехчлен так, что $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2+B$, и затем заменить $x-x_0=t$.

Второй способ. Тождественно преобразовать числитель $mx+n$, выделив в нем слагаемое, равное производной квадратного трехчлена $(ax^2+bx+c)'=2ax+b$. Пользуясь тем, что $u'dx=du$, подвести это слагаемое под знак дифференциала.

$$\int\frac{mx+n}{(ax^2+bx+c)^k}dx=\int\frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+n-\frac{mb}{2a}}{(ax^2+bx+c)^k}dx=\frac{m}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^k}+$$
$$+(n-\frac{mb}{2a})\cdot\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^k}$$

Первый интеграл в правой части приводится к $\int\frac{du}{u^k}$. Второй интеграл имеет вид, рассматриваемый в **(6.1)**.

3. $\int\frac{dx}{(mx+n)^\alpha\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\alpha\in N$ **(6.3)**

Для вычисления интеграла данного вида существует стандартная подстановка $mx+n=\frac{1}{t}$, которая приводит этот интеграл к одному из предыдущих видов **(6.1)** или **(6.2)**.

4. $\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n. **(6.4)**

Для вычисления данного интеграла полагаем, что $\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где многочлен

$Q_{n-1}(x) = Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + ... + C$ имеет неопределенные коэффициенты, которые вместе с числом λ можно найти, продифференцировав обе части равенства и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в получившемся выражении.

*Замечание***.** Одно из свойств неопределённого интеграла, вытекающее из его определения, заключается в том, что $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 20. Вычислим интеграл $J = \int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

Решение. Данный интеграл не является табличным, но похож на интеграл 15 таблицы *1*. Интеграл такого вида был рассмотрен в пункте **(6.1)**. Выделим полный квадрат в подкоренном выражении $5+4x-x^2 = -(x^2-4x+4)+4+5 = 9-(x-2)^2$.

Тогда $J = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{9-(x-2)^2}}$. (См. (**3.1**)).

Новый интеграл является табличным при $u = x-2$. (См. **таблицу 1** форм. 15).

Ответ: $J = \arcsin\frac{x-2}{3} + C$.

Пример 21. Вычислим интеграл $J = \int \frac{3x+4}{x^2+7x+10}dx$.

Решение. **(**См.**(6.2)**).

Первый способ. Выделим в квадратном трехчлене полный квадрат $x^2+7x+10 = x^2+2x\cdot\frac{7}{2}+\left(\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+10 = (x+\frac{7}{2})^2-\frac{9}{4}$.

Произведем замену переменной так, что $x+\frac{7}{2} = t$. Тогда

$$J=\int\frac{3x+4}{x^2+7x+10}dx=\begin{bmatrix} x+\frac{7}{2}=t \\ x=t-\frac{7}{2} \\ dx=dt \end{bmatrix}=\int\frac{3\left(t-\frac{7}{2}\right)+4}{t^2-\frac{9}{4}}dt=3\int\frac{tdt}{t^2-\frac{9}{4}}-\frac{13}{2}\int\frac{dt}{t^2-\frac{9}{4}}.$$

Получили два, достаточно просто вычисляющихся интеграла:

$J_1=\int\frac{tdt}{t^2-\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2-\frac{9}{4})}{t^2-\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}\ln\left|t^2-\frac{9}{4}\right|+C_1$. (См. (**3.2**) и (**3.1**)).

$J_2=\int\frac{dt}{t^2-\frac{9}{4}}=\frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{3}{2}}{t+\frac{3}{2}}\right|+C_2$. (См. таблицу 1 форм.18).

И окончательно, имеем $J=3J_1-\frac{13}{2}J_2$, то есть

$$J=\int\frac{3x+4}{x^2+7x+10}dx=3\cdot\frac{1}{2}\ln\left|t^2-\frac{9}{4}\right|-\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-\frac{3}{2}}{t+\frac{3}{2}}\right|+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|(x+\frac{7}{2})^2-\frac{9}{4}\right|-\frac{13}{6}\ln\left|\frac{2(x+\frac{7}{2})-3}{2(x+\frac{7}{2})+3}\right|+C$$

Ответ: $J=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+7x+10\right|-\frac{13}{6}\ln\left|\frac{x+2}{x+5}\right|+C$.

Второй способ. Тождественно преобразовав числитель, выделим в нем производную квадратного трехчлена $(x^2+7x+10)'=2x+7$.

$$3x+4=\frac{3}{2}(2x)+4=\frac{3}{2}(2x+7)-\frac{3\cdot 7}{2}+4=\frac{3}{2}(2x+7)-\frac{13}{2}.$$

Тогда данный интеграл можно представить как разность двух интегралов: $\int\frac{3x+4}{x^2+7x+10}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+7)-\frac{13}{2}}{x^2+7x+10}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+7)dx}{x^2+7x+10}-\frac{13}{2}\int\frac{dx}{x^2+7x+10}$.

В первом из полученных справа интегралов подведем числитель под знак дифференциала (см. **(3.**2))

$$J_1=\int\frac{(2x+7)dx}{x^2+7x+10}=\int\frac{d(x^2+7x)}{x^2+7x+10}=\int\frac{d(x^2+7x+10)}{x^2+7x+10}=\ln\left|x^2+7x+10\right|+C_1.$$

Второй интеграл приводится к табличному путем выделения полного квадрата (см. **(6.1)**)

$$J_2=\int\frac{dx}{x^2+7x+10}=\int\frac{dx}{(x+\frac{7}{2})^2-\frac{9}{4}}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+\frac{7}{2}-\frac{3}{2}}{x+\frac{7}{2}+\frac{3}{2}}\right|=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+2}{x+5}\right|+C_2.$$

Окончательный ответ совпадает с уже полученным

$$J=\int\frac{3x+4}{x^2+7x+10}dx=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+7x+10\right|-\frac{13}{6}\ln\left|\frac{x+2}{x+5}\right|+C.$$

Пример 22. Вычислите интеграл $\int\frac{dx}{(x-1)\cdot\sqrt{x^2+2x-2}}$, ответив последовательно на поставленные вопросы.

Решение. 1) Является ли данный интеграл табличным? (нет)

2) Можно ли часть подынтегральной функции подвести под знак дифференциала и относительно некоторой новой переменной u свести интеграл к табличному? (Можно подвести под знак дифференциала $\frac{1}{x-1}$, но новый интеграл не будет табличным).

3) Что существенное содержит подынтегральная функция в свете рассмотренных нами способов интегрирования? (Квадратный трехчлен)

4) К какому пункту части 6 относится данный интеграл? (6.3)

5) С чего следует начать преобразование данного интеграла, чтобы привести его к табличному виду? (Необходима подстановка $x-1=\frac{1}{t}$ (см. **(6.3)**)

6) Преобразуйте интеграл выбранным способом. $\left(-\int\frac{dt}{\sqrt{1+4t+t^2}}\right)$

7) Является ли полученный интеграл табличным? (нет)

8) Каким образом его можно привести к табличному?

(Выделить полный квадрат. См. **(6.1)**).

9) Преобразуйте полученный интеграл выбранным способом.

$$\left(-\int\frac{dt}{\sqrt{(t+2)^2-3}}\right).$$

10) Вычислите полученный интеграл и выпишите окончательный ответ. (Не забудьте вернуться к исходной переменной x!)

Ответ: $J=-\ln\left|t+2+\sqrt{1+4t+t^2}\right|+C=-\ln\left|\frac{2x-1+\sqrt{x^2+2x-2}}{x-1}\right|+C$.

Пример 23. Вычислим интеграл $J=\int\frac{2x^3+x^2-1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$.

Решение. (См. **(6.4)**). Данный интеграл имеет вид $\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, где $P_n(x)=2x^3+x^2-1$ есть многочлен степени $n=3$. Следуя предложенному способу, допустим, что этот интеграл можно представить следующим образом: $\int\frac{2x^3+x^2-1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx=Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{x^2+2x+5}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$,

где $Q_{n-1}(x)=Q_2(x)=Ax^2+Bx+C$ - многочлен порядка $n-1=2$, с неопределенными коэффициентами и λ - некоторое число. Далее продифференцируем обе части полученного равенства, учитывая, что $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x)$. Результатом дифференцирования будет равенство следующего вида: $\frac{2x^3+x^2-1}{\sqrt{x^2+2x+5}}=(2Ax+B)\cdot\sqrt{x^2+2x+5}+\left(Ax^2+Bx+C\right)\cdot\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

Умножив обе части на $\sqrt{x^2+2x+5}$, получим

$$2x^3+x^2-1=(2Ax+B)\cdot(x^2+2x+5)+\left(Ax^2+Bx+C\right)\cdot(x+1)+\lambda \qquad (*)$$

Так как равенство (*) имеет место для любого значения x, (заметим, что функция $f(x)=\frac{2x^3+x^2-1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ определена для любого $x\in R$), коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях (*) должны быть равны. Это позволяет составить систему для нахождения чисел A,B,C и λ. Приравняем коэффициенты при x^3, x^2, x и $x^0=1$ слева и справа в (*)

$$\left.\begin{array}{l} x^3 \Rightarrow \quad 2 = 2A + A \\ x^2 \Rightarrow \quad 1 = B + 4A + A + B \\ x \ \ \Rightarrow \quad 0 = 10A + 2B + B + C \\ x^0 \Rightarrow -1 = 5B + \lambda + C \end{array}\right\}$$ решая полученную систему, найдем

$A=\dfrac{2}{3}, B=-\dfrac{7}{6}, C=-\dfrac{19}{6}$ и $\lambda=8$.

Теперь исходный интеграл равен

$$J=\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{7}{6}x-\frac{19}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+5}+8\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}.$$

Выделив в последнем слагаемом полный квадрат $(x+1)^2+4$ в подкоренном выражении, получаем ответ:

$$J=\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{7}{6}x-\frac{19}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+5}+8\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}$ Отв. $\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+13}\right|+C$. См. **(6.1)**

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{6+4x-2x^2}}$ Отв. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{x-1}{2}+C$. См. **(6.1)**

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{3x^2+12x+16}$ Отв. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}(x+2)}{2}+C$. См. **(6.1)**

4. $\displaystyle\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3x+4}}dx$ Отв. $2\sqrt{x^2+3x+4}-2\ln\left|x+\dfrac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+4}\right|+C$ См. **(6.2)**

5. $\displaystyle\int\frac{3-x}{2x^2+5x+2}dx$ Отв. $\dfrac{17}{2}\ln\left|\dfrac{x+1/2}{x+2}\right|-\dfrac{1}{4}\ln\left|2x^2+5x+2\right|+C$. См. **(6.2)**

6. $\displaystyle\int(x+2)\sqrt{x^2+6x+8}\,dx$ Отв. $\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+6x+8\right)^3}-\dfrac{1}{2}(x+3)\sqrt{x^2+6x+8}+ \\ \qquad +\dfrac{1}{2}\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+8}\right|+C\end{array}\right.$ См. **(6.2)** и **таблицу** 1, форм.20

7. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+3x}}$ Отв. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x+6}{3(x+2)}+C$. См. **(6.3)**

8. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+6x-3x^2}}$ Отв. $-\frac{\sqrt{1+6x-3x^2}}{x}+3\ln\left|\frac{1+3x+\sqrt{1+6x-3x^2}}{x}\right|+C$ См. **(6.3)** и замена $\frac{1}{x}=t$

9. $\int \frac{3x^3+x^2-2x}{\sqrt{4-x^2}}dx$ Отв. $-(x^2+2x+6)\sqrt{4-x^2}+8\arcsin\frac{x}{2}+C$. См. **(6.4)**

10. $\int \frac{4x^2-x+1}{\sqrt{x-x^2}}dx$ Отв. $-2(x+1)\sqrt{x-x^2}+2\arcsin(2x-1)+C$ См. **(6.4)**

Часть 7. Интегрирование рациональных дробей

Рассмотрим интеграл вида $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$, где $n \ge 2$, $P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m$, $Q_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n$ - многочлены степени m и n соответственно, и подынтегральная дробь является несократимой. Для интегрирования несократимой дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ необходимо следующее её преобразование, вытекающее из основных теорем алгебры.

Таблица 2.

Условие	Преобразование
$m \ge n$	Выделение целой части (то есть деление многочлена $P_m(x)$ на многочлен $Q_n(x)$ с остатком) $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=R_{m-n}(x)+\frac{P^*_{m1}(x)}{Q_n(x)}$, где $m_1<n$.
$m<n$	Разложение правильной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ на сумму элементарных дробей вида $\frac{A}{(x-a)^k}$ и $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^r}$ где a - действительный корень многочлена $Q_n(x)$ кратности k, x^2+px+q - квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом $D=p^2-4q$, имею-

	щий комплексно сопряжённые корни многочлена $Q_n(x)$ кратности r. A, M, N - действительные числа.

План разложения рациональной правильной несократимой дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ на сумму элементарных дробей **(7.1)**

1. Разложить многочлен $Q_n(x)$ на множители вида $(x-a)$ и (x^2+px+q) с дискриминантом $D<0$: $Q_n(x)=b_0(x-a)^k(x-b)^l...(x^2+px+q)^r$. **2.** Разложить саму дробь следующим образом на сумму элементарных дробей с неопределенными коэффициентами, которые далее предстоит найти: $$\frac{P_m(x)}{b_0\underline{(x-a)^k}(x-b)^l...\underline{(x^2+px+q)^r}}=\underline{\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k}}$$ $$+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+...+\frac{B_l}{(x-b)^l}+\underline{\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}...+\frac{M_rx+N_r}{(x^2+px+q)^r}}.$$ **3.** Для вычисления неопределённых коэффициентов $A_1, A_2, ..., B_1, ..., N_r$ необходимо правую часть разложения привести к общему знаменателю $Q_n(x)$ и выписать равенство числителей обеих дробей: $$\frac{1}{b_0}P_m(x)=A_1(x-a)^{k-1}(x-b)^l...(x^2+px+q)^r+...+(M_rx+N_r)(x-a)^k(x-b)^l. \quad (*)$$ Далее можно воспользоваться одним из двух способов или их комбинацией. **3а.** Так как оба числителя равны при любом значении переменной x, подставляем в равенство (*) необходимое количество конкретных значений x для того, чтобы составить систему уравнений для нахождения всех неопределённых коэффициентов. (Как правило, очень удобно в качестве конкретных значений переменной x брать нули знаменателя, т.е. корни многочлена $Q_n(x)$).

3б. Другой способ заключается в том, что из тождественного равенства двух многочленов в (*) следует совпадение коэффициентов при одинаковых степенях x слева и справа. Это позволяет составить систему уравнений для нахождения неопределённых коэффициентов.

Например, рассмотрим разложение правильной рациональной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{x^3+4x^2-5x+1}{(x+1)(x^2-2x-3)^2(x^2+2x+3)^2}$ на сумму элементарных дробей.

Квадратный трехчлен x^2-2x-3 имеет дискриминант $D=16>0$, поэтому у него существуют два действительных корня $x_1=-1$ и $x_2=3$ и, следовательно $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$.

Дискриминант квадратного трехчлена x^2+2x+3 равен $D=-8<0$, поэтому этот трехчлен не имеет действительных корней.

Перепишем многочлен в знаменателе в преобразованном виде:

$Q_n(x)=(x+1)^3(x-3)^2(x^2+2x+3)^2$.

Теперь разложим данную дробь на элементарные дроби. Сравним каждый множитель нашего знаменателя с подобным множителем знаменателя в разложении в общем виде (см. (**7.1**))и выясним, сколько элементарных дробей и какого вида соответствуют ему.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{x^3+4x^2-5x+1}{\underbrace{(x+1)^3}_{k=3}\underbrace{(x-3)^2}_{l=2}\underbrace{(x^2+2x+3)^2}_{r=2}} = \underbrace{\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{A_3}{(x+1)^3}}_{k=3}+$$

$$+\underbrace{\frac{B_1}{x-3}+\frac{B_2}{(x-3)^2}}_{l=2}+\underbrace{\frac{M_1x+N_1}{x^2+2x+3}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+2x+3)^2}}_{r=2}$$

Пример 24. Вычислим интеграл $J=\int\frac{4x^2-15x+8}{(x-2)^2(x+1)}dx$.

Решение. (См. **таблицу 2**).

Сравним степени многочленов в числителе ($m=2$) и в знаменателе ($n=3$) $\Rightarrow$ $m<n$. Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью и для того, чтобы вычислить данный интеграл, её следует разложить на сумму элементарных дробей. (См. (**7.1**)).

Разложение выглядит следующим образом:

$$\frac{4x^2-15x+8}{\underbrace{(x-2)^2}_{k=2}\underbrace{(x+1)}_{l=1}}=\underbrace{\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}}_{k=2}+\underbrace{\frac{C}{x+1}}_{l=1}.$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов A,B,C, правую часть разложения приведем к общему знаменателю и рассмотрим равенство числителей, которое верно при любых значениях x.

$$4x^2-15x+8=A(x-2)(x+1)+B(x+1)+C(x-2)^2 \qquad (*)$$

Чтобы найти три числа A,B,C необходимо составить систему трех уравнений, содержащих их.

Первый способ. Подставим в (*) поочередно три конкретных значения переменной x, например $x=2,\ x=-1,\ x=0$.

$$\left.\begin{array}{lll} x=2 & \Rightarrow & -6=3B \\ x=-1 & \Rightarrow & 27=9C \\ x=0 & \Rightarrow & 8=-2A+B+4C \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} B=-2 \\ C=3 \\ A=1 \end{array}$$

Замечание. Обратите внимание, как удобна оказалась подстановка действительных корней знаменателя подынтегральной функции.

Второй способ. Вернемся к равенству (*) и воспользуемся тем, что два многочлена могут быть равны при любых значениях x только, если совпадают коэффициенты при одинаковых степенях переменной в левой и правой частях этого равенства.

Приравнивание коэффициентов при x^2, x и $x^0=1$ дает следующую систему:

$$\left.\begin{array}{lll} x^2 \Rightarrow & 4 = A + C \\ x \;\; \Rightarrow & -15 = -A + B - 4C \\ 1 \;\; \Rightarrow & 8 = -2A + B + 4C \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1, \quad B = -2, \quad C = 3.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, записываем подынтегральную дробь в преобразованном виде:

$$J = \int \frac{4x^2 - 15x + 8}{(x-2)^2(x+1)}dx = \int\left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+1}\right)dx = \int\left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{3}{x+1}\right)dx.$$

Каждое из слагаемых просто преобразуется к табличному виду. Окончательно получаем ответ: $J = \ln|x-2| + \dfrac{2}{x-2} + 3\ln|x+1| + C$.

Пример 25. Вычислим интеграл $J = \int \dfrac{2x^3 + 9x^2 - 12x - 18}{(x^2+2x)(x^2+9)}dx$, комбинируя оба способа для нахождения неопределённых коэффициентов.

Решение. (См. **таблицу 2**).

Сравним степени числителя $m = 3$ и знаменателя $n = 4 \Rightarrow m < n$. И так как подынтегральная рациональная дробь является правильной, разложим её на сумму элементарных дробей (см. (7.1)).

$$\frac{2x^3 + 9x^2 - 12x - 18}{\underbrace{x}_{k=1}\,\underbrace{(x+2)}_{l=1}\underbrace{(x^2+9)}_{r=1}} = \frac{A}{\underbrace{x}_{k=1}} + \frac{B}{\underbrace{(x+2)}_{l=1}} + \frac{Cx+D}{\underbrace{(x^2+9)}_{r=1}}.$$

После приведения правой части к общему знаменателю равенство числителей будет выглядеть следующим образом:

$$2x^3 + 9x^2 - 12x - 18 = A(x+2)(x^2+9) + Bx(x^2+9) + (Cx+D)x(x+2) \qquad (*)$$

Далее составим систему четырех уравнений для нахождения коэффициентов A, B, C, D, положив в (*) сначала $x = 0$, $x = -2$ (действительные корни знаменателя), а затем приравняв коэффициенты при x^3 и x^2 в левой и правой частях (*).

$$\left.\begin{array}{lll} x=0 & \Rightarrow & -18=18A \\ x=-2 & \Rightarrow & 26=-26B \\ x^3 & \Rightarrow & 2=A+B+C \\ x^2 & \Rightarrow & 9=2A+D+2C \end{array}\right\} \Rightarrow A=-1, B=-1, C=4, D=3.$$

Возвращаясь к данному интегралу, подставляем вместо рациональной дроби её разложение на элементарные дроби с найденными коэффициентами A, B, C, D и вычисляем интеграл в преобразованном виде.

$$J=\int\frac{2x^3+9x^2-12x-18}{x(x+2)(x^2+9)}dx=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+9}\right)dx=$$

$$=\int\frac{-dx}{x}+\int\frac{-dx}{x+2}+\int\frac{4x+3}{x^2+9}dx=-\int\frac{dx}{x}-\int\frac{d(x+2)}{x+2}+2\int\frac{d(x^2+9)}{x^2+9}+3\int\frac{dx}{x^2+9}=$$

$=-\ln|x|-\ln|x+2|+2\ln|x^2+9|+\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$. Ответ получен.

Пример 26. Вычислите интеграл $J=\int\frac{4x^2+3x+13}{(x-1)(x^2+4x+5)}dx$.

Решение. (См. **таблицу 2**).

Ответьте последовательно на следующие вопросы и выполните предложенные действия.

1) Является ли подынтегральная функция правильной рациональной дробью? (Да)

2) Что следует сделать, чтобы привести данный интеграл к табличному виду? (Разложить дробь на сумму элементарных дробей)

3) См. (**7.1**). Сравните данную дробь с дробью в (**7.1**) и разложите её на сумму элементарных дробей.

$$\left(\frac{4x^2+3x+13}{\underset{k=1}{(x-1)}\underbrace{(x^2+4x+5)}_{r=1}}=\frac{A}{\underset{k=1}{x-1}}+\frac{Dx+C}{\underbrace{(x^2+4x+5)}_{r=1}}\right)$$

Замечание. Обратите внимание на вторую дробь справа. Квадратный трехчлен x^2+4x+5 имеет дискриминант $D=16-20<0$, поэтому не может быть разложен на элементарные множители с действительными числами.

4) Как будет выглядеть равенство числителей после приведения к общему знаменателю правой части разложения?

$$\left(4x^2+3x+13=A(x^2+4x+5)+(Bx+C)(x-1)\right).$$

5) Составьте систему, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой части последнего равенства.

$$\left(\begin{array}{ll} x^2 \Rightarrow & 4=A+B \\ x \;\Rightarrow & 3=4A+C-B \\ x^0 \Rightarrow & 13=5A-C \end{array}\right\}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\end{array}}\right)$$

6) Решите составленную систему. (Можно проверить ответ, подставив в рабочее равенство три конкретных значения x, например, $x=1$, $x=0$ и $x=-1$). $\left(A=2,\;\; B=2,\;\; C=-3\right)$.

7) Подставляя в данный интеграл вместо рациональной дроби её разложение на элементарные дроби с найденными коэффициентами A, B, C, вычислите этот интеграл.

($J=\int\frac{4x^2+3x+13}{(x-1)(x^2+4x+5)}dx=\int\frac{2dx}{x-1}+\int\frac{2x-3}{x^2+4x+5}dx$. См. **(6.2)**).

Ответ: $J=2\ln|x-1|+\ln|x^2+4x+5|-7arctg(x+2)+C$.

Пример 27. Вычислите интеграл $J=\int\frac{3x^5-6x^4+1}{x^3-2x^2+x}dx$.

Решение. Последовательно ответьте на следующие вопросы и выполните необходимые действия.

1) (См. **таблицу 2**). Является ли подынтегральная дробь правильной?

(Нет, так как $m=5,\;\; n=3,\;\; m>n$).

2) Каким образом следует преобразовать эту дробь для вычисления интеграла? (Следует сначала выделить целую часть, см.(**7.1**)).

3) Выделите целую часть подынтегральной дроби.

(Для этого можно разделить один многочлен на другой «уголком» или дополнить часть слагаемых в числителе, тождественно его преобразовывая, до выражения, которое делиться нацело на знаменатель:

$$3x^5-6x^4+1=3x^2(x^3-2x^2+x)-3(x^3-2x^2+x)-6x^2+3x+1 \Rightarrow$$

$$\frac{3x^5-6x^4+1}{x^3-2x^2+x}=3x^2-3+\frac{-6x^2+3x+1}{x^3-2x^2+x}).$$

После выделения целой части данный интеграл принимает вид:

$$J=\int\left(3x^2-3+\frac{-6x^2+3x+1}{x^3-2x^2+x}\right)dx.$$

4) Каков должен быть следующий шаг преобразования подынтегральной функции?

(Необходимо остаток деления, который является правильной рациональной дробью, разложить на сумму элементарных дробей).

5) Разложите остаток деления на элементарные дроби и вычислите неопределённые коэффициенты. (См. (**7.1**)).

$$\left(\frac{-6x^2+3x+1}{\underset{k=1}{x}\,\underbrace{(x-1)^2}_{l=2}}=\frac{A}{\underset{k=1}{x}}+\underbrace{\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}}_{l=2} \Rightarrow A=1, B=-7, C=-2\right)$$

Теперь данный интеграл можно записать в следующем преобразованном виде:

$$J=\int\left(3x^2-3+\frac{1}{x}-\frac{7}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}\right)dx.$$

6) Вычислите этот интеграл.

Ответ: $J=x^3-3x+\ln|x|-7\ln|x-1|+\dfrac{2}{x-1}+C$.

При разложении правильной рациональной дроби на элементарные возможно появление дробей вида $\dfrac{M_r x+N_r}{(x^2+px+q)^r}$, в которых знаменатель имеет дискриминант $D<0$, а $r\geq 2$. Для вычисления интегралов от таких дробей можно применить следующий метод.

Метод Остроградского

(выделение рациональной части интеграла) **(7.2)**

Если подынтегральная дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ является правильной и несократимой и $Q_n(x)=a_0(x-a)^k(x-b)^l...(x^2+p_1x+q_1)^r\cdot(x^2+p_2x+q_2)^s...$, то знаменатель можно представить как произведение двух множителей: $Q^{(2)}(x)=(x-a)(x-b)...(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)...$ и $Q^{(1)}(x)=\frac{Q_n(x)}{Q^{(2)}(x)}$. При этом интеграл от самой дроби можно представить в следующем виде: $\int\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx=\frac{P^{(1)}(x)}{Q^{(1)}(x)}+\int\frac{P^{(2)}(x)}{Q^{(2)}(x)}dx$, где $P^{(1)}(x)$ и $P^{(2)}(x)$- многочлены с неопределёнными коэффициентами, имеющие степени, хотя бы на единицу ниже, чем степени соответствующих многочленов $Q^{(1)}(x)$ и $Q^{(2)}(x)$ в знаменателях. Неопределенные коэффициенты находятся уже известными способами после дифференцирования обеих частей равенства.

Замечание. Многочлены $Q^{(1)}(x)$ и $Q^{(2)}(x)$ можно найти, не определяя корней знаменателя $Q_n(x)$. $Q^{(1)}(x)$ является наибольшим общим делителем многочленов $Q_n(x)$ и его производной $Q_n'(x)$, а $Q^{(2)}(x)=\frac{Q_n(x)}{Q^{(1)}(x)}$.

Пример 28. Вычислим интеграл $J=\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Решение. Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью и, так как её знаменатель нельзя разложить на множители, то она относится к одной из элементарных дробей. Воспользуемся методом Остроградского (см.**(7.2)**).

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{1}{(x^2+1)^3} \quad \Rightarrow \quad Q_n(x)=(x^2+1)^3,$$

$$Q^{(2)}(x)=x^2+1, \qquad \Rightarrow P^{(2)}(x)=Ex+F,$$

$$Q^{(1)}(x)=\frac{Q_n(x)}{Q^{(2)}(x)}=(x^2+1)^2 \Rightarrow P^{(1)}(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

Преобразуем данный интеграл согласно выбранному методу следующим образом:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+1)^2}+\int\frac{Ex+F}{x^2+1}dx.$$

Каждый числитель в правой части есть многочлен с неопределенными коэффициентами степени на единицу ниже, чем соответствующие многочлены в знаменателях.

Для отыскания коэффициентов $A, B, ..., F$ дифференцируем обе части равенства и приводим результат дифференцирования к общему знаменателю, после чего приравниваем получившиеся числители.

$$\frac{1}{(x^2+1)^3}=-\frac{2\cdot 2x\cdot\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)}{(x^2+1)^3}+\frac{3Ax^2+2Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}.$$

Замечание. $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x)$ - одно из свойств неопределённого интеграла.

$$1=-4\left(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx\right)+\left(3Ax^2+2Bx+C\right)\left(x^2+1\right)+\left(Ex+F\right)(x^4+2x^2+1) \quad (*)$$

Составим систему шести уравнений для нахождения коэффициентов, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях равенства (*).

$x^5 \Rightarrow 0=E$ (далее будем учитывать, что $E=0$),

$$\left.\begin{array}{lll} x^4 & \Rightarrow & 0=-4A+3A+F \\ x^3 & \Rightarrow & 0=-4B+2B \\ x^2 & \Rightarrow & 0=-4C+3A+C+2F \\ x & \Rightarrow & 0=-4D+2B \\ x^0 & \Rightarrow & 1=C+F \end{array}\right\} \Rightarrow A=\frac{3}{8}, B=0, C=\frac{5}{8}, D=0, E=0, F=\frac{3}{8}.$$

Возвращаясь к данному интегралу, записываем его в преобразованном виде с найденными коэффициентами: $J=\dfrac{{}^{3}\!/_{8}\,x^3+{}^{5}\!/_{8}\,x}{(x^2+1)^2}+\int\dfrac{{}^{3}\!/_{8}}{x^2+1}dx$.

Окончательный ответ: $J=\dfrac{3x^3+5x}{8(x^2+1)^2}+\dfrac{3}{8}arctgx+C$.

Задачи для самостоятельной работы

1. $\int\dfrac{5x^2+13x-6}{x^3+x^2-2x}dx$	Отв. $3\ln\lvert x\rvert+4\ln\lvert x-1\rvert-2\ln\lvert x+2\rvert+C$.	См. (7.1)
2. $\int\dfrac{x-9}{x^3-6x^2+9x}dx$	Отв. $\ln\lvert x-3\rvert-\ln\lvert x\rvert+\dfrac{2}{x-3}+C$	См. (7.1)
3. $\int\dfrac{8+5x-x^2}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx$	Отв. $2\ln\lvert x+1\rvert-\dfrac{3}{2}\ln\lvert x^2+2x+2\rvert-7\operatorname{arctg}(x+1)+C$	См. (7.1)
4. $\int\dfrac{x^4+x-8}{x^3+4x}dx$	Отв. $\dfrac{1}{2}x^2-2\ln\lvert x\rvert-\ln\lvert x^2+4\rvert+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}+C$	См. (7.1) и **таблицу** 2
5. $\int\dfrac{32dx}{(x^2+16)^2}$	Отв. $\dfrac{x}{x^2+16}+\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{4}+C$	См. (7.2)
6. $\int\dfrac{x^4+x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx$	Отв. $-\dfrac{1}{4}\dfrac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1}+\dfrac{3}{4}\operatorname{arctg}x+C$	См. (7.2)
7. $\int\dfrac{4x-4}{x^3+8}dx$	Отв. $-\ln\lvert x+2\rvert+\dfrac{1}{2}\ln\lvert x^2-2x+4\rvert+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{\sqrt{3}}+C$	См. (7.1) и $a^3+b^3=$ $=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

Часть 8. Интегрирование тригонометрических функций

Интегрирование тригонометрических функций связано, как правило, с элементарными преобразованиями подынтегрального выражения и с подведением какой-либо его части под знак дифференциала.

Рассмотрим следующие приемы для часто встречающихся случаев.

1. Следующие интегралы приводятся к табличному виду в результате применения известных тригонометрических формул.

$$\int \sin mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2}\int (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)dx$$
$$\int \sin mx \cdot \sin nx dx = \frac{1}{2}\int (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)dx \qquad \textbf{(8.1)}$$
$$\int \cos mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2}\int (\cos(m-n)x + \cos(m+n)x)dx$$

Далее рассмотрим интегралы вида $\boldsymbol{I = \int \sin^m x \cdot \cos^n x\, dx}$, где m и n целые числа.

2. Если **хотя бы один из показателей степени есть нечетное положительное целое** число, интеграл приводится к табличному виду следующим образом.

Пусть $n=2k+1$, где k-неотрицательное целое число. Тогда

$$\begin{aligned}&\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^m x\left(\cos^2 x\right)^k \cos x dx = \\ &= \int \sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^k d\sin x = \int f(\sin x) d\sin x\end{aligned} \qquad \textbf{(8.2)}$$

3. Если **оба показателя степени четные неотрицательные целые числа**, то используя формулы $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ и $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, преобразуем интеграл слебдующим образом.

$$\int \sin^{2k} x \cdot \cos^{2l} x dx = \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^k \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^l dx = \int f(\cos 2x) dx . \qquad \textbf{(8.3)}$$

Здесь k и l неотрицательные целые числа.

4. Если **оба показателя степени отрицательные целые числа**, то возможно следующее преобразование, которое упростит подынтегральное выражение.

$$\int \frac{dx}{\sin^k x \cdot \cos^l x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^k x \cdot \cos^l x} = \int \frac{dx}{\sin^{k-2} x \cdot \cos^l x} + \int \frac{dx}{\sin^k x \cdot \cos^{l-2} x} . \qquad \textbf{(8.4)}$$

Здесь k и l неотрицательные целые числа.

5. Если **хотя бы одна из степеней отрицательна и сумма модулей чисел *m* и *n* четна**, то интеграл сводится к виду $\int f(\mathrm{tg}x) d\mathrm{tg}x$ или

$\int f(\operatorname{ctg}x)\,d\operatorname{ctg}x$ в результате применения известных тригонометрических формул:

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}. \qquad \textbf{(8.5)}$$

$$\left(\frac{dx}{\cos^2 x} = d\operatorname{tg}x, \qquad \frac{dx}{\sin^2 x} = -d\operatorname{ctg}x\right)$$

Пример 29. Вычислим интеграл $I = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^6 x}dx$.

Решение. Проанализируем подынтегральную функцию, сравнивая ее с ранее рассмотренными случаями. Степень в числителе целая, положительная, нечетная. Этот интеграл относится к пункту **(8.2)**. Отделяем в числителе один $\sin x$ и подводим его под знак дифференциала. Далее преобразовываем подынтегральную функцию так, как предложено в выбранном пункте **(8.2)**. Получаем следующее:

$$I = \int \frac{\sin^4 x\cdot\sin x}{\cos^6 x}dx = -\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}d\cos x = -\int \frac{(\sin^2 x)^2}{\cos^6 x}d\cos x = -\int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^6 x}d\cos x.$$

После возведения числителя в квадрат получим несколько табличных интегралов относительно $u = \cos x$.

$$I = -\int \frac{d\cos x}{\cos^6 x} + 2\int \frac{d\cos x}{\cos^4 x} - \int \frac{d\cos x}{\cos^2 x}$$

Окончательный ответ: $I = \frac{1}{5\cos^5 x} - \frac{2}{3\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + C$.

Пример 30. Вычислим интеграл $I = \int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3x dx$.

Решение. Проанализируем подынтегральную функцию, сравнивая ее со всеми случаями, рассмотренными в **части** 8. Обе степени тригонометрических функций целые, положительные и четные. Этот интеграл относится к пункту **(8.3)**. Следуя предложению этого пункта, преобразуем подынтегральное выражение, понижая степени обеих тригонометрических функций.

$$I=\int\frac{1}{2}(1-\cos 6x)\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 6x)dx=\frac{1}{4}\int(1-\cos^2 6x)dx=\frac{1}{4}\int\sin^2 6xdx.$$

Получили новый интеграл, который не является табличным. Проанализируем подынтегральную функцию. Этот интеграл тоже относится к пункту **(8.3)**. Еще раз понизим степень предложенным способом.

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{1}{2}(1-\cos 12x)dx.$$

После нового преобразования интеграл распадается на разность двух простых интегралов:

$$I=\frac{1}{8}\int dx-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{12}\int\cos 12xd(12x).$$

Окончательный ответ: $I=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{12}\sin 12x\right)+C$.

Пример 31. Вычислим интеграл $I=\int\sin^4 x\cdot\cos^2 xdx$.

Решение. Проанализируйте подынтегральную функцию, сравнивая ее со всеми случаями, рассмотренными в **части** 8**.**

Ответьте на следующие вопросы.

1) Чем характерна подынтегральная функция?

(обе степени тригонометрических функций целые, положительные и четные)

2) К какому пункту относится данный интеграл? (к (**8.3**))

3) Выполните соответствующие преобразования и упростите подынтегральное выражение. (Получим $I=\int\frac{1}{8}\sin^2 2x\cdot(1-\cos 2x)dx$)

4) Полученный интеграл не является табличным. Какое действие необходимо далее для его вычисления?

(Представить полученный интеграл как разность двух интегралов)

5) Проанализируйте первый интеграл $I_1=\int\sin^2 2xdx$. Как следует преобразовать его подынтегральную функцию для вычисления?

(Необходимо понизить четную степень, см. **(8.3)**).

6) Выполните соответствующее преобразование и вычислите этот интеграл. ($I_1 = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int \cos 4x d\,4x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$).

7) Проанализируйте второй интеграл $I_2 = \int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx$. Как следует преобразовать его подынтегральную функцию для вычисления?

(Этот интеграл относится к пункту (**8.2**) и для его вычисления следует подвести $\cos 2x$ под знак дифференциала)

8) Выполните соответствующее преобразование и вычислите этот интеграл. ($I_2 = \int \sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot \frac{1}{2} d\,2x = \frac{1}{2}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{6}\sin^3 2x + C$).

Составьте окончательный ответ.

Ответ: $I = \frac{1}{8}I_1 - \frac{1}{8}I_2 = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$.

Пример 32. Вычислим интеграл $I = \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x} dx$.

Решение. Проанализируем подынтегральную функцию, сравнивая ее со всеми случаями, рассмотренными в **части** 8.

Данный интеграл можно отнести к двум пунктам, а именно, к (**8.4**) и к (**8.5**). Вычислим его обоими способами.

Первый способ (см. (**8.4)**). Преобразуем подынтегральную функцию, используя основное тригонометрическое тождество $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$. Получим $I = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos^3 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx + \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x}$.

Первое слагаемое справа легко приводится к табличному виду подведением под знак дифференциала $\sin x$. Второе преобразуем, используя формулу $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

Получим $I = -\int \frac{d\cos x}{\cos^3 x} + 2\int \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\mathrm{tgx}| + C$. Ответ получен.

Второй способ (см. **(8.5)**). Так как в данном интеграле сумма степеней тригонометрических функций равна четырем, то есть четна, его можно свести к виду $\int f(\operatorname{tg} x) d \operatorname{tg} x$. Сделаем это следующим способом (см. **(8.5)**).

$$I=\int \frac{\left(\dfrac{dx}{\cos^2 x}\right)}{\sin x \cdot \cos x}=\int \frac{dtgx}{\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot \cos^2 x}=\int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x \cdot \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}}=\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} dtgx=\int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x}+\int \operatorname{tg} x d \operatorname{tg} x=$$

$$=\ln|\mathrm{tgx}|+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+C$$

Ответ получен в ином виде , но его можно преобразовать и убедиться в том, что он отличается от предыдущего на константу.

Пример 33. Вычислим интеграл $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^8 x} dx$.

Решение. Проанализируйте подынтегральную функцию, сравнивая ее со всеми случаями, рассмотренными в **части** 8**.**

Ответьте на следующие вопросы.

1) К какому пункту относится данный интеграл?

(Этот интеграл можно отнести только к пункту **(8.5)**)

2) Как следует преобразовать данный интеграл для его вычисления?

(Необходимо привести его к виду $\int f(\operatorname{tg} x) d \operatorname{tg} x$ или $\int f(\operatorname{ctg} x) d \operatorname{ctg} x$)

3) Данный интеграл удобнее привести к интегралу для $u=ctgx$. Преобразуйте интеграл соответствующим образом.

($I=-\int \operatorname{ctg}^4 x \cdot (1+\operatorname{ctg}^2 x) d \operatorname{ctg} x$).

4) Вычислите преобразованный интеграл.

Ответ: $I=-\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}-\frac{\operatorname{ctg}^7 x}{7}+C$.

Пример 34. Вычислим интеграл $\int \sin 3x \cdot \cos 5x dx$.

Решение. Проанализируем подынтегральную функцию, сравнивая ее со всеми случаями, рассмотренными в **части** 8**.** Данный интеграл относится к пункту (**8.1**).

Чтобы его вычислить, необходимо преобразовать подынтегральную функцию по одной из предложенных формул (см. **(8.1)**). Получим

$$I = \int \sin 3x \cdot \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 8x + \sin(-2x))dx = \frac{1}{16}\int \sin 8x d8x - \frac{1}{4}\int \sin 2x d2x .$$

Окончательный ответ: $I = -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

Если требуется вычислить интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)$, где R- рациональная функция, но этот интеграл не относится к ранее рассмотренным случаям, то возможны следующие способы приведения такого интеграла к табличному виду.

6. Универсальная тригонометрическая подстановка.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \left[\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \right] = \int R_1(t)dt ,$$

где $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. **(8.6)**

Новая функция R_1 является рациональной и зависит от переменной t. Способы интегрирования такой функции были рассмотрены ранее.

7. Если подынтегральная функция к тому же удовлетворяет условию $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то можно использовать **подстановку** $\operatorname{tg} x = t$, причем $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. **(8.7)**

Пример 37. Вычислим интеграл $I = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 3}$.

Решение. Проанализируем подынтегральную функцию, сравнивая ее со всеми случаями, рассмотренными в **части** 8**,** включая два последних пункта. Данный интеграл можно отнести только к пункту (**8.6**). Вычислим его, используя универсальную тригонометрическую подстановку.

$$I=\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+3}=\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\right]=$$

$$=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(2\cdot\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\right)}=\int\frac{dt}{2t^2+2t+1}.$$

После подстановки и преобразования получили новый интеграл, содержащий квадратный трехчлен (см. **(6.1)**). Выделяем полный квадрат, доводим интеграл до табличного вида и вычисляем его. Получаем

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\cdot 2\operatorname{arctg}2\left(t+\frac{1}{2}\right)+C.$$

Подставляем обратно $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и приходим к окончательному ответу

$$I=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)+C.$$

Пример 36. Вычислим интеграл $I=\int\frac{dx}{\sin^2 x-5\cos^2 x+4\sin x\cdot\cos x}$.

Решение. Проанализируем подынтегральную функцию, сравнивая ее со всеми случаями, рассмотренными в **части** 8**,** включая два последних пункта. Данный интеграл можно отнести к пункту (**8.6**) или (**8.7**), так как $(-\sin x)^2-5(-\cos x)^2+4(-\sin x)(-\cos x)=\sin^2 x-5\cos^2 x+4\sin x\cdot\cos x$.

Преобразуем подынтегральное выражение, применяя подстановку $tgx=t$. Получим следующее.

$$I=\begin{bmatrix}\operatorname{tg}x=t, & \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}, \\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}, & dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{t^2}{1+t^2}-\frac{5}{1+t^2}+4\frac{t}{1+t^2}\right)}=\int\frac{dt}{t^2+4t-5}$$

Далее выделяем в знаменателе полный квадрат (см**. (6.1)**) и вычисляем получившийся интеграл.

$$I=\int\frac{d(t+2)}{(t+2)^2-9}=\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{(t+2)-3}{(t+2+3)}\right|+C.$$

Подставляя обратно $t=tgx$, получаем окончательный ответ:

$$I=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x-1}{\operatorname{tg}x+5}\right|+C.$$

Пример 37. Вычислим интеграл $I=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx$.

Решение. Проанализируйте подынтегральную функцию, сравнивая ее со всеми случаями, рассмотренными в **части** 8, включая два последних пункта.

Ответьте на следующие вопросы и выполните соответствующие преобразования.

1) Какой способ вычисления подходит для данного интеграла?

(Универсальная тригонометрическая подстановка, (см. **(8.6)**)).

2) Преобразуйте интеграл, используя подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.

($I=\int\frac{\left(1-t^2\right)^2}{4t^3}dt$).

3) Вычислите полученный интеграл. ($I=\frac{1}{8}t^2-\frac{1}{8t^2}-\frac{1}{2}\ln|t|+C$)

4) Возвращаясь к старой переменной, запишите окончательный ответ.

Ответ: $I=\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-\frac{1}{8\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

8. Рассмотрим далее интегралы вида $I=\int\operatorname{tg}^n xdx$ или $I=\int\operatorname{ctg}^n xdx$, где n - целое положительное число.

Чтобы вычислить такой интеграл, необходимо его преобразовать следующим образом.

$$I=\int tg^n xdx=\int \mathrm{tg}^{n-2}x\cdot\mathrm{tg}^2xdx=\int \mathrm{tg}^{n-2}x\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int \mathrm{tg}^{n-2}x\frac{dx}{\cos^2 x}-\int \mathrm{tg}^{n-2}xdx=$$

$$=\int \mathrm{tg}^{n-2}x\cdot d\,\mathrm{tg}\,x-\int \mathrm{tg}^{n-2}xdx=\frac{\mathrm{tg}^{n-1}x}{n-1}-\int \mathrm{tg}^{n-4}x\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\ldots\ldots \qquad \mathbf{(8.8)}$$

Повторяя этот приём необходимое количество раз, придем либо к $\int dx$ при четном n, либо к $\int \mathrm{tg}\,xdx$ при нечетном n. Аналогично вычисляется интеграл $I=\int \mathrm{ctg}^n xdx$.

Пример 38. Вычислим интеграл $I=\int \mathrm{ctg}^5 xdx$.

Решение. Преобразуем последовательно подынтегральную функцию так, как было предложено в пункте (**8.8**). Получим следующую цепочку действий, приводящую к ответу.

$$I=\int \mathrm{ctg}^3 x\cdot\mathrm{ctg}^2 xdx=\int \mathrm{ctg}^3 x\cdot\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=\int \mathrm{ctg}^3 x\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}-\int \mathrm{ctg}^3 xdx.$$

Первый интеграл в правой части приводится к табличному виду подведением под знак дифференциала, а ко второму еще раз применим только что использованный прием.

$$I=\int \mathrm{ctg}^3 x\cdot d\left(-\mathrm{ctg}\,x\right)-\int \mathrm{ctg}\,x\cdot\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=-\frac{1}{4}\mathrm{ctg}^4 x+\int \mathrm{ctg}\,x\cdot d\,\mathrm{ctg}\,x+\int \mathrm{ctg}\,xdx$$

Вычислим последний интеграл в правой части отдельно.

Он не является табличным, поэтому преобразуем подынтегральную функцию, после чего станет возможным подведение под знак дифференциала, что приведет интеграл к табличному виду.

$$\int \mathrm{ctg}xdx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d\sin x}{\sin x}=\ln\left|\sin x\right|+C.$$

Получаем окончательный ответ: $I=-\frac{1}{4}\mathrm{ctg}^4 x+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}^2 x+\ln\left|\sin x\right|+C$.

Замечание. Данный интеграл можно вычислить иначе, а именно, следующим образом. $I=\int \mathrm{ctg}^5 x dx=\int \frac{\cos^5 x}{\sin^5 x}dx$. Новый интеграл, полученный справа, относится к пункту **(8.2)**

$$I=\int \frac{\cos^4 x}{\sin^5 x}d\sin x=\int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)^2}{\sin^5 x}d\sin x=...=-\frac{1}{4\sin^4 x}+\frac{1}{\sin^2 x}+\ln\left|\sin x\right|+C.$$

Часть 9. Интегрирование гиперболических функций

Интегрирование гиперболических функций аналогично тому, как интегрируются тригонометрические функции, так как формулы, связывающие эти функции, подобны тригонометрическим. Так в частности,

$$\begin{aligned}&\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x=1,\quad \mathrm{ch}^2 x+\mathrm{sh}^2 x=\mathrm{ch}\,2x,\quad 2\,\mathrm{sh}\,x\cdot\mathrm{ch}\,x=\mathrm{sh}\,2x,\\ &\mathrm{sh}^2 x=\frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\,2x-1\right),\quad \mathrm{ch}^2 x=\frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\,2x+1\right).\end{aligned} \qquad \textbf{(9.1)}$$

Пример 39. Вычислим интеграл $I=\int \mathrm{sh}^3 x dx.$

Решение. Данный интеграл подобен интегралу $I=\int \sin^3 x dx$, поэтому его можно вычислить так же, как предложено в пункте **(8.2)**. Выполним преобразования, соответствующие выбранному способу.

$$I=\int \mathrm{sh}^2 x\cdot \mathrm{sh}x dx=\int \mathrm{sh}^2 x\cdot d\mathrm{ch}x=\int\left(\mathrm{ch}^2 x-1\right)d\mathrm{ch}x=\int \mathrm{ch}^2 x d\,\mathrm{ch}\,x-\int d\,\mathrm{ch}\,x, (\text{см.}(\mathbf{9.1}))$$

Получили два табличных интеграла относительно переменной $u=\mathrm{ch}\,x.$

Ответ: $I=\frac{1}{3}\mathrm{ch}^3 x-\mathrm{ch}\,x+C.$

Задачи для самостоятельной работы

1. $I=\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^4 x}dx.$ Отв. $\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x+2\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x+c.$ См. **(8.4)** или **(8.5)**

2. $I=\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$ Отв. $-\frac{1}{5\sin^5 x}+\frac{1}{3\sin^3 x}+C.$ См. **(8.2)**

3. $I=\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x+5}.$ Отв. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{5}}+C.$ См. **(8.6)**

4. $I=\int \operatorname{tg}^5\frac{x}{2}dx.$ Отв. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C,$ См. **(8.8)** или **(8.2)**

5. $I=\int \frac{\sin^2 3x}{\cos^6 3x}dx.$ Отв. $\frac{1}{9}\operatorname{tg}^3 3x+\frac{1}{15}\operatorname{tg}^5 3x+C.$ См. **(8.5)**

6. $I=\int \sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^4\frac{x}{2}dx.$ Отв. $\frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+\frac{1}{24}\sin^3 x+C.$ См. **(8.3)**

7. $I=\int \sin^5 x\cdot\cos^3 x dx.$ Отв. $\frac{1}{6}\sin^6 x-\frac{1}{8}\sin^8 x+C.$ См. **(8.2)**

8. $I=\int \frac{dx}{2\sin^2 x+4\sin x\cdot\cos x}.$ Отв. $-\frac{1}{4}\ln|2+4\operatorname{ctg}x|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x+2}\right|+C_1.$ См. **(8.7)**

9. $I=\int \sin^6 x dx$ Отв. $\frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x-2\sin 2x+\frac{3}{8}\sin 4x+\frac{1}{6}\sin^3 2x\right)+C.$ См. **(8.3)**

10. $I=\int \frac{dx}{3\sin^2\frac{x}{3}-2}.$ Отв. $\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{3}-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{3}+\sqrt{2}}\right|+C.$ См. **(8.7)**

11. $I=\int \operatorname{ctg}^4 x dx.$ Отв. $-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^3 2x+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}2x+x+C.$ См. **(8.8)**

12. $I=\int \frac{dx}{\sin 3x+1}.$ Отв. $-\frac{2}{3}\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{3x}{2}+1}+C.$ См. **(8.6)**

Часть 10. Тригонометрические подстановки

В **части 4** был рассмотрен метод подстановки (замены переменной). Для вычисления некоторых интегралов существуют стандартные подстановки, которые позволяют успешно и рационально вычислить эти интегралы. Рассмотрим следующие, так называемые, тригонометрические подстановки.

Таблица 3.

Подынтегральная функция	Подстановка	Новая подынтегральная функция
$f\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$	$x=a\sin t,\left(x=a\cos t\right)$	$f(a\sin t, a\cos t)$ **(10.1)**
$f(x,\sqrt{x^2-a^2})$	$x=\dfrac{a}{\cos t},(x=\dfrac{a}{\sin t})$	$f(\dfrac{a}{\cos t}, a\mathrm{tg}t)$ **(10.2)**
$f(x,\sqrt{x^2+a^2})$	$x=a\cdot\mathrm{tg}t,\ \ (x=a\cdot\mathrm{ctg}t)$	$f(a\cdot\mathrm{tg}t,\dfrac{a}{\cos t})$ **(10.3)**

Пример 40. Вычислим интеграл $I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx.$

Решение. Для вычисления данного интеграла подойдет одна из тригонометрических подстановок, (см. (**10.1**))

Если $x=a\sin t$, то $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t,\ \ dx=a\cos t,\ \ t=\arcsin\dfrac{x}{a}$. Отсюда следует, что $I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int a\cos t\cdot a\cos t\cdot dt=a^2\int\cos^2 t\cdot dt.$

Новый интеграл в правой части не является табличным, но в **части 8** интеграл такого вида был разобран (см. **(8.3)**). Преобразуем подынтегральную функцию необходимым образом и получим следующее.

$$I=a^2\int\frac{1}{2}\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{a^2}{2}\int dt+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\cos 2t\cdot d2t=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C.$$

Для окончательного ответа в полученный интеграл необходимо подставить $t=\arcsin\dfrac{x}{a}$, но прежде, чем сделать это, преобразуем наш результат, чтобы ответ выглядел интереснее.

Учтем, что $\dfrac{1}{2}\sin 2t=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sin t\cdot\cos t=\dfrac{1}{a^2}a\sin t\cdot a\cos t=\dfrac{1}{a^2}x\sqrt{a^2-x^2}$. И теперь запишем окончательный ответ: $I=\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\dfrac{x}{a}\right)+C.$

Замечание. Так с помощью тригонометрической подстановки была получена формула 19 **таблицы *1*** основных интегралов.

Пример 41. Вычислим интеграл $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{\left(x^2 - 9\right)^3}}$.

Решение. Проанализируем подынтегральную функцию, сравнивая ее со всеми случаями, рассмотренными в **части 10**.

Ответьте последовательно на следующие вопросы и выполните соответствующие преобразования.

1) Какая из тригонометрических подстановок подходит для вычисления данного интеграла? (см. **таблицу 3**)

(Подходит подстановка $x = \frac{3}{\cos t}$, (см. **(10.2)**))

2) Преобразуйте данный интеграл, подставив $x = \frac{3}{\cos t}$, в подынтегральное выражение.

$$\left(I = \int \frac{\frac{3\sin t}{\cos^2 t}dt}{\frac{3}{\cos t}\left(3tgt\right)^3} = \frac{1}{27}\int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt. \right)$$

3) Имея уже достаточный опыт, вычислите получившийся после замены переменной интеграл.

$$\left(-\frac{1}{27}\left(\mathrm{ctg}t + t\right) + C \right)$$

4) Перейдите к исходной переменной и выпишите окончательный ответ.

$$\left(I = -\frac{1}{27}\left(\frac{3}{\sqrt{x^2 - 9}} + \arccos\frac{3}{x}\right) + C. \right)$$

Пример 42. Вычислим интеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2 + 6x + 10\right)^5}}$.

Решение. Проанализируем подынтегральную функцию и выясним, чем она характерна, какой метод вычисления интеграла следует выбрать.

1) Подынтегральная функция содержит квадратный трехчлен, поэтому, прежде всего следует в квадратном трехчлене выделить полный квадрат. (См. **(6.1)**). Выделив полный квадрат, получим интеграл

$I=\int\frac{dx}{\sqrt{\left((x+3)^2+1\right)^{5.}}}$, который пока не является табличным и не похож ни на один табличный интеграл.

2) Необходимо избавиться от иррациональности, что позволит сделать замена переменной. Подынтегральная функция подобна функциям, рассмотренным в **части 10**. Воспользуемся одной из тригонометрических подстановок. (См. **таблицу 3**).

Выбираем подстановку $x+3=\mathrm{tg}t,$ тогда

$$dx=d\left(x+3\right)=d\mathrm{tg}t=\frac{dt}{\cos^2 t},\quad \sqrt{\left((x+3)^2+1\right)}=\frac{1}{\cos t.}$$

Теперь относительно новой переменной интеграл будет выглядеть следующим образом: $I=\int\cos^3 t\cdot dt$.

3).Интегрирование нечетной степени тригонометрической функции было рассмотрено в **части 8**. (См. **(8.2)**).

Преобразуем должным образом подынтегральную функцию и вычислим получившийся интеграл.

$$I=\int\cos^2 t\cdot\cos t dt=\int\cos^2 t d\sin t=\int\left(1-\sin^2 t\right)d\sin t=\int d\sin t-\int\sin^2 t d\sin t=$$
$$=\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t+C.$$

Чтобы дать окончательный ответ, заметим, что $\sin t=\mathrm{tg}t\cdot\cos t=\left(x+3\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{(x+3)^2+1}}$.

И теперь получаем ответ: $I=\frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+10}}-\frac{1}{3}\frac{(x+3)^3}{\sqrt{\left(x^2+6x+10\right)^3}}+C.$

Замечание. В рассмотренном примере было применено несколько методов интегрирования, а именно, выделение полного квадрата, тригонометрическая подстановка, интегрирование нечетной степени тригонометрической функции, подведение под знак дифференциала. Последовательная постановка вопросов и ответы на них привели к успешному решению задачи.

Часть 11.Интегрирование некоторых иррациональных функций

Рассмотрим еще несколько стандартных подстановок, применяющихся при интегрировании некоторых иррациональных функций.

Таблица 4.

Подынтегральная функция	Подстановка	
$f(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^r$, где r - наименьшее общее кратное чисел m и n.	**(11.1)**
$f(x) = x^m \left(a + bx^n\right)^p$, где m, n, p - рациональные числа	Подстановки Чебышева 1) Если p целое число, то $x = t^s$, где s - наименьший общий знаменатель чисел m и n. 2) Если $\frac{m+1}{n}$ целое число, то $\left(a + bx^n\right) = t^s$, где s знаменатель дроби p. 3) Если $\frac{m+1}{n} + p$ целое число, то $\frac{a}{x^n} + b = t^s$, где s знаменатель дроби p.	**(11.2)**

Замечание. Не любой интеграл от иррациональных функций может быть выражен через элементарные функции. То есть не любая иррациональная функция имеет элементарную первообразную. В частности, для интеграла вида $I=\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ имеет место следующая теорема Чебышева.

Интеграл $I=\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ может быть выражен в элементарных функциях только в трех случаях:

если p целое число,

если $\frac{m+1}{n}$ целое число,

если $\frac{m+1}{n}+p$ целое число.

Если p целое положительное число, то выражение преобразуется по формуле бинома Ньютона, если p целое отрицательное или дробное число, то возможные подстановки даны в **таблице 4**.

Пример 43. Вычислим интеграл $I=\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx.$

Решение. Подынтегральная функция имеет вид $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Проверим, выполняется ли для нее одно из условий Чебышева. (См. **(11.2)**).

Имеем $m=-\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{4},\ p=\frac{1}{2}$. Так как p не целое положительное число, вычисляем $\frac{m+1}{n}=2$. Результат есть целое число. Для вычисления данного интеграла подойдет подстановка $a+bx^n=t^s$, то есть $1+x^{\frac{1}{4}}=t^2$, где $s=2$ знаменатель дроби $p=\frac{1}{2}$ (См. **(11.2)**).

Из подстановки следует, что $x=\left(t^2-1\right)^4$, $dx=8\left(t^2-1\right)^3\cdot tdt$. И после преобразования данный интеграл будет иметь следующий вид.

$$I=\int\frac{t}{\left(t^2-1\right)^2}\cdot 8\left(t^2-1\right)^3 tdt=8\int t^2\left(t^2-1\right)dt=8\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)+C.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем окончательный ответ: $I=\frac{8}{5}\sqrt{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^5}-\frac{8}{3}\sqrt{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3}+C.$

Пример 44. Вычислим интеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(4+3x^2\right)^3}}.$

Решение. Подынтегральную функцию можно представить в виде $f(x)=x^0\left(4+3x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$. Проверим, выполняется ли для нее одно из условий Чебышева. (См. **(11.2)**). Здесь $m=0,\ \ n=2,\ \ p=-\frac{3}{2}$. Видим, что $\frac{m+1}{n}=\frac{1}{2}$ не является целым числом, а $\frac{m+1}{n}+p=-1$ целое число. Поэтому данный интеграл можно вычислить с помощью подстановки $\frac{a}{x^n}+b=t^s$, то есть $\frac{4}{x^2}+3=t^2$ (См. **(11.2)**).

Отсюда следует, что $x=\frac{2}{\sqrt{t^2-3}},\ \ dx=-\frac{2t}{\sqrt{\left(t^2-3\right)^3}}dt$. И после подстановки и преобразования данный интеграл принимает вид $I=\int\left(-\frac{1}{4t^2}\right)dt=\frac{1}{4t}+C$.

Из выбранной подстановки следует, что $t=\frac{\sqrt{4+3x^2}}{x}$. Подставляя это в полученный результат интегрирования, получаем окончательный ответ: $I=\frac{x}{4\sqrt{4+3x^2}}+C.$

Пример 45. Вычислим интеграл $I=\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^3}}.$

Решение. Подынтегральную функцию можно представить в виде $f(x)=x^3\left(1+x^3\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Проверим, выполняется ли для нее одно из условий Чебышева. (См. **(11.2)**).

Имеем $m = 3,\;\; n = 3,\;\; p = -\frac{1}{2}$. Видим, что p не является целым числом, $\frac{m+1}{n} = \frac{4}{3}$ тоже не является целым числом и $\frac{m+1}{n} + p = \frac{5}{6}$ не целое число. Условия теоремы Чебышева не выполняются, а следовательно, данный интеграл нельзя выразить в элементарных функциях, то есть не существует такой элементарной функции, чья производная равна подынтегральной функции $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^3}}$.

Ответ: данный интеграл является не берущимся.

Задачи для самостоятельной работы

1. $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{(9-x^2)^3}}dx$. Отв. $\frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \arcsin\frac{x}{3} + C$. См. **(10.1)**

2. $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{(x^2-16)^5}}dx$. Отв. $\frac{1}{\sqrt{x^2-16}} - \frac{1}{3}\frac{16}{\sqrt{(x^2-16)^3}} + C$. См. **(10.2)** и **(8.5)**

3. $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2+4)^3}}$. Отв. $\frac{1}{8}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}\right)\right| + \frac{1}{4\sqrt{x^2+4}} + C$. См. **(10.3)**

4. $I = \int \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\frac{dx}{(x+2)^3}dx$ Отв. $-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3} + 2\sqrt{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)} + C$. См. **(11.1)**

5. $I = \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$ Отв. $-\frac{4}{3}\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^3} + C$. См. **(11.2)**.

6. $I = \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}dx$ Отв. $-\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^3} + C$. См. **(11.2)**

Список литературы

1. Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н. Интегральное исчисление функций одного переменного: Учеб. для вузов. /Под ред. В.С.Зарубина, А.П.Крищенко. М: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 528 с.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 1. М.: Интеграл-Пресс, 2006. 544 с.

3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Дрофа, 2003. 512 с.

4. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. / Под ред. Б.П. Демидовича. М.: Интеграл-Пресс, 1997. 416 с.

Оглавление