# Семинар 4 (22.09.16)

## Функции $\operatorname{sign} x$, $[x]$, $\{x\}$, $D(x)$

1) Функция $y = \operatorname{sign} x$ («~~синг~~ сигнум $x$»)

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

2) Функция $y = [x]$ («целая часть $x$»)

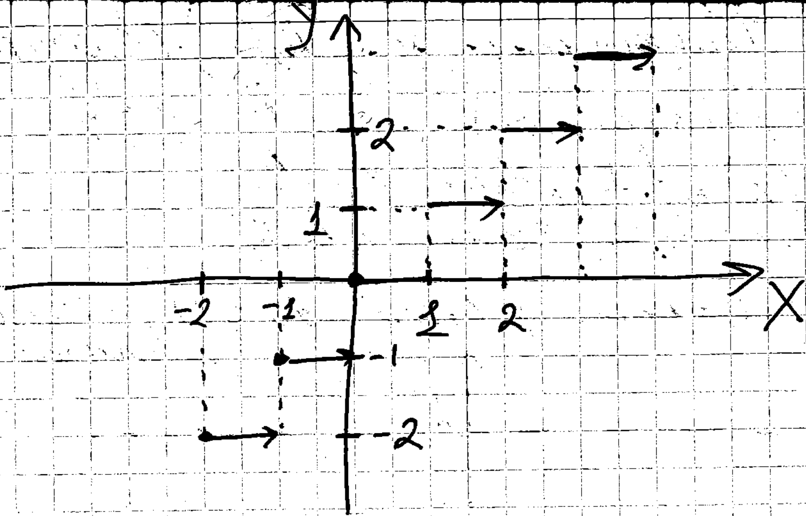
$[x]$ — целое число, такое, что $[x] \le x < [x] + 1$.

~~3)~~ (то есть $[x]$ — наиб. целое число, которое не превосходит $x$)

Пример $[2,7] = 2$,

$[-2,7] = -3$,

$[2] = 2$, $[-2] = -2$




3) Функция $y=\{x\}$ | «дробная часть x»

$\{x\} = x - [x]$

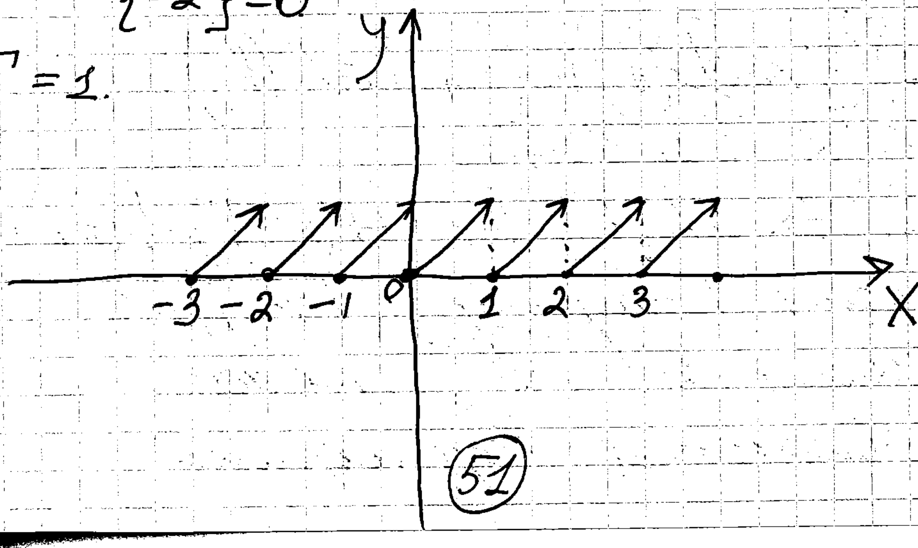
$\{2,7\} = 0,7$

$\{-2,7\} = 0,3$

$\{2\} = 0$

$\{-2\} = 0$

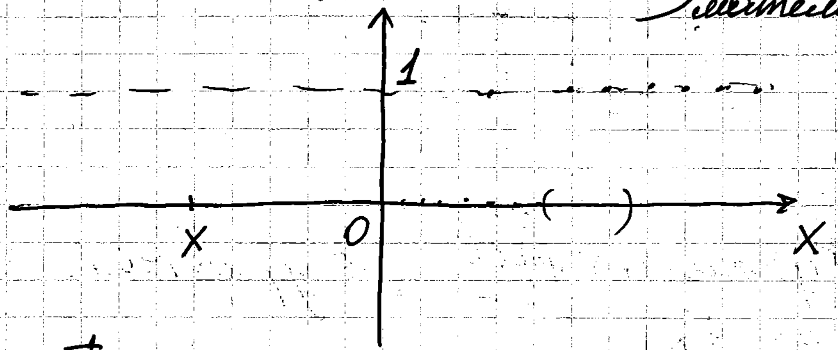
$T = 1.$



4) Функция $y = D(x)$ («функция Дирихле»)

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{если } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Дирихле (1805–1859) – немецкий математик.





Периодические функции.

Функция $y=f(x)$ называется периодической с периодом $T>0$

1) $(\forall x \in D(f)) : (x+T \in D(f)) \wedge$
$\wedge (x-T \in D(f))$

2) $(\forall x \in D(f)) : f(x) = f(x-T) = f(x+T)$

Если $T$ – период $(T>0)$, то числа $2T, 3T, \ldots$ тоже являются периодами

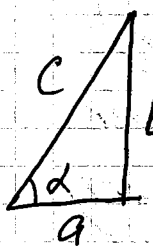
Наименьший положительный - период (если он существует) называется <u>главным</u> периодом

$y=\cos x$, $y=\sin x$, $y=\overset{\text{секанс}}{\sec x}=\frac{1}{\cos x}$

$y=\underbrace{\operatorname{cosec} x}_{\text{косеканс}}=\frac{1}{\sin x}$ - периодические

с главным периодом $T=2\pi$

$y=\operatorname{tg} x$; $y=\operatorname{ctg} x$ - периодич. ф-ии с главным периодом $T=\pi$



$\cos\alpha=\frac{a}{c}$

$\sin\alpha=\frac{b}{c}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}$

$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{a}{b}$

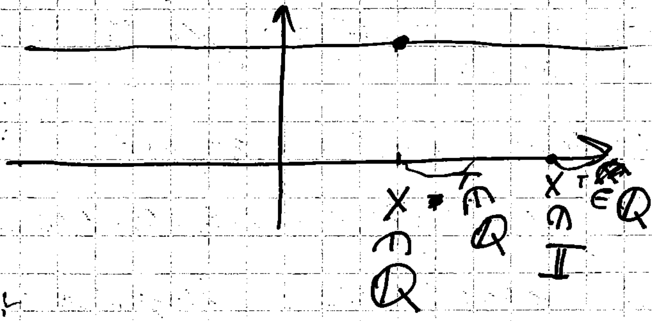
$\sec\alpha=\frac{c}{a}$

$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{c}{b}$

$y=\{x\}$ - периодическая ф-я с главным периодом $T=1$.

$y=3$ - периодич. ф; периодом явл-ся любое число $T>0$, гл. пер. нет.

$y = D(x)$ — передич. ф-я
периодом явл-ая любое
число $T \in \mathbb{Q}$, $T > 0$
гл. пер. нет.




Задача 1. Определить, является ли ф-я $f(x)$ периодической. Если да, то найти главный период (если он есть)

1) $f(x) = \cos 2x + \cos 3x$

2) $f(x) = \cos\sqrt{x}$

3) $f(x) = \cos x^2$

Решение

1) Легко проверить, что $T = 2\pi$ - период ф-ии $f(x)$

Предположение, что существует период $0 < T < 2\Pi$, тогда

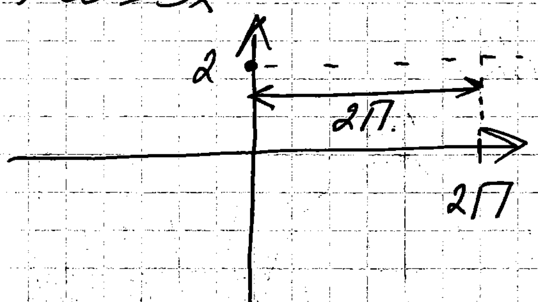
$$f(T) = f(0) \Rightarrow \cos 2T + \cos 3T = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2T = 1 \\ \cos 3T = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2T = 2\Pi k \\ 3T = 2\pi l \end{cases} \Rightarrow$$

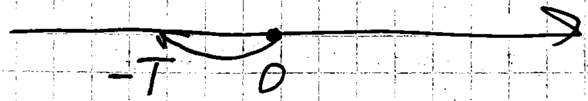
$$\Rightarrow \begin{cases} T = \pi k \\ T = \frac{2\pi l}{3} \end{cases} \Rightarrow \pi k = \frac{2\pi}{3} l \Rightarrow 3k = 2l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 2n \\ l = 3n \end{cases} \Rightarrow T = 2\Pi n,$$ что противоречит тому, что $0 < T < 2\Pi$

$\cos 2x + \cos 3x$



2) $f(x)=\cos\sqrt{x}$ $D(f)=[0;+\infty)$




Если предположить, что $f(x)$ ~~периодич~~ периодич с периодом $T$ $(T>0)$, то мы получаем $0\in D(f) \Rightarrow (0-T)=(-T)\in D(f)$

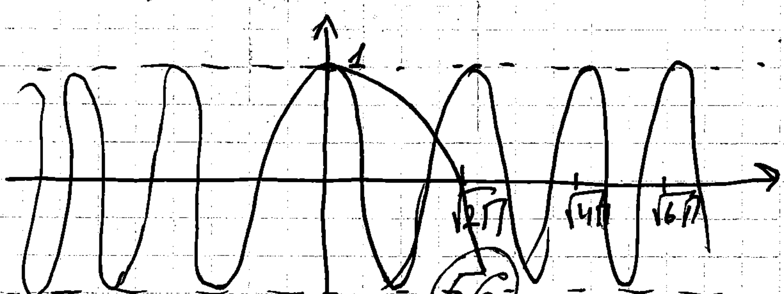
Это противоречит тому, что $D(f)=[0;+\infty)$

3) $f(x)=\cos x^2$

$\cos x^2=1.$

$x^2=2\pi k.$

$x=\pm\sqrt{2\pi k}.$



Предположим, что $f(x)$ периодическая с периодом $T$ $(T>0)$. Тогда $f(T)=f(0)=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow T=\sqrt{2\pi n}$ $(n \in \mathbb{N})$

На интервале $(0,T)$ содержится $(n-1)$ точек, в которых $f(x)=1$, а именно, точек $x=\sqrt{2\pi k}$, $k=1,2,\dots(n-1))$, а на интервале $(T,2T)=(\sqrt{2\pi n}, \sqrt{8\pi n})$ содержится $(3n-1)$ точек, в которых $f(x)=1$. а именно, точки $x=\sqrt{2\pi k}$, $k=n+1$, $n+2, \dots 4n-1)$

Противоречие, поскольку интервал $(T,2T)$ получается сдвигом интервала $(0,T)$ на один период.

## Инъективные, сюръективные и биективные отображения

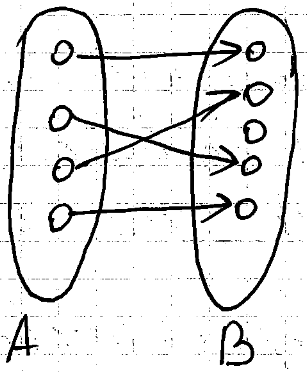
Пусть $f: A \to B$ - отображение

Отображение $f$ называется:

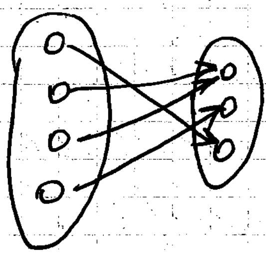
1) **инъективным**, если $(\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2): f(x_1) \neq f(x_2)$

2) **сюръективным**, если $(\forall y \in B)(\exists x \in A): y = f(x)$

3) **биективным (= взаимно однозначным)**, если отображение $f$ одновременно является инъективным и сюръективным.

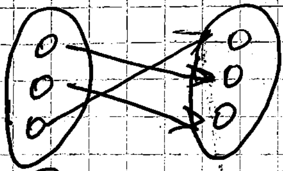



инъективное отображение



сюръективное отображение

$E(f) = B$



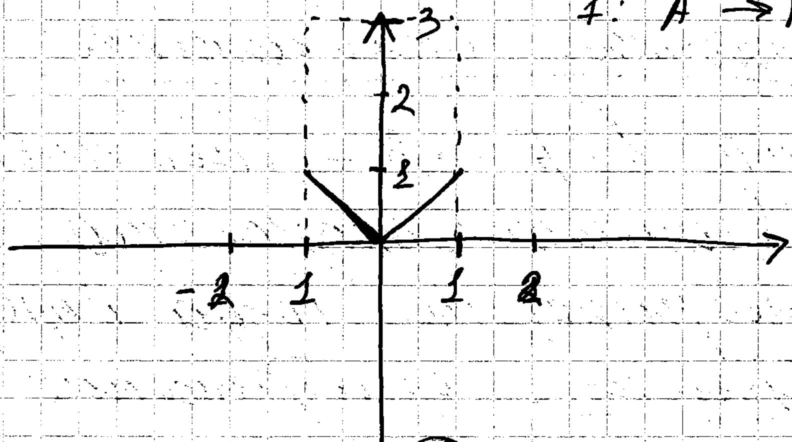
биективное

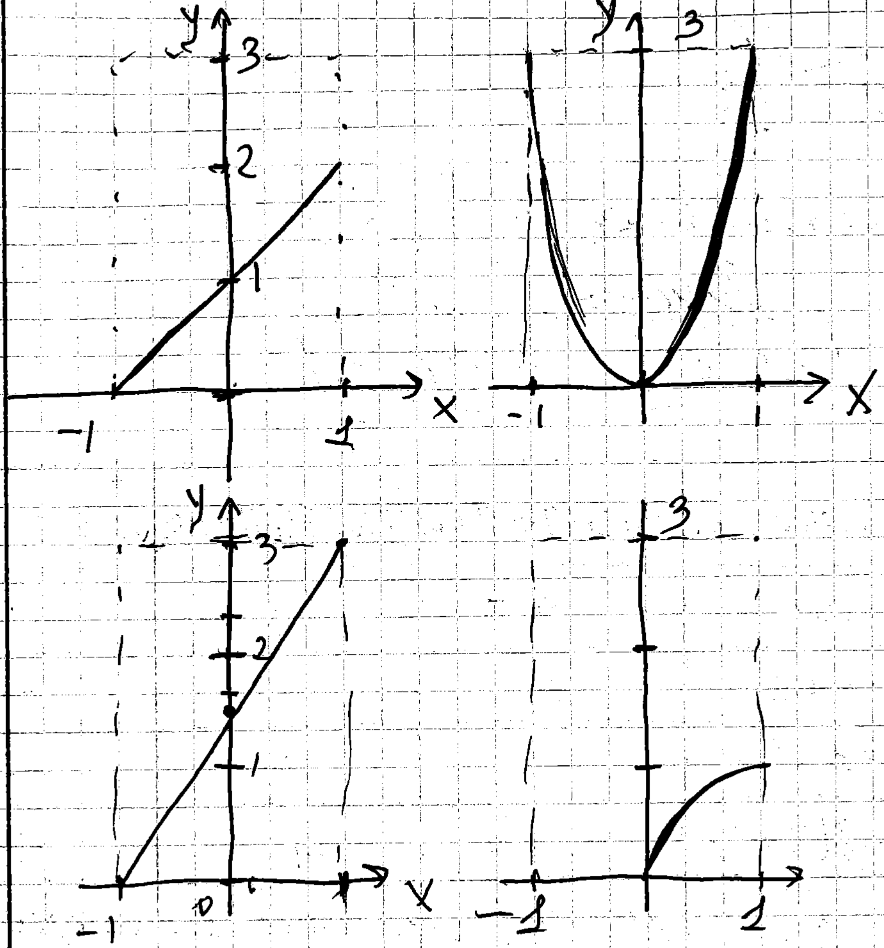
## Задача

$A=[-1,1]$, $B=[0,3]$

| Отображение | инъективное | сюръективное | биективное |
|---|---|---|---|
| 1) $y=\lvert x\rvert$ | − | − | − |
| 2) $y=x+1$ | + | − | − |
| 3) $y=3x^2$ | − | + | − |
| 4) $y=\frac{3}{2}(x+1)$ | + | + | + |
| 5) $y=\sqrt{x}$ | не является отображ. | | |

$f: A \to B$






## Обратное отображение.

Пусть $f: A \to B$ — биективно (= взаимно однозначное) отображение. Тогда опред. обратное отображение

$f^{-1}: B \to A$

такое, что:

1) $(\forall x \in \cancel{D}(A)): f^{-1}(f(x)) = x$

2) $(\forall x \in B): f(f^{-1}(x)) = x$

Задача: Найти ф-ю обратную к ф-ии $y = f(x)$.

1) $f(x) = x^2, x \in [1, 2]$.

2) $f(x) = x^2, x \in [-2, -1]$

3) $f(x) = x^2 + 7x, x \in [-3, +\infty)$

4) $f(x) = \frac{x-1}{x+5}, x \in R \setminus \{-5\}$

5) $f(x) = e^x - 10, x \in R$

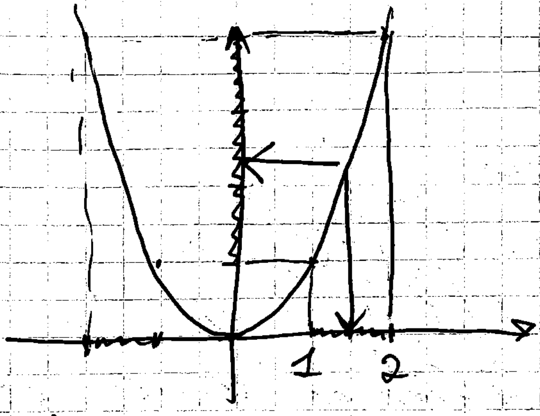
Решение 1) $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}, x \in [1, 4]$.

2) $f(x) = x^2, x \in [-2, -1]$

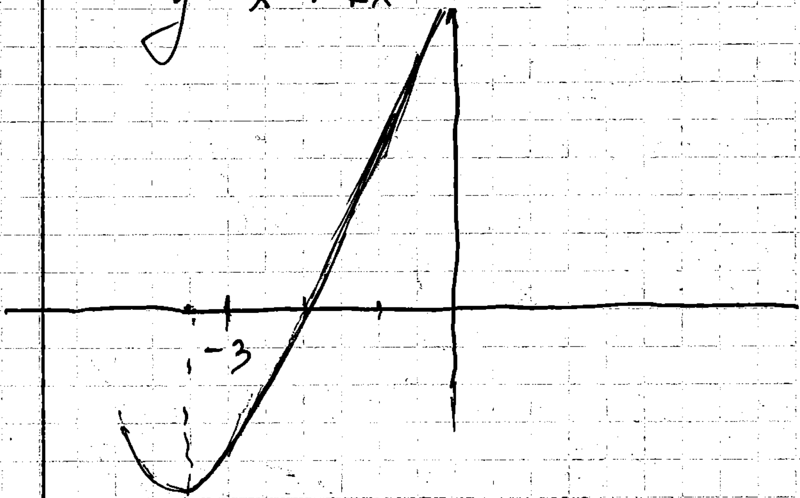
$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}, x \in [1, 4]$




3) $f(x)=x^2+7x$. $x\in[-3,+\infty)$

$y=x^2+7x$




$x^2+7x-y=0$

$D=49+4y$

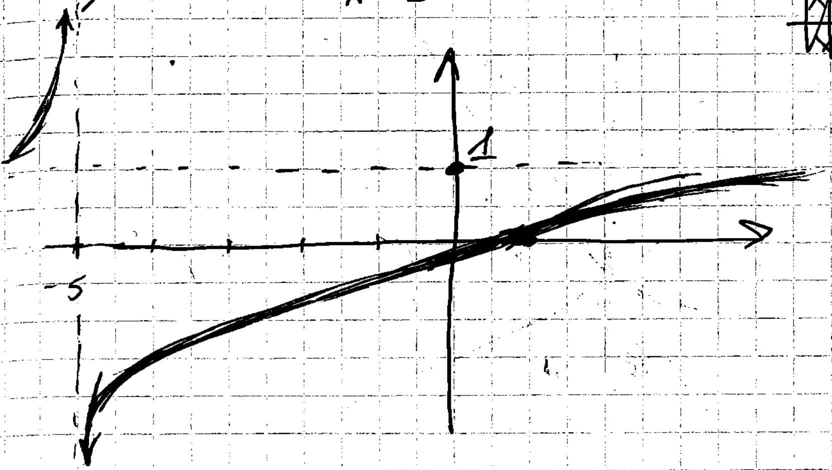
$x=\frac{-7+\sqrt{49+4y}}{2}$

$f^{-1}(x)=\frac{-7+\sqrt{49+4x}}{2}$, $x\in[-12,+\infty)$

$\cancel{f^{-1}(-2) = \ldots}$

$f(-3) = 9 - 21 = -12.$

4) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+5}$ $\neq$




$y = \dfrac{x-1}{x+5} \Rightarrow xy + 5y = x - 1.$

$x(y-1) = -1 - 5y$

$x = \dfrac{5y+1}{1-y}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{5x+1}{1-x} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

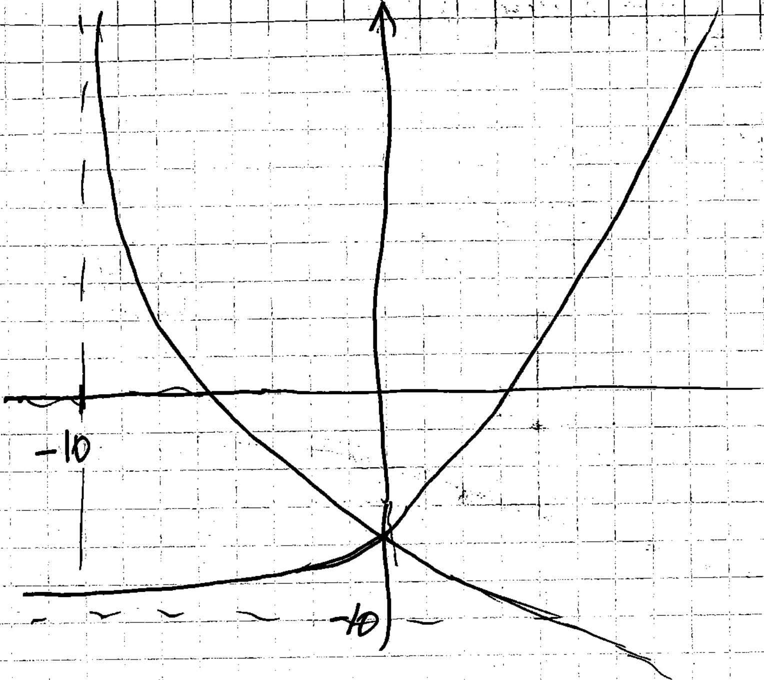
5) $f(x) = e^x - 10, \quad x \in \mathbb{R}$

$y = e^x - 10.$

$e^x = y + 10$

$x = \ln(y+10)$

$f^{-1}(x) = \ln(x+10)$ 63 $x \in (-10; +\infty)$




## Задача

$f(x) = x^3 + x + 1$.

Решить ур-е.

$f^{-1}(x) \geq x \; (*)$, решение.

ф-я $f(x)$ - строго возраст. т. к.

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) > f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) < x$

$x^3+x+1<x$

$x^3+1<0$

$x^3<-1$

$x<-1$

Ответ: $x\in(-\infty;-1)$

Тема 4. Равномощные множества.

Множества A и B называются <u>равномощными</u>, если существует биекция (= взаимно однозначное отображение) $f: A\to B$.

<u>Обозначение</u>: $\mathrm{card}\, A=\mathrm{card}\, B$

cardinality - мощность (англ).

Множество A называется <u>счетным</u>, если $\mathrm{card}\, A=\mathrm{card}\, \mathbb{N}$.

Множество A называется <u>множеством мощности континуум</u>, если $\mathrm{card}\, A=\mathrm{card}\, \mathbb{R}$

Задача ~~А~~ Доказать
card $\mathbb{Z}$ = card $\mathbb{N}$. (т. е. мн-во)
$\mathbb{Z}$ - счетно

Рассмотрим отображение
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ такое, что
$(\forall n \in \mathbb{N})$: $f(n) = (-1)^n \cdot \left[\frac{n}{2}\right]$.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | 0 | 1 | -1 | 2 | -2 | ... |

$f$ - биекция $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ card $\mathbb{Z}$ = card $\mathbb{N}$

Задача Доказать card $\mathbb{Q}$ = card $\mathbb{N}$
(то есть что $\mathbb{Q}$ - счетно).

Пусть $A_k$ - мн-во всех несократимых дробей $\frac{m}{n}$
$(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$, таких что
$|m| + |n| = k$.

$\mathbb{Q} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \ldots$

$A_1 = \left\{\frac{0}{1}\right\}$

$A_2 = \left\{-\frac{1}{1}, \frac{1}{1}\right\}$

$A_3 = \{-\frac{2}{1}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}\}$

$A_4 = \{-\frac{3}{1}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}\}$

Рассмотрим следующее отображение $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | $\frac{0}{1}$ | $-\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $-\frac{2}{1}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{1}$ | ... |

$f$ - биекция $\Rightarrow \operatorname{card} \mathbb{Q} = \operatorname{card} \mathbb{N}$

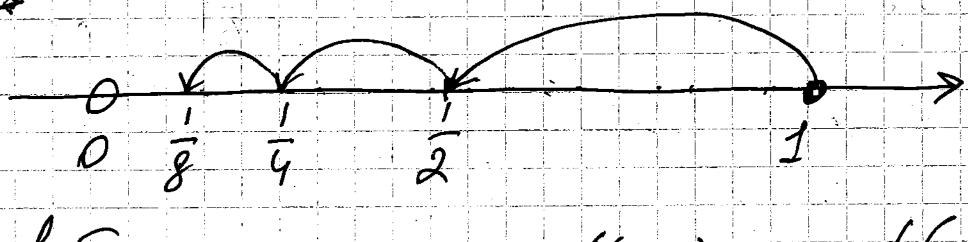
<u>Задача</u>

Д-ть, что $\operatorname{card}(0,1) = \operatorname{card}(0,1]$.

Рассмотрим отображение $f: (0,1] \to (0,1)$ такое, что

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, \text{ если } x = \frac{1}{2^k} \ (k = 0, 1, 2, \ldots) \\ x, \text{ если } x \neq \frac{1}{2^k} \ (k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

$f$



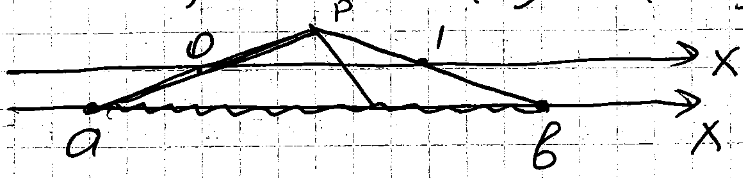

$f$ - биекция $\Rightarrow \operatorname{card}(0,1) = \operatorname{card}(0,1]$

<u>Задача</u>: Установить биекцию между мн-вами $[0,1]$ и $[a,b]$.

Рассмотрим отображение

$f: [0,1] \to [a,b]$

такое, что $f(x) = a + (b-a)x$



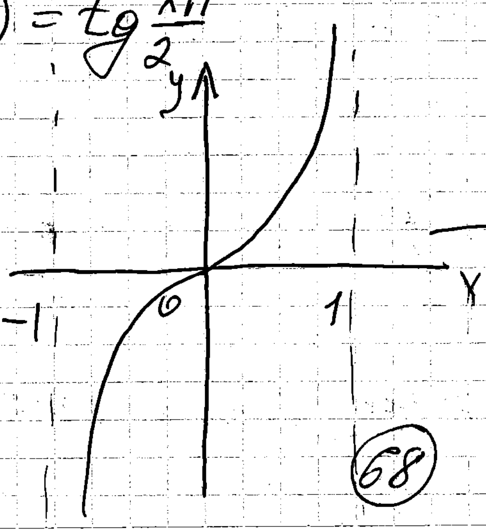

$f$ - биекция

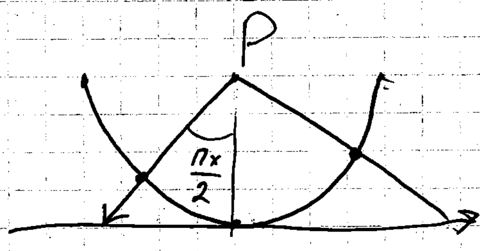
<u>Задача</u>: Установить биекцию $(-1,1)$ и $\mathbb{R}$

Рассмотрим отобр-е

$f: (-1,1) \to \mathbb{R}$ такое, что

$f(x) = tg\,\frac{x\pi}{2}$



$f$ - биекция

~~Задача~~: Теорема Кантора

мн-во $\mathbb{R}$ - несчетно

Д-во.

Предположим, ~~на~~ что ~~$f$: биекция~~ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ - биекция

Пусть $f(1) = A_1 = \ldots, x_{11}\, x_{12}\, x_{13}$

$f(2) = A_2 = \quad , x_{21}\, x_{22}\, x_{23}$

$f(3) = A_3 = \quad , x_{31}\, x_{32}\, x_{33}$

Рассмотрим число $B$.

$B = 0, y_1 y_2 y_3 \ldots$ такое, что

$(\forall i \in \mathbb{N}): (y_i \neq 0) \wedge (y_i \neq 9) \wedge (y_i \neq x_{ii})$

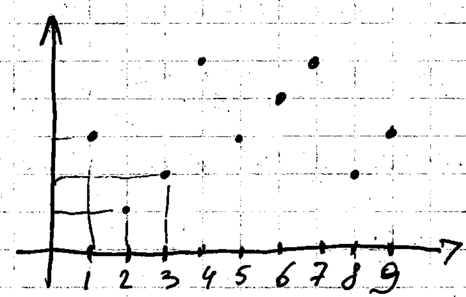
Число $B$ отлично от каждого из чисел $A_1, A_2, A_3, \ldots \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}.$ $f(n) \neq B \Rightarrow$ отображение $f$ не яв-ся биекцией получим противоречие

В док-ве была использована «диагональная процедура Кантора»

$\mathbb{N}$ - счетн.
$\mathbb{Z}$ - счетн.
$\mathbb{Q}$ - счетн
$\left.\begin{array}{l}\mathbb{R}\\ \mathbb{I}\end{array}\right\}$ несчетн. множ. (континуум)

## Тема 5 Предел последовательности

Последовательность - функция, опред. на мн-ве $\mathbb{N}$ натуральных чисел.



$x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad f: X \to \mathbb{R}$

$x: n \mapsto X(n) = X_n$ $\quad f: x \mapsto f(x)$

<u>Задача</u> Написать первые 5 членов последовательности.

$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ~~e = 2,718~~

$x_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$

$x_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$

$x_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{4}{3} = \frac{64}{27} = 2,37037\ldots$

$x_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} = 2,44140\ldots$

$x_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 = \cancel{(1,2)^5} = \frac{7776}{3125} = 2,48832\ldots$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$

$e = 2,7\,1828\,1828\,459045\ldots$

<u>Задача</u> Написать ф-лу n-ого члена пос-ти

1, 7, 31, 127, 511    2 8 32 128 512

$x_n = 2^{2n-1} - 1$

$\frac{4}{2}$ $\frac{7}{4}$ $\frac{10}{8}$ $\frac{13}{16}$ $\frac{16}{32}$

$x_n = \frac{4+3(n-1)}{2^n}$

71

Арифметическая посл-ть

$x_n = x_{n-1} + d.$

$d$ - разность ар-ой посл-ти.

Геометрическая посл-ть

$x_n = x_{n-1} \cdot q$

$q$ - знаменатель геом. посл-ти.

Рекуррентная посл-ть.

$x_n = f(n)$ — явное задание $n$-го числа

$x_n = \frac{x_{n-1}+2}{x_{n-2}}$ — рекуррентное задание последовательности

Последовательность Фибоначчи

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,

$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n \geq 3$

Задача

$\frac{1}{2}$ $\quad x_n = \frac{1}{2 - x_{n-1}}$

Доказать, что $x_n = \frac{n}{n+1}$

72

Задача

$x_1 = 1$;

$x_n = x_{n-1} + \frac{3}{4n^2-1}$

при $n \geq 2$

$x_1 = 1 = \frac{3}{3}$

$x_2 = \frac{6}{5}$ $\quad x_n = \frac{3n}{2n+1}$

$x_3 = \frac{9}{7}$

$x_4 = \frac{4}{3} = \frac{12}{9}$

Решение

1) База индукции.

при $n=1$

$x_1 = \frac{1}{2}$ – верно

2) Шаг индукции.

Предположим, что $x_k = \frac{k}{k+1}$

и докажем, что $x_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$.

~~k+~~ Имеем

$$x_{k+1} = \frac{1}{2 - \frac{k}{k+1}}$$

$$x_{k+1} = \frac{1(k+1)}{2(k+1)-k} = \frac{k+1}{k+2}$$

Согласно принципу мат индукции утверждение доказано для $\forall n \in \mathbb{N}$

Задача $x_1 = 1$, $x_n = \frac{x_{n-1}+3}{2}$

Д-ть, что $x_n$ строго возрастает

Решение

$x_{n+1} > x_n$

База индукции:

$x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$

$x_2 > x_1$ - верно.

Шаг индукции

Предположим, что $x_k > x_{k-1}$, ~~то~~

и докажем, что $x_{k+1} > x_k$

$$x_{k+1} = \frac{x_k + 3}{2} > \frac{x_{k-1} + 3}{2} = x_k$$

Итак, согласно принципу мат. индукции **наша** пос-ть $x_n$ строго возрастает

Задача —"—

Д-ть, что посл-ть $x_n$ огр. сверху.

Докажем $(\forall x \in \mathbb{N})$: $x_n < 3$.

База индукции

$n = 1. \quad x_1 = 1 < 3$ - верно

шаг инд-ии.

Предположим $x_k < 3$, и докажем, что $x_{k+1} < 3$.

$$x_{k+1} = \frac{x_k + 3}{2} < \frac{3+3}{2} = 3$$ ~~, итак~~

Итак, согласно методу мат. индукции доказано утв. при $n \in N$

Последовательность $x_n$ строго возрастает и огр-на сверху $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (по теореме Вейерштрасса) послед-ть $x_n$ имеет предел $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Чтобы найти $a$ перейдем в р-ве $x_n = \frac{x_{n-1}+3}{2}$ к пределу при $n \to \infty$.

Получим

$$a = \frac{a+3}{2} \Rightarrow 2a = a+3 \Rightarrow a = 3.$$

Имеем, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$

Опр. Число $a \in R$ называется пределом последовательности $(x_n)$

если ~~для~~ $\forall \varepsilon > 0$ существует ~~число~~ номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что, если $n > N$, то $|x_n - a| < \varepsilon$.

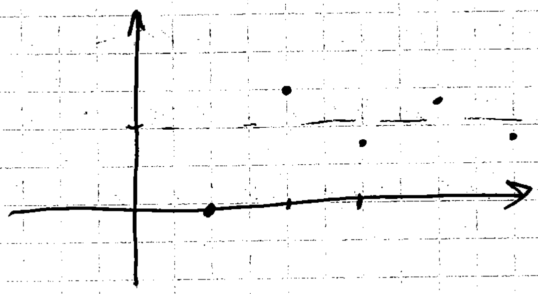
Символическая запись:

$$\left(a = \lim_{n\to\infty} x_n\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N): |x_n - a| < \varepsilon$$

Пример $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

$x_1 = 0$ $\quad x_3 = \frac{2}{3}$ $\quad x_5 = \frac{4}{5}$

$x_2 = \frac{3}{2}$ $\quad x_4 = \frac{5}{4}$



$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$