Лекции Прохорова М. Н. по математическому анализу

Лекция 16.

Обозначим $\Delta X_i =$(0,…,0,$\Delta x_i, 0, \dots$,0) и назовём приращением функции $f(X)$ по -той переменной величину $\Delta_i f(X) = f(X + \Delta X_i) - f(X)$.

Определение. Частной производной по переменной x_i в точке X называется предел $f'_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_i f(X)}{\Delta x_i}$, если он существует.

Частную производную функции можно рассматривать, как производную функции одной переменной x_i, когда все остальные переменные фиксированы.

Рисунок.

Примеры.

Частные производные $\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}$ можно рассматривать, как функции на тех подмножествах в $\boldsymbol{R^n}$, где они определены. И можно, в свою очередь, рассмотреть частные производные этих функций $\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$, которые назовём вторыми частными производными функции $f(X)$.

Пример. Для $n = 2$ имеются две частные производные 2-го порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ по переменным x и y и две «смешанные» производные второго порядка $\frac{\partial^2 f(X)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ и $\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$.

Определение. Смешанной частной производной n -того порядка назовём частную производную от производной $(n-1)$–го порядка.

Пример. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$.

Пример.

Возникает вопрос, будут ли равны частные производные**,** взятые по одним и тем же переменным одинаковое число раз, но в разном порядке, как в примере выше? Ответ даётся следующей теоремой:

Теорема (о смешанных производных).

Пусть функция $f(X) = f(x, y)$ определена вместе со своими производными $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ в некоторой окрестности точки X_0 и пусть функции $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ непрерывны в точке X_0. Тогда

$$\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial y \partial x}. \quad (*)$$

Доказательство.

Замечание. Если вторые частные производные разрывны в точке, то равенство неверно. Пример – для функции $f(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ при } (x, y) = (0,0); \\ \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad \text{при } (x, y) \neq (0,0). \end{cases}$

в точке $X_0 = 0$ равенство (*) неверно, т.к. вторые производные разрывны.

Замечание. Эта теорема легко распространяется на любые смешанные производные, отличающиеся лишь порядком дифференцирования. Например $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$.

Определение. Пусть $\vec{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ единичный вектор $|\vec{\delta}| = 1$, **производной функции $\boldsymbol{f(X)}$ по направлению $\vec{\boldsymbol{\delta}}$** в точке $X \in \boldsymbol{R^n}$ называется правая производная по t функции $F(t) = f(x_1 + t\delta_1, \dots, x_n + t\delta_1)$ в точке $t = 0$ и обозначается $\frac{\partial f(X)}{\partial \vec{\delta}} = F'_+(0)$.

Замечание. Частные производные 1-го порядка функции совпадают с производными функции по направлению соответствующих базисных ортов.

Теорема. Если функция $f(X)$ имеет в точке X_0 все непрерывные частные производные первого порядка, то приращение функции в точке X_0 соответствующее приращению аргумента $\Delta X = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ можно записать в виде $\Delta f(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)\Delta x_n + o(\Delta\rho)$, где $\Delta\rho = |\Delta X| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_n^2}$.

Доказательство.

Определение. Функция называется дифференцируемой в точке X_0, если приращение функции в точке X_0 соответствующее приращению аргумента

$\Delta X = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ можно записать в виде $\Delta f(X_0) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + o(\Delta\rho)$, где $\Delta\rho = |\Delta X| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}$, $A_i \in \boldsymbol{R^n}$ для всех i.

Теорема. Для того, чтобы функция была дифференцируема в точке, необходимо, чтобы она имела в этой точке частные производные первого порядка и достаточно, чтобы эти производные были непрерывны в точке.

Доказательство.

Примеры.

Определение. Главная линейная часть приращения дифференцируемой функции $f(X)$ называется дифференциалом функции и обозначается, как $df(X) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X)\Delta x_n = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X)dx_n$.

Замечание. Последнее равенство верно в силу $\Delta x_i = dx_i$.

Касательная плоскость. Геометрический смысл дифференциала.

Рассмотрим поверхность, заданную уравнением $z = f(x,y)$ в $\boldsymbol{R^3}$**.** Кривые на поверхности, заданные уравнениями $x = x_0$ и $y = y_0$ обе проходят через точку $X_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ и, если существуют частные производные $\frac{\partial f(X_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(X_0)}{\partial y}$,

то касательные к этим кривым в точке X_0 задаются уравнениями:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ z = f(X_0) + \frac{\partial f(X_0)}{\partial y}(y - y_0) \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = f(X_0) + \frac{\partial f(X_0)}{\partial x}(x - x_0) \end{cases}$$

Касательная плоскость к поверхности, если таковая существует, должна содержать обе эти прямые, откуда немедленно получаем уравнение касательной плоскости:

$$Z - z_0 = \frac{\partial f(X_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(X_0)}{\partial y}(y - y_0), \text{ где } z_0 = f(X_0). \qquad (**)$$

Если функции $\frac{\partial f(X)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(X)}{\partial y}$ непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0), то расстояние между точкой поверхности $P\big(x, y, f(x,y)\big)$ и точкой касательной плоскости $Q(x, y, Z)$, с теми же координатами (x, y) равно:

$PQ = f(x,y) - \frac{\partial f(X_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(X_0)}{\partial y}(y - y_0) = o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, и мы видим, что это расстояние есть

$$o(\rho) = PQ \underset{\rho \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Рисунок.

Примеры.

Лекция 17.

Теорема.

Пусть функция $f(X)$ дифференцируема в точке $X = (x_1, x_2, \dots , x_n) \in \boldsymbol{R^n}$, а функции $x_i = \varphi_i(t)$ дифференцируемы в точке t, тогда производная функции $F(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\ )$ равна

$$F'(t) = \frac{\partial f(X(t))}{\partial x_1}\varphi_1'(t) + \dots + \frac{\partial f(X(t))}{\partial x_n}\varphi_n'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}\,.$$

Доказательство.

Теорема. Если в предыдущих обозначениях $x_i = \varphi_i(t_1, \dots, t_m)$ функции от m переменных , то

$$\frac{\partial f(\varphi_1(t_1,\dots,t_m),\dots,\varphi_n(t_1,\dots,t_m))}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt_j}\,.$$

Доказательство.

Примеры.

Теорема. Если $f(X)$ дифференцируема в точке $X = (x_1, x_2, \dots , x_n) \in \boldsymbol{R^n}$ **,** то для неё имеет смысл производная по направлению любого единичного вектора $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, $\left|\vec{\theta}\right| = 1$ и

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\theta}} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\theta_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\theta_n\,.$$

Доказательство.

Замечание. Если функция имеет производную по любому направлению, то она может быть не дифференцируемой. **Пример.**

Замечание. Если $\vec{\theta} = (\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n)$ где $\{\alpha_i\}$ – углы между вектором $\vec{\theta}$ и осями OX_i, то предыдущая формула имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\theta}} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cos\alpha_n\,. \qquad (*)$$

Определение. Градиентом функции $f(X)$ в точке $X = (x_1, x_2, \dots , x_n) \in \boldsymbol{R^n}$ называется вектор $\overrightarrow{grad\ f(X)} = (\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(X)}{\partial x_n})$.

Примеры.

Следствие. Производная по направлению вектора $\vec{\theta}$ от функции $f(X)$ равна скалярному произведению вектора $\overrightarrow{grad\ f(X)}$ на вектор $\vec{\theta}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\theta}} = \left(\overrightarrow{grad\ f(X)}, \vec{\theta}\right) = grad_{\vec{\theta}}\ f(X).$$

Следствие. $\frac{\partial f}{\partial \vec{\theta}} \le |\overrightarrow{grad\ f(X)}\ |$

Свойства вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{grad\ f(X)}}$:

1) Его длина равна максимальному значению производной $\frac{\partial f}{\partial \vec{\theta}}$ по направлению функции $f(X)$;
2) Если он ненулевой, то направлен в сторону максимального возрастания функции $f(X)$;
3) Он перпендикулярен гиперповерхности уровня $f(X) = c$ (*будет доказано позднее*).

Примеры.

Дифференциалы.

Рассмотрим функцию $U = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ независимых переменных $\{x_i\}$. Дифференциал функции $f(X)$ равен

$$dU = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_k} dx_k$$

И зависит, вообще говоря, от $\{x_i\}$ и от $\{dx_i\}$.

Теорема. Пусть $U(X)$ и $W(X)$ функции, имеющие непрерывные частные производные 1-го порядка в точке X, тогда:

1) $d(\alpha U + \beta W) = \alpha dU + \beta dW$;
2) $d(UW) = UdW + WdU$;
3) $d\left(\frac{U}{W}\right) = \frac{WdU - UdW}{W^2}$, если только $W(X) \neq 0$.

Доказательство.

Определение. Дифференциалом -го порядка функции $U(X)$ называется $d^n U(X) = d\left(d^{n-1} U(X)\right)$.

Примеры. а) $d^2U = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_l}dx_k dx_l$. При вычислении полагаем $d(dx_i) = 0$.

б) $$\boldsymbol{d^k U(X) = (\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n)^k U(X)}$$

доказывается по индукции.

Теорема. Дифференциал k-го порядка функции $U(X)$, где $X = (x_1, x_2, \dots , x_n)$ независимые переменные, равен

$$d^k U(X) = (\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n)^k U(X).$$

Доказательство.

Если теперь $W(u_1, \dots , u_m)$ функция зависимых переменных, и

$u_j = u_j(x_1, x_2, \dots , x_n)$, то

$$dW = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial W}{\partial u_i}du_i = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial W}{\partial u_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j\right) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial W}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j})dx_j = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial x_j}dx_j \ ,$$

и мы видим, что формула для 1-го дифференциала осталась прежней. Это свойство ***инвариантности 1-го дифференциала.***

Но уже для второго дифференциала имеем:

$$d^2W = d(dW) = d\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial W}{\partial u_i}du_i\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 W}{\partial u_j \partial u_i}du_j du_i + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial W}{\partial u_i}d^2u_i \ ,$$

и видим, что в отличие от случая независимых переменных, появилось второе ненулевое слагаемое.

Примеры.