Лекция 14.

Множествами в этой лекции будем называть подмножества пространства $\boldsymbol{R^n}$.

Определение. Множество $G \subset \boldsymbol{R^n}$ называется открытым, если для любой точки $X \in G$ существует окрестность $U(X)$ точки X, целиком лежащая в $G, U(X) \subset G$.

Примеры. Пространство $\boldsymbol{R^n}$**,** открытый шар $U_\varepsilon(X)$, открытый параллелепипед – являются открытыми множествами.

Определение. Множество $G \subset \boldsymbol{R^n}$ называется замкнутым, если его дополнение $\mathrm{C}G$ в $\boldsymbol{R^n}$ **,** $\mathrm{C}G = \boldsymbol{R^n} \backslash G$ **–** открытое множество.

Примеры. Пространство $\boldsymbol{R^n}$ **,** замкнутый шар $U_\varepsilon(X)$, замкнутый параллелепипед, отрезок и окружность на плоскости, пустое множество $\emptyset$ – являются замкнутыми множествами.

Замечание. Множества $\boldsymbol{R^n}$ и $\emptyset$ - являются открытыми и замкнутыми одновременно.

Определение. Точка X называется внутренней точкой множества G, если существует ε - окрестность $U_\varepsilon(X)$ точки X, целиком лежащая в G, $U_\varepsilon(X) \subset G$.

Множество внутренних точек множества G обозначается G^0 и, очевидно, является открытым множеством.

Замечание. Открытое множество можно определить, как множество, для которого G= G^0.

Определение. Точка X называется граничной точкой множества G, если любая окрестность $U(X)$ точки X содержит как точки множества G, так и точки дополнения множества G в $\boldsymbol{R^n}$**,** то есть $G \cap U(X) \neq \emptyset, \mathrm{C}G \cap U(X) \neq \emptyset$.

Множество **всех** граничных точек множества G называется границей G и обозначается ΓG. Граничные точки могут принадлежать или не принадлежать множеству G.

Теорема. ΓG - замкнутое множество.

Доказательство.

Замечание. Если $G \subset \boldsymbol{R^n}$, то $\boldsymbol{R^n} = G^0 \cup \Gamma G \cup \mathrm{C}G^0$, причём множества $G^0, \Gamma G$ и $\mathrm{C}G^0$ попарно не пересекаются.

Определение. Замыканием множества G называется наименьшее замкнутое множество, обозначаемое $\bar{G}$, содержащее множество G.

Теорема. $\bar{G} = G \cup \Gamma G$.

Доказательство.

Следствие. Множество замкнуто, если оно содержит все свои граничные точки.

Теорема. Множество G замкнуто если и только если для любой сходящейся к точке X_0 последовательности $\{X_k\}$ точек, целиком содержащейся в G, точка X_0 также принадлежит G.

Доказательство.

Замечание. Последняя теорема даёт нам альтернативное определение замкнутого множества:

Определение. Множество G называется замкнутым, если для любой сходящейся к точке X_0 последовательности $\{X_k\}$ точек, целиком содержащейся в G, точка X_0 также принадлежит G.

Примеры.

Задача. Доказать, что:

а) объединение любого числа открытых множеств есть открытое множество;

б) пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество;

в) пересечение любого числа замкнутых множеств есть замкнутое множество;

г) объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество;

Определение. Открытым покрытием множества G называется совокупность открытых множеств $\Phi = \{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$, (здесь W_α- открытое множество, I- множество индексов), такая, что $G \subset \bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha$. Покрытие Φ называется конечным, если множество I - конечно.

Определение. Множество $G \subset \boldsymbol{R^n}$ называется ограниченным, если $\exists M > 0 \colon \forall X \in G \Rightarrow |X| < M$.

Теорема. Пусть $\Phi = \{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ есть открытое покрытие ограниченного замкнутого множества $G \subset \boldsymbol{R^n}$**,** тогда существует конечное подмножество I_0 множества I, $I_0 \subset I$, такое, что $\Phi_0 = \{W_\alpha\}_{\alpha \in I_0}$ также является открытым покрытием множества G . (Или, что то же самое, из любого открытого покрытия ограниченного замкнутого множества можно выбрать конечное подпокрытие).

Лемма. . Пусть $\Phi = \{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ есть открытое покрытие ограниченного замкнутого множества $G \subset \boldsymbol{R^n}$**,** тогда существует число $\varepsilon_\Phi > 0$, зависящее от покрытия Φ, такое, что для любой точки $X \in G$ существует элемент покрытия W_{α_X} , зависящий от X, такой, что $U_{\varepsilon_\Phi}(X) \subset W_{\alpha_X}$.(т.е. для любой точки X открытая ε_Φ-окрестность точки X содержится в некотором элементе W_{α_X}покрытия Φ).

Доказательство леммы.

Доказательство теоремы.

Определение. Множество $G \subset \boldsymbol{R^n}$ называется компактным, если из всякого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

В силу последнего определения доказанную теорему можно сформулировать так:

Теорема. Всякое ограниченное замкнутое множество в $\boldsymbol{R^n}$ компактно.

Примеры.