Лекция №7.
Линейные однородные уравнения (продолжение).

Определение

Функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ образуют фундаментальную систему решений (ФСР) для уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0, \tag{1}$$

если $\varphi_i(x), i = \overline{1,\ n}$ – линейно независимые решение уравнения (1).

Теорема (построение ФСР)

Пусть $a_i(x)$, $\overline{1,\ n}$ непрерывны на $[a,b]$ тогда фундаментальная система решений для уравнения (1) существует.

Доказательство.

Пусть $\varphi_i(x), i = \overline{1,\ n}$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi_i^{(j-1)}(x_0) = \delta_i^j, j = \overline{1,n}, \text{ где } \delta_i^j = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

Такие решения $\varphi_i(x)$ существуют и определены однозначно в силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

$$W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x_0) = \det(E) = 1 \neq 0$$

следовательно функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ – линейно независимы. $\square$

Теорема (о структуре решения линейного однородного уравнения)

Пусть $\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений для уравнения (1) тогда функция

$$\Phi(x) = d_1\varphi_1(x) + \ldots + d_n\varphi_n(x), \quad \forall d_1,\dots,d_n \in \mathbb{R}$$

является решением уравнения (1), и наоборот, если $y(x)$ – решение уравнения (1), то найдутся постоянные $c_1,\dots,c_n$ такие, что

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x),$$

причём постоянные $c_1,\dots,c_n$ определны однозначно.

Доказательство.

Так как множество решений линейного однородного дифференциального уравнения образует линейное пространство, то очевидно, что функция

$$\Phi(x) = d_1\varphi_1(x) + \ldots + d_n\varphi_n(x),$$

является решением уравнения (1).

.

Обратно. Пусть $y(x)$ – решение уравнения (1). Обозначим через

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x).$$

$\varphi(x)$ – решение уравнения (1). Подберем постоянные $c_1, \ldots, c_n$ так, чтобы выполнялись начальные условия

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = y(x_0), \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0). \end{cases}$$

Постоянные $c_1, \ldots, c_n$ существуют и определены однозначно так как являются решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(x_0) + \ldots + c_n\varphi_n(x_0) = y(x_0), \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

определитель которой совпадает с определителем Вронского $W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x_0)$ и отличен от 0 так как функции $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ – линейно независимы. По теореме существования и единственности решения задачи Коши $y(x) = \varphi(x)$. $\square$

Понижение порядка линейного однородного уравнения при известном частном решении.

Пусть дано линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0 \qquad (2)$$

и известно его частное решение $y_1(x)$. Для того, чтобы понизить порядок уравнения, сделаем замену

$$y = y_1 z(x),$$

где $z(x)$ – новая неизвестная функция. Функция $z(x)$ будет удовлетворять уравнению

$$b_0(x)z^{(n)} + b_1(x)z^{(n-1)} + \ldots + b_n(x)z = 0. \qquad (3)$$

Проследим за коэффициентом $b_n(x)$. Из таблицы

a_n	$y = y_1 z(x)$
a_{n-1}	$y' = y_1' z + y_1 z'$
a_{n-2}	$y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$
a_{n-3}	$y''' = y_1''' z + 3y_1'' z' + 3y_1' z'' + y_1 z'''$
$\cdots$	
a_1	$y^{(n-1)} = y_1^{(n-1)} z + \cdots + y_1 z^{(n-1)}$
a_0	$y^{(n)} = y_1^{(n)} z + \cdots + y_1 z^{(n)}$

становится очевидным, что

$$b_n(x) = a_0(x) y_1^{(n)} + a_1(x) y_1^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y_1 = 0,$$

так как $y_1(x)$ – решение уравнения (2). Таким образом уравнение для функции $z(x)$ имеет вид

$$b_0(x) z^{(n)} + \ldots + b_{n-1}(x) z' = 0$$

и порядок уравнения легко понижается заменой $z' = u$.

Пример

Решим уравнение

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0$$

$$y_1 = e^x$$

$$\text{Замена} \quad y = y_1 z = e^x z \qquad y' = z'e^x + ze^x \qquad y'' = z''e^x + 2z'e^x + ze^x$$

$$(1-x)(z''e^x + 2z'e^x + ze^x) + x(z'e^x + ze^x) - ze^x = 0$$

$$(1-x)z'' + (2(1-x) + x)z' + (1 - x + x - 1)z = 0$$

$$(1-x)z'' + (2-x)z' = 0$$

$$\text{Замена} \quad z' = u \qquad z'' = u'$$

$$(1-x)u' + (2-x)u = 0 \qquad (1-x)u' = (x-2)u$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{x-2}{x-1}\,dx$$

$$\ln|u| = -x + \ln|x-1| + ln|C| \qquad u = C(x-1)e^{-x} \qquad z' = C(x-1)e^{-x}$$

$$z = C\int (x-1)e^{-x}\,dx$$

Пример

Решим уравнение

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0$$

$$\text{Замена} \quad y = y_1 z = e^x z$$

$$z = C\int (x-1)e^{-x}\,dx z = C\int (x-1)e^{-x}\,dx = C((1-x)e^{-x} + \int e^{-x}\,dx) =$$

$$= C((1-x)e^{-x} - e^{-x}) + C_1 = -Cxe^{-x} + C_1$$

$$y = ze^x = -Cx + C_1 e^x$$

$$y = C_1 e^x + C_2 x$$

Формула Лиувилля-Остроградского.

Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – решения уравнения (2). Обозначим определитель Вронского для системы этих функций $W_{y_1,y_2,\ldots,y_n} = W(x)$. Функция $W(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$W'(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} W(x), \tag{4}$$

решая это уравнение получим

$$W(x) = W_0 e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, dx}. \tag{5}$$

Формулы (4), (11) носят название формул Лиувилля-Остроградского.

Понижение порядка линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с помощью формулы Лиувилля-Остроградского.

Пусть $y_1(x)$ – известное частное решение, $y(x)$ – искомое решение. Составим определитель Вронского для этих функций

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = y_1 y' - y y_1'$$

поделим полученное равенство на y_1^2

$$\frac{W}{y_1^2} = \frac{y_1 y' - y y_1'}{y_1^2} = \left(\frac{y}{y_1}\right)'.$$

Так как определитель Вронского $W(x)$ может быть вычислен по формуле (11), для нахождения неизвестной функции $y(x)$ получим дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{W_0 e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx}}{y_1^2}.$$

В правой части последнего равенства стоит известная функция переменной x.

Пример

Решим уравнение

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0$$

$$y_1 = e^x$$

$$W = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx} = Ce^{\int \frac{x}{x-1}\,dx} = Ce^{\int \frac{x-1+1}{x-1}\,dx} = Ce^{\int (1+\frac{1}{x-1})\,dx} =$$

$$= Ce^{x+\ln|x-1|} = C(x-1)e^x$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{W(x)}{y_1^2} = \frac{C(x-1)e^x}{e^{2x}} = C(x-1)e^{-x}$$

$$\frac{y}{e^x} = C\int (x-1)e^{-x}\,dx = C((1-x)e^{-x} + \int e^{-x}\,dx) =$$

$$= C((1-x)e^{-x} - e^{-x}) + C_1 = -Cxe^{-x} + C_1$$

$$y = -Cx + C_1e^x = C_1e^x + C_2x$$

Докажем формулу Лиувилля-Остроградского.
Так как определитель это сумма произведений элементов, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца, то его производная состоит из n определителей в каждом из которых вместо одной из срок стоит строка производных.

$$\frac{dW(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} +$$

$$\cdots$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Все определители кроме последнего равны 0 так как в них есть пара совпадающих строк. Таким образом

$$\frac{dW(x)}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Так как функции $y_i(x)$ являются решениями уравнения (2), выразим старшие производные этих функций по формулам

$$y_i^{(n)} = -\frac{1}{a_0}(a_1(x)y_i^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y_i)$$

и подставим эти выражение в определитель (6). Определитель (6) разложиться в сумму n определителей по последней строке только один из которых будет отличен от нуля. Таким образом

$$\frac{dW(x)}{dx} = -\frac{a_1}{a_0}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -\frac{a_1}{a_0}W(x).$$