

Домашнее задание "Комплексные числа"

1) ТР "Контрольные вопросы", стр. 16, 2.1-2.6

2) Вычислить

а) $(2+i)^3 + (2-i)^3$,

а) 4

б) $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i} + \frac{(5+i)(3+5i)}{2i}$,

б) $24-16i$

в) i^{77} , i^{98} , i^{-57}

в) $i^{77}=i$, $i^{98}=-1$, $i^{-57}=-i$

3) Решить СЛАУ с помощью A^{-1} и методом Крамера. Сделать проверку.

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 1+i \\ (2+i)z_1 + (1-3i)z_2 = 9+i \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1-i \\ 2i \end{pmatrix}$

4) Вычислить

а) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

а) $2^9(1-i\sqrt{3}) = 2^9 - i2^9\sqrt{3}$

б) $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

б) 2

5) Решить уравнения. Дать ответ в алгебраической форме. Изобразить решение на комплексной плоскости.

а) $z^3 + i = 0$

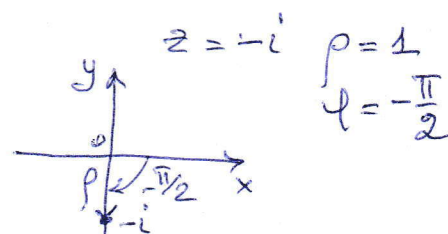
б) $z^4 + 1 + i\sqrt{3} = 0$

⚠ 6) ТР N2

$$5) a) z^3 + i = 0$$

$$z^3 = -i = 1 e^{i(-\frac{\pi}{2})}$$

$$z_k = \sqrt[3]{1} e^{i(-\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3})} \quad k = 0, 1, 2$$

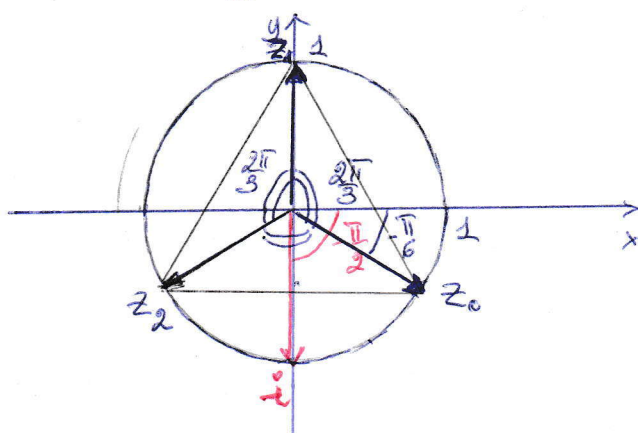


$$z_k = \sqrt[3]{1} e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3})} \quad k = 0, 1, 2$$

$$k=0 \quad z_0 = e^{i(-\frac{\pi}{6})} = \cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}$$

$$k=1 \quad z_1 = e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i(\frac{\pi}{6})} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = i$$

$$k=2 \quad z_2 = e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})} = e^{i(\frac{7\pi}{6})} = e^{i(-\frac{5\pi}{6})} = \cos(-\frac{5\pi}{6}) + i \sin(-\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}$$



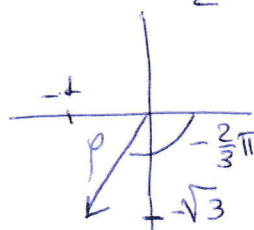
$$z^3 + i = (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) = (z - \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2})(z - i)(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2})$$

$$z = -1 - i\sqrt{3} = 2 e^{i(-\frac{2\pi}{3})}$$

$$8) z^4 + 1 + i\sqrt{3} = 0$$

$$z^4 = -1 - i\sqrt{3}$$

$$z^4 = 2 e^{i(-\frac{2\pi}{3})}$$



$$z_k = \sqrt[4]{2} e^{i(-\frac{2\pi}{3 \cdot 4} + \frac{2\pi k}{4})} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_k = \sqrt[4]{2} e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2})} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_0 = \sqrt[4]{2} e^{i(-\frac{\pi}{6})} = \sqrt[4]{2} (\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6})) = \sqrt[4]{2} (\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}} - i \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2} e^{i(\frac{\pi}{3})} = \sqrt[4]{2} (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = \sqrt[4]{2} (\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{\sqrt[4]{8}} + i \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2} e^{i(\frac{5\pi}{6})} = \sqrt[4]{2} (\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}) = \sqrt[4]{2} (-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}} + i \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2} e^{i(\frac{8\pi}{6})} = \sqrt[4]{2} e^{i(-\frac{2\pi}{3})} = \sqrt[4]{2} (\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i \sin(-\frac{2\pi}{3})) = -\frac{1}{\sqrt[4]{8}} - i \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}$$

$$z^4 + 1 + i\sqrt{3} = (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = (z - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}} + i \frac{1}{\sqrt[4]{8}})(z - \frac{1}{\sqrt[4]{8}} - i \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}})(z + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}} - i \frac{1}{\sqrt[4]{8}})(z + \frac{1}{\sqrt[4]{8}} + i \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}})$$

