Линейные пространства

Определение. Непустое множество L называется ***линейным пространством***, а его элементы - ***векторами***, если выполняются следующие условия:

1) Задана операция сложения, т.е. любым двум элементам $\vec{x},\vec{y} \in L$ ставится в соответствие элемент $\vec{x}+\vec{y} \in L$, называемый их суммой.
2) Задана операция умножения вектора на число, т.е. любому элементу $\vec{x} \in L$ и числу $\alpha \in R$ ставится в соответствие элемент $\alpha\vec{x} \in L$, называемый произведением элемента на число.
3) Для $\forall\ \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in L$, и $\alpha, \beta \in R$ выполняются следующие ***восемь аксиом***:
    1. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (коммутативность суммы)
    2. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (ассоциативность суммы)
    3. $\exists \vec{0} \in L: \forall\ \vec{x} \in L, \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ (нулевой вектор)
    4. $\forall\ \vec{x} \in L\ \exists(-\vec{x}) \in L:\ \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ (противоположный вектор)
    5. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
    6. $(\alpha\beta)\overrightarrow{x} = \alpha(\beta\overrightarrow{x})$ (коммутативность умножения на число)
    7. $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ (дистрибутивность относительно суммы элементов)
    8. $(\alpha + \beta)\overline{x} = \alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{x}$ (дистрибутивность относительно суммы числовых множителей)

Линейное пространство L замкнуто относительно операций сложения и умножения на число, так как в результате этих операция мы получаем элементы того же пространства.

Линейные подпространства

Определение. Непустое подмножество H линейного пространства L называется ***линейным подпространством***, если оно само является линейным пространством относительно операций, заданных на L.

Критерий линейного подпространства. Для того, чтобы непустое подмножество H линейного пространства L было его линейным подпространством, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) $\forall\ \vec{x},\vec{y} \in H \quad \vec{x} + \vec{y} \in H$ (замкнутость суммы);
2) $\forall\ \vec{x} \in H$ и $\alpha \in R\ \ \alpha\vec{x} \in H$ (замкнутость умножения на число).