МИРЭА – Российский технологический университет
(РТУ МИРЭА)

Институт кибернетики
Кафедра высшей математики

Типовой расчет

по дискретной математике

Вариант 5

1	2	3	4	5
?	?	?	?	?

Учебная группа: КМБО-00-20
Студент: Анонимус
Преподаватель: Митин А.В.

Москва 2020

Задача 1. Вариант 5.

Условие:

Доказать, что число $x_n = 5 \cdot 8^n - 5 \cdot (-6)^n + 28n$ делится нацело на число $a = 98$, при $n \geqslant 0$. Задачу решить с помощью метода математической индукции.

Решение:

Используем метод математической индукции.

База.

Проверим для $n = 0$:

$$5 \cdot 8^0 - 5 \cdot (-6)^0 + 28 \cdot 0 = 5 - 5 = 0 \text{ (верно т.к. делится нацело на 98).}$$

Предположение индукции.

Допустим, утверждение верно при $n = k$, то есть $5 \cdot 8^k - 5 \cdot (-6)^k + 28k$ делится на 98.

Шаг индукции.

Заметим, что $98 = 2 \cdot 7^2$

Для $n = k + 1$ выражение $x_n = 5 \cdot 8^n - 5 \cdot (-6)^n + 28n$ имеет вид:

$$5 \cdot 8^{k+1} - 5 \cdot (-6)^{k+1} + 28(k+1) =$$
$$= 40 \cdot 8^k + 30 \cdot (-6)^k + 28k + 28 =$$
$$= -6(5 \cdot 8^k - 5 \cdot (-6)^k + 28k) + 70 \cdot 8^k + 28 \cdot 7 \cdot k + 28 =$$
$$= -6x_k + 70 \cdot 8^k + 2 \cdot 98 \cdot k + 28, \text{ где } -6x_k \,\vdots\, 98, \text{ и } (2 \cdot 98 \cdot k) \,\vdots\, 98$$

Теперь докажем, что $t_k = 70 \cdot 8^k + 28$ тоже делится на 98. Снова используем метод математической индукции:

База 2.

Проверим для $k = 0$:

$$70 \cdot 8^0 + 28 = 98 \text{ (верно т.к. делится нацело на 98).}$$

Предположение индукции 2.

Допустим, утверждение верно при $k = m$, то есть $t_m = 70 \cdot 8^m + 28$ делится на 98.

Шаг индукции 2.

Для $k = m + 1$ выражение $t_k = 70 \cdot 8^k + 28$ имеет вид:

$$70 \cdot 8^{m+1} + 28 =$$
$$= 8 \cdot 70 \cdot 8^m + 28 =$$
$$= 8 \cdot (70 \cdot 8^m + 28) - 28 \cdot 7 =$$
$$= 8 \cdot t_m - 2 \cdot 98, \text{ где } t_m \,\vdots\, 98, \text{ и } (-2 \cdot 98) \,\vdots\, 98$$

Значит, утверждение верно для $k = m + 1 \Rightarrow (t_k = 70 \cdot 8^k + 28) \vdots 98$
Но тогда в первой индукции $x_{k+1} \vdots 98$, а значит, изначальное утверждение верно. Ч.Т.Д.

Задача 2. Вариант 5.

Условие:

Путь Ω - множество всех пятизначных натуральных чисел, которые не содержат в своей записи ни одной цифры ноль. Пусть A и B - множества всех чисел из Ω, которые удовлетворяют указанным условиям:
A - Среди первых четырёх цифр числа имеется ровно две различные цифры.
B - Число одинаково читается слева направо и справа налево.

Найти:
1) $|A|$
2) $|B|$
3) $|A \cap B|$
4) $|A \cup B|$

Решение:

1) Существует C_9^2 способов выбрать 2 различных числа и $(2^4 - 2)$ способа расставить их на 4 позиции (-2 т.к. исключаем случаи со всеми одинаковыми элементами). Последнее число может быть любым (9 вариантов)
Итого, имеем: $|A| = C_9^2 \cdot (2^4 - 2) \cdot 9 = \frac{9!}{2! \cdot (9-2)!} \cdot 14 \cdot 9 = \frac{9!}{7!} \cdot 7 \cdot 9 = 7 \cdot 8 \cdot 9^2 = 4536$

2) Если пятизначное число одинаково читается слева направо и справа налево, значит, 1-ая цифра совпадает с 5-ой, 2-ая совпадет с 4-ой, а 3-ая может быть любой. Это означает, что мы можем 9-ю способами выбрать 1-ую цифру, 9-ю способами выбрать 2-ую, 9-ю способами выбрать 3-ую, а 4-ую и 5-ую только одним.
Итого, имеем: $|B| = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 1 = 729$

3) 1-ая и 5-ая, 2-ая и 4-ая цифра числа совпадают, среди первый четырёх ровно 2 различные цифры. В таком случае существует C_9^2 способов выбрать 2 различных числа и 6 способа расставить их на первые 4 позиции (Так как 4-ый элемент зависит от 2-го, то мы должны расставить 2 элемента по 3 позициям, избегая случаев, когда на всех позициях одинаковые элементы. Имеем $2^3 - 2 = 6$). 5-ый элемент должен равняться первому, его выбираем одним способом.
Итого, имеем: $|A \cap B| = C_9^2 \cdot 6 \cdot 1 = 36 \cdot 6 = 216$

4) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 4536 + 729 - 216 = 5049$

Задача 3. Вариант 5.

Условие:

Определить, сколько различных слов, не содержащих подслова **ЗВЕНО**, можно составить из букв слова **ПРОИЗВЕДЕНИЕ**. Все буквы данного слова должны входить в составляемые слова и в том же количестве.

Решение:

В слове ПРОИЗВЕДЕНИЕ 12 букв. Количество перестановок 12 букв $= 12!$(Любая из 12 букв на 1-ое место, любая из 11 - на 2-ое и т.д.). Но буква И повторяется 2 раза и буква Е - 3 раза. Поменять 2 буквы местами можно 2! способами, 3 буквы - 3! способами. Итого, количество перестановок $= \frac{12!}{2!\cdot 3!}$
Теперь найдём слова, в котрые будет входить подслово ЗВЕНО: 5 букв находятся на фиксированной позиции (они находятся рядом друг с другом, хотя внутри слова они могут быть в любом месте), остальные 7 - нет. При этом остаются 2 буквы Е и 2 буквы И, порядок которых не имеет значения.
Итого, $\frac{8!}{2!\cdot 2!}$
Получаем, что количество слов, не содержащих подслова ЗВЕНО $= \frac{12!}{2!\cdot 3!} - \frac{8!}{2!\cdot 2!}$

Задача 4. Вариант 5.

Условие:

Из колоды в 36 карт выбирают 5 карт. Определить, сколько существует различных вариантов выбора, удовлетворяющих условию:
Выбрано 0 королей, 2 туза и 3 бубновые карты.

Решение:

В колоде 4 карты королей. Без них в колоде останется 32 карты, по 8 каждой масти.
Возможно несколько вариантов, удовлетворяющих условию:
1) Выбрано 3 бубновые карты и 2 не бубновых туза
2) Выбран 1 бубновый туз, 2 другие бубновые карты и 1 не бубновый туз и одна произвольная не бубновая карта.

В первом случае существует C_7^3 способов выбрать 3 бубновые карты без короля и туза, и C_3^2 способов выбрать 2 не бубновых туза.
Итого, $C_7^3 \cdot C_3^2 = \frac{7!}{3!(7-3)!} \cdot \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{7!}{4!\cdot 2} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{2} = 105$ вариантов.

Во втором случае можно 1 способом выбрать бубновый туз, C_7^2 выбрать 2 другие бубновые карты, C_3^1 способов выбрать не бубновый туз, существует $(8-1)\cdot 3 = 21$ карт не бубновой масти, не являющихся тузом и королём, и C_{21}^1 способов выбрать из них одну карту.
Итого, $1 \cdot C_7^2 \cdot C_3^1 \cdot C_{21}^1 = \frac{7!}{2!(7-2)!} \cdot \frac{3!}{(3-1)!} \cdot \frac{21!}{(21-1)!} = \frac{7!\cdot 3!\cdot 21!}{2!\cdot 5!\cdot 2!\cdot 20!} = \frac{21\cdot 6\cdot 7\cdot 3}{2} = 1323$

В сумме имеем $105 + 1323 = 1428$ вариантов.

Задача 5. Вариант 5.

Условие:

Для данных чисел n и m в кольце вычетов по модулю n^2 найти:
1) Обратный к вычету m по умножению, если он есть.
2) Все идемпотентные элементы.
3) Количество нильпотентных элементов.
4) Разложить кольцо вычетов по модулю n^2 в прямое произведение колец вычетов по модулю степеней простых чисел. Выписать формулы изоморфизма (в обе стороны).
5) Определить максимальный порядок по умножению элементов мультипликативной группы кольца вычетов по модулю n^2.

Решение:

Сначала вычислим числа n и m:
n = $\text{МЗЙ}_{32} = 15 \cdot 32^2 + 10 \cdot 32 + 12 = 2^2 \cdot 3923 = 15\,692_{10}$
m = $\text{ВПД}_{32} = 4 \cdot 32^2 + 18 \cdot 32 + 6 = 2 \cdot 2339 = 4\,678_{10}$
Тогда $n^2 = 15692^2 = 2^4 \cdot 3923^2 = 246\,238\,864$

1) $\text{НОД}(n^2;\ m) = \text{НОД}(2^4 \cdot 3923^2;\ 2 \cdot 2339) = 2 > 1 \Rightarrow$ обратного к вычету m по умножению нет в кольце $\mathbb{Z}_{n^2}$.
2) $\mathbb{Z}_{n^2} = \mathbb{Z}_{2^4 \cdot 3923^2} \cong \mathbb{Z}_{2^4} \times \mathbb{Z}_{3923^2} \Rightarrow$ существует 2^2 идемпотентов, из которых 2 тривиальные (0 и 1).
Найдём 2 оставшихся идемпотента:
$2^4 x + 3923^2 y = 1 \Rightarrow 16x + 15\,389\,929 y = 1$
Решим Диофантово уравнение.

$$\frac{15389929}{16} = 961870 + \frac{9}{16} = 961870 + \frac{1}{1 + \frac{7}{9}} = 961870 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{7}}} =$$
$$= 961870 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + (\frac{1}{2})}}} = 961870 + \frac{4}{7} = \frac{6733094}{7}$$

$$\begin{cases} x = 6733094 \\ y = -7 \end{cases}$$
Значит, один из идемпотентов $= 16 \cdot 6733094 = 107\,729\,504$
Второй идемпотент $= 1 - 107729504 = -107729503 \overset{mod\, n^2}{=} 138\,509\,361$
Итого: 4 идемпотента $(0;\ 1;\ 107\,729\,504;\ 138\,509\,361)$
3) $n^2 = 2^4 \cdot 3923^2$
Количество нильпотентов $= 2^{4-1} \cdot 3923^{2-1} = 8 \cdot 3923 = 31384$

4) $\mathbb{Z}_{n^2} = \mathbb{Z}_{2^4 \cdot 3923^2} \cong \mathbb{Z}_{2^4} \times \mathbb{Z}_{3923^2}$

$a \rightsquigarrow \big(a(mod\, 2^4);\ a(mod\, 3923^2)\big)$

$e_1 = 107\,729\,504$ - первый идемпотент, $e_1 \rightsquigarrow (1;0)$

$e_2 = 138\,509\,361$ - второй идемпотент, $e_2 \rightsquigarrow (0;1)$

Формула изоморфизма имеет вид:

$Ve_1 + Ue_2 = a\ (mod\, 246\,238\,864)$,

где $V \in \mathbb{Z}_{2^4}$, $U \in \mathbb{Z}_{3923^2}$, $a \in \mathbb{Z}_{2^4 \cdot 3923^2}$

5) $\mathbb{Z}_{n^2} = \mathbb{Z}_{2^4 \cdot 3923^2} \cong \mathbb{Z}_{2^4} \times \mathbb{Z}_{3923^2}$

$\varphi(2^4) = 2^4 - 2^3 = 8$

$\varphi(3923^2) = 3923^2 - 3923 = 15\,386\,006$

Максимальный порядок по умножению:

$\text{НОК}\big(\varphi(2^4);\ \varphi(3923^2)\big) = \text{НОК}(8;\ 15\,386\,006) = 61\,544\,024$