Семинары „Многочлены"

1) Разложить неправильную дробь в сумму многочлена и правильной дроби

а) $\dfrac{2x^4-3x^3+4x^2-5x+6}{x^2-3x+1}$

б) $\dfrac{x^5-2x^3+4x^2-6x+8}{x-1}$

в) $\dfrac{2x^5-5x^3-8x}{x+3} =$

2) Пользуясь схемой Горнера, вычислить $f(x_0)$

а) $f(x) = x^4-3x^3-6x^2-10x+16$, $x_0 = 4$

б) $f(x) = x^5+(1+2i)x^4-(1+3i)x^2+7$, $x_0 = -2-i$

3) Найти кратность корня x_0 для многочлена $f(x)$

а) $x_0 = +2$, $f(x) = x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$;

б) $x_0 = -2$, $f(x) = x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16$.

4) Доказать, что многочлен нечетной степени над $\mathbb{R}$ имеет корень в $\mathbb{R}$.

5) Найти многочлен со старшим коэффициентом 1 наименьшей степени, если известно, что он имеет корни: 1 кратности 2
2 кратности 1
3 кратности 1
1+i кратности 1

а) над $\mathbb{C}$;

б) над $\mathbb{R}$.

6) Найти все корни многочлена, их кратности. Разложить многочлен на неприводимые множители над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$.

1) $z^4 - 1$;

2) $z^4 + 1$;

3) $z^6 + 4z^3 + 3$;

5) $z^3 + i$;

6) $z^4 + 1 + i\sqrt{3}$,

ТР N3

1) Найти все корни многочлена $p(z)$.
Записать каждый корень в алгебраической форме, указать его алгебраическую кратность.
2) Разложить многочлен $p(z)$ на неприводимые множители:
2а) над $\mathbb{C}$;
2б) над $\mathbb{R}$.

В31. $p(z) = z^4 - 4z^3 - z^2 + 6z + 18$

$p(z) \in \mathbb{Z}[z]$ - многочлен с целыми коэффициентами. Найдем его целочисленные корни.
Если многочлен с целыми коэффициентами имеет целочисленный корень, то этот корень является делителем свободного члена многочлена.

Свободный член $p(z)$: 18.
Его делители: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$
Проверим, является ли какой-либо из них корнем $p(z)$, с помощью схемы Горнера.

	1	-4	-1	6	18
1	1	-3	-4	2	20
-1	1	-5	4	2	16
2	1	-2	-5	-4	10
-2	1	-6	11	-16	50
3	1	-1	-4	-6	0

$\Rightarrow$ 3 является корнем $p(z) \Rightarrow$

$\Rightarrow p(z) = (z-3)(z^3 - z^2 - 4z - 6) = (z-3)\,q(z)$ (из следствия теоремы Безу)

$q(z) \in \mathbb{Z}[z]$. Найдем целочисленные корни $q(z)$.
Свободный член $q(z)$: -6.
Делители свободного члена: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.
Проверим, является ли какой-либо из них корнем $q(z)$, с помощью схемы Горнера.
Числа $\pm 1, \pm 2$ проверять не надо, т.к. они не являются корнями $p(z)$, а если z_0 — корень $q(z)$, то z_0 — корень и $p(z)$.

	1	-1	-4	-6
3	1	2	2	0

$\Rightarrow$ 3 является корнем $q(z)$ (и $p(z)$)

$$q(z) = (z-3)(z^2+2z+2)$$

$$p(z) = (z-3)^2(z^2+2z+2).$$

Рассмотрим квадратный трехчлен z^2+2z+2 и найдем его корни.

$$z^2+2z+2=0$$

$$D = 4-8 = -4 < 0$$

$$z = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$ кратности 1.

2б) $p(z) = (z-3)^2(z^2+2z+2)$ — разложение $p(z)$ на неприводимые множители над $\mathbb{R}$, поскольку это разложение на многочлены первой степени и второй степени с отрицательным дискриминантом.

2а) $p(z) = (z-3)^2(z+1-i)(z+1+i)$ — разложение $p(z)$ на неприводимые множители над $\mathbb{C}$, поскольку это разложение на многочлены первой степени.

1) $z=3$ — корень кратности 2,
$z=-1+i$ — корень кратности 1,
$z=-1-i$ — корень кратности 1.

В 32 $p(z) = z^4 + 7z^2 + 49$

Разложим $p(z)$ на множители, дополнив $z^4 + 49$ до полного квадрата.

$$p(z) = z^4 + 7z^2 + 49 = (z^2)^2 + 7^2 + 7z^2 =$$
$$= ((z^2)^2 + 2 \cdot 7 z^2 + 7^2) - 14z^2 + 7z^2 =$$
$$= (z^2+7)^2 - 7z^2 = (z^2+7)^2 - (\sqrt{7} z)^2 =$$
$$= (z^2 + 7 - \sqrt{7} z)(z^2 + 7 + \sqrt{7} z) =$$
$$= (z^2 - \sqrt{7} z + 7)(z^2 + \sqrt{7} z + 7) = q_1(z) q_2(z).$$

Рассмотрим квадратные трехчлены $q_1(z), q_2(z)$ и найдем их корни.

$$z^2 - \sqrt{7} z + 7 = 0$$
$$D = 7 - 28 = -21 < 0$$
$$z = \frac{\sqrt{7} \pm i\sqrt{21}}{2}$$

$$z^2 + \sqrt{7} z + 7 = 0$$
$$D = 7 - 28 = -21$$
$$z = \frac{-\sqrt{7} \pm i\sqrt{21}}{2}$$

2б) $p(z) = (z^2 - \sqrt{7} z + 7)(z^2 + \sqrt{7} z + 7)$ — разложение $p(z)$ на неприводимые множители над $\mathbb{R}$, поскольку это разложение на многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом.

2а) $p(z) = \left(z - \frac{\sqrt{7}}{2} - i\frac{\sqrt{21}}{2}\right)\left(z - \frac{\sqrt{7}}{2} + i\frac{\sqrt{21}}{2}\right)\left(z + \frac{\sqrt{7}}{2} - i\frac{\sqrt{21}}{2}\right)\left(z + \frac{\sqrt{7}}{2} + i\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$ — разложение $p(z)$ на неприводимые множители над $\mathbb{C}$, поскольку это разложение на многочлены первой степени.

1) Корни $p(z)$: $z = \frac{\sqrt{7}}{2} + i\frac{\sqrt{21}}{2}$ кратности 1,

$z = \frac{\sqrt{7}}{2} - i\frac{\sqrt{21}}{2}$ кратности 1,

$z = -\frac{\sqrt{7}}{2} + i\frac{\sqrt{21}}{2}$ кратности 1,

$z = -\frac{\sqrt{7}}{2} - i\frac{\sqrt{21}}{2}$ кратности 1.

B33 $p(z) = z^4+4z^3+11z^2+14z+10$.

Известен корень $p(z)$: $z_1 = -1+i$

$p(z) \in \mathbb{R}[z]$. Если $p(z) \in \mathbb{R}[z]$ имеет комплексный корень $z_1 = a+ib$ с ненулевой мнимой частью ($b \neq 0$), то $p(z)$ имеет и корень $z_2 = \bar{z}_1$. $\Rightarrow$ из следствия т. Безу

$\Rightarrow p(z) \vdots f(z) = (z-z_1)(z-\bar{z}_1) = z^2 - 2az + a^2+b^2 \in \mathbb{R}[z]$.

$z_1 = -1+i \Rightarrow \bar{z}_1 = -1-i$

$f(z) = (z-z_1)(z-\bar{z}_1) = z^2+2z+2$ – квадратный трехчлен с отрицательным D ($D = -4<0$)

$$
\begin{array}{r|l}
z^4+4z^3+11z^2+14z+10 & z^2+2z+2 \\
\underline{-\,z^4+2z^3+2z^2} & \overline{z^2+2z+5} \\
2z^3+9z^2+14z+10 & \\
\underline{-\,2z^3+4z^2+4z} & \\
5z^2+10z+10 & \\
\underline{-\,5z^2+10z+10} & \\
0 &
\end{array}
$$

$p(z) = (z^2+2z+2)(z^2+2z+5)$

Рассмотрим квадратный трехчлен z^2+2z+5 и найдем его корни.

$z^2+2z+5=0$

$D = 4-20 = -16$

$z_{3,4} = \dfrac{-2 \pm i4}{2} = -1 \pm 2i$

2б) $p(z) = (z^2+2z+2)(z^2+2z+5)$ – разложение $p(z)$ на неприводимые множители над $\mathbb{R}$, поскольку это разложение на многочлены второй степени с отрицательными дискриминантами.

2а) $p(z) = (z+1-i)(z+1+i)(z+1-2i)(z+1+2i)$ – разложение на неприводимые множители над $\mathbb{C}$, поскольку это разложение на многочлены первой степени.

1) корни $p(z)$:

$z_1 = -1+i$ кратности 1;

$z_2 = -1-i$ кратности 1;

$z_3 = -1+2i$ кратности 1,

$z_4 = -1-2i$ кратности 1.

Домашнее задание.

1) ТР „Контрольные вопросы"
   стр. 16. 2.7, 2.8, 2.9
2) 4.333, 4.334, 4.411
3) 4.338, 4.339, 4.340
4) 4.435, 4.436

5) 4.365, 4.366, 4.368

6) Разложить многочлен $p(z)$ на неприводимые множители над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$.

   а) $p(z) = z^6 + 27$,

   б) $p(z) = z^4 - 10z^2 + 1$,

   в) $p(z) = z^4 + 5z^2 + 25$,

   г) $p(z) = z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100$, если известен корень $z = 1+2i$,

   д) $p(z) = z^5 + z^4 + z^3 - z^2 - z - 1$, если известен корень $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ кратности 2

7) Найти многочлен со старшим коэффициентом 1 наименьшей степени, если известно, что он имеет корни: $-1-i$ кратности 1, i кратности 2

   а) над $\mathbb{C}$,

   б) над $\mathbb{R}$.

⚠ 8) ТР N3