Лекция №10.
Преобразование Лапласа.

Определение

Функцией оригиналом будем называть любую функцию $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, определенную на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ и удовлетворяющую следующим условиям:
1) $f(t)$ – непрерывная или кусочно-непрерывная функция вместе со своими производными до порядка n включительно на всей числовой прямой,
2) $f(t) = 0$ для $\forall t < 0$,
3) $\exists$ постоянные $M > 0$, $a \geqslant 0$ такие, что для $\forall t > 0$ справедлива оценка $|f(t)| \leqslant Me^{at}$.

Определение

Показателем роста функции-оригинала $f(t)$ называется число $\alpha = \inf a$ для которых выполняется оценка из пункта 3.

Для ограниченных функций будем считать, что $\alpha = 0$.

Условия 1) – 3) выполняются для большинства функций f, описывающих физические процессы.
Простейшей функцией-оригиналом является функция Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Пример

Функция

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ \frac{1}{t}, & t > 0 \end{cases}$$

не является функцией-оригиналом, так как не выполняется условие 1).
Функция

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ e^{t^2}, & t > 0 \end{cases}$$

не является функцией-оригиналом, так как не выполняется условие 3).

Замечание

Функции для которых выполнены условия 1) *и* 3)*, но не выполнено условие* 2) *легко становятся функциями-оригиналами при домножении на функцию Хэвисайда. Очень часто этот множитель опускают для сокращения записи.*

Определение

Преобразованием Лапласа (изображением по Лапласу) функции-оригинала $f(t)$ называется функция комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая соотношением

$$F(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Связь между функциями $f(t)$ и $F(p)$ обозначается одним из способов $f(t) \risingdotseq F(p)$ или $F(p) = L(f(t))$.

Теорема

Если f – оригинал с показателем роста α, то функция $F(p)$ определена в полуплоскости $P = \{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \alpha\}$ и является в ней аналитической функцией.

Доказательство.

Для доказательства существования функции $F(p)$ надо показать сходимость несобственного интеграла

$$|F(p)| = \left| \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} |e^{-pt} f(t)| dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} |e^{-pt}||f(t)| dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re} pt} |f(t)| dt \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re} pt} e^{(\alpha+\varepsilon)t} dt = M \int\limits_0^{+\infty} e^{(-\operatorname{Re} p+\alpha+\varepsilon)t} dt \leqslant \infty. \quad (1)$$

Аналогично можно показать раномерную сходимость формально продифференцированного интеграла

$$|F'(p)| = \left|\int\limits_0^{+\infty} te^{-pt}f(t)dt\right| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} |te^{-pt}f(t)|dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} t|e^{-pt}||f(t)|dt = \int\limits_0^{+\infty} te^{-\operatorname{Re}pt}|f(t)|dt \leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_0^{+\infty} te^{-\operatorname{Re}pt}e^{(\alpha+\varepsilon)t}dt = M\int\limits_0^{+\infty} te^{(-\operatorname{Re}p+\alpha+\varepsilon)t}dt \leqslant \infty. \quad (2)$$

□

Теорема (единственности)

Если две непрерывные функции-оригинала $f(t)$ и $g(t)$ имеют одно и тоже изображение $F(p)$, то они тождественно равны.

Теорема

Если $f(t)$ и $g(t)$ оригиналы с показателями роста α_1 и α_2 соответственно, то $f(t) + g(t)$ и $f(t)g(t)$ являются оригиналами и их показатели роста не превосходят $\max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ и $\alpha_1 + \alpha_2$ соответственно.

Основные свойства преобразования Лапласа.

1) *Свойство однородности.* Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha$, и $a \in \mathbb{C}$, то

$$af(t) \risingdotseq aF(p).$$

Действительно:

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt}(\alpha f(t))dt = \alpha \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = \alpha F(p).$$

2) *Свойство линейности.* Если $f_j \risingdotseq F_j$ в $\operatorname{Re} p > \alpha_j$ $(j = \overline{1,n})$, $\mu_j \in \mathbb{C}$, то

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j f_j \risingdotseq \sum_{j=1}^{n} \mu_j F_j$$

в $\operatorname{Re} p > \max\limits_j \alpha_j$.

Действительно:

$$\int_0^\infty e^{-pt} \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j f_j \right) dt = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \int_0^\infty e^{-pt} f_j(t) dt = \sum_{j=1}^{n} \mu_j F_j(p).$$

3) *Свойство подобия.* Если $f \risingdotseq Fp$, $\operatorname{Re} p > \alpha$, то $\forall \beta > 0$

$$f(\beta t) \risingdotseq \frac{1}{\beta} F(\frac{p}{\beta}).$$

Действительно: Сделаем замену $\beta t = s$ в интеграле

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(\beta t) dt = \frac{1}{\beta} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{ps}{\beta}} f(s) ds = \frac{1}{\beta} F\left(\frac{p}{\beta}\right).$$

4) *Теорема запаздывания.* Если $f \risingdotseq F$ и $\tau > 0$, то

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p).$$

Действительно: Сделаем замену $t - \tau = s$ в интеграле

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t-\tau)dt = \int\limits_\tau^\infty e^{-pt} f(t-\tau)dt = \int\limits_0^\infty e^{-p(s+\tau)} f(s)ds =$$

$$= e^{-p\tau} \int\limits_0^\infty e^{-ps} f(s)ds = e^{-p\tau} F(p).$$

5) *Теорема опережения.* Если $f \risingdotseq F$ и $\tau > 0$, то

$$f(t+r) \risingdotseq e^{pr}\left(F(p) - \int\limits_0^r e^{-pt} f(t)dt\right).$$

Действительно: Сделаем замену $t + \tau = s$ в интеграле

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t+\tau)dt = \int\limits_\tau^\infty e^{-p(s-\tau)} f(s)ds = e^{p\tau}\int\limits_\tau^\infty e^{-ps} f(s)ds =$$

$$= e^{p\tau}\int\limits_0^\infty e^{-ps} f(s)ds - e^{p\tau}\int\limits_0^\tau e^{-ps} f(s)ds =$$

$$= e^{p\tau}\left(F(p) - \int\limits_0^\tau e^{-pt} f(t)dt\right).$$

Следствие.

Если f – T-переодическая функция, то

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int\limits_0^T e^{-pt} f(t) dt$$

Действительно:

$$f(t) \risingdotseq F(p), \quad f(t+T) \risingdotseq e^{pT} \left(F(p) - \int\limits_0^T e^{-pt} f(t) dt \right),$$

$$f(t) = f(t+T) \Rightarrow \ F(p) = e^{pT} \left(F(p) - \int\limits_0^T e^{-pt} f(t) dt \right) \Rightarrow$$

$$F(p)(1 - e^{pT}) = -e^{pT} \int\limits_0^T e^{-pt} f(t) dt \Rightarrow$$

$$F(p) = \frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1} \int\limits_0^T e^{-pt} f(t) dt \Rightarrow$$

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int\limits_0^T e^{-pt} f(t) dt.$$

6) *Теорема смещения.* Если $f \risingdotseq F$, $p_0 \in \mathbb{C}$, то

$$e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p - p_0).$$

Действительно:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-pt} e^{p_0 t} f(t) dt = \int\limits_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} f(t) dt = F(p - p_0).$$

7) *Теорема о дифференцировании оригинала.* Если $f \risingdotseq F$ и функции $f^{(k)}$, $k = \overline{1,n}$ являются функциями-оригиналами, то

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

где $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t \to 0+} f^{(k)}(t)$, $k = \overline{1,n-1}$ в общем случае.

Действительно:

$$f'(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-pt} f'(t) dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^\infty + \\ + p \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = pF(p) - f(0),$$

предположим, что

$$f^{(n-1)}(t) \;\; \risingdotseq \;\; p^{n-1} F(p) \; - \; p^{n-2} f(0) \; - \; p^{n-3} f'(0) \; - \; \ldots \; - \; f^{(n-2)}(0),$$

докажем для $f^{(n)}(t)$.

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-pt} f^{(n)}(t) dt =$$

$$= e^{-pt} f^{(n-1)}(t) \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-pt} f^{(n-1)}(t) dt = -f^{(n-1)}(0) + pL(f^{(n-1)}(t)) =$$

$$= p \left(p^{n-1} F(p) - p^{n-2} f(0) - p^{n-3} f'(0) - \ldots - f^{(n-2)}(0) \right) - f^{(n-1)}(0) =$$

$$= p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{n-1)}(0).$$

8) *Теорема о дифференцировании изображения.* Если

$$f(t) \risingdotseq F(p), \text{ то } F^{(n)}(p) \fallingdotseq (-1)^n t^n f(t).$$

Действительно:

$$\frac{d^n \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt}{dp^n} = (-1)^n \int\limits_0^\infty t^n e^{-pt} f(t)dt \fallingdotseq (-1)^n t^n f(t).$$

9) *Теорема об интегрировании оригинала.* Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}.$$

Действительно:
Обозначим через

$$h(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau.$$

Тогда

$$h'(t) = f(t), \quad h(0) = 0.$$

Следовательно по теореме о дифференцировании оригинала будем иметь

$$F(p) = L(f(t)) = L(h'(t)) = pL(h(t)) - h(0) = pL(h(t)),$$

значит

$$L\left(\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{F(p)}{p}.$$

10) *Теорема об интегрировании изображения.* Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$, в $\mathrm{Re}(p) > \alpha$ и интеграл $\int_p^\infty F(q)dq$ сходится в полуплоскости $P = \{p \in \mathbb{C} \big| \mathrm{Re}(p) > \alpha_1 > \alpha\}$, тогда

$$\int_p^\infty F(q)dq \fallingdotseq \frac{f(t)}{t}.$$

Действительно:

$$\int\limits_p^\infty F(q)dq = \int\limits_p^\infty \int\limits_0^\infty e^{-qt} f(t)dtdq = \int\limits_0^\infty \int\limits_p^\infty e^{-qt} f(t)dqdt =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\left(\int\limits_p^\infty e^{-qt}dq\right)dt = \int\limits_0^\infty f(t)\left(\frac{e^{-qt}}{t}\Big|_p^\infty\right)dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-pt}\frac{f(t)}{t}dt \fallingdotseq \frac{f(t)}{t}.$$

Следствие.

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int\limits_0^{\infty} F(q) dq.$$

Действительно: Для доказательства последнего тождества достаточно рассмотреть равенство

$$\int\limits_p^{\infty} F(q) dq = \int\limits_0^{\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt$$

при $p = 0$.

Примеры

Преобразования Лапласа для наиболее часто встречающихся в нашем курсе функций.

$$\theta(t) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt = -\frac{e^{-pt}}{p}\bigg|_0^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}$$

$$e^{\alpha t} \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}e^{\alpha t}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t}\,dt = -\frac{e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha}\bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{p-\alpha}\right) = \frac{1}{p-\alpha}$$

этот же результат можно получить используя Теорему смещения

$$e^{\alpha t} = e^{\alpha t}\theta(t) \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}$$

Примеры

Преобразования Лапласа для наиболее часто встречающихся в нашем курсе функций.

$$\cos t \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} \cos t \, dt = \underbrace{-\frac{e^{-pt}}{p} \cos t \Big|_0^{+\infty}}_{=1/p} - \frac{1}{p} \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} \sin t \, dt =$$

$$= \frac{1}{p} \underbrace{+ \frac{e^{-pt}}{p^2} \sin t \Big|_0^{+\infty}}_{=0} - \frac{1}{p^2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} \cos t \, dt$$

$$L(\cos t) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} L(\cos t) \Rightarrow L(\cos t) = \frac{p}{p^2+1}$$

$$\frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} L(\sin t) \Rightarrow L(\sin t) = \frac{1}{p^2+1}$$

Примеры

Преобразования Лапласа для наиболее часто встречающихся в нашем курсе функций.

$$\text{Из теоремы подобия } f(\beta t) \risingdotseq \frac{1}{\beta} F\left(\frac{p}{\beta}\right)$$

$$\cos\beta t \risingdotseq \frac{1}{\beta}\frac{p/\beta}{\frac{p^2}{\beta^2}+1} \Rightarrow \cos\beta t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\beta^2}$$

$$\sin\beta t \risingdotseq \frac{1}{\beta}\frac{1}{\frac{p^2}{\beta^2}+1} \Rightarrow \sin\beta t \risingdotseq \frac{\beta}{p^2+\beta^2}$$

$$\text{Из теоремы смещения } e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p-p_0)$$

$$e^{\alpha t}\cos\beta t \risingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$e^{\alpha t}\sin\beta t \risingdotseq \frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$$

Примеры

Преобразования Лапласа для наиболее часто встречающихся в нашем курсе функций.

По теореме о дифференцировании изображения $F^{(n)}(p) \fallingdotseq (-1)^n t^n f(t)$

$$t^n = (-1)^n(-1)^n t^n \theta(t) \risingdotseq (-1)^n \Theta^{(n)}(p) = (-1)^n \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} =$$

$$= (-1)^n \frac{(-1)^n n!}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Из теоремы смещения $e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p - p_0)$

$$e^{\alpha t} t^n \risingdotseq \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$$

Таблица основных преобразований Лапласа

$$\theta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$$

$$e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}$$

$$\cos\beta t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\beta^2}$$

$$\sin\beta t \risingdotseq \frac{\beta}{p^2+\beta^2}$$

$$e^{\alpha t}\cos\beta t \risingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$e^{\alpha t}\sin\beta t \risingdotseq \frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$e^{\alpha t}t^n \risingdotseq \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$$