Лекция №2.
Методы решения дифференциальных уравнений 1-го порядка. Основные классы уравнений 1-го порядка, интегрируемых в квадратурах.

1. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения с разделяющимися переменными это уравнения, которые могут быть записаны в виде

$$y' = f(x)g(y). \tag{1}$$

Функции $f(x)$, $g(y)$ - непрерывные. Для любого y_1 при котором $g(y_1) = 0$ функция $y(x) \equiv y_1$ является решением уравнения (1). В окрестности каждой точки, где $g(y) \neq 0$, разделим обе части уравнения (1) на $g(y)$

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x). \tag{2}$$

В силу непрерывности обеих частей равенства (2) можно проинтегрировать его по dx

$$\int \frac{y'}{g(y)}\, dx = \int f(x)\, dx. \tag{3}$$

Сделав в интеграле из левой части равенства (3) замену переменных по формуле $y'dx = dy$, получим

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx. \tag{4}$$

Обозначив первообразные в левой и правой частях равенства (4) через $H(y)$ и $F(x)$ соответственно, получим

$$H(y) = F(x) + C. \tag{5}$$

В силу непрерывности функция $g(y)$ сохраняет знак на любом интервале где $g(y) \neq 0$. Отсюда следует, что функция $H(y)$ – непрерывна и монотонна и следовательно имеет обратную функцию H^{-1}. Таким образом решение уравнения (1) может быть записано в виде

$$y(x) = H^{-1}(F(x) + C).$$

Решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, в случае если $g(y_0) \neq 0$, на интервале где $g(y) \neq 0$ может быть получено из формулы (4) в виде

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dz}{g(z)} = \int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau.$$

Пример

Решим уравнение

$$3y^2y' + 16x = 2xy^3$$

$$3y^2y' = 2xy^3 - 16x$$

$$y' = \frac{2x(y^3-8)}{3y^2}$$

$$y' = \underbrace{2x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{(y^3-8)}{3y^2}}_{g(y)}$$

$y \equiv 2$ – *решение, далее считаем* $y \neq 2$

$$\frac{3y^2y'}{y^3-8} = 2x$$

$$\int \frac{3y^2y'}{y^3-8}\,dx = \int 2x\,dx$$

$$\int \frac{3y^2}{y^3-8}\,dy = \int 2x\,dx$$

Пример

Решим уравнение

$$3y^2y' + 16x = 2xy^3$$

$$\int \frac{3y^2}{y^3-8}\,dy = \int 2x\,dx$$

$$\int \frac{d(y^3-8)}{y^3-8} = \int 2x\,dx$$

$$\ln|y^3-8| = x^2 + \ln C, \quad C > 0$$

$$|y^3-8| = Ce^{x^2}$$

$$y^3-8 = \pm Ce^{x^2}$$

$$y^3-8 = Ce^{x^2}, \quad C \text{ – любое}$$

$$y^3 = 8 + Ce^{x^2}$$

$$y = \sqrt[3]{8+Ce^{x^2}}$$

2. Однородные уравнения и уравнения сводящиеся к однородным.

Однородными называются уравнения, которые могут быть записаны в виде

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{6}$$

или в виде

$$y' = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}, \tag{7}$$

где $M(x,y)$, $N(x,y)$ – однородные функции одной и той же степени. Функция $M(x,y)$ называется однородной функцией степени p если $\forall x, y$, $\forall k > 0$ $M(kx, ky) = k^p M(x, y)$.

Пример

$x^3y + x^2y^2 - y^4$ – *однородная функция 4-й степени.*

Замечание

Записи уравнения в виде (6) и (7) являются равносильными. Действительно уравнение (6) можно записать как отношение двух однородных функций 0-й степени

$$y' = \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{1},$$

а правую часть уравнения (7) преобразовать к виду

$$\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = \frac{M\left(x \cdot 1, \frac{y}{x} \cdot x\right)}{N\left(x \cdot 1, \frac{y}{x} \cdot x\right)} = \frac{x^p M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{x^p N\left(1, \frac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Замечание

Однородные уравнения не меняются при замене x на kx, y на ky.

Однородные уравнения сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой неизвестной функции $y(x)$ на неизвестную функцию $z(x)$ по формуле

$$y = xz,$$

y' при этом заменяется на

$$y' = z'x + z.$$

Уравнение (6) после такой замены может быть записано в виде

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}.$$

Пример

Решим уравнение

$$y' = \frac{x+2y}{x}$$

$$M(x,y) = x + 2y \text{ – \textit{однородная функция 1-й степени}}$$

$$N(x,y) = x \text{ – \textit{однородная функция 1-й степени}}$$

$$y' = \underbrace{1 + 2 \cdot \frac{y}{x}}_{f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\text{\textit{Замена:} } y = x \cdot z(x)$$

$$y' = z'x + z$$

$$z'x + z = 1 + 2z$$

$$z'x = 1 + z$$

$$z \equiv -1 \text{ – \textit{решение, далее считаем} } z \neq -1$$

$$\frac{z'}{1+z} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{z'}{1+z}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx$$

Пример

Решим уравнение

$$y' = \frac{x+2y}{x}$$

$$\textit{Замена: } y = x \cdot z(x)$$

$$\int \frac{z'}{1+z}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{dz}{1+z} = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln|1+z| = \ln|x| + \ln C$$

$$1 + z = Cx$$

$$z = Cx - 1$$

$$\frac{y}{x} = Cx - 1$$

$$y = Cx^2 - x$$

Перейдем к изучению класса уравнений вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right). \tag{8}$$

Возможны несколько случаев.
Случай а)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Перейдем к неизвестной функции $z(x)$ по формуле

$$a_1x + b_1y = z(x).$$

В силу условия (9) $\exists\lambda$ такое, что

$$a_2x + b_2y = \lambda z.$$

После такой замены уравнение (8) может быть записано в виде

$$z' = a_1 + b_1 f\left(\frac{z + c_1}{\lambda z + c_2}\right).$$

Последнее уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

Пример

Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{x-y-1}{x-y-2}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\textit{Замена: } z = x - y - 2$$

$$z' = 1 - y' \quad y' = 1 - z'$$

$$1 - z' = \frac{z+1}{z} \quad 1 - z' = 1 + \frac{1}{z}$$

$$z' = -\frac{1}{z} \quad zz' = -1$$

$$\int zz'\,dx = \int -1\,dx \quad \int z\,dz = -\int dx$$

$$\frac{z^2}{2} = -x + \frac{C}{2}$$

$$z^2 = -2x + C$$

$$(x-y-2)^2 + 2x = C$$

Случай b)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad c_1 = c_2 = 0. \tag{10}$$

В этом случае поделим числитель и знаменатель в аргументе функции f из уравнения (8) на x, получим

$$f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{y}{x}}{a_2 + b_2\frac{y}{x}}\right) = f_1\left(\frac{y}{x}\right).$$

С учетом полученного соотношения уравнение (8) можно записать в виде

$$y' = f_1\left(\frac{y}{x}\right).$$

Последнее уравнение является однородным.

Случай c)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad c_1^2 + c_2^2 \neq 0. \tag{11}$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, & (12) \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0. & (13) \end{cases}$$

В силу условия (11) система (12), (13) имеет единственное решение

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0. \end{cases}$$

Точка (x_0,y_0) – точка пересечения прямых (12), (13). Перенесем начало координат в эту точку, то есть сделаем замену переменных по формулам

$$\begin{cases} x = u + x_0, \\ y = v + y_0. \end{cases}$$

В новой системе координат (u,v) прямые (12), (13) запишутся в виде

$$\begin{cases} a_1 u + b_1 v = 0, \\ a_2 u + b_2 v = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $y'_x = v'_u$ уравнение (8) примет вид

$$v'_u = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right),$$

то есть будет сведено к случаю b).

Пример

Решим уравнение

$$y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\begin{cases} y+2=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = -2 \end{cases}$$

$$\text{\textit{Замена:}} \begin{cases} x = u+3 \\ y = v-2 \end{cases}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} \qquad \frac{y+2}{x+y-1} = \frac{v}{u+v}$$

$$\frac{dv}{du} = 2\left(\frac{v}{u+v}\right)^2$$

$$\text{\textit{Замена:}}\ v = uz(u) \qquad v' = uz' + z$$

$$uz' + z = 2\left(\frac{uz}{u+uz}\right)^2$$

Пример

Решим уравнение

$$y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2 \quad \textit{Замена:} \begin{cases} x = u+3 \\ y = v-2 \end{cases} \qquad \textit{Замена: } v = uz(u)$$

$$uz' + z = 2\left(\frac{uz}{u+uz}\right)^2$$

$$uz' = \frac{2z^2}{(1+z)^2} - z \quad uz' = \frac{2z^2 - z(1+2z+z^2)}{(1+z)^2}$$

$$uz' = \frac{-z(1+z^2)}{(1+z)^2}$$

$$z \equiv 0 \text{ – решение, далее считаем, что } z \neq 0$$

$$\frac{(1+z)^2}{z(1+z^2)} z' = -\frac{1}{u} \quad \frac{(1+z^2+2z)}{z(1+z^2)} z' = -\frac{1}{u}$$

$$\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{1+z^2}\right) z' = -\frac{1}{u}$$

$$\int \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{1+z^2}\right) z'\, du = -\int \frac{1}{u}\, du$$

Пример

Решим уравнение

$$y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2 \quad \textit{Замена:} \begin{cases} x = u+3 \\ y = v-2 \end{cases} \qquad \textit{Замена: } v = uz(u)$$

$$\int\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{1+z^2}\right)z'\,du = -\int\frac{1}{u}\,du$$

$$\int\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{1+z^2}\right)dz = -\int\frac{1}{u}\,du$$

$$\ln|z| + 2\operatorname{arctg} z = -\ln|u| + \ln C$$

$$ze^{2\operatorname{arctg} z} = \frac{C}{u} \quad uze^{2\operatorname{arctg} z} = C$$

При $\mathrm{C} = 0$ *данная формула содержит решение* $z \equiv 0$

$$ve^{2\operatorname{arctg}\frac{v}{u}} = C$$

$$(y+2)e^{2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}} = C$$