Математический анализ ~~1-й курс~~

Костин Сергей Вячеславович

Семинар 1 (01.09.16)

Тема 1 Элементы теории множеств и мат. логики

Основные ~~ми~~ числовые мн-ва

$\mathbb{N}$ = {1, 2, 3, ...} - множество нат. чисел

natural - натуральный

N-контурный шрифт

составные

N {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ...}

простые

P = {2, 3, 5, 7, 11, ...} - множество простых чисел.

prime - простой (англ.

$\mathbb{Z}$ {-3; -1, 0, 1, 2 ...} - мн-во целых чисел.

die Zahl - число (нем.)

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ - множество рац. чисел

quotient - отн-е (англ.

1

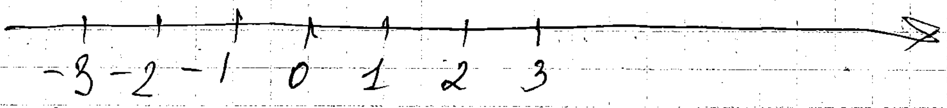
$\mathbb{I}$ - множество иррац. чисел.
irrational - иррациональные
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ - множество действ. чисел (= вещест.)
real - действ.
$\mathbb{C}$ - множество комплексные чисел
complex - комплексный (англ.
$\mathbb{H}$ - множество кватернионов.
Hamilton - Гамильтон (Ирландский математик) в курсе алг.

$\mathbb{P} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ - тело

поле числа, поле, поле

кватернионы (для них $ab \neq ba$)

числовая прямая



Принадлежность элемента множеству $x \in A$
$x \notin A$

Пример

1) $7 \in P$ – И 3) $8 \in N$ – И 5) $(-8) \in \mathbb{Z}$ – И

2) $8 \in P$ – Л 4) $(-8) \in N$ – Л 6) $(-8) \in \mathbb{Q}$ – И

7) $2{,}3 \in \mathbb{Z}$ Л

8) $2{,}3 \in \mathbb{Q}$ И

9) $2{,}(3) \in \mathbb{Q}$ И

10) $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ Л

11) $\sqrt{3} \in I$ И

12) $\sqrt{3} \in R$ И

Равенство множеств

Включение одного мн-ва в другое

Мн-во A и B наз-ся равными, если они состоят из одних и тех же переменных.

Символическая запись

$(A = B) \Leftrightarrow ((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))$

Мн-во A включено во мн. B, если каждый (3) эл-т мн. A является эл-ом мн-ва В.

С.З

$(A \subset B) \Leftrightarrow ((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$

пишут $B \supset A$

Если $A \subset B$, то А-подмножество мн-ва В, а В-надмножеством мн-ва А.

$\varnothing$-пустое мн.-во.

V-универсальное множество

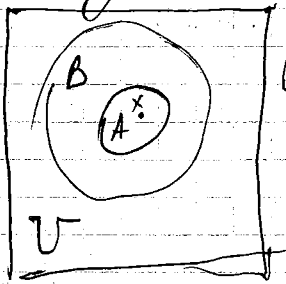


диаграмма Эйлера-Венна

<u>Задача</u> А-множество всех квадратов на пл-ти Q.

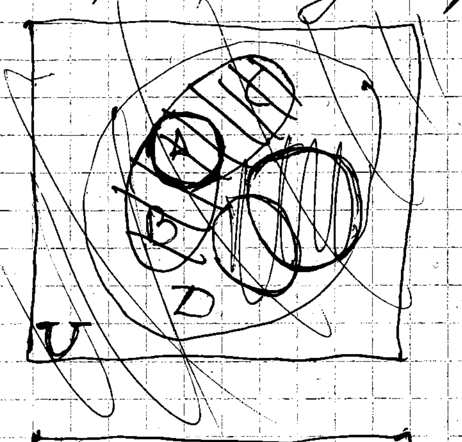
В-множество всех пр-ков.

С-мн-во всех ромбов.

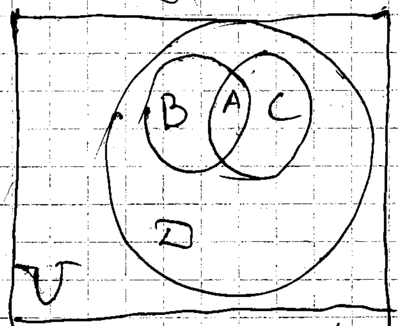
D-множество всех параллелограммов

V-множество всех 4-х уг.

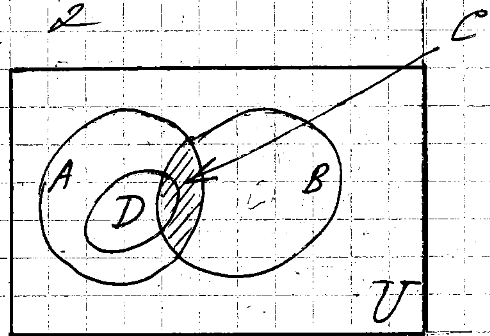
Построить диаграмму Эйлера Венна



A - □
B - ▭
C - ◇
D - ▱
V - ◻



Задача A - мн-во всех N чисел, которые дел-ся 2
B - на 3
C - на 6
D - дел. на 8
V -



Два способа задания мн-ва

1) Задание (5) мн-ва путем перечисления его ≥1.

$A\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$

$A\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$

$N\{1, 2, 3, \dots\}$

2) Зад-е мн-ва путем ук-я над мн-ва ее характ. условий

$A = \{x \in V \mid P(x)\}$

«такие что»

«Мн-ва x принадл. V, таких, что имеет место $P(x)$»

$P(x)$ — утверждение зависящее от переменной x (предикат)

<u>Задача</u> $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{x \in V \mid x < 4\} = \{1, 2, 3\}$

$B = \{x \in V \mid x > 8\} = \{9\}$

$C\{x \in V \mid x \neq 11\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$D\{x \in V \mid x > 10\} = \varnothing$ 6

$E = \{x \in U \mid x \,\vdots\, 3\} = \{3, 6, 9\}$

$F = \{x \in U \mid x \mid 3\} = \{1, 3\}$

$G = \{x \in U \mid x \,\vdots\, 16\} = \varnothing$

$H = \{x \in U \mid x \mid 10\} = \{2, 5\}$

$m \,\vdots\, n$ — m делится на n

m кратно n

$m \mid n$ — n делится на m

↳ «m делит n»

[redacted]

Операция — Отношение

$2 + 5$ — $2 < 5$ – ист

$2 - 5$ — $5 < 2$ – Л

$2 \cdot 5$

$2 : 5 = \frac{2}{5}$ — $6 \,\vdots\, 2$

бинарные операции

2^{-1} ← унарная операция — $A \subset B$

$A \vee B$ ← бинарная операция.

<u>Задача</u>

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 \,\vdots\, x\} = \{\cancel{1, 2, 5}\ 1, 2, 5, 10\}$

$B = \{x \in P \mid 10 \,\vdots\, x\} = \{2, 5\}$

$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 10 \,\vdots\, x\} = \{\cancel{-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10}\}$
$\{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$

$D = \{x \in N \mid x \vdots 10\} = \{10, 20, 30 \ldots\}$

$E = \{x \in P \mid x \vdots 10\} = \varnothing$

$F = \{x \in Z \mid x \vdots 10\} = \{\pm 10, \pm 20, \pm 30, \ldots\}$

Задача

$A = \{7, 8, \{7, 9\}, \{\varnothing\}\}$

1) $7 \in A$ И
2) $9 \in A$ Л
3) $\{7\} \in A$ Л
4) $\{9\} \in A$ Л
5) $\{7, 8\} \in A$ Л
6) $\{7, 9\} \in A$ И
7) $7 \subset A$ Л
8) $\{7\} \subset A$ И
9) $\{9\} \subset A$ Л
10) $\{7, 8\} \subset A$ И
11) $\{7, 9\} \subset A$ Л
12) $\{\{7\}\} \subset A$ Л
13) $\{\{9\}\} \subset A$ Л
14) $\{\{7, 8\}\} \subset A$ Л
15) $\{\{7, 9\}\} \subset A$ И
16) $\varnothing \in A$ Л
17) $\{\varnothing\} \in A$ И
18) $\varnothing \subset A$ И
19) $\{\varnothing\} \subset A$ Л
20) $\{\{\varnothing\}\} \subset A$ И

В множестве все эл различны, а порядок эл. не важен.
$\{1,2,3\}=\{3,2,1\}=\{1,2,2,3\}$.
$|A|$ - кол-во элементов в мн-ве A.

Задача
$A=\{1,2,3\}$ $|A|=3$
$B=\{-7\}$ $|B|=1$
$C=\varnothing$ $|C|=0$
$D=\mathbb{R}$ $|D|=$ ~~б~~бесконечность

Задача Выписать все подмножества множества $A=\{1,2,3\}$.
$\underbrace{\{1\},\{2\},\{3\}}_{\text{одноэл. подмн.}},\underbrace{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}}_{\text{2-ух эл. подмн.}},\varnothing,\underbrace{\{1,2,3\}}_{\text{несобственные подмн}}$

собственные подмн-а мн-а A (отл-ые от A)

Если $|A|=n$, то мн. A содержит 2^n различных подмножеств.

Задача сущ.-ет ли мн-ва A и B такие, что $A\subset B$, $A\in B$

9

$A = \{\varnothing\}$ $A \subset B$ и

$B = \{1, 2, 3, \{\varnothing\}\}$ $A \in B$ и

Высказывания и предикаты

Высказывание – утверждение, которое либо истинно, либо ложно.

Примеры

1) Сумма углов любого Δ-ка равна 180°
2) Волга впадает в Черное море.
3) Существуют внеземные цивилизации

Не яв-ся высказываниями

1) Число 0,0001 очень мало.
2) $x > 2$.
3) Летайте самолетами аэрофлота!
4) Чему равно $2+3$?

Утверждение $P(x)$, зависящее от переменной $x \in V$, ~~которой~~ которое при подстановке вместо x любого конкретного знач. $x_0 \in V$ превращается в высказывание, называется <u>предикатом</u>

Примеры предикатов.

1) В данной группе x студентов
$V = \{1, 2, 3, \dots 100\}$.

2) Река x впадает в Черное море.
$V = \{$Волга, Днепр, Дунай, Енисей, Дон$\}$

И И

Л Л

3) $x > 2$
V — любое множество действ. ч.

<u>Логическая символика</u>

$\neg P$ $\bar{P}$ — отрицание.

$P \wedge Q$ (коньюнкция)
— «P и Q» —
$P \vee Q$ (дизъюнкция)
— «P или Q»
$P \Rightarrow Q$ (лог. следование)
из P следует Q.
Если истина P, то ист. Q.
«P является достаточным условием для Q»
«Q является необх. условием для P»
$P \Leftrightarrow Q$ (равносильность)
«P равносильно Q».
«P истина, тогда и только тогда Q — истина»
«P — являеста необх и дост. усл-ем для Q»
«Q является необх и дост. усл-ем для P»

Кванторы

$\overline{A} \vee B$ $\quad 1 \to 0 = 0$.

$(\forall x \in V): P(x)$ - для любого $x \in V$ истинно $P(x)$

$\forall$ - квантор всеобщности

$(\exists x \in V): P(x)$ - существует $x \in V$, для кот. истинно $P(x)$

$\exists$ - квантор сущ - я.

$(\exists! x \in V): P(x)$ - сущ-ет ед-ный $x \in V$, для кот истинно $P(x)$.

$\exists!$ - квантор сущ-я и единственности.

Задача: Определить истинно или ложно данное утв.

1) $(x>3) \Rightarrow (x>2)$ И
2) $(x>2) \Rightarrow (x>3)$ Л
3) $(x^2>9) \Rightarrow (x>3)$ Л.
4) $(x>3) \Rightarrow (x^2>8)$ И
5) $(x\in[2,5]) \Leftrightarrow (x\geq 2)\vee(x\leq 5)$ Л.
6) $(x\in[2,5]) \Leftrightarrow (x\geq 2)\wedge(x\leq 5)$ - И

7) $(x^2=49) \Leftrightarrow (x=7) \vee (x=-7)$ - и

8) $(x^2=49) \Rightarrow (x=7)$ - Л

9) $(x^3=64) \Rightarrow (x=4)$ - И

10) $(x^3=64) \Leftrightarrow (x=4)$ - И

11) $(\forall x \in N): x^2>0$ - И

12) $(\forall x \in Z): x^2>0$ - Л

13) $(\exists x \in N): x^2=16$ - И

14) $(\exists x \in P): x^2=16$ - Л

15) $(\exists! x \in N): x^2=25$ - И

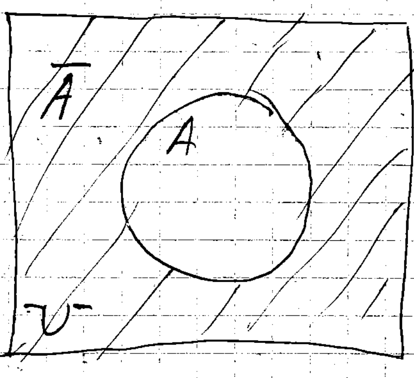
16) $(\exists! x \in Z): x^2=25$ - Л

17) $(\exists x \in Q): x^2=37$ - Л

18) $(\exists x \in R): x^2=37$ - И

Семинар 2 (08.09.16)

Операции над мн-ами



$\bar{A} = \{x \in V \mid x \notin A\}$ — дополнение мн-ва A [до множ-ва V]