МИРЭА – Российский технологический университет
(РТУ МИРЭА)

Институт кибернетики
Кафедра высшей математики

Типовой расчет

по методам математического анализа

Вариант 26

1	2	3	4	5	6	7	8	9
+	+	+	+	+	+	+	+	+

Учебная группа: КМБО-00-20
Студент: Анонимус
Преподаватель: Костин С.В.

Москва 2020

Содержание

Задача 1.

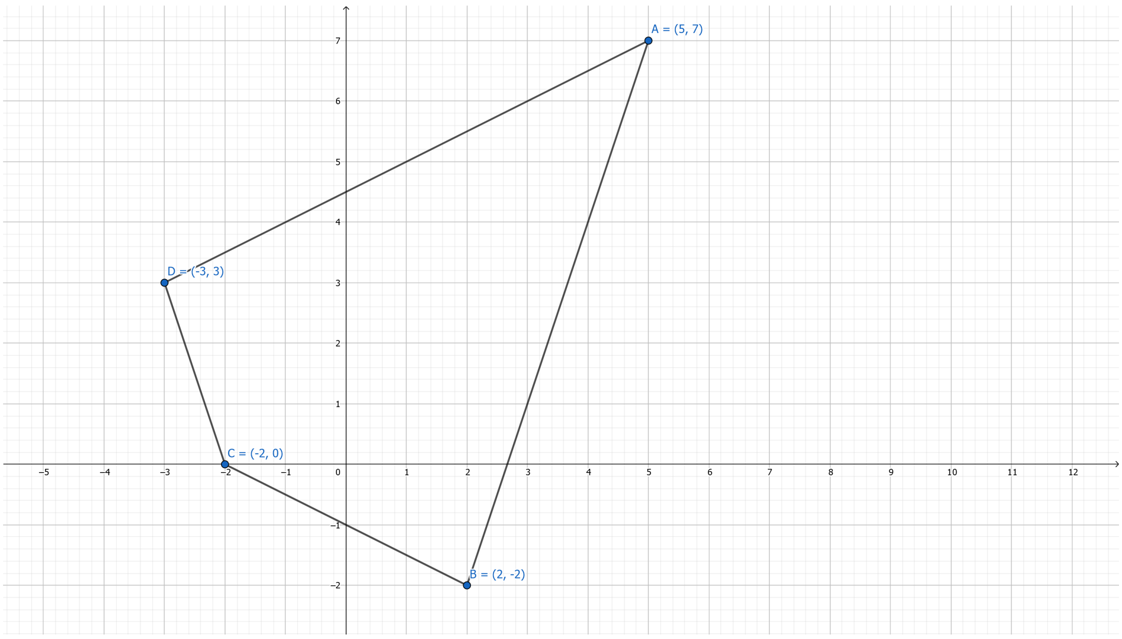
Условие:

Даны точки A, B, C, D :

$$A = (5;7), B = (2;-2), C = (-2;0), D = (-3;3).$$

1) Доказать, что $ABCD$ - выпуклый четырёхугольник.
2) Определить, можно ли в четырёхугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Решение:



1) Найдём векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} = (-3;-9), \overrightarrow{AD} = (-8;-4), \overrightarrow{AC} = (-7;-7)$

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ неколлинеарны, а значит, образуют базис на плоскости. Разложим вектор $\overrightarrow{AC}$ по этому базису: $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}$. Получаем систему линейных уровнений

$$\begin{cases} -3\alpha - 8\beta = -7 \\ -9\alpha - 4\beta = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9\alpha + 24\beta = 21 \\ -9\alpha - 4\beta = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20\beta = 14 \\ -9\alpha - 4\beta = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{7}{10} \\ -9\alpha - 4\cdot\frac{7}{10} = -7 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{7}{10} \\ \alpha = \frac{7}{15} \end{cases}$ $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = \frac{7}{6} > 1 \Rightarrow$ четырёхугольник выпуклый.

2) Найдём векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$:

$\overrightarrow{AB} = (-3;-9)$, $\overrightarrow{BC} = (-4;2)$, $\overrightarrow{CD} = (-1;3)$, $\overrightarrow{DA} = (-8;-4)$

Тогда стороны четырёхугольника $ABCD$ имею следующую длинну

$AB = 3\sqrt{10}, BC = 2\sqrt{5}, CD = \sqrt{10}, DA = 4\sqrt{5}$

Имеем неравенство $AB + CD = 4\sqrt{10} \neq 6\sqrt{5} = BC + DA \Rightarrow$ в четырёхугольник $ABCD$

нельзя вписать окружность.

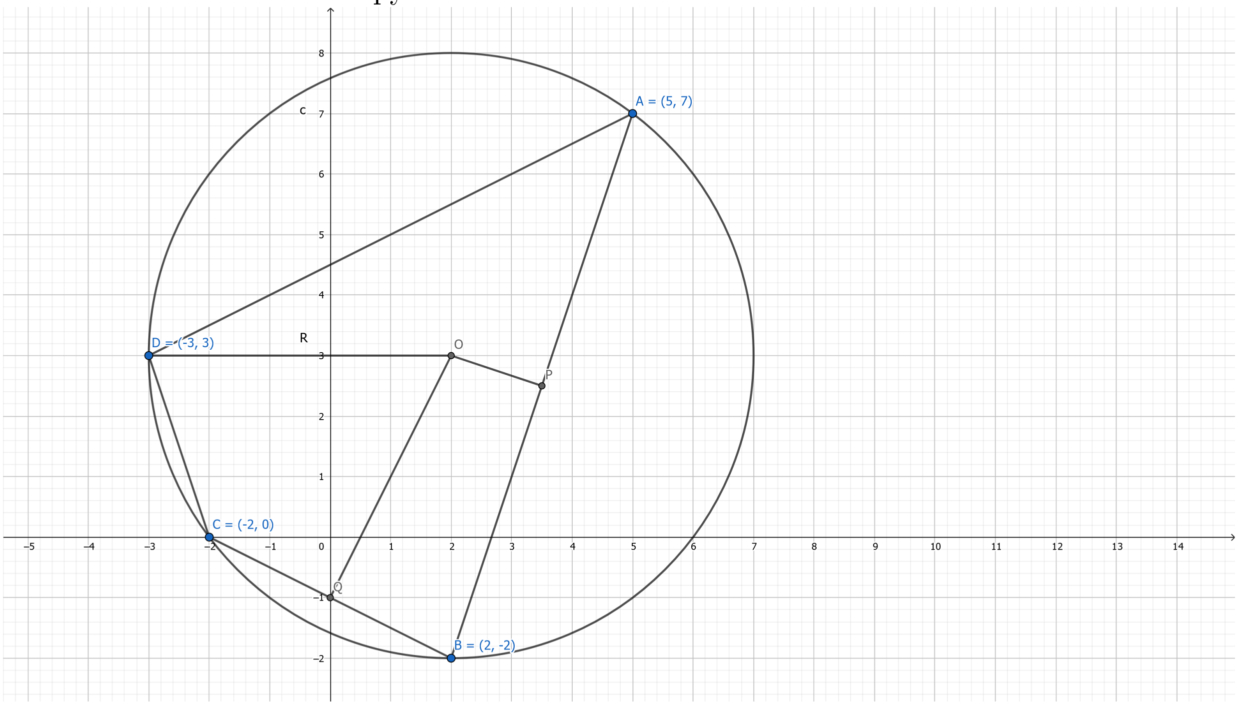
3)Найдём векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{AB}=(-3;-9),\ \overrightarrow{AD}=(-8;-4),\ \overrightarrow{CB}=(4;-2),\ \overrightarrow{CD}=(-1;3)$$

$$\cos\angle BAD=\frac{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}=\frac{-3\cdot(-8)+(-9)\cdot(-4)}{3\sqrt{10}\cdot 4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\angle BCD=\frac{\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)}{|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\frac{4\cdot(-1)+(-2)\cdot(3)}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow \angle BAD+\angle BCD=180^\circ$, четырёхугольник $ABCD$ выпуклый $\Rightarrow$ около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.



Найдём координаты центра O и радиус R этой окружности.

$P=(5-1{,}5;\ 7-4{,}5)=(3{,}5;\ 2{,}5)$ - середина AB,

$Q=(2-2;\ -2+1)=(0;\ -1)$ - серединаBC.

$p\perp\overrightarrow{AB}=(x_0;\ y_0)\Rightarrow -3x_0-9y_0=0$

Пусть $y_0=1\Rightarrow x_0=-3\Rightarrow p=(-3;\ 1)$

$q\perp\overrightarrow{BC}=(x_1;\ y_1)\Rightarrow -4x_1+2y_1=0$

Пусть $y_1=2\Rightarrow x_1=1\Rightarrow q=(1;\ 2)$

p и q - направляющие прямых PO и QO, их уравления:

$$PO=\left\{\frac{x-3{,}5}{-3}=\frac{y-2{,}5}{1}\right\}=\begin{cases}x=-3t+3{,}5\\ y=t+2{,}5\end{cases}$$

$$QO=\left\{\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}\right\}$$

Подстваим в QO x и y из PO:

$$2\,(-3t+3{,}5) = t+2{,}5+1$$
$$-7t = -4{,}5$$
$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow O = (2;\ 3)$$

$\overrightarrow{DO} = (5;\ 0) \Rightarrow R = 5$

Проверка:

$$\left.\begin{array}{l} AO = \sqrt{(2-5)^2+(3-7)^2} = 5 = R \\ BO = \sqrt{(2-2)^2+(3+2)^2} = 5 = R \\ CO = \sqrt{(2+2)^2+(3)^2} = 5 = R \end{array}\right. \Rightarrow \text{верно.}$$

Ответ:

1) $ABCD$ - выпуклый четырёхугольник.

2) В четырёхугольник $ABCD$ нельзя свисать окружность.

3) Около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность с центром в точке $O = (2;\ 3)$ и радиусом $R = 5$.

Задача 2.

Условие:

Даны точки A, B, C, D :

$$A = (2; -2; 1),\ B = (1; -1; -1),\ C = (2; 0; -1),\ D = (-4; 4; 1).$$

1) Найти оббъём V_{ABCD} пирамиды $ABCD$

2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC

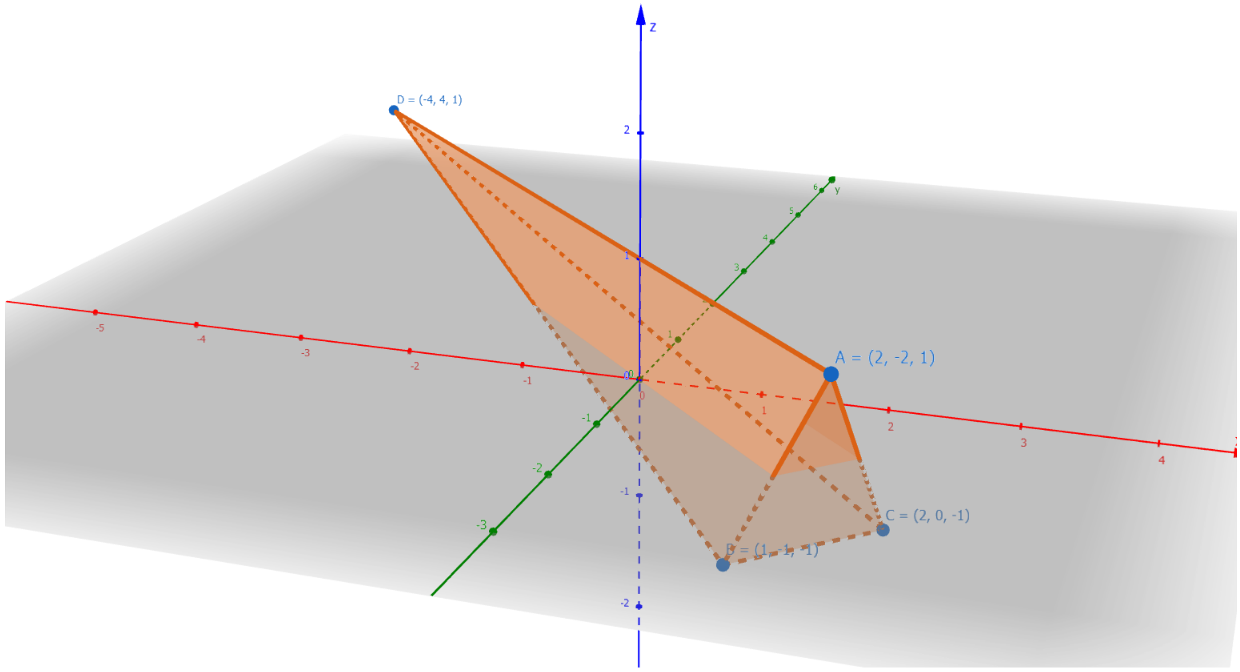
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L)

4) Найти длинну ребра AB

5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q)

6) Найти уравнение прямой L_2, симметричной прямой AD (прямая L_1) относительно плоскости ABC

Решение:



1) $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD})|$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (-1;1;-2)\\ \overrightarrow{AC} &= (0;2;-2)\\ \overrightarrow{AD} &= (-6;6;0)\end{aligned} \quad \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -6 & 6 & 0 \end{matrix} \right\| = \left\{1A^3 + A^2\right\} = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -6 & 6 & 0 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left| -2 \cdot \left| \begin{matrix} -1 & -1 \\ -6 & 6 \end{matrix} \right| \right| = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4$$

$$2) S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right] \right| = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \left| \vec{i} \cdot \left| \begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{matrix} \right| - \vec{j} \cdot \left| \begin{matrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{matrix} \right| + \vec{k} \cdot \left| \begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix} \right| \right| =$$

$$= \frac{1}{2} |(2;-2;-2)| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{3}$$

$$3) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (-1;1;-2) \\ A &= (2;-2;1) \end{aligned} \quad \Rightarrow L : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-2}$$

$$4)\ AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$5) \quad \begin{aligned} &A = (2;-2;1)\ \left[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right] = (2;-2;-2) \\ &N = (1;-1;-1) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &Q : (x-2) - (y+2) - (z-1) = 0 \\ &Q : x - y - z - 3 = 0 \end{aligned}$$

6) Так как точка A лежит в плоскости ABC, то симметричная ей A_1 совпадает с точной A.

Найдём координаты точки D_1 симметричной точке D относительно плоскости ABC.

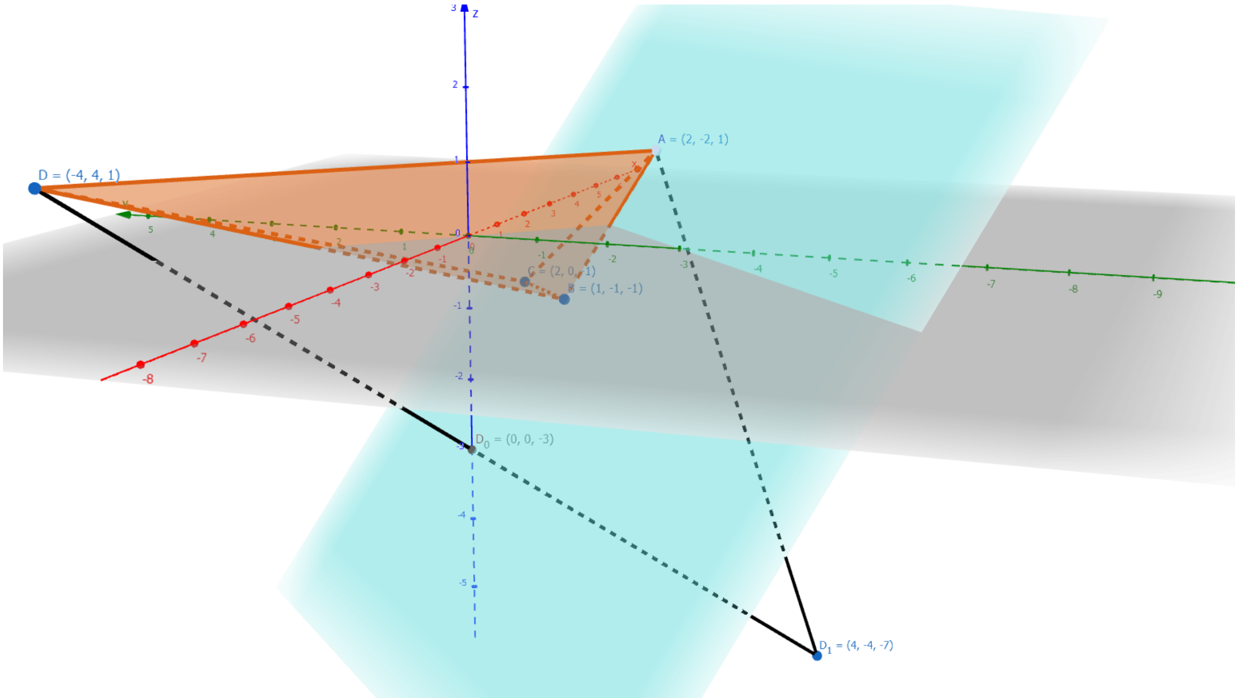
$N_{ABC} = (1;-1;-1)$ значит, прямая, проходящая через $D = (-4;4;1)$ перпендикулярно плоскости ABC будет иметь уравнение $\frac{x+4}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x = t-4 \\ y = -t+4 \\ z = -t+1 \end{cases}$

Найдём D_0 - точку пересечения этой прямой с плоскостью ABC, доставив наши x,y,z в её уравнение: $(t-4) - (-t+4) - (-t+1) - 3 = 0 \Rightarrow t = 4$

$D_0 = (0; 0; -3)$

$\overrightarrow{DD_1} = 2\overrightarrow{DD_0} = 2(4; -4; -4) = (8; -8; -8) \Rightarrow D_1 = (-4+8; 4-8; 1-8) = (4; -4; -7)$

$\begin{matrix} A = (2; -2; 1) \\ \overrightarrow{AD_1} = (2; -2; -8) \end{matrix} \Rightarrow L_1 = AD_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{-8}$



Ответ:

1)$V_{ABCD} = 4$

2) $S_{ABC} = \sqrt{3}$

3) $L : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-2}$

4) $AB = \sqrt{6}$

5) $Q : x - y - z - 3 = 0$

6)$L_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{-8}$

Задача 3.

Условие:

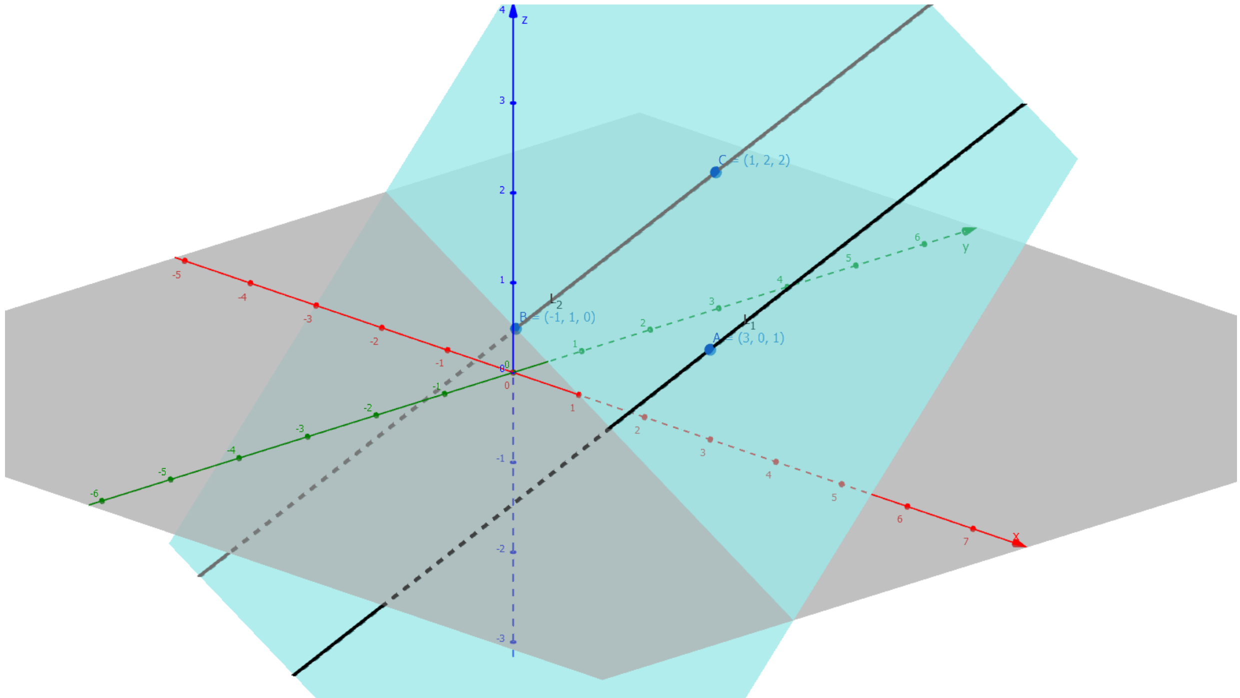
Даны прямые L_1, L_2:

$$L_1 = \left\{ \tfrac{x-3}{2} = \tfrac{y}{1} = \tfrac{z-1}{2} \right\}, \quad L_2 = \left\{ \tfrac{x+1}{2} = \tfrac{y-1}{1} = \tfrac{z}{2} \right\}$$

1) Доказать, что прямые L_1 и L_2 параллельные.

2) Найти уравнение плоскости Q, проходящей через прямые L_1 и L_2.

Решение:



1) $\overrightarrow{a_1} = (2;1;2)$ - направляющий вектор прямой L_1
$\overrightarrow{a_2} = (2;1;2)$ - направляющий вектор прямой L_2 $\Rightarrow a_1$ и a_2 коллинеарны $\Rightarrow L_1 \parallel L_2$

2) Известно, что L_1 проходит через точку $A = (3;0;1)$, а L_2 проходит через точку $B = (-1;1;0)$. Выберем на L_2 ещё одну точку, чтобы построить плоскость через 3 точки: $C = (1;2;2) \in L_2$

Тогда имеем

$$Q : \begin{vmatrix} x-3 & -1-3 & 1-3 \\ y & 1 & 2 \\ z-1 & 0-1 & 2-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$Q : \begin{vmatrix} x-3 & -4 & -2 \\ y & 1 & 2 \\ z-1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$Q : x - 3 + 2y - 8(z-1) + 2(z-1) + 2(x-3) + 4y = 0$$

$$Q : 3x + 6y - 6z - 3 = 0$$

$$Q : x + 2y - 2z - 1 = 0$$

Ответ:

1)$L_1 \parallel L_2$

2) $Q: x + 2y - 2z - 1 = 0$

Задача 4.

Условие:

Дана точка $P = (3;0;4)$ и прямая $L = \left\{2x - y + 1 = 0,\ 2x - z = 0\right\}$

Найти расстояние $d(P,L)$ от точки P до прямой L.

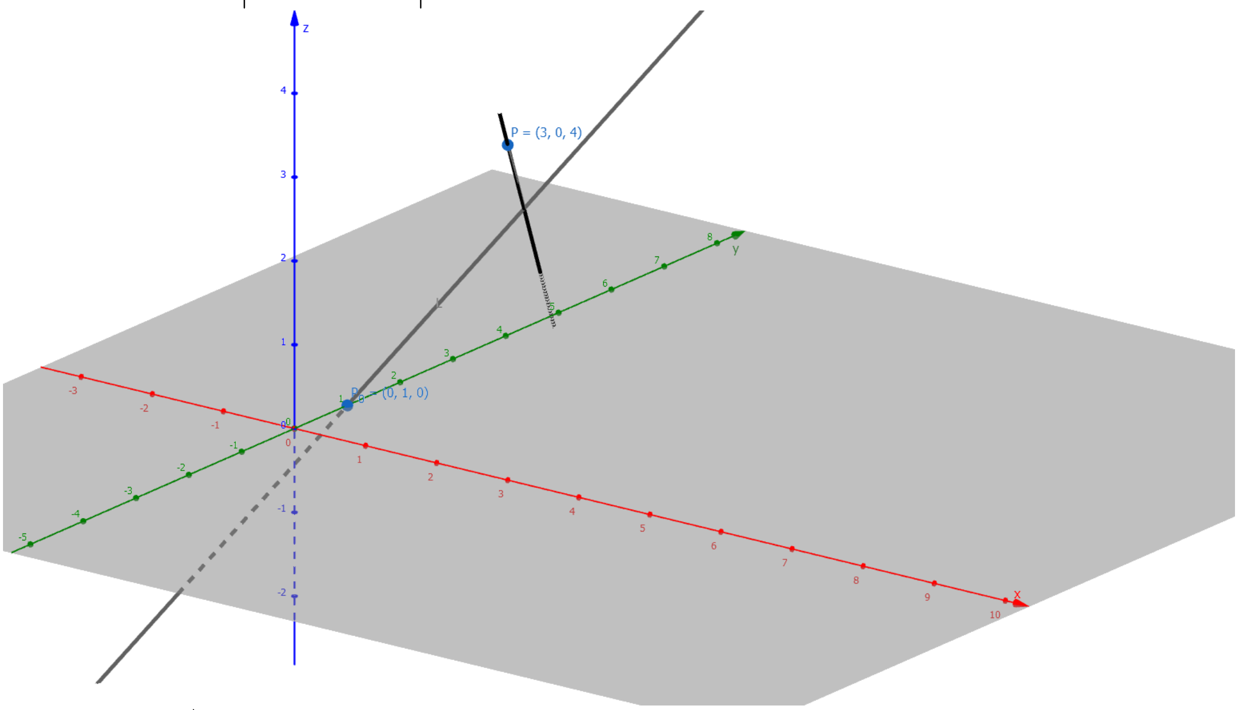
Решение:

Приведём прямую L к каноническому виду. Подставим $z = 0$:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{точка } P_0 = (0;1;0) \in L$$

$\overrightarrow{n_1} = (2;-1;0), \quad \overrightarrow{n_2} = (2;0;-1)$

$$\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} = (1;2;2) \Rightarrow L = \left\{\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}\right\}$$



$d(P,L) = \frac{|[\overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{a}]|}{|\overrightarrow{a}|}$

$\overrightarrow{PP_0} = (-3;1;-4)$

$$\left[\overrightarrow{PP_0} \times \overrightarrow{a}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 10\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 7\overrightarrow{k}$$

$d(P,L) = \frac{\sqrt{100+4+49}}{\sqrt{1+4+4}} = \sqrt{17}$

Ответ:

$d(P,L) = \sqrt{17}$

Задача 5.

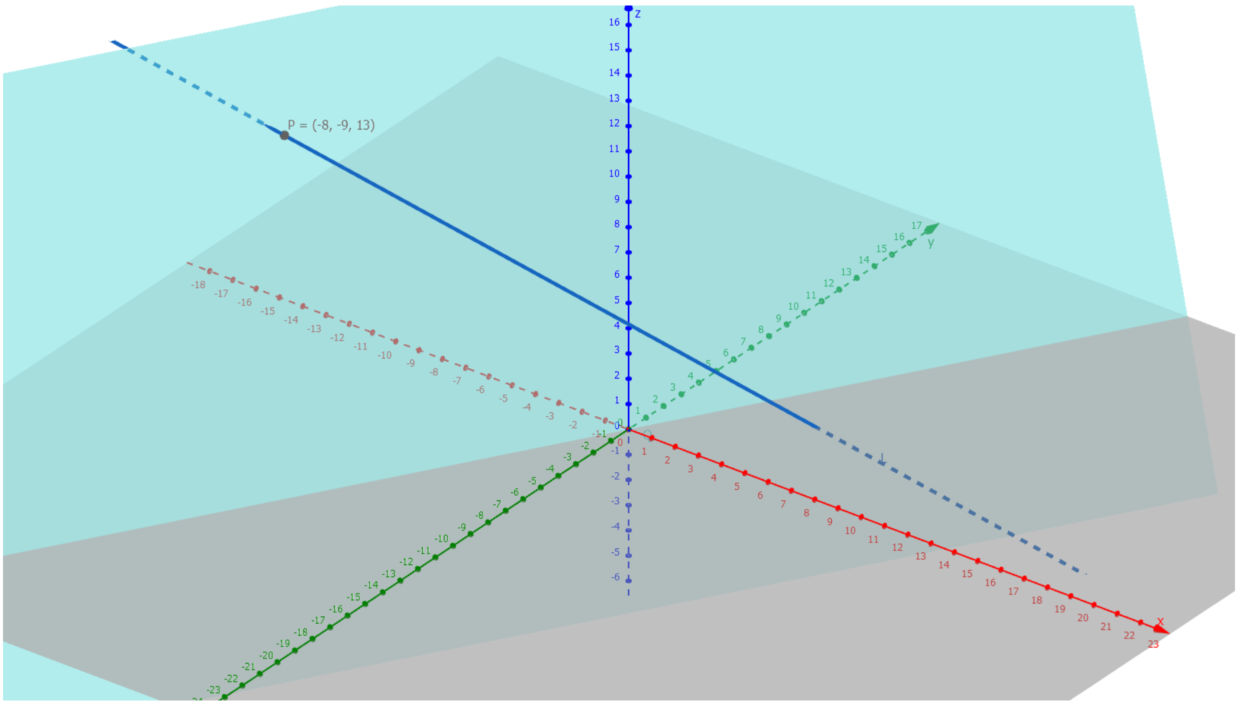
Условие:

Дана прямая $L = \begin{cases} x + 2y + 3z - 13 = 0 \\ 3x + y + 4z - 19 = 0 \end{cases}$, и плоскость $Q = \left\{ 5x - 3y + z = 0 \right\}$

1) Найти точку P пересечения прямой L и плоскости Q.

2) Найти угол $\angle(L,Q)$ между прямой L и плоскостью Q.

Решение:



1) Приведём прямую L к каноническому виду. Подставим $z = 0$:

$$\begin{cases} x + 2y - 13 = 0 \\ 3x + y - 19 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 13 \\ -6x - 2y = -38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 13 \\ -5x = -25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow P_0 = (5; 4; 0) \in L$

$\overrightarrow{n_1} = (1; 2; 3)$, $\overrightarrow{n_2} = (3; 1; 4)$

$$\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k} = (5; 5; -5) \Rightarrow L = \left\{ \frac{x-5}{5} = \frac{y-4}{5} = \frac{z}{-5} \right\}$$

$$L = \begin{cases} x = 5t + 5 \\ y = 5t + 4 \\ z = -5t \end{cases}$$

$P \in L,\ P \in Q \Rightarrow 5(5t_0 + 5) - 3(5t_0 + 4) + (-5t_0) = 0 \Rightarrow t_0 = -\frac{13}{5}$

$P = (-5 \cdot \frac{13}{5} + 5; -5 \cdot \frac{13}{5} + 4; 5 \cdot \frac{13}{5}) = (-8; -9; 13)$

2) $\sin\varphi = \frac{|(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{a})|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{a}|}, \quad \overrightarrow{n} = (5; -3; 1), \quad \overrightarrow{a} = (5; 5; -5)$

$|(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{a})| = |25 - 15 - 5| = 5$

$|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{a}| = \sqrt{25 + 9 + 1} \cdot \sqrt{25 + 25 + 25} = 5\sqrt{105}$

$\sin\varphi = \frac{5}{5\sqrt{105}} = \frac{1}{\sqrt{105}} \Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{105}} \approx 5{,}6^\circ$

Ответ:

1) $P = (-8; -9; 13)$

2) $\angle(L{,}Q) \approx 5{,}6^\circ$

Задача 6.

Условие:

Дана точка $A = (-3; -5; 9)$ и геометрическое место точек

$$M = \left\{ \begin{matrix} P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой некоторого отрезка } AB, \\ \text{конец } B \text{ которого лежит в координатной плоскости } O_{yz} \end{matrix} \right\}$$

Найти уравнение геометрического места точек M.

Решение:

$B \in O_{yz} \Rightarrow B = (0; y; z)$

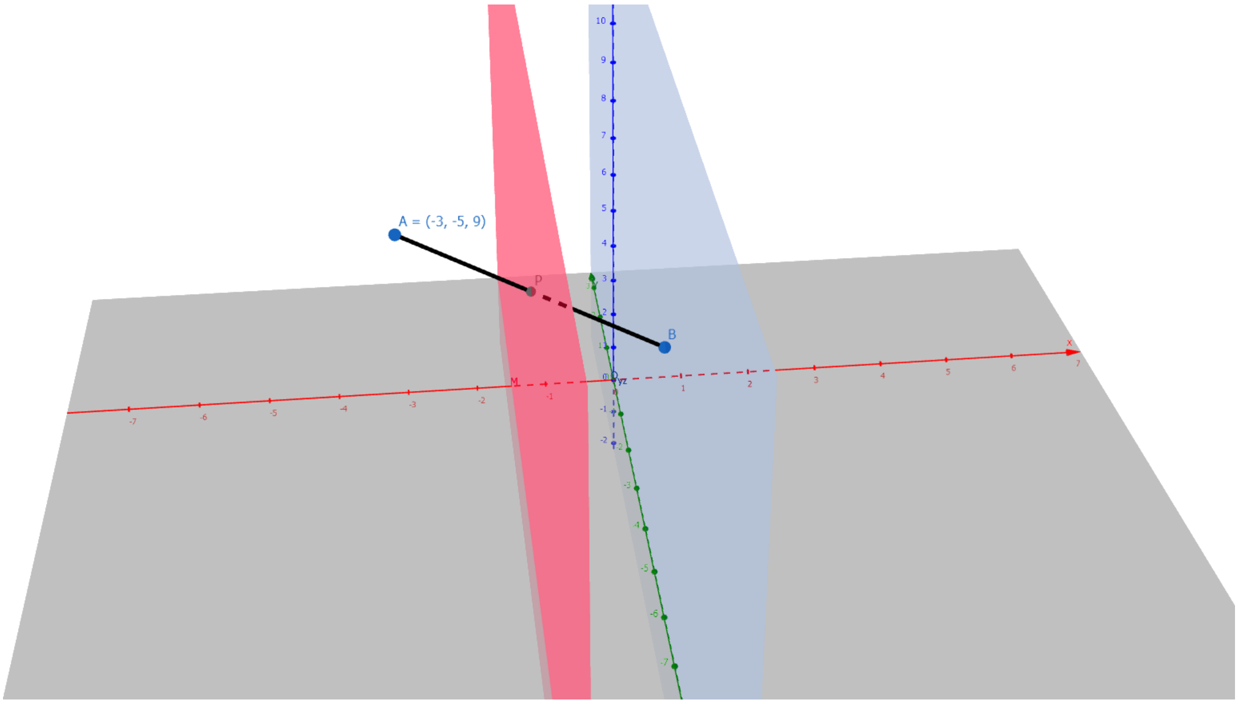
Пусть $P = (x_0; y_0; z_0)$. Тогда:

$\overrightarrow{AP} = (x_0 + 3; y_0 + 5; z_0 - 9)$

$\overrightarrow{PB} = (-x_0; y - y_0; z - z_0)$

По условию, $AP = PB \Rightarrow \begin{cases} x_0 + 3 = -x_0 \\ y_0 + 5 = y - y_0 \\ z_0 - 9 = z - z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{3}{2} \\ y = 2y_0 + 5 \\ z = 2z_0 - 9 \end{cases}$

$\overrightarrow{AP} = (\frac{3}{2}; y_0 + 5; z_0 - 9) \Rightarrow P = (-3 + \frac{3}{2}; -5 + y_0 + 5; 9 + z_0 - 9) = (-\frac{3}{2}; y_0; z_0)$



Ответ:

$M = \left\{x = -\frac{3}{2}\right\}$
(M - множество точек, у которых координата по $x = -\frac{3}{2}$).

Задача 7.

Условие:

Кривая Г задана своим уравнением в полярных координатах:

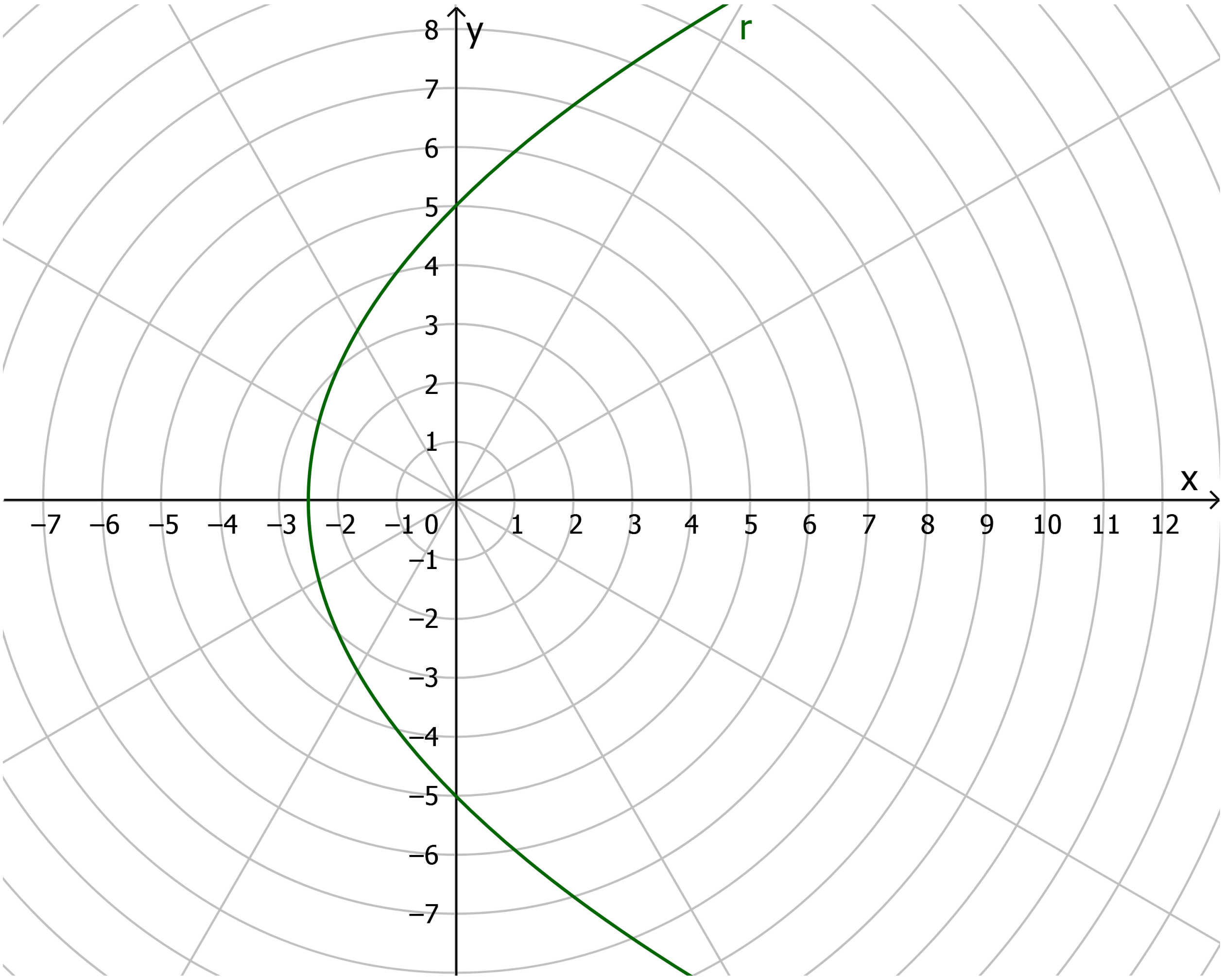
$$r = \frac{5}{1 - \cos\varphi}$$

1) Определить тип кривой Г.

2) Написать каноническое уравнение прямой Г.

Решение:

$1) r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi} = \frac{5}{1-\cos\varphi}$
$p = 5,\ \varepsilon = 1 \Rightarrow$ Г - парабола.



2) $r - r\cos\varphi = 5$

Но $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $r\cos\varphi = x$, тогда

$\sqrt{x^2+y^2} = 5 + x$

$x^2 + y^2 = x^2 + 10x + 25$

$y^2 = 2 \cdot 5x + 25$ - каноническое уравнение параболы.

$F = (2{,}5; 0)$

Ответ:

1) Г- парабола.

2) Каноническое уравнение Г в декартовой системе координат: $y^2 = 2 \cdot 5x + 25$

Задача 8.

Условие:

Даны точки $P_1 = (0; 0; 2)$, $P_2 = (1; 2; 3)$ и дана поверхность второго порядка

$\Sigma = \left\{ 2(2 - z) = x^2 + 2y^2 \right\}$

1) Определить тип поверхности Σ.

2) Изобразить схематически поверхность Σ.

3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, соблюдая масштаб.

Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, на одну или по разные стороны от поверхности Σ лежать точки P_1 и P_2.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая L, проходящая через точки P_1 и P_2.

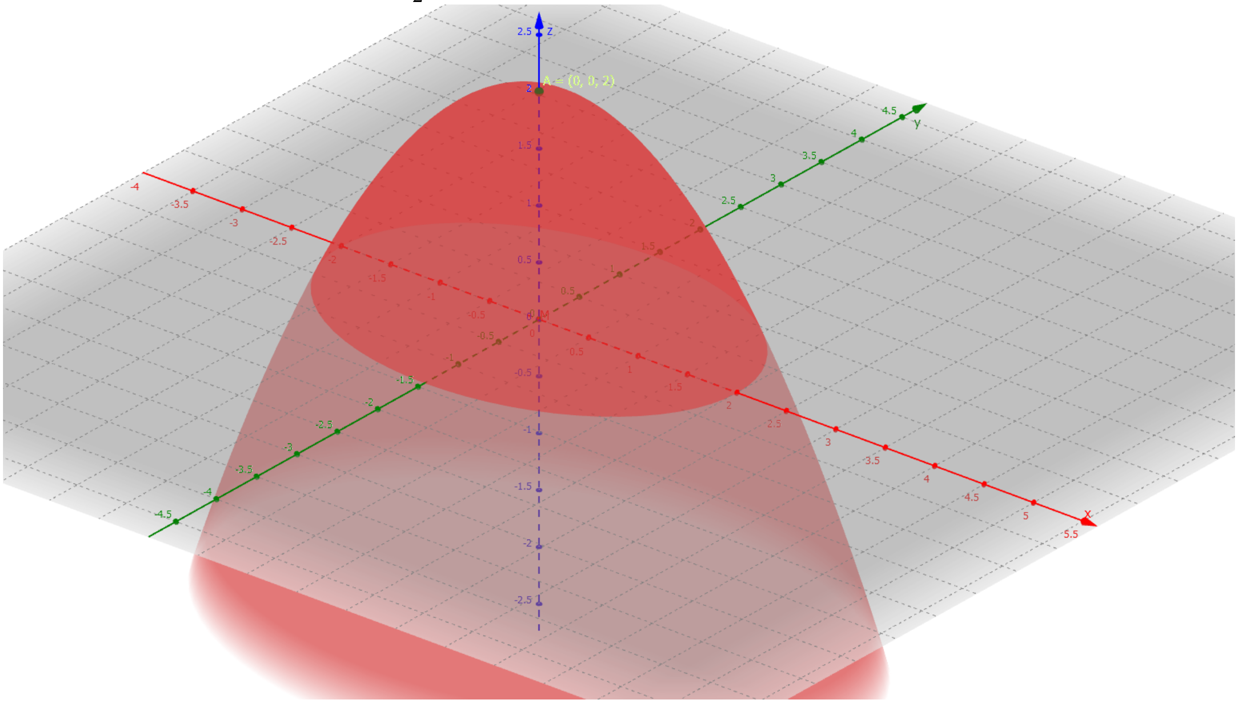
Решение:

1)

$$\Sigma = \left\{2(-z+2) = \tfrac{x^2}{1^2} + \tfrac{y^2}{\frac{1}{(\sqrt{2})^2}}\right\}$$

- уравнение эллиптического параболоида

2) $A = (0;0;2),\ a^2 = 1,\ b^2 = \frac{1}{2}$



3) а) Сечение поверхности Σ координатной плоскостью $O_{xy} : z = 0$

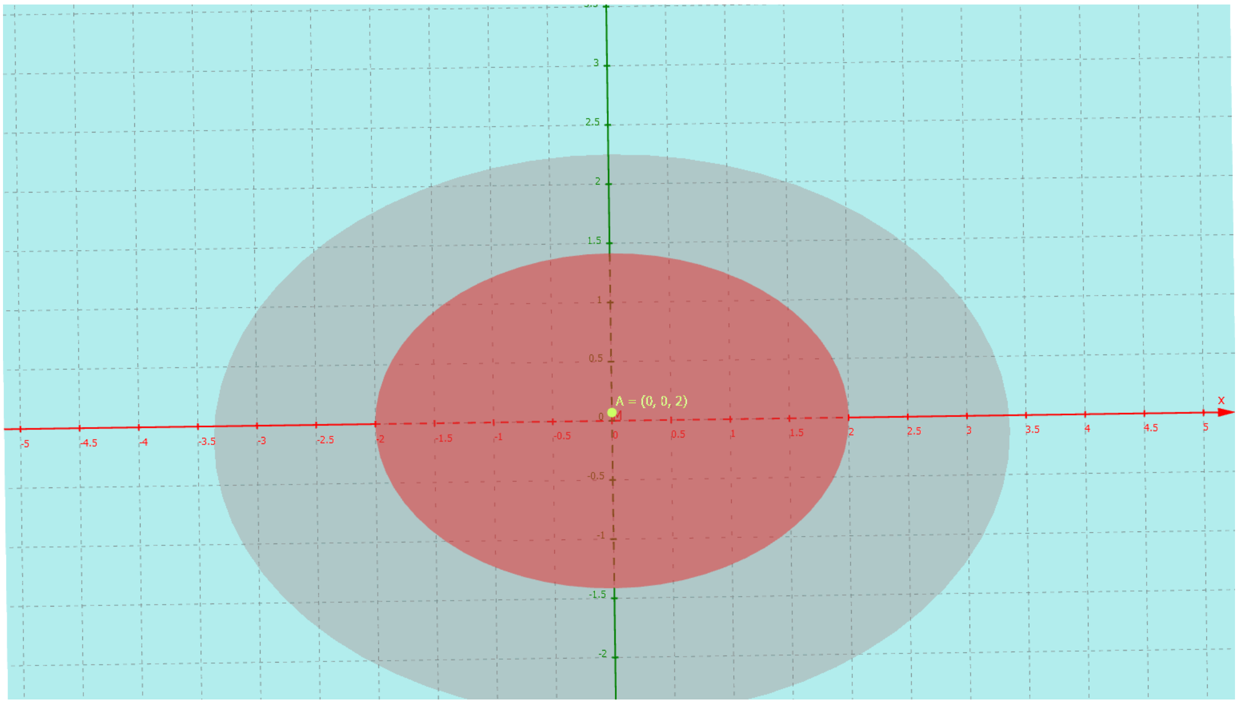
$$4 = \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{(\sqrt{2})^2}}$$

$$4 = x^2 + 2y^2 \text{ - эллипс}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$F_1 = (\sqrt{\frac{3}{4}};0)$$

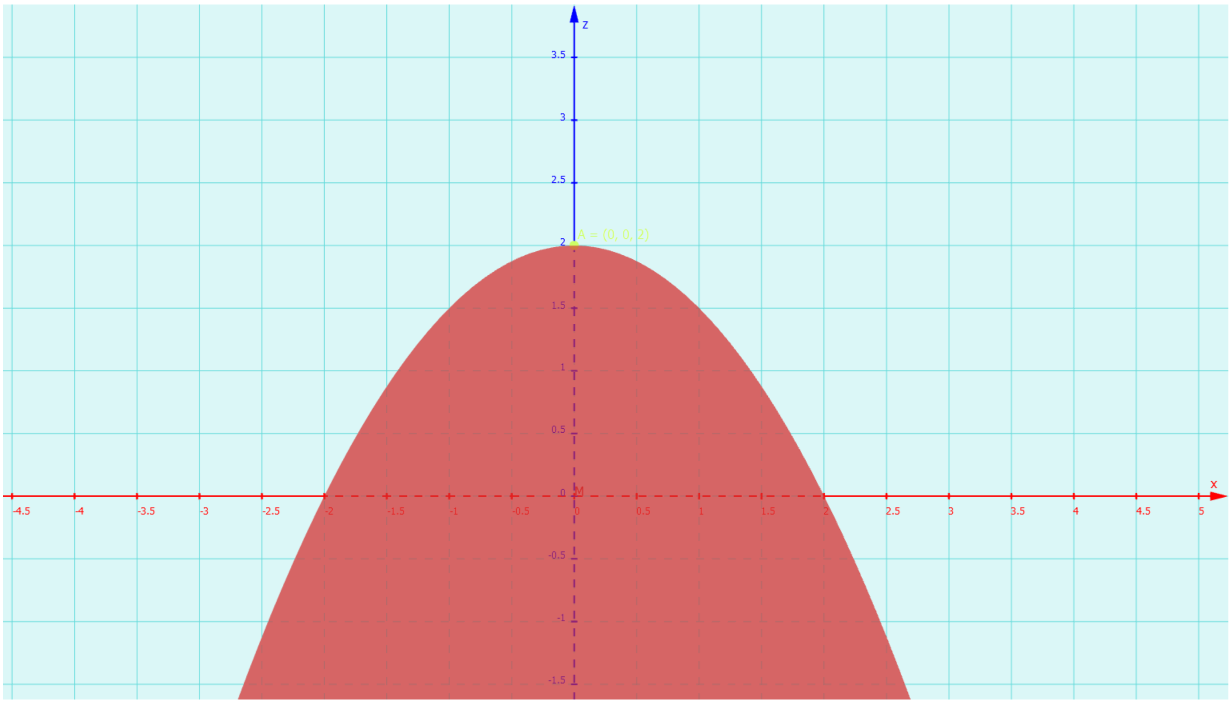
$$F_2 = (-\sqrt{\frac{3}{4}};0)$$



б) Сечение поверхности Σ координатной плоскостью $O_{xz} : y = 0$

$$-2z + 4 = x^2 \text{ - парабола}$$

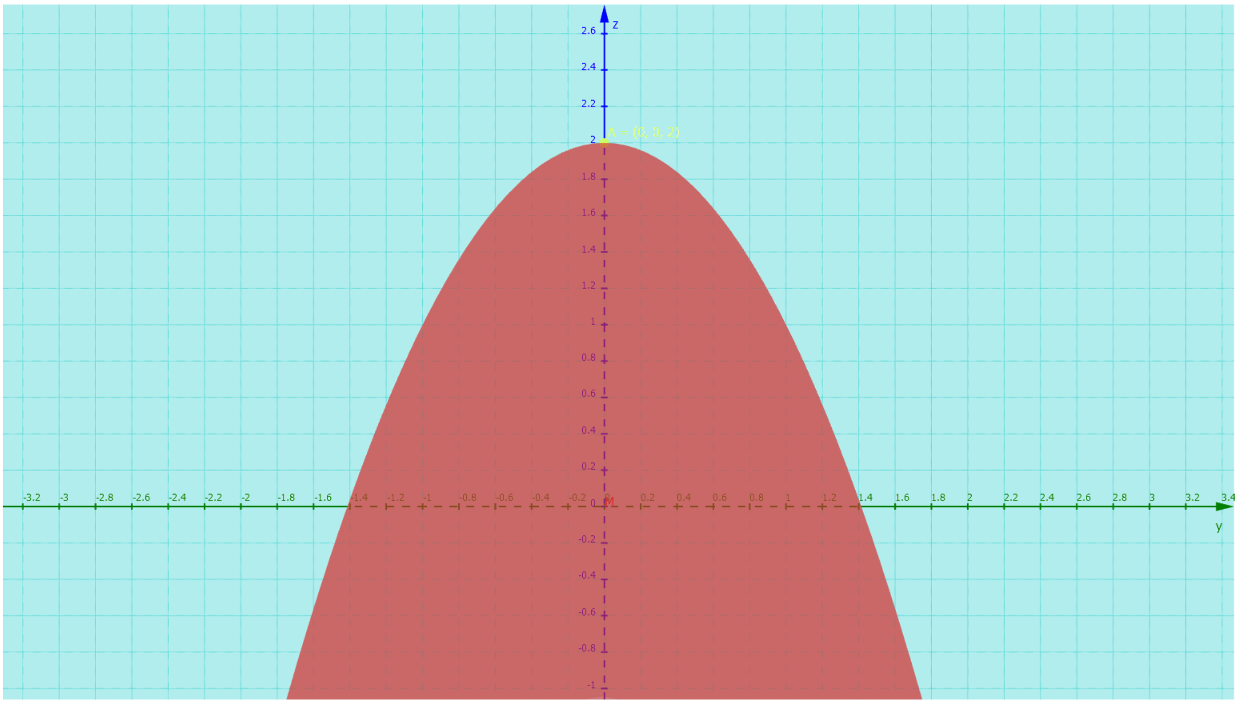
$$F = (0; 0; -\frac{1}{2})$$



в) Сечение поверхности Σ координатной плоскостью $O_{zy} : x = 0$

$$-2z + 4 = 2y^2 \text{ - парабола}$$

$$F = (0; 0; -\frac{1}{2})$$



4) $P_1 = (0;0;2),\ P_2 = (1;2;3)$

Рассмотрим функцию $F(x;y;z) = x^2 + 2y^2 + 2z - 4$

$F(0;0;2) = 0$

$F(1;2;3) = 1 + 8 + 6 - 4 > 0$

Точка P_1 лежит на поверхности, точка P_2 лежит вне поверхности

5) $\overrightarrow{P_1P_2} = (1;2;1)$

$$L : \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t + 2 \end{cases}$$

Подставим x, y, z в уравнение Σ

$\Sigma : 2(2 - (t+2)) = t^2 + 2(2t)^2$

$4 - 2t - 4 - t^2 - 8t^2 = 0$

$t(-2 - 9t) = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow$ прямая L пересекает поверхность в 2 точках.

$T_1 = (0;0;2),\ T_2 = (-\frac{2}{9}; -\frac{4}{9}; -\frac{5}{2})$

Ответ:

1) Эллиптический параболоид

2) см.рис.

3)

а)$F_1 = (\sqrt{\frac{3}{4}};0),\ F_2 = (-\sqrt{\frac{3}{4}};0)$

б)$F = (0;0;-\frac{1}{2})$

в)$F = (0;0;-\frac{1}{2})$

4) Точка P_1 лежит на поверхности, точка P_2 лежит вне поверхности

5) Прямая L пересекает поверхность Σ в 2 точках: $T_1 = (0; 0; 2)$, $T_2 = (-\frac{2}{9}; -\frac{4}{9}; -\frac{5}{2})$.