⑥ $I(x_I, y_I; z_I)$

$0 = x_I - 2 \qquad 1{,}5 = y_I - 3 \qquad z_I = 0 + 1$

$x_I = 2 \qquad y_I = 4{,}5 \qquad z_I = 1$

(Найти коорд. точки пересечения бис-с).

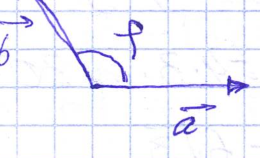
# Семинар 3. (16.09.2019)

## Тема 2. Скалярное произведение геом. векторов.

$(\vec{a}, \vec{b})$

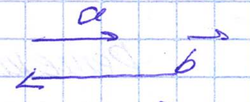
Скаляр. произ-ие геометрических векторов — число

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{cases} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}), & \text{если } \vec{a} \neq 0, \ \vec{b} \neq 0 \\ 0, & \text{если } \vec{a} = 0 \text{ или } \vec{b} = 0 \end{cases}$$

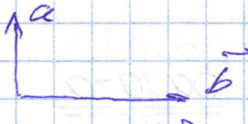



$\varphi \in [0, \pi]$


$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$




$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$




$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$

# Свойства скаляр. произ-ия:

1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ (симметричность)

2) $(\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$

$(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$ линейность по первому аргументу

2') $(\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$ линейность по второму аргументу

3) $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$

$= |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{a})$

4) $(\vec{a}, \vec{a}) = 0$, если $\vec{a} = \vec{0}$

5) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$

По определению считают, что $\vec{0} \parallel \vec{a}$, $\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{a}$, $\vec{0} \uparrow\downarrow \vec{a}$, $\vec{0} \perp \vec{a}$

**Задача.**

Дано:

$|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$

$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150°$

Найти: $(\vec{a}, \vec{b})$

**Решение.**

$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\lambda =$
$= 4 \cdot 3 \cdot \cos 150° = 4 \cdot 3 \cdot$
$\cdot \cos(180° - 30°) = -4 \cdot 3 \cdot \cos 30° =$
$= -4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}$

**Задача.**

Дано:

**Решение:**

$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\lambda =$

$|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

Найти: $(\vec{a}, \vec{b})$.

$= 2 \cdot 5 \cdot 1 = 10$

**Задача.**

Дано:

$|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$,

$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$

$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

Найти: $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$

1) $|\vec{c}|$

2) $|\vec{d}|$

3) $\angle(\vec{c}, \vec{d})$

Решение.

1) $(\vec{c}, \vec{c}) = |\vec{c}|^2$

$|\vec{c}| = \sqrt{(\vec{c}, \vec{c})}$

$(\vec{c}, \vec{c}) = (\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) =$

$= (\vec{a}, \vec{a}) - (\vec{a}, \vec{b}) - (\vec{b}, \vec{a}) +$

$+ (\vec{b}, \vec{b}) =$

$= (\vec{a}, \vec{a}) - 2 \cdot (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{b})$

$= 9 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ + 4 =$

$= 9 - 6 + 4 = 3 + 4 = 7$

$|\vec{c}| = \sqrt{(\vec{c}, \vec{c})} = \cancel{\sqrt{49}} = \underline{\underline{\sqrt{7}}}$

2) $|\vec{d}| = \sqrt{(\vec{d}, \vec{d})}$

$(\vec{d}, \vec{d}) = (\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}) =$

$= (\vec{a}; \vec{a}) + (2\vec{b}, \vec{a}) + (2\vec{b}, \vec{a}) + (b, b) =$

$= |\vec{a}|^2 + 4 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \cdot |\vec{b}|^2 =$

$= 9 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 4 =$

$= 9 + 12 + 16 = 21 + 16 = 37$

$|\vec{d}| = \sqrt{(\vec{d}, \vec{d})} = \boxed{\sqrt{37}}$

15

3) $(\vec{c}, \vec{d}) =$

$= (\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}) =$

$= (\vec{a}, \vec{a}) + 2 \cdot (\vec{a}, \vec{b}) - (\vec{a}, \vec{b}) +$

$- 2(\vec{b}, \vec{b}) =$

$= |\vec{a}|^2 + (\vec{a}, \vec{b}) - 2 \cdot |\vec{b}|^2 =$

$= 9 + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 4 =$

$= 9 + 3 - 6 = 12 - 8 = 4$

$(\vec{c}, \vec{d}) = |\vec{c}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos\angle(\vec{c}, \vec{d})$

$\cos\angle(\vec{c}, \vec{d}) = \dfrac{(\vec{c}, \vec{d})}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|}$

$\cos\angle(\vec{c}, \vec{d}) = \dfrac{4}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{37}} = \dfrac{4}{\sqrt{259}}$

$\angle(\vec{c}, \vec{d}) = \arccos \dfrac{4}{\sqrt{259}}$

Если $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, а $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

<u>Задача.</u>

Дано:

$\vec{a} = (2, 4)$ $\vec{b} = (1, -3)$

Найти: $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ и $\angle(\bar{a}, \bar{b})$.

<u>Решение.</u>

1) $|\vec{a}| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

2) $|\vec{b}| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

3) $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$

$(\vec{a}, \vec{b}) = 2 - 12 = -10$

$\cos\alpha = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} =$

$= \dfrac{-10}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{-5}{\sqrt{50}} = \dfrac{-5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 135°$

16

# Задача.

Дано:

$A=(4,-1)$ $B=(1,-3)$

$C=(-3,3)$

1) Найти: $\angle BAC$ в $\triangle ABC$

2) Найти $\angle ABC$

3) Найти $\angle ACB$.

2) $\overrightarrow{BA}=(3,4)$

$\overrightarrow{BC}=(-4,8)$

$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{9+16}=5$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}$

$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=-12+32=20$

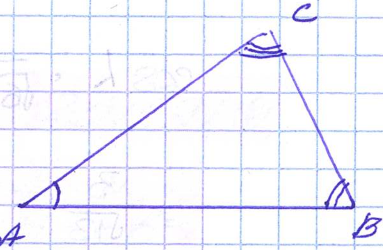
$$\cos\angle(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=\frac{20}{5\cdot\sqrt{80}}=$$

$$=\frac{4}{2\cdot 2\cdot\sqrt5}=\frac{\sqrt5}{5}$$

$\angle BAC=\angle(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=$

$=\arccos\frac{\sqrt5}{5}$

# Решение.




1) $\angle BAC=\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=h$

$\overrightarrow{AB}=(-3,-2)$

$\overrightarrow{AC}=(-7,4)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos h$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=21-16=5$

$$\cos h=\frac{5}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{65}}=\frac{1}{\sqrt{65}}$$

$$\angle BAC=\arccos\frac{1}{\sqrt{65}}$$

3) $\angle ACB=\angle(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=L$

$\overrightarrow{CA}=(7,-4)$

$\overrightarrow{CB}=(4,-8)$

$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$

$|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}$

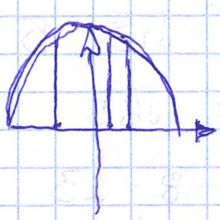
$(\vec{CA}, \vec{CB}) = 28 + 32 = 60$

$\cos \alpha = \frac{60}{\sqrt{65}\cdot\sqrt{80}} = \frac{60}{2\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{65}} = \frac{15}{\sqrt{5\cdot 5\cdot 13}} =$

$= \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\angle ACB = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}}$

4) <u>Докажем</u>, что $\underbrace{\arccos \frac{1}{\sqrt{65}}}_{\alpha} + \underbrace{\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}}_{\beta} + \underbrace{\arccos \frac{3}{\sqrt{13}}}_{\gamma} = \pi$



$\alpha + \beta + \gamma = \pi$

$\beta \in (0; \frac{\pi}{2})$

$\underset{(0,\pi)}{\underset{\cap}{\beta + \gamma}} = \underset{(0,\pi)}{\underset{\cap}{\pi - \alpha}}$

$\gamma \in (0; \frac{\pi}{2})$

Если $\cos(\beta + \gamma) = \cos(\pi - \alpha)$

$\cos\beta \cdot \cos\gamma - \sin\beta \cdot \sin\gamma = -\cos\alpha$

$\frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = -\frac{1}{\sqrt{65}}$

$\frac{3\sqrt{5} - 4\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{65}} = -\frac{1}{\sqrt{65}}$

$-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{65}} = -\frac{1}{\sqrt{65}}$

18 $-\frac{1}{\sqrt{65}} = -\frac{1}{\sqrt{65}}$ верно

(*) $\sin\beta = \sqrt{1 - \frac{5}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

(*) $\sin\gamma = \sqrt{1 - \frac{9}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$

# Семинар 4. 23/09/19

## Скалярное произведение геометрич. векторов.

Матрицы, многочлены, ф-ии могут называться векторами.

Вектор — элемент линейного пространства.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{cases} |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) & (1)\\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & (2)\end{cases}$$

**Задача.**

Дан 4х угольник $ABCD$

$A=(-3, 1)$
$B=(0, 3)$
$C=(3, -3)$
$D=(-2, 0)$

Док-ть, что диагонали 4х угольника перпендикулярны.

**Решение.**

$AC=(6,-4)$ $\quad |\vec{AC}|=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$

$BD=(-2,-3)$ $\quad |\vec{BD}|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

$(\vec{AC}, \vec{BD}) = -12+12=0$

$(\vec{AC}, \vec{BD}) = \sqrt{52}\cdot\sqrt{13}\cdot\cos\angle\alpha$

$0=\sqrt{52}\cdot\sqrt{13}\cdot\cos\alpha$

$\cos\alpha=0$

$\Downarrow$

$\alpha=\angle(\vec{AC}, \vec{BD})=90^\circ$

$\Downarrow$

$AC\perp BD$