Ранг системы векторов. Ранг матрицы. Размерность и базис линейной оболочки.

Г.Д. Ким, Л.В. Крицков «Алгебра и аналтическая геометрия. Теоремы и задачи.» Том 1.

17.17. В пространстве $\mathbb{R}^4$ найти два различных базиса, имеющих общие векторы $e_1 = (1, 1, 0, 0)$ и $e_2 = (0, 0, 1, 1)$.

17.18. Систему многочленов $t^5 + t^4$, $t^5 - 3t^3$, $t^5 + 2t^2$, $t^5 - t$ дополнить до базиса пространства M_5.

17.19. Дополнить систему матриц $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 9 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ до базиса пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$.

17.20. Доказать, что система матриц

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \; E_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

образует базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

17.25. При каких $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ векторы $\mathbf{a} = \{1, \alpha, \alpha^2\}$, $\mathbf{b} = \{1, \beta, \beta^2\}$, $\mathbf{c} = \{1, \gamma, \gamma^2\}$ образуют базис пространства V_3 ?

А.В. Ефимов, А.С. Поспелов «Сборник задач по математике» Том 1.

3.51. Найти размерность линейной оболочки $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ арифметических векторов $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 2, -1)$, $\mathbf{x}_2 = (0, -1, 2, 0)$. Показать, что $\mathbf{x} = (1, -1, 4, -1) \in \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.

Найти размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки заданной системы арифметических векторов:

3.52. $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\mathbf{x}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{x}_4 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{x}_5 = (0, 1, 2, 3)$.

3.53. $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $\mathbf{x}_3 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $\mathbf{x}_4 = (1, 1, 5, 5, 2)$, $\mathbf{x}_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$.

3.54*. Показать, что линейная оболочка системы многочленов $-3t^2-1$, $2t^2+t$, $-t$ совпадает с пространством $\mathcal{P}_2$ всех многочленов степени $\leqslant 2$.

Переход от базиса к базису в линейном пространстве. Матрица перехода.

А.В. Ефимов, А.С. Поспелов «Сборник задач по математике» Том 1.

3.30, 3.31, 3.37

Г.Д. Ким, Л.В. Крицков «Алгебра и аналтическая геометрия. Теоремы и задачи.» Том 1.

17.24. Показать, что векторы $\mathbf{a} = \{4, 1, -1\}$, $\mathbf{b} = \{1, 2, -5\}$, $\mathbf{c} = \{-1, 1, 1\}$ образуют базис пространства V_3. Найти координаты векторов $\mathbf{x} = \{4, 4, -5\}$, $\mathbf{y} = \{2, 4, -10\}$ и $\mathbf{z} = \{0, 3, -4\}$ в этом базисе.

17.33. Доказать, что матрицы

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

образуют базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$, и найти координаты матрицы $A = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{bmatrix}$ в этом базисе.

17.34. Доказать, что матрицы

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, E_5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, E_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

образуют базис пространства симметрических матриц порядка 3, и найти координаты матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ в этом базисе.

17.37. Доказать, что каждая из двух систем матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

является базисом пространства $\mathbb{R}^{3\times 2}$, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты матрицы размера 3×2 в первом базисе, если известны ее координаты $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6)$ во втором базисе.

17.38. Доказать, что каждая из двух систем матриц

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

является базисом в пространстве кососимметрических матриц порядка 3, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты кососимметрической матрицы порядка 3 в первом базисе, если известны ее координаты (ξ_1, ξ_2, ξ_3) во втором базисе.

17.39. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$t - t^2,\ t^3,\ 1 + 5t + t^3,\ (1+t)^3$$

и

$$(1+t)^3,\ (1-t)^3,\ t - t^2 + t^3,\ 1 + t + t^2 + t^3$$

является базисом пространства M_3. Найти координаты многочлена степени не выше 3 в первом базисе, если известны его координаты $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ во втором базисе.