Лекция №3.
Методы решения дифференциальных уравнений 1-го порядка. Основные классы уравнений 1-го порядка, интегрируемых в квадратурах.

3. Линейные уравнения 1-го порядка

Линейными называются уравнения, в которые неизвестная функция y и ее производная y' входят в первой степени. Такие уравнения могут быть записаны в виде

$$y' = a(x)y + b(x). \tag{1}$$

Далее будем предполагать, что $a(x)$ и $b(x)$ – непрерывные функции.
Если $b(x) \equiv 0$, то уравнение называется линейным однородным уравнением, иначе – линейным неоднородным.
Рассмотрим метод вариации постоянных для решения уравнения (1).
Сначала решим уравнение

$$y' = a(x)y. \tag{2}$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{y'}{y} = a(x), \quad \int \frac{dy}{y} = \int a(x)dx + \ln|c|,$$

$$\ln|y| = \int a(x)dx + \ln c, \quad y = c\varphi(x),$$

где $\varphi(x) = e^{\int a(x)dx}$.

Будем искать решение уравнения (1) в виде $y = c(x)\varphi(x)$. Подставим y в уравнение (1) получим

$$c'\varphi + c\varphi' = a(x)c\varphi + b(x).$$

Учитывая, что $\varphi' = a(x)\varphi$, имеем

$$c'\varphi = b(x), \quad c(x) = \int \varphi^{-1}(x)b(x)\,dx + c_0.$$

Окончательно получим решение уравнения (1) в виде

$$y(x) = c_0 e^{\int a(x)\,dx} + e^{\int a(x)\,dx} \int e^{-\int a(x)\,dx} b(x)\,dx.$$

Пример

Решим уравнение методом вариации постоянной

$$xy' - 2y = 2x^4$$

$$xy' = 2y + 2x^4 \quad y' = \underbrace{\frac{2}{x}}_{a(x)} y + \underbrace{2x^3}_{b(x)}$$

$$y' = \frac{2}{x} y \qquad \frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$$

$$\int \frac{y' dx}{y} = \int \frac{2dx}{x} \qquad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x}$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln C \quad y = Cx^2$$

$$y = c(x)x^2 \quad y' = c'x^2 + 2xc$$

$$c'x^2 + 2xc = \frac{2}{x} cx^2 + 2x^3$$

$$c'x^2 = 2x^3 \qquad c' = 2x \qquad c(x) = x^2 + \widetilde{C}$$

$$y = (x^2 + \widetilde{C})x^2 \quad y = x^4 + \widetilde{C}x^2$$

$$\underbrace{y}_{\text{о.н.}} = \underbrace{\widetilde{C}x^2}_{\text{о.о.}} + \underbrace{x^4}_{\text{ч.н.}}$$

Пример

Решим линеное уравнение 1-го порядка методом Бернулли

$$y' = \frac{2}{x}y + 2x^3$$

$$y = u(x)v(x) \quad y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' = \frac{2}{x}uv + 2x^3 \qquad u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = 2x^3$$

$$u'v + u\underbrace{\left(v' - \frac{2}{x}v\right)}_{=0} = 2x^3$$

$$v' - \frac{2}{x}v = 0 \quad \frac{dv}{dx} = \frac{2}{x}v$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2dx}{x} \quad \ln|v| = 2\ln|x| \quad v = x^2$$

$$u'x^2 = 2x^3 \qquad u' = 2x \qquad u(x) = x^2 + C$$

$$y = uv = (x^2 + C)x^2 = Cx^2 + x^4$$

4. Уравнения Бернулли.

Уравнения Бернулли это такие уравнения, которые можно записать в виде

$$y'(x) = a(x)y + b(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0, \alpha \neq 1. \tag{3}$$

Как и ранее считаем, что $a(x)$ и $b(x)$ – непрерывные функции. Если $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$, уравнение (3) становится линейным уравнением. Уравнение Бернулли при $\alpha > 0$ всегда имеет тривиальное решение $y \equiv 0$.

Разделим уравнение (3) на y^α

$$y^{-\alpha}y' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x).$$

Введем новую неизвестную функцию $z(x) = y^{1-\alpha}$. Тогда

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$$

и уравнение (3) сведется к линейному уравнению вида

$$z' = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x),$$

которое можно решить изложенным выше способом.

Пример

Решим уравнение Бернулли

$$xy^2y' = x^2 + y^3$$

$$y' = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x}$$

$$y' = \underbrace{\frac{1}{x}}_{a(x)} y + \underbrace{x}_{b(x)} y^{-2}$$

$$y^2y' = \frac{1}{x}y^3 + x \quad z = y^3 \quad z' = 3y^2y'$$

$$\frac{z'}{3} = \frac{1}{x}z + x \quad z' = \frac{3}{x}z + 3x$$

Пример

Решим уравнение Бернулли методом Бернулли

$$y' = \frac{1}{x}y + xy^{-2}$$

$$y(x) = u(x)v(x) \quad y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' = \frac{1}{x}uv + \frac{x}{u^2v^2}$$

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = \frac{x}{u^2v^2} \quad u'v + u\underbrace{\left(v' - \frac{1}{x}v\right)}_{=0} = \frac{x}{u^2v^2}$$

$$v' - \frac{1}{x}v = 0 \quad \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \quad v = x$$

$$u'x = \frac{1}{u^2x} \quad u^2u' = \frac{1}{x^2}$$

$$\int u^2\,du = \int \frac{dx}{x^2} \quad \frac{u^3}{3} = \frac{C}{3} - \frac{1}{x} \quad u^3 = C - \frac{3}{x}$$

$$y^3 = u^3v^3 = Cx^3 - 3x^2 \quad y = \sqrt[3]{Cx^3 - 3x^2}$$

Запись уравнения в дифференциалах.

Часто обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка записывают в виде

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{4}$$

Такая запись называется записью уравнения в дифференциалах. При такой записи переменные x и y равносильны. Таким образом не имеет значения какую из них считать неизвестной функцией, а какую независимой переменной. Решениями уравнения (4) называются решения хотя бы одного из уравнений

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \tag{5}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}. \tag{6}$$

Пусть решения уравнения (5) задаются формулами $y = f(x,C)$, $y \equiv \text{const}$, а уравнения (6) формулами $x = g(y,C)$, $x \equiv \text{const}$. В большинстве случаев функции f и g являются взаимнообратными. Таким образом общее решение уравнения (4) можно записать в виде

$$y = f(x,C),\ y \equiv \text{const}\,,\ x \equiv \text{const},$$

или в виде

$$x = g(y,C),\ y \equiv \text{const}\,,\ x \equiv \text{const}\,.$$

Пример

Рассмотрим уравнение

$$ydx + xdy = 0. \tag{7}$$

Его можно преобразовать к любому из видов

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \tag{8}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}. \tag{9}$$

Решениями уравнения (8) являются функции $y = c_1/x$, *а уравнения (9) – функции* $x = c_2/y$. *Функция* $y \equiv 0$ *удовлетворяет только уравнению (8), так как для нее производная* $\frac{dx}{dy}$ *не имеет смысла, а функция* $x \equiv 0$ *– только уравнению (9). Решениями уравнения (7) называются все функции* $y = c_1/x$, $y \equiv 0$, $x \equiv 0$.

Замечание

Любое уравнение вида $y' = f(x,y)$ *может быть записано в виде (4).*

5. Уравнения в полных дифференциалах.

Уравнение вида (4) называется уравнением в полных дифференциалах если его левая часть является полным дифференциалом от некоторой функции $F(x,y)$, то есть если $\exists F(x,y)$ такая, что

$$dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy. \tag{10}$$

При этом соотношение

$$F(x,y) = \mathrm{const} \tag{11}$$

задает решение уравнения (4) в неявном виде. Таким образом перед нами встают два вопроса:

1) Является ли левая часть уравнения (4) полным дифференциалом некоторой функции?

2) Как найти эту функцию?

Ответом на эти вопросы будет служить следующая теорема.

Теорема

Пусть функции $M(x,y)$, $N(x,y)$ – непрерывны в области $\mathcal{D}$ и имеют непрерывные производные первого порядка в этой области. Область $\mathcal{D}$ односвязна. Тогда уравнение (4) является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{12}$$

Замечание

Множество называется односвязным, если его граница – связное множество. Множество называется связным, если для любых двух точек из этого множества существует соединяющий их путь, целиком лежащий в этом множестве.

Замечание

Требование односвязности множества $\mathcal{D}$ нужно только для доказательства достаточности условия (12).

Необходимость.
Пусть уравнение (4) является уравнением в полных дифференциалах. Тогда $\exists F(x,y)$ такая, что выполнено условие (11). С другой стороны дифференциал функции $F(x,y)$ задается формулой

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy. \tag{13}$$

Из соотношений (10), (13) следует, что

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,\ y), \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,\ y). \end{cases} \tag{14}$$

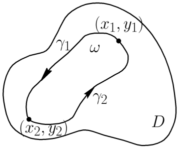
Продифференцируем равенства первое по y, второе по x. Получим соотношения

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x,\ y)}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x,\ y)}{\partial x} \end{cases} \tag{15}$$

Так как смешанные производные второго порядка непрерывны, порядок дифференцирования не имеет значения и следовательно

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Достаточность. В области $\mathcal{D}$ возьмем две фиксированные точки (x_1,y_1) и (x_2,y_2). Пусть γ_1 и γ_2^- два разных пути их соединяющих. Пусть ω область ограниченная этими кривыми.



По формуле Грина Будем иметь

$$0 = \int\int_{\omega} (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}) dxdy = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} Mdx + Ndy =$$

$$\int_{\gamma_1} Mdx + Ndy + \int_{\gamma_2} Mdx + Ndy =$$

$$= \int_{\gamma_1} Mdx + Ndy - \int_{\gamma_2^-} Mdx + Ndy.$$

Отсюда следует, что $\int_{\gamma} (M(x, y)dx + N(x, y)dy)$ не зависит от выбора пути интегрирования и следовательно функция

$$F(x, y) = \int_{\gamma} (M(x, y)dx + N(x, y)dy)$$

определена однозначно.

Метод решения уравнений вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Проверяем, верно ли, что $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Если да, то составляем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y), \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y). \end{cases}$$

Берём интеграл

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y),$$

предполагая, что $y = const$, затем приравниваем

$$\left(\int M(x,y)dx\right)'_y + \varphi(y)' = N(x,y),$$

$\varphi(y)$ получаем интегрированием.

Пример

Решим уравнение

$$2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

$$M(x,y) = 2xy, \quad N(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$F(x,y) = \int 2xydx = x^2y + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \varphi' = y^2$$

$$\varphi = \frac{y^3}{3}$$

$$x^2y + \frac{y^3}{3} = C$$