МИРЭА – Российский технологический университет
(РТУ МИРЭА)

Институт кибернетики
Кафедра высшей математики

Типовой расчет

по математическому анализу

Вариант 26

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Учебная группа: КМБО-00-20
Студент: Анонимус
Преподаватель: Костин С.В.

Москва 2020

Содержание

Задача 1.

Условие:

С помощью определения предела последовательности показать, что по-последовательность $u_n = \frac{9n+7}{2n-3}$ при $n \to \infty$ имеет своим пределом число $A = \frac{9}{2}$. Найти целое значение N начиная с которого $|u_n - A| < \varepsilon$ $(\varepsilon = 10^{-2})$.

Решение:

1) $|u_n - A| = |\frac{9n+7}{2n-3} - \frac{9}{2}| = |\frac{9n+7-9n+\frac{27}{2}}{2n-3}| = |\frac{20{,}5}{2n-3}|$.
Пусть ε - произвольное положительное число.
Тогда при $(n \to \infty)$ имеет место равенство $|u_n - A| = \frac{20{,}5}{2n-3}$.
Также справедливо и неравенство $\frac{20{,}5}{2n-3} < \varepsilon \Rightarrow \frac{20{,}5}{\varepsilon} + 3 < 2n \Rightarrow n > \frac{10{,}25}{\varepsilon} + 1{,}5$.
Положим, что $N = [\frac{10{,}25}{\varepsilon} + 1{,}5]$. Тогда, если $n > N$, то $|x_n - A| < \varepsilon$.
Таким образом, $(\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) = [\frac{10{,}25}{\varepsilon} + 1{,}5]) : (\forall n > N) \Rightarrow (|u_n - \frac{9}{2}| < \varepsilon)$
$\Rightarrow A -$ предел последовательности u_n по определению.
2) Тогда при $(\varepsilon = 10^{-2})$ $N(\varepsilon) = [\frac{10{,}25}{0{,}01} + 1{,}5] = 1026$
Ответ: 1026.

Задача 2.

Условие:

Вычислить предел $\lim_{x\to\pi/4}(2 - \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{x-\pi/4}}$

Решение:

$\lim\limits_{x\to\pi/4} (2 - \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{x-\pi/4}} = \{1^\infty\} = \{$замена: $t = x - \pi/4; x = t + \pi/4\} = \lim\limits_{t\to 0} (2 - \operatorname{tg}^2 (t + \pi/4))^{\frac{1}{t+\pi/4-\pi/4}} = \lim\limits_{t\to 0} (2 - \operatorname{tg}^2 (t + \pi/4))^{\frac{1}{t}} =$

$\lim\limits_{t\to 0} (1-(\operatorname{tg}^2 (t + \pi/4)-1))^{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{t\to 0} (1-(\operatorname{tg}^2 (t + \pi/4)-1))^{(-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 (t+\pi/4)-1})^{-\frac{\operatorname{tg}^2 (t+\pi/4)-1}{t}}} =$
$\{$так как $(\operatorname{tg}^2 (t + \pi/4) - 1) \to 0$ при $t \to 0$, то можно использовать второй замечательный придел$\} = \lim\limits_{t\to 0} (e)^{-\frac{\operatorname{tg}^2 (t+\pi/4)-1}{t}}$
Имеем неопределённость вида $[\frac{0}{0}]$, значит можно использовать правило Лопиталя для степени:
$\lim\limits_{t\to 0} \frac{(\operatorname{tg}^2 (t+\pi/4)-1)'}{(-t)'} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{2 \operatorname{tg} (t+\pi/4)\cdot(\operatorname{tg} (t+\pi/4)-1)'}{-1} = \lim\limits_{t\to 0} -2 \operatorname{tg} (t + \pi/4) \cdot \frac{(t+\pi/4)'}{\cos^2 (t+\pi/4)} =$
$\lim\limits_{t\to 0} \frac{-2 \operatorname{tg} (t+\pi/4)}{\cos^2 (t+\pi/4)} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{-2 \sin (t+\pi/4)}{\cos^3 (t+\pi/4)} = \frac{-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{8}} = \frac{-1}{\frac{2}{8}} = -4$

Имеем:
$\lim\limits_{t\to 0} (e)^{-4} = e^{-4}$
Ответ: e^{-4}

Задача 3.

Условие:

Вычислить производную $y'(x)$ при $y(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

Решение:

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= (\sqrt[3]{x+\sqrt{x}})' = \\
&= (x+\sqrt{x})' \cdot \frac{1}{3}(x+\sqrt{x})^{\frac{1}{3}-1} = \\
&= (x+\sqrt{x})' \cdot \frac{1}{(x+\sqrt{x})^{\frac{2}{3}}} = \\
&= (x'+\sqrt{x}') \cdot \frac{1}{(x+\sqrt{x})^{\frac{2}{3}}} = \\
&= (1+\frac{1}{2\sqrt{x}}) \cdot \frac{1}{(x+\sqrt{x})^{\frac{2}{3}}} = \\
&= \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(x+\sqrt{x})^{\frac{2}{3}}}
\end{aligned}
$$

Ответ: $\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(x+\sqrt{x})^{\frac{2}{3}}}$

Задача 4.

Условие:

Вычислить производную $y'(x)$ при $y(x) = \ln\frac{(x-2)^5}{(x+3)^3}$

Решение:

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \left(\ln\frac{(x-2)^5}{(x+3)^3}\right)' = \\
&= \ln((x-2)^5)' + \ln\left(\frac{1}{(x+3)^3}\right)' = \\
&= \ln\left((x-2)^5\right)' + \ln\left(\frac{1}{(x+3)^3}\right)' = \\
&= \left((x-2)^5\right)' \cdot \frac{1}{(x-2)^5} + (x+3)^3 \cdot \frac{1}{(x+3)^3}' = \\
&= 5(x-2)^4 \cdot \frac{1}{(x-2)^5} + (x+3)^3 \cdot \left((x+3)^{-3}\right)' = \\
&= \frac{5}{x-2} + (x+3)^3 \cdot \frac{-3}{(x+3)^4} = \\
&= \frac{5}{x-2} + \frac{-3}{x+3} = \frac{2x+21}{x^2+x-6}
\end{aligned}
$$

Ответ: $\frac{2x+21}{x^2+x-6}$

Задача 5.

Условие:

Вычислить логарифмическую производную $y'(x)$ при $y(x) = \sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2(x+1)}}$

Решение:

Возьмём натуральный логарифм от левой и правой части:

$$\ln y = \ln f(x)$$

$$\ln(y) = ln(\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2(x+1)}}) = \frac{1}{4}\ln\left(x^3\sqrt[3]{x^2(x+1)}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(3\ln(x) + \ \frac{2}{3}ln(x) + \frac{1}{3}\ln(x+1)\right)$$

Возьмём производную от левой и правой части уравнения:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{x} + \frac{2}{3x} + \frac{1}{3x+3}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{x} + \frac{2}{3x} + \frac{1}{3x+3}\right)\left(\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2(x+1)}}\right) =$$
$$= \left(\frac{3}{4x} + \frac{2}{12x} + \frac{1}{12x+12}\right)\left(\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2(x+1)}}\right) =$$
$$= \left(\frac{3\cdot 3\cdot 12\cdot(x+1)}{(12x)(12x+12)} + \frac{2\cdot 12(x+1)}{(12x)(12x+12)} + \frac{12x}{(12x)(12x+12)}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2(x+1)}}\right) =$$
$$= \left(\frac{9x+9+2x+2+x}{(12x)(x+1)}\right)\left(\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2(x+1)}}\right) =$$
$$= \left(\frac{12x+11}{(12x)(x+1)}\right)\left(\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2(x+1)}}\right)$$

Ответ: $\left(\frac{12x+11}{(12x)(x+1)}\right)\left(\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2(x+1)}}\right)$

Задача 6.

Условие:

Вычислить производную $y'(x)$ функции, заданной параметрически.

$$y(x) = \begin{cases} x = \ln(t) \\ y = \sin^2(t) \end{cases}$$

Решение:

$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, где $x'_t = \frac{1}{t}$; $y'_t = 2\sin(t)\cos(t) \Rightarrow y'_x = \frac{\frac{1}{t}}{2\sin(t)\cos(t)} = \frac{\sin(2t)}{t}$

Ответ: $\frac{\sin(2t)}{t}$

Задача 7.

Условие:
Вычислить производную $y'(x)$ функции, заданной неявно уравнением $F(x,y) = 0$, где $F(x,y) = \ln(x+y) - \frac{8}{\sqrt{x+y^2}}$.

Решение:

$y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$

$F'_x = \frac{1}{x+y} - (8(x+y^2)^{-\frac{1}{2}})' = \frac{1}{x+y} + 4(x+y^2)^{-\frac{3}{2}}$

$F'_y = \frac{1}{x+y} - (8(x+y^2)^{-\frac{1}{2}})' = \frac{1}{x+y} + 8y(x+y^2)^{-\frac{3}{2}}$

$y' = \frac{\frac{1}{x+y}+4(x+y^2)^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{x+y}+8y(x+y^2)^{-\frac{3}{2}}}$

Задача 8.

Условие:
Нати предел $\lim\limits_{x\to\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sin^2(\pi/2-x)}$, используя правило Лопиталя.

Решение:

$\lim\limits_{x\to\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sin^2(\pi/2-x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{(\cos^2 x)'} = \lim\limits_{x\to\pi/2} \left(\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{2\cdot\cos x\cdot(\cos x)'}\right) =$
$= \lim\limits_{x\to\pi/2} \left(\frac{\cos x}{\sin x\cdot(-2)\cdot\cos x\cdot\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to\pi/2} \frac{1}{-2\cdot\sin^2 x} = -\frac{1}{2}$

Задача 9.

Условие:
Нати предел $\lim\limits_{x\to0} \frac{2^x+2^{-x}-2}{x^2}$, используя правило Лопиталя.

Решение:

$\lim\limits_{x\to0} \frac{2^x+2^{-x}-2}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to0} \frac{(2^x+2^{-x}-2)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x\to0} \frac{2^x\cdot\ln(2)+2^{-x}\cdot\ln(2)}{2x} = \left[\frac{2\cdot\ln(2)}{0}\right] = \infty$

Задача 10.

Условие:
Функцию $y = f(x) = (x^2+7x)\ln(4x+3)$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 до $o((x-x_0)^n)$, где $x_0 = 1; n = 4$.

Решение:

$(x^2+7x)\ln(4x+3) = \begin{bmatrix} t = x - x_0 = x - 1 \\ x = t + x_0 = t + 1 \end{bmatrix} = ((t+1)^2+7(t+1))\ln(4(t+1)+3) =$
$= (t^2+2t+1+7t+7)\ln(4t+7) = (t^2+9t+8)\ln(7(\frac{4}{7}t+1)) =$
$= (t^2+9t+8)(\ln(7)+\ln\left(\frac{4}{7}t+1\right)) =$
$= \left(t^2+9t+8\right)\left(\ln(7) + \left(\frac{4}{7}t - \frac{\left(\frac{4}{7}t\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{4}{7}t\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{4}{7}t\right)^4}{4} + o(t^4)\right)\right) =$
$= \ln(7)t^2 + 9\ln(7)t + 8\ln(7) + \left(\frac{4}{7}t^3 + \frac{36}{7}t^2 + \frac{32}{7}t\right) - \left(\frac{4^2}{2\cdot7^2}t^4 + \frac{9\cdot4^2}{2\cdot7^2}t^3 + \frac{8\cdot4^2}{2\cdot7^2}t^2\right) +$
$+ \left(\frac{4^3}{2\cdot7^3}t^5 + \frac{9\cdot4^3}{2\cdot7^3}t^4 + \frac{8\cdot4^3}{2\cdot7^3}t^3\right) - \left(\frac{4^4}{2\cdot7^4}t^6 + \frac{9\cdot4^4}{2\cdot7^4}t^5 + \frac{8\cdot4^4}{2\cdot7^4}t^4\right) + o(t^4) =$

$= \left(\frac{9\cdot4^3}{2\cdot7^3} - \frac{4^2}{2\cdot7^2} - \frac{8\cdot4^4}{2\cdot7^4}\right)\cdot t^4 + \left(\frac{8\cdot4^3}{2\cdot7^3} - \frac{9\cdot4^2}{2\cdot7^2} + \frac{4}{7}\right)\cdot t^3 + \left(\frac{36}{7} + \ln(7) - \frac{8\cdot4^2}{2\cdot7^2}\right)\cdot t^2 +$
$+ \left(\frac{32}{7} + 9\ln(7)\right)\cdot t + 8\ln(7) + o(t^4) =$
$= \frac{600}{2401}t^4 - \frac{52}{343}t^3 + \frac{188+49\ln(7)}{49}t^2 + \frac{32+63\ln(7)}{7}t + 8\ln(7) + o(t^4) = \left[\text{обратная замена: } t = x-1\right] =$

$= \frac{600}{2401}(x-1)^4 - \frac{52}{343}(x-1)^3 + \frac{188+49\ln(7)}{49}(x-1)^2 + \frac{32+63\ln(7)}{7}(x-1) + 8\ln(7) + o(t^4)$

Задача 11.

Условие:

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{e^{-2}+2\sin x-1}$
а) используя разложение по формуле Тейлора;
б) с помощью правила Лопиталя.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{e^{-2x}+2\sin x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \begin{bmatrix} 2\sin x \sim 2x \\ e^{-2x} \text{ разложим по формуле Тейлора}\end{bmatrix} =$
$= \lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\left(1+(-2x)+\frac{(-2x)^2}{2!}+o(x^2)\right)+2x-1} = \lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{4x^2}{2}} = \frac{1}{2}$
б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{e^{-2x}+2\sin x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{-2e^{-2x}+2\cos x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{x}{-e^{-2x}+\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2e^{-2x}-\sin x} = \frac{1}{2}$

Задача 12.

Условие:

Построить график функции $y = \frac{-2x^3-4x^2-8x+12}{x^2+2x-3}$

Решение:

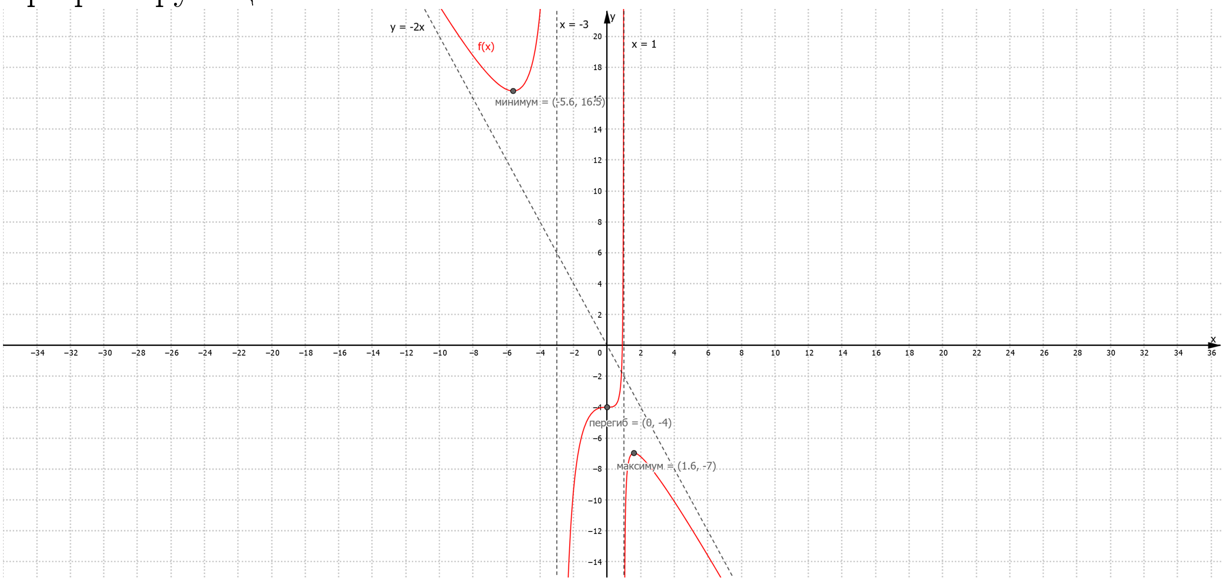
$$y = \frac{-2x^3-4x^2-8x+12}{x^2+2x-3} = \frac{-2x^3-4x^2-8x+12}{(x+3)\cdot(x-1)}$$

Область определения: $x \neq -3$; $x \neq 1$ (нули знаменателя).
Функция имеет вид $y = P(x)/Q(x)$. $P(-3) = 54 \neq 0$, $P(1) = -2 \neq 0 \Rightarrow$ прямые $x=-3$ и $x=1$ являются вертикальными ассимптотами.
При этом значение функции стремится $-\infty$, когда x стремится к -3 справа или к 1 справа.
Значение функции стремится к ∞, когда x стремится к -3 слева и к 1 слева.
Выделим целую часть дроби:
$y = -2x + \frac{-14x+12}{x^2+2x-3} \Rightarrow$ прямая $y=-2x$ является наклонной асимтотой. График функции пересекает её в точке $x = 12/14 \approx 0{,}85$

$$y' = -\frac{2x^2 \cdot \left(x^2 + 4x - 9\right)}{\left(x^2 + 2x - 3\right)^2}$$

$$y'' = -\frac{4x \cdot \left(7x^2 - 18x + 27\right)}{\left(x^2 + 2x - 3\right)^3}$$

$\Rightarrow x = 0$ - точка перегиба;
$x = -2 - \sqrt{13} \approx -5{,}6$ - точка минимума;
$x = -2 + \sqrt{13} \approx 1{,}6$ - точка максимума.
График функции:



Задача 13.

Условие:
Построить график функции $y = (x - 1) \cdot \sqrt[3]{x^2}$

Решение:
Функция обращается в нуль в двух точках: $x = 0$ и $x = 1$. При $x > 1$ функция положительна и монотонно возрастает. При больших положительных x имеем:

$$y \approx x \cdot x^{2/3} = x^{5/3}$$

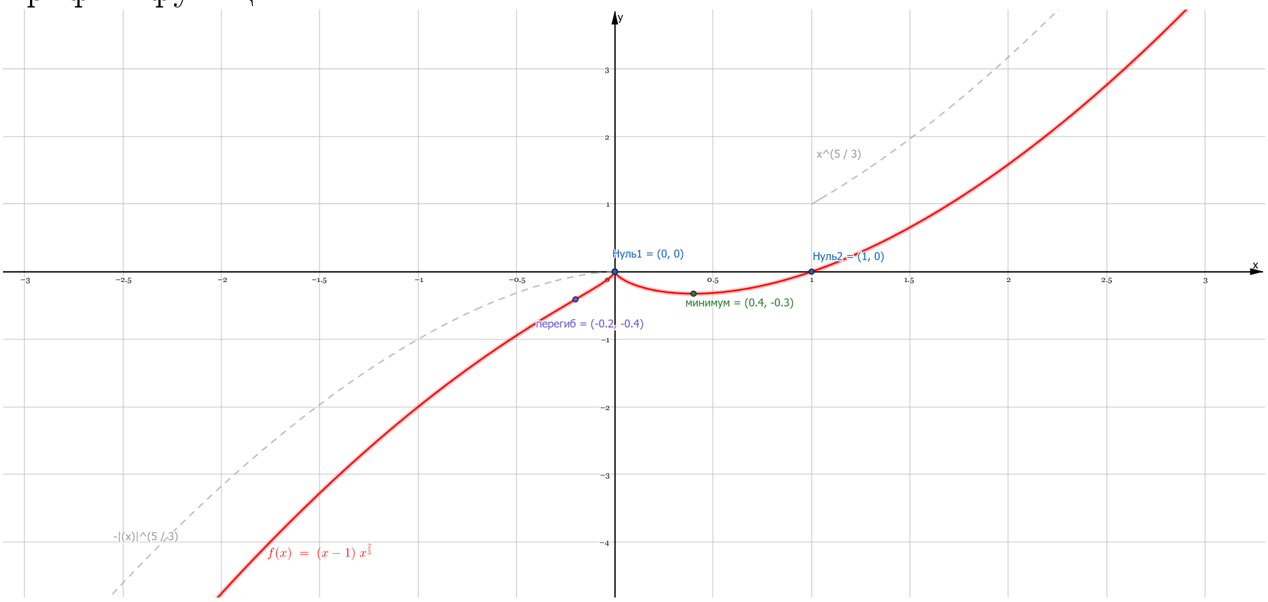
При $x < 0$ значения функции отрицательны. На интервале $(0;\ 1)$ достигается локальный минимум функции. При больших отрицательных значениях x имеем:

$$y \approx -|x|^{5/3}$$

1 и 2 производные:

$$y' = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$$
$$y'' = \frac{2\,(5x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

$x = \frac{2}{5}$ - точка минимума.
$x = -\frac{1}{5}$ - точка перегиба.
При $x = 0$ производная y' обращается в бесконечность - касательная к графику в этой точке вертикальна.
График функции:



Задача 14.

Условие:
Построить график функции $y = x\,(2-\ln x)^2$

Решение:
Область определения: $x > 0$.
Нули функции: $x = e^2 \approx 7{,}4$.
$\lim\limits_{x\to 0} x\,(2-\ln x)^2 = 0$
Производные:

$$y' = -(2-\ln x)\cdot \ln x$$
$$y'' = \frac{2\,(\ln x - 1)}{x}$$

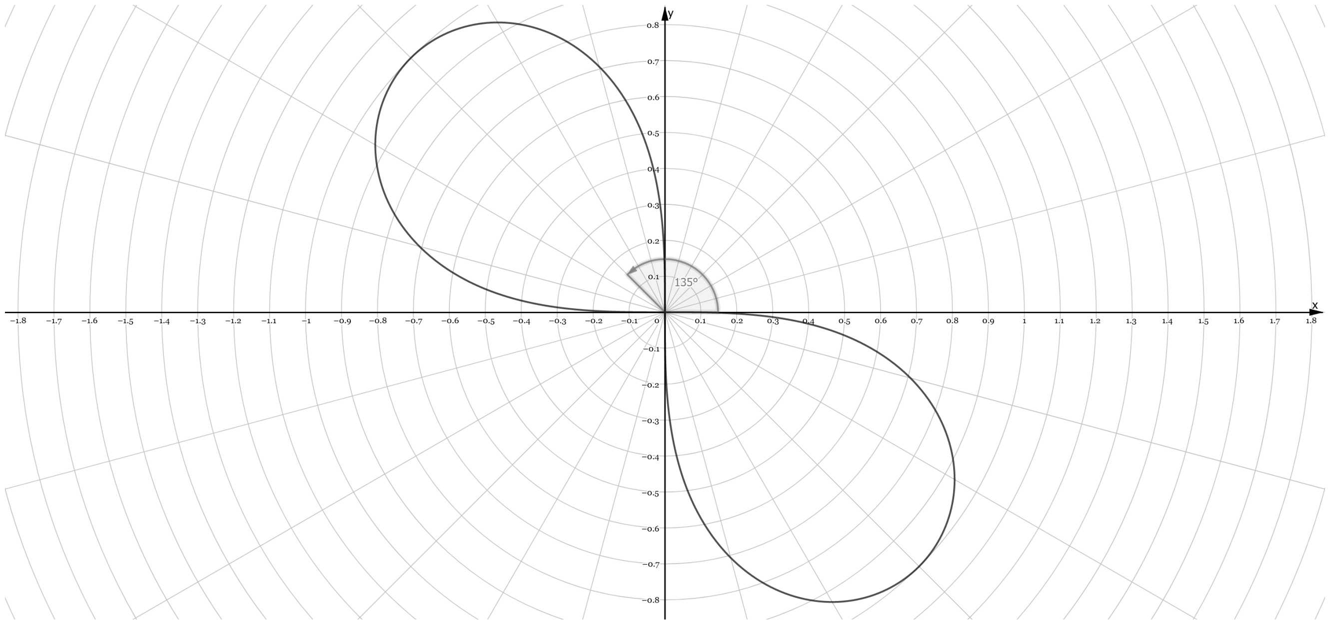
$x = 1$ - точка локального максимума.
$x = x = e^2 \approx 7{,}4$ - точка минимума $\Rightarrow$ функция возрастает на промежутке от 0 до 1 и от 7,4 до $+\infty$.

$x = e \approx 2{,}7$ - точка перегиба.
График функции:

Задача 15.

Условие:
Построить линию, заданную уравнением $\rho = \sqrt{\sin(-2\varphi)}$ в полярных координатах $(\rho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$.

Решение:
Область определения: $\pi n - \pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
Период функции равен $2\pi/2 = 180^\circ \Rightarrow$ будет 2 "лепестка".
При возрастании угла φ от 90° до 135° значение функции возрастает от 0 до 1. При дальнейшем увеличении угла φ до 180° значение функции убывает до 0.
График функции:



Задача 16.

Условие:
Вычислить приближённо $\sqrt[3]{124}$.

Решение:

$$y(x_1) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x_1 - x_0) \tag{1}$$

Положим, $y(x) = \sqrt[3]{x};\ x_0 = 125;\ x_1 = 124.$
Тогда $y(x_0) = \sqrt[3]{125} = 5;\ \ y'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}};\ y'(x_0) = \frac{1}{3\cdot 125^{2/3}} = \frac{1}{75}$
Подставим найденные значения в формулу (1):

$$y(x_1) = \sqrt[3]{124} \approx 5 + \frac{1}{75}\cdot(124 - 125) = \frac{374}{75} \approx 4{,}986$$

Ответ:
$\sqrt[3]{124} \approx 4{,}986$

Задача 17.

Условие:
Вычислить приближённо $5^{2{,}8}$.

Решение:

$$y(x_1) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x_1 - x_0) \tag{2}$$

а) Положим, $y(x) = 5^x;\ x_0 = 3;\ x_1 = 2{,}8.$
Тогда $y(x_0) = 5^3 = 125;\ \ y'(x) = 5^x\cdot\ln(5);\ \ln(5) \approx 1{,}609;$
$y'(x_0) = 5^3\cdot 1{,}609 = 201{,}125$

Подставим найденные значения в формулу (2):

$$y(x_1) = 5^{2{,}8} \approx 125 + 201{,}125 \cdot (2{,}8 - 3) = 125 - 40{,}225 = 84{,}775$$

б) $5^{2{,}8} = 5^{14/5}$
Положим, $y(x) = \sqrt[5]{x};\ x_0 = 5^{15};\ x_1 = 5^{14}$.
Тогда $y(x_0) = \sqrt[5]{5^{15}} = 5^3 = 125;\ \ y'(x) = \frac{1}{5x^{4/5}}$;
$y'(x_0) = \frac{1}{5 \cdot (5^{15})^{4/5}} = \frac{1}{5^{13}}$
Подставим найденные значения в формулу (2):

$$y(x_1) = 5^{2{,}8} \approx 5^3 + \frac{1}{5^{13}} \cdot \left(5^{14} - 5^{15}\right) = 105$$

Среднее значение между двумя полученными ответами: $(84{,}775 + 105)/2 = 94{,}8875$

Ответ:
$5^{2{,}8} \approx 94{,}8875$

Решение:

Задача 18.

Условие:
Вычислить частные производные первого порядка для функции $z = y^x$.

Решение:

$$z'_x = (y^x)'_x = y^x \cdot \ln(y)$$
$$z'_y = (y^x)'_y = x \cdot y^{x-1}$$

Задача 19.

Условие:
Вычислить смешанные производные второго порядка и проверить, что они равны для функции $z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$.

Решение:

$$z''_{xy} = \left(\left(\ln\left(x^2+xy+y^2\right)\right)'_x\right)'_y = \left(\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}\right)'_y =$$
$$= \frac{x^2+xy+y^2-(2x+y)\cdot(x+2y)}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2} = -\frac{x^2+4xy+y^2}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}$$

$$z''_{yx} = \left(\left(\ln\left(x^2+xy+y^2\right)\right)'_y\right)'_x = \left(\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2}\right)'_x =$$
$$= \frac{x^2+xy+y^2-(x+2y)\cdot(2x+y)}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2} = -\frac{x^2+4xy+y^2}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}$$

$\Rightarrow$ смешанные производные второго порядка равны для функции z.

Задача 20.

Условие:

Найти и исследовать точки экстремума функции

$$u = x^2 + 17y^2 + 3z^2 + 2xy - xz - 7yz$$

Решение:

$$u'_x = 2x + 2y - z = 0$$
$$u'_y = 2x + 34y - 7z = 0$$
$$u'_z = -x - 7y + 6z = 0$$

Решим получившуюся систему методом Крамера.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 34 & -7 \\ -1 & -7 & 6 \end{pmatrix}, \quad \Delta A = 280 \neq 0$$

$\Rightarrow$ система имеет единственное решение.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 34 & -7 \\ 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x = \frac{D_1}{D} = 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -7 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y = \frac{D_2}{D} = 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 34 & 0 \\ -1 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z = \frac{D_3}{D} = 0$$

Имеем стационарную точку $M_0\,(0;\ 0;\ 0)$, в которой выполнено необходимое условие экстремума. Проверим выполнение достаточного условия экстремума. Применим критерий Сильвестра.
Вычислим в M_0 вторые производные:

$$u''_{xx} = 2; \quad u''_{yy} = 34; \quad u''_{zz} = 6$$
$$u''_{xy} = 2; \quad u''_{yz} = -7; \quad u''_{xz} = -1$$

и составим из них матрицу $A = ||a_{ij}||$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 34 & -7 \\ -1 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Угловые миноры матрицы A:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 34 \end{vmatrix} = 64$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 34 & -7 \\ -1 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 280$$

$\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$ $\Rightarrow$ в точке M_0 функция $u(x,y,z)$ имеет локальный минимум.