ТР №6

1) Доказать, что множество $M=\{\alpha+\beta\cos t+\gamma\cos^2 t+\delta\cos 2t\}$, заданных на области $D=(-\infty,\infty)$, образует линейное пространство.

В31. $M=\{\alpha+\beta\cos t+\gamma\cos^2 t+\delta\cos 2t\}=L[1,\cos t,\cos^2 t,\cos 2t]\subset C(-\infty,\infty)$

M-линейная оболочка $1,\cos t,\cos^2 t,\cos 2t\in C(-\infty,\infty)\Rightarrow$

$\Rightarrow$ M-линейное подпространство пространства непрерывных функций, определенных на $(-\infty,\infty)\Rightarrow$

$\Rightarrow$ M-линейное пространство.

2) Найти размерность и базис M

$M=L[1,\cos t,\cos^2 t,\cos 2t]\Rightarrow 1,\cos t,\cos^2 t,\cos 2t$ - полная система в M, но

$\cos 2t=2\cos^2 t-1$, т. е. $\cos 2t\in L[1,\cos^2 t]\Rightarrow$

$\Rightarrow 1,\cos t,\cos^2 t,\cos 2t$ - линейно зависимая система в M

Рассмотрим систему $1,\cos t,\cos^2 t$ и докажем, что она линейно независима.

Пусть $\alpha 1+\beta\cos t+\gamma\cos^2 t=0\quad\forall t\in(-\infty,\infty)$

Подставим
$$\begin{array}{l} t=0 \\ t=\frac{\pi}{2} \\ t=\pi \end{array}\quad\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha=0\\ \alpha-\beta+\gamma=0\end{cases}$$

$\begin{cases}\alpha=0\\ \beta+\gamma=0\\ -\beta+\gamma=0\end{cases}\begin{cases}\alpha=0\\ 2\gamma=0\\ 2\beta=0\end{cases}\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=0$

$\Rightarrow 1,\cos t,\cos^2 t$ - лин. независимая система векторов.

0) $1\in M$ $(\alpha=1,\beta=\gamma=\delta=0)$
$\cos t\in M$ $(\alpha=0,\beta=1,\gamma=\delta=0)$
$\cos^2 t\in M$ $(\alpha=\beta=0,\gamma=1,\delta=0)$

1) $1,\cos t,\cos^2 t$ - линейно независимая система векторов в M

2) $\alpha+\beta\cos t+\gamma\cos^2 t+\delta\cos 2t=\alpha+\beta\cos t+\gamma\cos^2 t+\delta(2\cos^2 t-1)=$
$=(\alpha-\delta)1+\beta\cos t+(\gamma+2\delta)\cos^2 t\in L[1,\cos t,\cos^2 t]\Rightarrow$
$\Rightarrow 1,\cos t,\cos^2 t$ - полная система в M

$\left.\begin{array}{l}0)\\1)\\2)\end{array}\right\}\Rightarrow\langle 1,\cos t,\cos^2 t\rangle$ - базис M $\Rightarrow\dim M=3$

ТР N5

1. Доказать, что множество М образует подпространство в пространстве $R^{m\times n}$ всех матриц данного размера.

В 31

$$M = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ X \mid AX = \bar{0},\ \text{где } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset R^{3\times 2}$$

1а) Докажем, что М – лин. подпространство $R^{3\times 2}$

Проверим замкнутость М относительно линейных операций.

1) $X, Y \in M$, т.е. $X, Y \in R^{3\times 2}$ и $\begin{cases} AX = \bar{0} \\ AY = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow X+Y \in R^{3\times 2}$ и $A(X+Y) = AX + AY = \bar{0} + \bar{0} = 0 \Rightarrow X+Y \in M$, т.е. М замкнуто относительно сложения;

2) $X \in M$, т.е. $X \in R^{3\times 2}$ и $AX = \bar{0}$, $\lambda \in R \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda X \in R^{3\times 2}$ и $A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda \bar{0} = \bar{0} \Rightarrow \lambda X \in M$, т.е. М замкнуто относительно умножения на число.

$\left.\begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ М – лин. подпространство $R^{3\times 2} \Rightarrow$ М – линейное пространство

1б) Найдем общий вид элементов $X \in M$

Пусть $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ f & g \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a-f & b-g \\ c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a-f=0 \\ b-g=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} f=a \\ g=b \\ c=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$M = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \right\}$$

Можно сначала сделать пункт 1б), а потом 1а)

Тогда 1а) 1) $X, Y \in M$, т.е. $X = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow X+Y = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ 0 & 0 \\ a_1+a_2 & b_1+b_2 \end{pmatrix} \in M$, т.е. М замкнуто относительно сложения;

2) $X \in M$, т.е. $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$, $\lambda \in R \Rightarrow \lambda X = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ 0 & 0 \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix} \in M$, т.е. М замкнуто относительно умножения на число.

$\left.\begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ М – линейное подпространство $R^{3\times 2} \Rightarrow$ М – лин. пр-во.

2. Найти размерность и построить базис М.

$$M = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \right\}$$

0) $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$

$a=1$, $b=0$ $\qquad$ $a=0$, $b=1$

2') $\forall X \in M \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2$,

т.е. $X \in L[E_1, E_2]$, $M = L[E_1, E_2] \Rightarrow$

$\Rightarrow E_1, E_2$ – полная система векторов в M

1) Пусть $\alpha E_1 + \beta E_2 = \bar{O}$

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow E_1, E_2$ - линейно независима система векторов в М.

$\left.\begin{matrix} 0) \\ 1) \\ 2') \end{matrix}\right\} \Rightarrow e = \langle E_1, E_2 \rangle$ – базис $M \Rightarrow \dim M = 2$.

3. Проверить, что матрица $B \in M$ и разложить её по базису М.

$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in M$, т.к. B имеет нужный вид $(a=1, b=-2)$

$$B = 1E_1 + (-2)E_2 = e\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ТР №4.

В31. $M=\{p(t)\in P_4 \mid p(2)=p(3)=0\}\subset P_4$

1. Доказать, что множество M - линейное подпространство P_4.

1б) Найдем общий вид элементов $p(t)\in M$

$p(t)$: $\deg p(t)\le 4$, $p(2)=p(3)=0$.

$p(t)\,\vdots\,(t-2)(t-3)=t^2-5t+6 \Rightarrow$

$\Rightarrow p(t)=(t^2-5t+6)\,q(t)$, $\deg p(t)\le 4 \Rightarrow \deg q(t)\le 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow p(t)=(t^2-5t+6)(at^2+bt+c) \Rightarrow$

$\Rightarrow M=\{p(t)=(t^2-5t+6)(at^2+bt+c)\}$

1а) Докажем, что M - линейное подпространство P_4.

1) $p_1(t), p_2(t)\in M$, т.е. $\begin{cases} p_1(t)=(t^2-5t+6)(a_1t^2+b_1t+c_1) \\ p_2(t)=(t^2-5t+6)(a_2t^2+b_2t+c_2) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow p_1(t)+p_2(t)=(t^2-5t+6)\big((a_1+a_2)t^2+(b_1+b_2)t+(c_1+c_2)\big)\in M$,

т.е. M замкнуто относительно сложения

2) $p(t)\in M$, т.е. $p(t)=(t^2-5t+6)(at^2+bt+c)$, $\lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda p(t)=(t^2-5t+6)(\lambda at^2+\lambda bt+\lambda c)\in M$, т.е.

M замкнуто относительно умножения на число

$\left.\begin{matrix}1)\\2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow M$ - линейное подпространство $P_4 \Rightarrow$

$\Rightarrow M$ - линейное пространство

1а) Можно сделать по-другому.

1) $p_1(t), p_2(t)\in M$, т.е. $\begin{cases} \deg p_1(t)\le 4, & p_1(2)=p_1(3)=0 \\ \deg p_2(t)\le 4, & p_2(2)=p_2(3)=0 \end{cases} \Rightarrow \deg(p_1(t)+p_2(t))\le 4$,

$p_1(2)+p_2(2)=0+0=0$, $p_1(3)+p_2(3)=0+0=0 \Rightarrow p_1(t)+p_2(t)\in M$,

т.е. M замкнуто относительно сложения

2) $p(t)\in M$, т.е. $\deg p(t)\le 4$, $p(2)=p(3)=0$, $\lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow \deg(\lambda p(t))\le 4$,

$(\lambda p)(2)=\lambda p(2)=0$, $(\lambda p)(3)=\lambda p(3)=0 \Rightarrow \lambda p(t)\in M$, т.е. M замкн. отн. умн. на число

2) Найти размерность и какой-либо базис подпространства M

$$M = \{p(t) = (t^2-5t+6)(at^2+bt+c)\} =$$
$$= \{p(t) = at^2(t^2-5t+6) + bt(t^2-5t+6) + c(t^2-5t+6)\} =$$
$$= \{p(t) = a(t^4-5t^3+6t^2) + b(t^3-5t^2+6t) + c(t^2-5t+6)\} =$$

0) $p_1(t) = t^4-5t^3+6t^2 \in M \quad (a=1, b=0, c=0)$
$p_2(t) = t^3-5t^2+6t \in M \quad (a=0, b=1, c=0)$
$p_3(t) = t^2-5t+6 \in M \quad (a=0, b=0, c=1)$

2') $M = L[p_1, p_2, p_3]$, $\forall p(t) \in M \; p(t) = ap_1 + bp_2 + cp_3 \Rightarrow$
$\Rightarrow p_1, p_2, p_3$ – полная система в M

1) $M \subset P_4$, в P_4 $e = \langle t^4, t^3, t^2, t, 1\rangle$ – естественный базис

Найдем координаты многочленов p_1, p_2, p_3 в базисе e

$$p_1(t) = t^4-5t^3+6t^2 = (t^4, t^3, t^2, t, 1)\begin{pmatrix}1\\-5\\6\\0\\0\end{pmatrix} = e\begin{pmatrix}1\\-5\\6\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$p_2(t) = t^3-5t^2+6t = (t^4, t^3, t^2, t, 1)\begin{pmatrix}0\\1\\-5\\6\\0\end{pmatrix} = e\begin{pmatrix}0\\1\\-5\\6\\0\end{pmatrix}$$

$$p_3(t) = t^2-5t+6 = (t^4, t^3, t^2, t, 1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-5\\6\end{pmatrix} = e\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-5\\6\end{pmatrix}$$

Составим матрицу A, записав координаты p_1, p_2, p_3 в базисе e в её строки, и найдем её ранг.

$$A = \begin{pmatrix}1 & -5 & 6 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -5 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -5 & 6\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}, \; \operatorname{rk} A = 3 \Rightarrow \text{строки } A_1, A_2, A_3 \text{ линейно независимы} \Rightarrow$$

$\Rightarrow p_1(t) = eA_1^T = t^4-5t^3+6t^2$, $p_2(t) = eA_2^T = t^3-5t^2+6t$, $p_3(t) = eA_3^T = t^2-5t+6$ – линейно независимая система

$$\left.\begin{matrix}0)\\1)\\2')\end{matrix}\right\} \Rightarrow \langle p_1, p_2, p_3\rangle \text{ – базис } M \Rightarrow \dim M = 3$$

3) Дополнить базис подпространства M до базиса P_4.

$\dim P_4 = 5$.

Нужно добавить к системе p_1, p_2, p_3 два вектора (многочлена) $q_1, q_2 \in P_4$, выбрав их так, чтобы система p_1, p_2, p_3, q_1, q_2 была линейно независимой.

Построим матрицу B, добавив 2 строки к матрице A таких, чтобы $\mathrm{rk} B = 5$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rk} B = 5 \Rightarrow \text{строки } B_1 = A_1, B_2 = A_2, B_3 = A_3, B_4, B_5 -$$
линейно независимы $\Rightarrow$

$\Rightarrow p_1 = eA_1^T = eB_1^T,\ p_2 = eA_2^T = eB_2^T,\ p_3 = eA_3^T = B_3^T,\ q_1 = eB_4^T,\ q_5 = eB_5^T$ – линейно независимая система векторов P_4.

0) $p_1(t) = e\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t^4 - 5t^3 + 6t^2 \in P_4$

$p_2(t) = e\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = t^3 - 5t^2 + 6t \in P_4$

$p_3(t) = e\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = t^2 - 5t + 6 \in P_4$

$q_1(t) = e\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t \in P_4$

$q_2(t) = e\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \in P_4$

1) p_1, p_2, p_3, q_1, q_2 – линейно независимая система векторов P_4

2) $\dim P_4 = 5$

$\left.\begin{matrix} 0) \\ 1) \\ 2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \langle p_1, p_2, p_3, q_1, q_2 \rangle$ – базис P_4