Лекция 8-9.

Поверхности второго порядка.

Эллипсоид.

Определение. *Эллипсоидом* называется поверхность Ф, имеющая каноническое уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (1)$$

В сечениях плоскостями $z=h$ получаем кривую

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \qquad (*)$$

Если $|h|\neq c$, то обозначим $a'^2=a^2|1-\frac{h^2}{c^2}|$, $b'^2=b^2|1-\frac{h^2}{c^2}|$.

При $|h|<c$ получаем эллипсы $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1$, полуоси которых a' и b' достигают максимального значения a и b при $h=0$.

При $|h|>c$ получаем мнимые эллипсы $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=-1$ ($\varnothing$). А при $h=\pm c$ из $(*)$ получаем уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$, которое задает только одну из точек $C_1(0,0,c)$ или $C_2(0,0,-c)$.

Аналогично, для сечений плоскостями $x=h$, или $y=h$.

Геометрические свойства эллипсоида.

1. Из (1) получаем, что $|x|\leq a$, $|y|\leq b$, $|z|\leq c$. Т.е., весь эллипсоид содержится в параллелепипеде, который определяется этими неравенствами.

2. Координатные оси пересекают эллипсоид в точках $A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$, $B_1(0,b,0)$, $B_2(0,-b,0)$, $C_1(0,0,c)$, $C_2(0,0,-c)$, которые называются вершинами эллипсоида.

3. Координатные оси являются осями симметрии эллипсоида, координатные плоскости – плоскостями симметрии, начало координат O – центром симметрии.

4. При $a=b$ эллипсоид будет поверхностью вращения вокруг Oz. Действительно, в этом случае его уравнение можно переписать так:

$$\frac{(\sqrt{x^2+y^2})^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

При $a=b=c$ эллипсоид будет сферой:

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \qquad (**).$$

(1) может быть получен из сферы (**) в результате равномерного сжатия по взаимно перпендикулярным направлениям. Действительно, если в (**) сделать замену координат $x = x'$, $y = \frac{a}{b} y'$, $z = \frac{a}{c} z'$, то получим уравнение (1).

Однополостной и двуполостной гиперболоиды.

Определение. *Однополостным и двуполостным гиперболоидами* называются поверхности, имеющие канонические уравнения соответственно вида

$$\Phi_1:\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (2) \qquad\qquad \Phi_2:\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \qquad (3)$$

В сечениях плоскостями $z = h$ получаем соответственно кривые

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \qquad\Bigg|\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{h^2}{c^2} \quad (*)$$

Обозначим

$$a'^2 = a^2\left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right),\ b'^2 = b^2\left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right); \qquad\Bigg|\qquad a'^2 = a^2\left|-1 + \frac{h^2}{c^2}\right|,\ b'^2 = b^2\left|-1 + \frac{h^2}{c^2}\right|,$$

$h \neq \pm c$

при любом h получаем эллипсы | при $|h| > c$ получаем эллипсы

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

В сечениях плоскостями $y = h$ получаем соответственно кривые

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2} \quad (**) \qquad\Bigg|\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{c^2}$$

Обозначим соответственно

$$a'^2 = a^2\left|1 - \frac{h^2}{b^2}\right|,\ c'^2 = c^2\left|1 - \frac{h^2}{b^2}\right| \qquad\Bigg|\qquad a'^2 = a^2\left(1 + \frac{h^2}{b^2}\right),\ c'^2 = c^2\left(1 + \frac{h^2}{b^2}\right).$$

и при $h \neq \pm b$ получаем гиперболы,

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = \pm 1,$$

а при $h = \pm b$ (**) превращается в уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, которое задает пару пересекающихся прямых.

и при любом h получаем гиперболы

$$-\frac{x^2}{a'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1.$$

Аналогично, в сечениях Φ_2 плоскостями $y = h$ получаем только гиперболы, а в сечениях Φ_1 – гиперболы или пары прямых при $h = \pm a$.

<u>Прочие геометрические свойства гиперболоидов</u>.

а). Точно так же, как и для эллипсоида доказывается, что координатные оси являются осями симметрии гиперболоидов, координатные плоскости – плоскостями симметрии, а точка O – центром симметрии.

б). Пусть Φ_o – конус, заданный уравнением

$$\Phi_o:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.\quad (4)$$

Пусть $M_o(x,y,z_o)\in\Phi_o$, $M_1(x,y,z_1)\in\Phi_1$, $M_2(x,y,z_2)\in\Phi_2$ – три точки с одинаковыми координатами x и y, лежащие на конусе и на гиперболоидах. Тогда

$$z_o^2=c^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right),\quad z_1^2=c^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right),\quad z_2^2=c^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1\right)\quad\Rightarrow$$

$|z_1^2|<|z_o^2|<|z_2^2|$, а значит, Φ_1 лежит снаружи конуса Φ_o, а Φ_2 – внутри. Кроме того, из тех же равенств следует $z_o^2-z_1^2=z_2^2-z_o^2=c^2\ \Rightarrow$

$$M_oM_1=|\,z_o-z_1|=\frac{1}{|\,z_o+z_1|}\to 0\ \text{ и }\ M_2M_o=|\,z_2-z_o|=\frac{1}{|\,z_1+z_o|}\to 0\,,$$

когда точки M_o, M_1, M_2 уходят на бесконечность. Значит, оба гиперболоида асимптотически приближаются к конусу.

Теорема. Через каждую точку однополостного гиперболоида проходит ровно 2 прямые , целиком лежащие на гиперболоиде.
Доказательство.

Эллиптический и гиперболический параболоиды

Определение. *Эллиптическим и гиперболическим параболоидами* называются поверхности, имеющие канонические уравнения соответственно вида

$$\Phi_3:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \qquad (5) \qquad\qquad \Phi_4:\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z. \qquad (6)$$

В сечениях плоскостями $z=h$ получаем соответственно кривые

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2h \qquad\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2h \qquad (*)$$

Обозначим $a'^2=2|\,h\,|a^2,\ b'^2=2|\,h\,|b^2$.

При $h>0$ получаем эллипсы

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1,$$

полуоси которых возрастают при

При $h\neq 0$ получаем гиперболы

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=\pm 1,$$

(см. на рисунке γ_4), а при $h=0$ из возрастании h, а при $h<0$ получаем мнимые эллипсы

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=-1.$$

$(*)$ получаем уравнение, которое задает пару пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=0.$$

В сечениях плоскостями $y=h$ получаем для обеих поверхностей параболы

$$x^2=2a^2\left(z-\frac{h^2}{2b^2}\right).$$

$$x^2=2a^2\left(z+\frac{h^2}{2b^2}\right).$$

Аналогично, в сечениях параболоидов плоскостями $x = h$ получаем параболы.

<u>Прочие геометрические свойства гиперболоидов</u>.

а). Из уравнения (5) получаем, что $z\geq 0$, т.е. Φ_3 целиком находится в полупространстве, которое определяется этим неравенством.

б). Координатные оси пересекают оба параболоида только в точке $O(0, 0, 0)$, которая называется вершиной.

в). Ось Oz является осью симметрии параболоидов, а координатные плоскости Oxz и Oyz – плоскостями симметрии. Других симметрий у параболоидов нет.

Теорема. Через каждую точку гиперболического параболоида проходит ровно 2 прямые , целиком лежащие на параболоиде.

Доказательство.

Цилиндрические поверхности.

Определение. Назовём *цилиндрической* поверхность, через каждую точку которой проходит прямая, лежащая на поверхности, пересекающая некоторую пространственную кривую (*направляющую*)и параллельная некоторой фиксированной прямой на поверхности(образующей).

Если выбрать декартову систему координат так, чтобы ось Oz была параллельна образующим поверхности Ф, а направляющую γ' спроецировать в плоскость Oxy, то получим некоторую кривую γ. Если теперь мы возьмем γ в качестве направляющей, то получим ту же поверхность Ф. Поэтому будем с самого начала считать, что направляющей служит кривая γ, лежащая в плоскости Oxy. Пусть

$$\varphi(x,y)=0 \qquad (1)$$

ее уравнение в плоскости Oxy (в пространстве она задается системой из двух уравнений: $\varphi(x, y) = 0$ и $z = 0$). Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка поверхности Ф. Тогда ее проекция на плоскость Oxy будет точка $M_o(x, y, 0)$; и эта точка должна принадлежать кривой γ. Поэтому ее координаты удовлетворяют (1). Но тогда этому уравнению будут удовлетворять и координаты точки M_0: ведь координаты x и y у этих точек одинаковы, а z в уравнение не входит.

Обратно, пусть координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют (1). Тогда этому же уравнению удовлетворяют и координаты точки $M_0(x, y, 0)$, а т.к. $M_0 \in Oxy$, то $M_0 \in \gamma$. При этом, M и M_0 лежат на одной прямой, параллельной оси $Oz \Rightarrow M \in \Phi$.

Итак, мы установили, что (1) и есть уравнение поверхности Φ, т.е. *уравнение цилиндрической поверхности совпадает с уравнением ее направляющей кривой γ в плоскости Oxy, если образующие параллельны оси Oz.*

Примеры

Теорема. Если поверхность второго порядка цилиндрическая, то она имеет тип одной из поверхностей следующей таблицы:

1. Эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
2. Мнимый эллиптический цилиндр ($\varnothing$)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
3. Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
4. Параболический цилиндр	$y^2 = 2px$
5. Пара пересекающихся плоскостей	$a^2x^2-b^2y^2=0$
6. Пара мнимых плоскостей, которые пересекаются по действительной прямой	$a^2x^2+b^2y^2=0$
7. Пара параллельных плоскостей	$x^2=a^2$
8. Пара совпадающих плоскостей	$x^2=0$
9. Пара мнимых параллельных плоскостей ($\varnothing$)	$x^2=-a^2$

Конические поверхности.

Определение. *Конической* называется поверхность, составленная из множества всех прямых (*образующих*), проходящих через каждую точку некоторой кривой (*направляющей*), и через некоторую точку O (*вершину*).

Теорема. Направляющая конической поверхности Φ второго порядка имеет вид

$$\begin{cases} \varphi(x,y)=0, \\ z=c,\ c\in\mathbf{R} \end{cases}$$

Где $\varphi(x,y)$ – многочлен 2 степени.

Теорема.

Существуют 4 типа конических поверхностей:

1. Конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$

2. Пара пересекающихся плоскостей $a^2x^2-b^2y^2=0$.

3. Пара мнимых пересекающихся плоскостей $a^2x^2+b^2y^2=0$.

4. Пара совпадающих плоскостей x^2=0.

Доказательство.

Примеры.