Семинар 13 (10.11.16)

Производная (Тема 8)

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Разность $\Delta x = x - x_0$ называется <u>приращением аргумента</u>. Разность $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется <u>приращением</u> <u>функции</u>.

Отношение

$$h_{x_0}(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

называется <u>разностным</u> <u>отношением</u> функции в т. x_0, соответствующим приращению аргумента Δx.

Если точка x_0 фиксирована, то разностное отношение $h_{x_0}(\Delta x)$ является функцией от Δx.

Опр. Если существует конечный предел функции $h_{x_0}(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, то этот предел называется производной функции $f(x)$ в точке x_0

Обозначение: $f'(x_0)$ или $\frac{df}{dx}(x_0)$

Таким образом, по определению

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \begin{bmatrix} x = x_0 + \Delta x \\ \Delta x = x - x_0 \end{bmatrix} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Пример $f(x) = x^3$ $\quad f(x_0) = x_0^3$

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

Найдем разностное отношение

$$h_{x_0}(\Delta x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x^2)+(\Delta x)^3}{\Delta x}=$$

$$=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} h_{x_0}(\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2\right)=$$

$$=3x_0^2$$

<u>Пример</u> $f(x)=5^x$

$$f(x_0)=5^{x_0}$$

$$f(x_0+\Delta x)=5^{x_0+\Delta x}$$

$$h_{x_0}(\Delta x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{5^{x_0+\Delta x}-5^{x_0}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{5^{x_0}\cdot 5^{\Delta x}-5^{x_0}}{\Delta x}=5^{x_0}\cdot\frac{5^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} h_{x_0}(\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}5^{x_0}\frac{5^{\Delta x}-1}{\Delta x}=$$

$$=5^{x_0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\left[5^{\Delta x}-1\sim(\ln 5)\Delta x\right]=$$

$$=5^{x_0}\lim\frac{\ln 5\,\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}=5^{x_0}\ln 5.$$

$$f'(x_0)=5^{x_0}\ln 5$$

$$(5^x)'=5^x\ln 5.$$

Таблица производных.

1) $(C)' = 0$

2) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

3) $(a^{x})' = a^{x} \ln a \quad (a>0,\ a\neq 1)$

В частности, если $a = e$, то

$(e^{x})' = e^{x}$

4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a>0,\ a\neq 1)$

В частности, если $a = e$, то

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

5) $(\cos x) = -\sin x$

6) $(\sin x) = \cos x$

7) $(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

8) $(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11) $(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$

12) $(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Гиперболические функции

Гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Гиперболический котангенс

$$\operatorname{cth} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

13) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

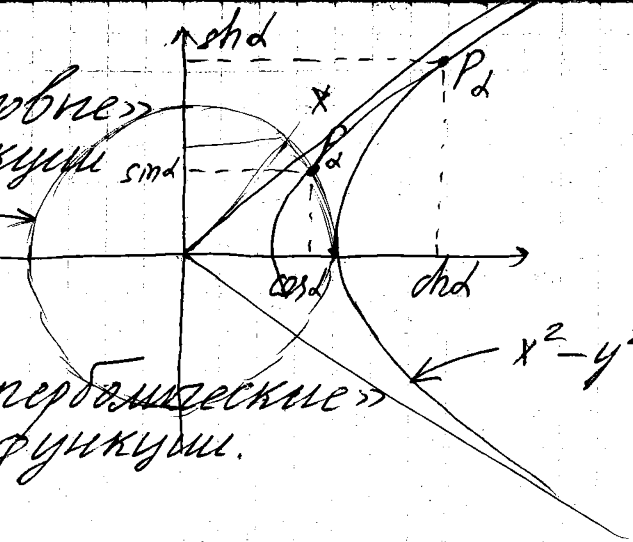
14) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$

15) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

16) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

$\left.\begin{array}{l}\cos x\\ \sin x\\ tg\, x\\ ctg\, x\end{array}\right\}$ «круговые» функции

$x^2+y^2=1$



$\left.\begin{array}{l}ch\, x\\ sh\, x\\ th\, x\\ cth\, x\end{array}\right\}$ «гиперболические» функции.

Правила нахождения производных, связанных с арифметическими действиями.

1) $(C\cdot f)' = Cf'$
2) $(f+g)' = f'+g'$
3) $(f-g)' = f'-g'$
4) $(f\cdot g)' = f'g - g'f$
5) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

Задача

$f(x)=x^2\cdot\ln x$

$f'(x)=\qquad (x^2)'\ln x+(\ln x)'x^2=$

$=2x\ln x+\frac{x^2}{x}=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$

Задача

$f(x)=\frac{3^x}{\cos x}$

$f'(x)=$ [redacted]

$=\frac{3^x\ln 3\cdot\cos x+3^x\sin x}{\cos^2 x}=3^x\frac{\ln 3\cos x+\sin x}{\cos^2 x}$

Задача

$f(x)=\frac{7^x-5^x}{3^x}=\frac{7^x}{3^x}-\frac{5^x}{3^x}=\left(\frac{7}{3}\right)^x-\left(\frac{5}{3}\right)^x$

$f'(x)=$ [redacted] $\left(\frac{7}{3}\right)^x\ln\frac{7}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^x\ln\frac{5}{3}$

Задача $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\left(\sqrt[5]{x}+x^7\right)=$

$=\sqrt[15]{x^8}+x^7\sqrt[3]{x}=x^{\frac{8}{15}}+x^{\frac{22}{3}}$

$f'(x)=\frac{8}{15\sqrt[15]{x^7}}+\frac{22}{3}x^{\frac{19}{3}}$

Задача

$$f(x)=\frac{\cos x\cdot\arccos x}{\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{arcctg} x+1}$$

$$f'(x)=\frac{\left(-\sin x\cdot\arccos x+\cos x\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right)(\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{arcctg}x+1)-(\cos x\cdot\operatorname{arcctg}}{(\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{arcctg}x+1)^2}$$

Производная сложной функции

Если функция $u=h(x)$ имеет пр-ую в т. x_0, а функция $y=g(u)$ имеет производную в точке $u_0=h(x_0)$, то сложная функция $y=g(h(x))=f(x)$ имеет производную в точке x_0 причем

$$f'(x_0)=g'(x_0)\cdot h'(x_0)$$

промежуточный аргумент

$$y \xleftarrow{g} u \xleftarrow{h} x$$

внешняя функция

внутренняя функция

218

$y'_x = y'_u \cdot u'$ внешняя функция

$y \leftarrow u \leftarrow v \leftarrow w \leftarrow x$

$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_w \cdot w'_x$

«правило цепочки»

$x+1) - (\cos x \cdot \arccos x)\left(-\frac{\operatorname{arcctg} x}{\sin^2 x} - \frac{\operatorname{ctg} x}{1+x^2}\right)$

<u>Пример</u> $f(x) = \sin(x^2)$

$f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$

<u>Пример</u> $f(x) = \sin^2 x$

$f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x$

<u>Задача</u> $f(x) = \arccos(\arccos x)$

$f'(x) = + \frac{1}{\sqrt{1 - \arccos^2 x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

<u>Задача</u> $f(x) = \log_{55}(\log_{77} x)$

$f'(x) = \frac{1}{\log_{77} x \cdot \ln 55} \cdot \frac{1}{x \ln 77}$

$$f(x)=\log_7^3\left(\mathrm{ctg}^4(\arccos 3x)\right)$$

$$f'(x)=\frac{3\log_7^2\left(\mathrm{ctg}^4(\arccos 3x)\right)\cdot 4\,\mathrm{ctg}^3(\arccos 3x)}{\mathrm{ctg}^4(\arccos 3x)\cdot \ln 7}\cdot\left(\frac{1}{\sin^2(\arccos 3x)}\right)\times$$

$$\times\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

<u>Задача</u> $f(x)=\sqrt[3]{\arcsin\left(8^{tg^2x}\right)}$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\left(\arcsin\left(8^{tg^2x}\right)\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-8^{2tg^2x}}}\cdot 8^{tg^2x}\ln 8\times$$

$$\times\, 2tg\,x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

<u>Задача</u> $f(x)=\ln^4\left(\cos^2(3^x)\cdot \mathrm{arctg}\frac{1}{x^2}\right)$

$$f'(x)=4\cdot\frac{\ln^3\left(\cos^2(3^x)\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x^2}\right)}{\cos^2(3^x)\cdot\mathrm{arctg}\frac{1}{x^2}}\left(2\cos(3^x)\cdot\mathrm{arctg}\frac{1}{x^2}\cdot(-\sin 3^x)\times\right.$$

$$\left.\times\, 3^x\cdot\ln 3+\cos^2 3^x\,\frac{1}{1+\frac{1}{x^4}}\cdot(-2)\frac{1}{x^3}\right)$$

<u>Задача</u> Доказать, что ф-я

$y=\frac{x^2-e^{-x^2}}{2x^2}$ является решением

диф-ого ур-я $x\cdot y'+2y=e^{-x^2}+1$.

$$y=\frac{\dots}{2x^2}-\frac{e^{-x^2}}{2x^2}=\frac{1}{2}-\frac{e^{-x^2}}{2x^2}$$

$$y'=-\frac{e^{-x^2}\cdot(-2x)\cdot 2x^2-4x\cdot e^{-x}}{4x^4}=\frac{4x^{3}e^{-x^2}+4xe^{-x}}{4x^{3}}=$$

$$=e^{-x^2}\left(\frac{x^2+1}{x^3}\right)$$

$$x\cdot e^{-x^2}\frac{x^2+1}{x^2}+2x\frac{x^2-e^{-x^2}}{2x^2}\overset{?}{=}e^{-x}+1.$$

$$\frac{e^{-x^2}\cdot x^2+e^{-x^2}+x^2-e^{-x^2}}{x^2}=e^{-x^2}+1$$

$$e^{-x^2}+1=e^{-x^2}+1\text{ — верно}$$

Задача

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}\cdot\ln\cos^4 2x}{\arcsin^2 7x}$$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cdot\ln\cos^4 2x+\sqrt[3]{x}\frac{1}{\cos^4 2x}\cdot 4\cos^3 2x\cdot(-\sin 2x)\cdot 2\right)\times(\arcsin^2 7x)-\sqrt[3]{x}\ln\cos^4 2x\cdot 2\arcsin 7x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-49x^2}}\cdot 7}{\arcsin^4 7x}$$

Задача №3 из ТР (В-т 22)

$$f(x)=\ln\sin x+\frac{ctg^2 x}{2}-\frac{ctg^4 x}{4}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x+\frac{2\,ctg\,x}{2(-\sin^2 x)}-\frac{4\cdot ctg^3 x}{4(-\sin^2 x)}=$$

$$=ctg\,x-\frac{ctg\,x}{\sin^2 x}+\frac{ctg^3 x}{\sin^2 x}=\frac{ctg\,x}{\sin^2 x}(\sin^2 x-1)+\frac{ctg^3 x}{\sin^2 x}=$$

$$=-ctg^3 x+\frac{ctg^3 x}{\sin^2 x}=\frac{ctg^3 x}{\sin^2 x}(1-\sin^2 x)=ctg^5 x$$

221

Задача №4 из ТР (В-т-24)

$$f(x) = \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)^2}} \cdot \frac{\sqrt{x} - \frac{x-1}{2\sqrt{x}}}{x} =$$

$$= \frac{\sqrt{x} - \frac{x-1}{2\sqrt{x}}}{x\sqrt{1-\frac{x^2-2x+1}{x}}} = \frac{\frac{2x-x+1}{2\sqrt{x}}}{x\sqrt{\frac{x-x^2+2x-1}{x}}} =$$

$$= \frac{x+1}{2\sqrt{x}\cdot x\sqrt{\frac{-x^2+3x-1}{x}}} = \frac{x+1}{2x\sqrt{3x-x^2-1}}$$

$$\boxed{\left(\log_a|x|\right)' = \frac{1}{x\ln a}} \quad (x \neq 0)$$

1) $x > 0$ $\quad (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

2) $x < 0$ $\quad (\log_a(-x))' = \frac{1}{(-x)\ln a}\cdot(-x)' = \frac{1}{x\ln a}$

Метод логарифмического дифференцирования.

Задача №5 из ТР (8-Т-24)

$$f(x) = (\sin x)^{\ln x}$$

Решение

$$\ln f(x) = \ln(\sin x)^{\ln x} = \ln x \cdot \ln(\sin x).$$

$$(\ln f(x))' = (\ln x \cdot \ln(\sin x))' =$$

[redacted] $$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{1}{x}\ln(\sin x) + \ln x \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x =$$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(\sin x)}{x} + \frac{\ln x \cdot \cos x}{\sin x}\right) \cdot (\sin x)^{\ln x} =$$

$$= (\sin x)^{\ln x}\left(\frac{\ln(\sin x)}{x} + \ln ctg x\right)$$

Способ 2. $f(x) = (\sin x)^{\ln x} = \left(e^{\ln \sin x}\right)^{\ln x} = e^{\ln x \cdot \ln \sin x}$

$$f'(x) = e^{\ln x \cdot \ln \sin x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \ln \sin x + \ln x \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\right)$$

Задача №5 из ТР. (в-т 14)

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$$

Решение

$$\ln|f(x)| = \ln\left|\frac{(x-2)^3}{(x-1)^{5/2}(x-3)^{11/2}}\right| =$$

$$= 3\ln|x-2| - \frac{5}{2}\ln|x-1| - \frac{11}{2}\ln|x-3|$$

$$\left(\ln|f(x)|\right)' = \left(3\ln|x-2| - \frac{5}{2}\ln|x-1| - \frac{11}{2}\ln|x-3|\right)'$$

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = \frac{3}{x-2} - \frac{5}{2(x-1)} - \frac{11}{2(x-3)}$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{x-2} - \frac{5}{2(x-1)} - \frac{11}{2(x-3)}\right)\cdot\frac{(x-2)^3}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$$

Задача №5 из ТР (в-т №25)

$$f(x) = (1+x^2)^{\arccos x}$$

Решение

$$\ln f(x) = \ln (1+x^2)^{\arccos x} = \ln(1+x^2)\cdot \arccos x$$

$$\left(\ln f(x)\right)' = \left(\arccos x \left(\ln(1+x^2)\right)\right)'$$

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = -\frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2}\,2x\cdot \arccos x$$

$$f'(x) = (1+x^2)^{\arccos x}\left(\frac{2x\arccos x}{1+x^2} - \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

<u>Задача №5 из ТР (в-т 13)</u>

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2\cdot\sqrt{(x+3)^3}}$$

$$\ln|f(x)| = \ln\left|\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+2}\cdot\left(\sqrt{x+3}\right)^3}\right|$$

$$\left(\ln|f(x)|\right)' = \left(\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2\left(\sqrt{x+3}\right)^3}\right|\right)'$$

$$\frac{1}{f(x)}f'(x) = \left(\frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{2}{3}\ln(x+2) - \frac{3}{2}\ln(x+3)\right)'$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{3}{2(x+3)}\right)\cdot\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\cdot\sqrt{(x+3)^3}}$$

Контрольная работа:

Задачи 1, 2 – предел послед.

Задачи 3, 4, 5, 6, 7 – предел ф-и.

Задачи 8, 9 – найти точки разрыва и опред. тип.

- доопред. до непрерывности
- найти скачок.

Задачи 10, 11 – найти производную.

Задача 12 – найти производную с помощью лог. диф.

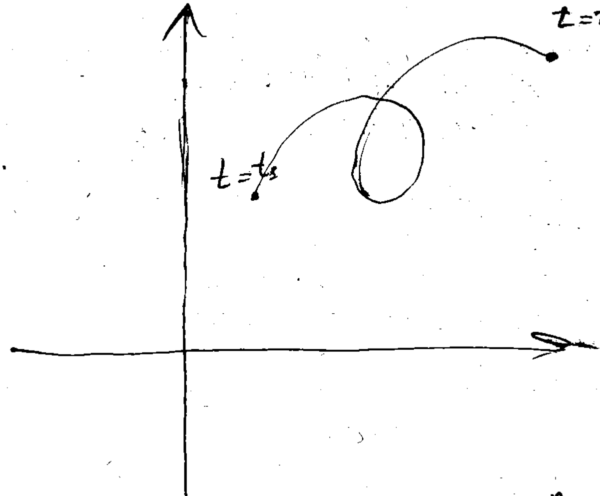
Задачи 13, 14, 15 – написать ур-е касательной и уравнение нормали.

13 $\mapsto$ функц. задана явно.

14 $\mapsto$ функц. задана парам.

15 $\mapsto$ функц. задана неявно.

Производная функции заданной параметрически



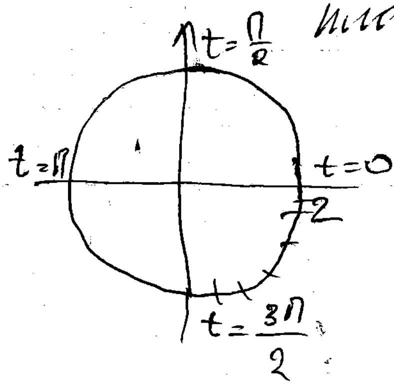
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}$$

— прямая на плоскости.

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

$$0 \le t \le \frac{3\pi}{2}$$



$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

$$\boxed{y'(x) = \frac{y'(t)}{\text{[redacted]}\; x'(t)}}$$

Задача [redacted]

$$\begin{cases} x = t\ln t \\ y = \dfrac{\ln t}{t} \end{cases}$$

Найти y'_x

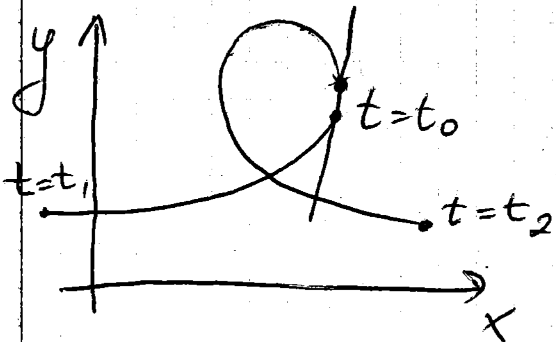
$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1-\ln t}{t^2(1+\ln t)}$$

$$x'_t = 1\cdot \ln t + t\cdot \frac{1}{t} = \ln t$$

$$y'_t = \frac{\frac{1}{t}\cdot t - 1\cdot \ln t}{t^2} = \frac{1-\ln t}{t^2}$$

Семинар 14 (17.11.16)

Производная функции, заданной параметрически



$$M(t) = (x(t), y(t))$$

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Задача №6 из ТР (в-т 5)

$$\begin{cases} x = \arcsin(t^2-1) \\ y = \arccos 2t \end{cases}$$

$$y'(x) = ?$$

$$y'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}\cdot 2 = -\frac{2}{\sqrt{1-4t^2}}$$

$$x'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-(t^2-1)^2}}\cdot 2t = \frac{2t}{\sqrt{1-(t^2-1)^2}} =$$

$$= \frac{2t}{\sqrt{1-t^4+2t^2-1}} = \frac{2t}{t\sqrt{2-t^2}}\quad \frac{2t}{|t|\sqrt{2-t^2}}$$

$$y(x) = \frac{\cancel{2}\sqrt{2-t^2}}{\cancel{2}\sqrt{1-4t^2}} = -\frac{\sqrt{2-t^2}\cdot|t|}{\sqrt{1-4t^2}\cdot t}$$

Производная ф-ии заданной неявно.

Пусть ф-я $y = f(x)$ задана неявно уравнением

$$F(x,y) = 0 \qquad (1)$$

тогда, чтобы найти y' нужно продифференцировать равенство (1) по x, считая что $y = y(x)$

Из полученного ур-я можно найти y'

Пример $y = \boxed{f(x)}$ — явное задание ф-и

$f(x, y) = 0$

$y = x^2 \sin x - \frac{\ln x}{x}$ ← явное зад-е ф-ии

$\sin x \cdot y + \frac{\ln x}{e^y} - tg(x^5 + y^5) = 0$

неявное задание ф-и

Пример

$x^5 + y^5 - \ln(x+y) = 0$

$(x^5 + y^5 - \ln(x+y))' = 0$

$5x^4 + 5y^4 \cdot y' - \frac{1}{x+y} \cdot (1+y)' = 0$

$5y^4 \cdot y' - \frac{y'}{x+y} = -5x^4 + \frac{1}{x+y}$

$y' = \left(5y^4 - \frac{1}{x+y}\right) = -5x^4 + \frac{1}{x+y}$

$y' = (5y^4(x+y) - 1) = -5x^4(x+y) + 1$

$y' = \frac{-5x^5 - 5x^4 y + 1}{5y^5 + 5y^4 x - 1}$

Задача №7 из ТР (в-т 14).

$$y-\sqrt[3]{\frac{2y-1}{x}}+12=0$$

$$\left(y-\sqrt[3]{\frac{2y-1}{x}}+12\right)'_x=(0)'_x$$

$$y'-\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{2y-1}{x}\right)^2}}\cdot\frac{2y'x-2y+1}{x^2}=0.$$

$$3y'\left(\frac{2y-1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}-1\cdot\frac{2y'x-2y+1}{x^2}=0$$

$$y'\left(3\left(\frac{2y-1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}-\frac{2x}{x^2}\right)\cancel{+}\frac{-2y+1}{\cancel{x^2}\,x^2}=0$$

$$y'=-\frac{2y-1}{x^2\left(3\left(\frac{2y-1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{x}\right)}$$

$$y'=\frac{2y-1}{2x-3x\sqrt[3]{(2y-1)^2x}}$$

Задача №7 (В-т 13).

$$x-\operatorname{arctg}(x+y)+1=0$$

$$(x-\operatorname{arctg}(x+y)+1)'_x=(0)'_x$$

$$1-\frac{1}{1+(x+y)^2}\cdot(1+y)'=0$$

$$1-\frac{1}{(1+(x+y))^2}=\frac{y'}{1+(x+y)^2}$$

$$\frac{(x+y)^2\cdot(1+(x+y)^2)}{1+(x+y)^2}=y'$$

$$y'=(x+y)^2$$

$$x-\operatorname{arctg}(x+y)+1=0$$

$$\operatorname{arctg}(x+y)=1+x$$

$$\operatorname{tg}\operatorname{arctg}(x+y)=\operatorname{tg}(1+x)$$

$$x+y=\operatorname{tg}(1+x)$$

$$y=\operatorname{tg}(1+x)-x$$

$$y'=\frac{1}{\cos^2(x+1)}-1=\frac{1-\cos^2(x+1)}{\cos^2(x+1)}=$$

$$=\frac{\sin^2(x+1)}{\cos^2(x+1)}=\operatorname{tg}^2(x+1)$$

Задача

$$x^y-y^x-\sqrt{x+y^2}=0$$

$$\left((e^{\ln x})^y - (e^{\ln y})^x - \sqrt{x+y^2}\right)' = 0$$

$$e^{y\ln x}\cdot\left(\frac{y}{x} + \ln x\cdot y'\right) - e^{x\ln y}\left(\frac{1}{y}\cdot y'\cdot x + \ln y\right) - \frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}(1+y^2)' = 0$$

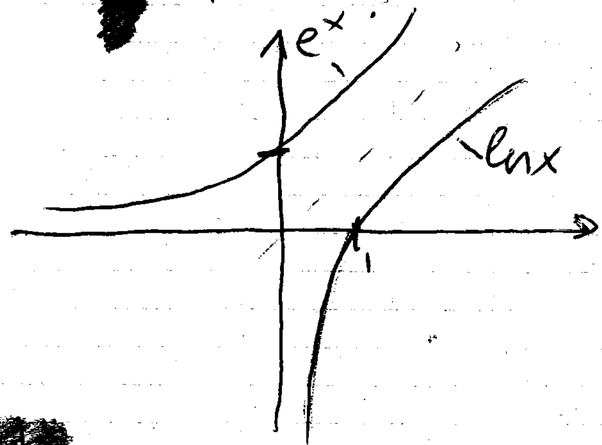
$$\frac{x^y\cdot y}{x} + x^y\cdot\ln x\cdot y' - \frac{y^x\cdot y'\cdot x}{y} - y^x\cdot\ln y - \frac{1}{2\sqrt{x+y^2}} - \frac{2y\cdot y'}{2\sqrt{x+y^2}} = 0$$

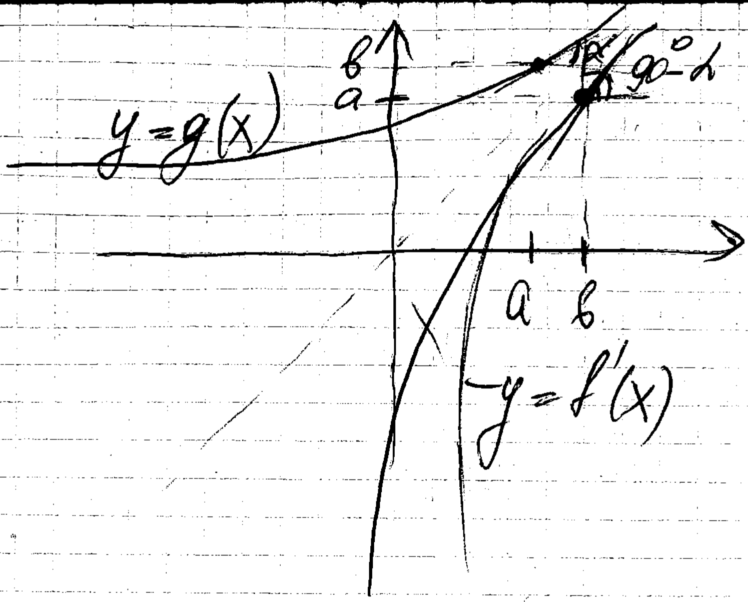
$$y'\left(x^y\cdot\ln x - y^{x-1}\cdot x - \frac{2y}{2\sqrt{x+y^2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x+y^2}} + y^x\cdot\ln y - x^{y-1}\cdot y$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+y^2}} + y^x\ln y - x^{y-1}\cdot y}{x^y\ln x - y^{x-1}x - \frac{2y}{2\sqrt{x+y^2}}}$$

Производная обратной ф-и.

$y = e^x$ и $\ln x$





$$g'(a) = \frac{1}{f'(b)}, \text{ где } b = g(a)$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(x)}\Big|_{x \to g(x)} \quad *$$

<u>Пример.</u> $y = f(x) = x^3$

$y = g(x) = \sqrt[3]{x}$

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{(x^3)'}\Big|_{x \to \sqrt[3]{x}} = \frac{1}{3x^2}\Big|_{x \to \sqrt[3]{x}} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Пример

$y = f(x) = \cos x$

$y = g(x) = \arccos x$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos x)'}\Big|_{x \to \arccos x} = -\frac{1}{\sin x}\Big|_{x \to \arccos x} =$$

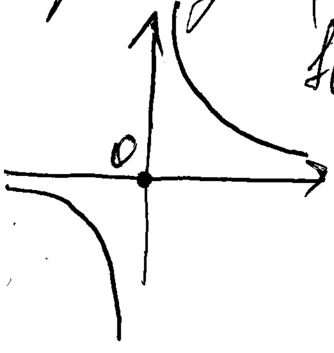
$$= -\frac{1}{\underbrace{\sin(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Бесконечные производные

Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = +\infty$

то говорят, что ф-я $f(x)$ имеет в точке x_0 производную равную $(+\infty)$



$f(0)=0 \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 0$

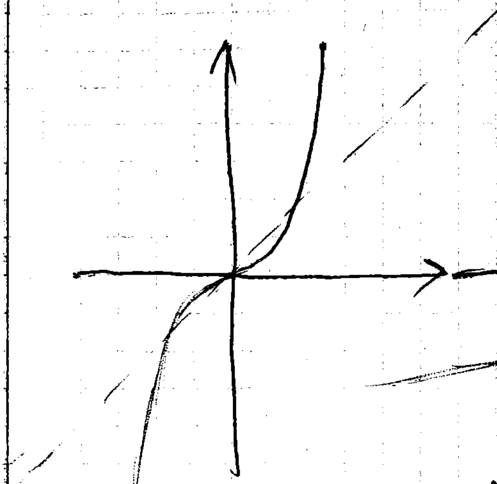
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} =$$

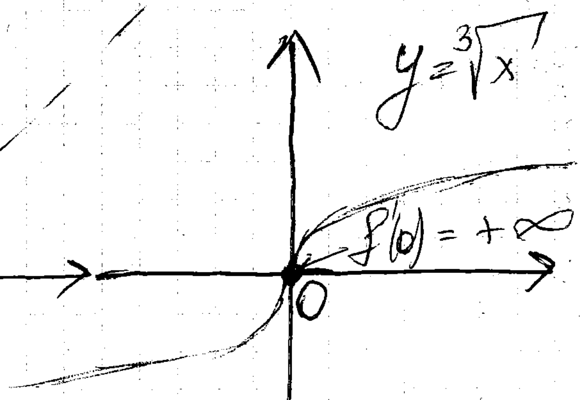
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = +\infty$$

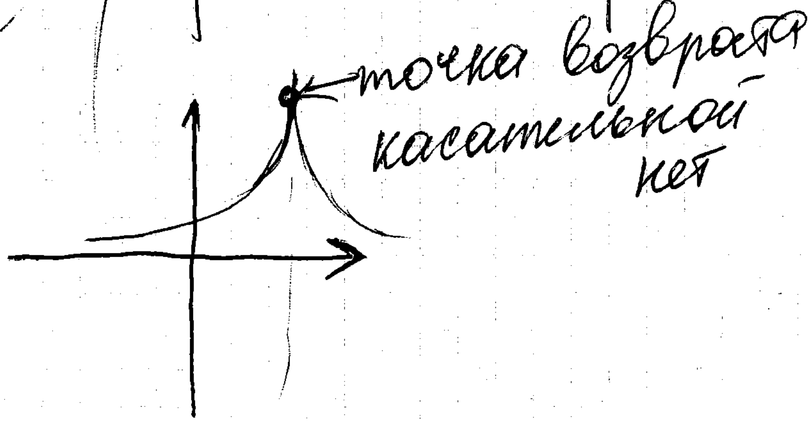
Пример

$$f(x)=\sqrt[3]{x}$$

$$f'(0)=+\infty$$







Односторонние производные

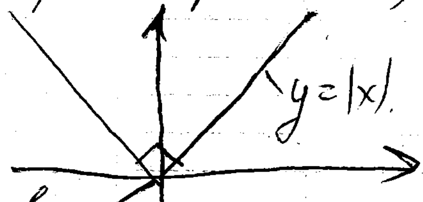
$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$ — называется

правой производной ф-ции $f(x)$ в т. x_0

Обозначение: $f'_+(x_0)$

Предел $$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$ называется **левой производной** функции $f(x)$ в точке x_0

Пример $f(x) = |x|$.



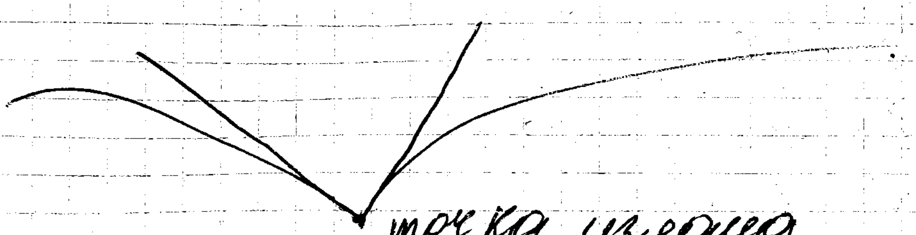
$f'_+(0) = +1$

$f'_-(0) = -1$

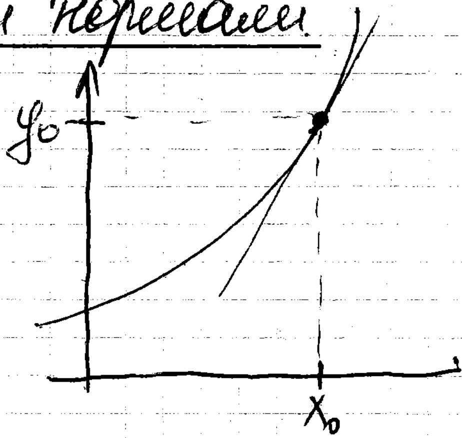
угловая точка на гр.

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = -1.$$



Уравнение касательной и нормали



$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = k$ – угловой коэф. касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$

Уравнение касательной:

$$\boxed{y=k(x-x_0)+y_0}$$

Уравнение нормали

$$\boxed{y = -\frac{1}{k}(x - x_0) + y_0}$$

Написать уравнение касательной и уравнение нормали к графику ф-ции $y = x^2$ в точке $P = (2, 4)$

$f'(x) = 2x$

$k = f'(2) = 4.$

$x_0 = 2$

$y_0 = 4.$

[redacted]

$y = 4x - 8 + 4 = 4x - 4$ – ур-е касат.

$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + 4 = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$ ур-е нормали

Задача

$$f(x)=\sqrt[3]{5x-7}, \quad x_0=3$$

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(5x-7)^2}}\cdot 5$$

$x_0=3$

$$y_0=\sqrt[3]{15-7}=\sqrt[3]{8}=2$$

$$k=\frac{5}{3\sqrt[3]{(15-7)^2}}=\frac{5}{12}$$

ур-е касательной

$$y=\frac{5}{12}(x-3)+2=\frac{5}{12}x-\frac{5}{4}+2=$$

$$=\frac{5}{12}x+\frac{3}{4}$$

ур-е нормали

$$y=-\frac{12}{5}(x-3)+2=-\frac{12}{5}x+\frac{46}{5}$$

Задача Написать ур-е касательной и ур-е нормали к графику ф-и.

$$\begin{cases} x(t)=2t^2+3t \\ y(t)=t\arccos t \end{cases}$$

в точке $x_0=2$

$2=2t^2+3t$

$2t^2+3t-2=0$

$t=\frac{-3\pm5}{4}$

$t_1=-2$ $t_2=+\frac{1}{2}$

$y_0=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$

$x_0=2.$

$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\arccos t-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{4t+3}$$

$$y'(t)=\arccos t+\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

$x'(t)=4t+3$

$$k=y'(\cancel{x})\Big|_{t=\frac{1}{2}}=\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{4}}}}{5}=\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{5}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{15}$$

Ур-е касательной

$$y=\frac{\pi-\sqrt{3}}{15}(x-2)+\frac{\pi}{6}$$

241

Ур-е нормали

$$y = -\frac{15}{\pi-\sqrt{3}}(x-2)+\frac{\pi}{6}$$

Задача

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos^3(t) \\ y(t) = 3\cos 2t \end{cases} \quad t = \frac{\pi}{6}$$

$$x_0 = 2\cos^3\frac{\pi}{6} = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$y_0 = 3\cos\frac{\pi}{3} = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = +\frac{6\sin 2t}{3\sin 2t\cdot\cos t} = \frac{2}{\cos t}$$

$$x'(t) = -6\cdot\cos^2 t\cdot\sin t = -3\sin 2t\cos t$$

$$y'(t) = \cancel{3\cdot 2\cos t\sin t}\ -6\sin 2t = \cancel{+2\cdot 3\sin 2t}\ -6\sin 2t$$

$$k = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Ур-е касательной

$$y=\frac{4}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)+\frac{3}{2}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}x-\frac{3}{1}+\frac{3}{2}=\frac{4}{\sqrt{3}}x-\frac{3}{2}$$

Ур-е нормали

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)+\frac{3}{2}=$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{9}{16}+\frac{3}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{33}{16}$$

Задача Написать ~~ур~~

$x^5+y^5=16y+1$ в точке $P_0(1,2)$

$$\left(x^5+y^5\right)'_x=\left(16y+1\right)'_x$$

$$5x^4+5y^4\cdot y'=16\cdot y'$$

$$y'=\frac{5x^4}{16-5y^4}$$

$$y'(x)\Big|_{P_0}=k=\frac{5}{16-5\cdot 16}=-\frac{5}{64}$$

$x_0=1$

$y_0=2$

Ур-е касательной

$$y = -\frac{5}{64}(x-1)+2 = -\frac{5}{64}x + \frac{5}{64} + 2 =$$

$$= -\frac{5}{64}x + \frac{133}{64}$$

Ур-е нормали:

$$y = \frac{64}{5}(x-1) + 2 = \frac{64}{5}x - \frac{54}{5}$$

Задача

$$y\ln y + 9x^2 = 1 \qquad P_0 = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

$$1\ln 1 + \frac{9}{9} = 1$$

$0 + 1 = 1$ - верно

$$(y\ln y + 9x^2)'_x = (1)'_x$$

$$y'\ln y + \frac{1}{y}y'\cdot y + 18x = 0$$

$$y'\ln y + y' + 18x = 0$$

$$y'(\ln y + 1) = -18x$$

$$y' = -\frac{18x}{\ln y + 1}$$

$$k = -\frac{6}{1} = -6.$$

Ур-е нормали

$$y = \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{1}{6}x - \frac{1}{18} + 1 =$$

$$= \frac{1}{6}x + \frac{17}{18}.$$

Ур-е касательной

$$y = -6\left(x - \frac{1}{3}\right) + 1 = -6x + 3$$

Задача

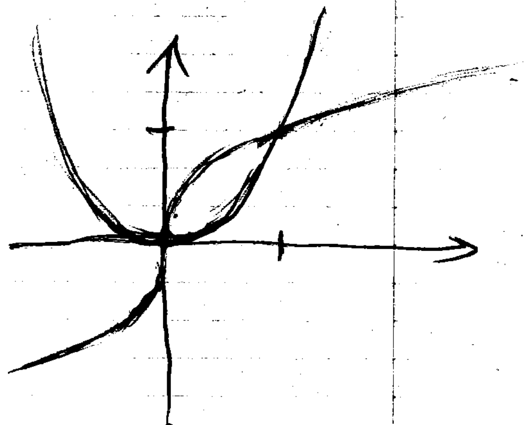
Найти углы между графиками ф-ий $y_1 = x^2$ и $y_2 = \sqrt[3]{x}$ в точках их пересеч.

$$x^2 = \sqrt[3]{x}$$

$$x^6 = x$$

$$x(x^5 - 1) = 0$$

$x = 0$ или $x = 1$.



$x_0 = 1$ $\qquad y_1' = (x^2)' = 2x$

$y_0 = 1$ $\qquad y_2' = (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

$y_1'(x_0) = k_1 = 2$

$y_2'(x_0)$ $\cancel{y_0 = \frac{1}{3}}$ $k_2 = \frac{1}{3}$

Уравнениея касат. -ые

1) $y = 2\cdot(x-1)+1 = 2x-1$

2) $y = \frac{1}{3}(x-1)+1 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

1) $2x - y - 1 = 0$

2) $x - 3y + 2 = 0$

$\vec{n_1} = (2, -1)$

$\vec{n_2} = (1, -3)$

$\cos(L_1, L_2) = |\cos\angle(\vec{n_1}, \vec{n_2})| =$

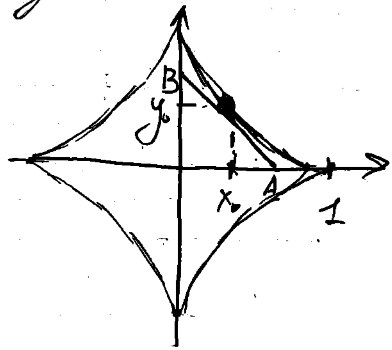
$= \frac{2+3}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\angle(L_1, L_2) = 45^\circ$

Задача

астроида.

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1.$$



$$\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)'_x=(1)'_x$$

$$\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}\cdot y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=0$$

$$y'=-\frac{2\cdot 3\sqrt[3]{y}}{2\cdot 3\sqrt[3]{x}}=-\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}$$

$$x_0,\ y_0,\quad k=-\frac{\sqrt[3]{y_0}}{\sqrt[3]{x_0}}.$$

$$y=-\frac{\sqrt[3]{y_0}}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+y_0=-\frac{\sqrt[3]{y_0}\,x}{\sqrt[3]{x_0}}+\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}\cdot x_0+y_0=$$

$$=-\frac{\sqrt[3]{y_0}\,x}{\sqrt[3]{x_0}}+\sqrt[3]{y_0}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)=-\frac{\sqrt[3]{y_0}\,x}{\sqrt[3]{x_0}}+\sqrt[3]{y_0}$$

$y=0$

$$0=-\frac{\sqrt[3]{y_0}}{\sqrt{x_0}}x+\sqrt[3]{y_0}$$

$$y=\sqrt[3]{y_0}$$

$$B=(0,\sqrt[3]{y_0})$$

$$x=\sqrt[3]{x_0}$$

$$A=(\sqrt[3]{x_0},0)$$

$$AB=\sqrt{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}=1=const.$$