1 Билинейная и квадратичная формы.

Пусть $\varphi(x, y)$ числовая функция, заданная на линейном пространстве, то есть $\varphi : L \times L \to R$. Если $\varphi(x, y)$ линейна по каждому из своих аргументов, то её называют *билинейной формой*. Таким образом билинейная форма – это функция $\varphi(x, y)$ заданная на линейном пространстве L, что при всех $x, y, z \in L$ и $\lambda \in R$ выполняются равенства:

$$
\begin{array}{lll}
1. & \varphi(x+z, y) = \varphi(x, y) + \varphi(z, y) & \varphi(x, y+z) = \varphi(x, y) + \varphi(x, z) \\
2. & \varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y) & \varphi(x, \lambda y) = \lambda\varphi(x, y).
\end{array}
$$

Заметим, что из линейности следует $\varphi(x, 0) = \varphi(0, y) = 0$ для любых $x, y \in L$.

Отдельно вводят *нулевую билинейную форму* $0(x, y)$, для которой $0(x, y) = 0$ при всех $x, y \in L$.

Билинейная форма называется *симметричной*, если $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

Примером симметричной билинейной формы является скалярное произведение $\varphi(x, y) = (x, y)$.

Если в билинейной форме $\varphi(x, y)$ положить $y = x$, то получим так называемую *квадратичную форму* $\varphi(x, x)$.

Квадратичная форма $\varphi(x, x)$ называется *положительно определённой*, если для $\forall x \in L, x \neq 0$ будет $\varphi(x, x) > 0$. В том случае, когда для $\forall x \in L, x \neq 0, \varphi(x, x) \geqslant 0$ квадратичная форма $\varphi(x, x)$ называется *неотрицательной*. Аналогично определяются *отрицательно определённая и неположительная квадратичные формы*. Положительно определённые и отрицательно определённые квадратичные формы называют также *знакопостоянными*.

Примеры квадратичных форм:

1) $x = (x_1, x_2), x \in L_2, \varphi(x, x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.

2) $x = (x_1, x_2, x_3), x \in L_3, \varphi(x, x) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 - x_3^2$.

3) $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), x \in L_4, \varphi(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

4) $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), x \in L_4, \varphi(x, x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$.

Как видно из примеров, при $x \neq 0$ не обязательно $\varphi(x, x) \neq 0$. Так, в примере 4) для вектора $x = (a, a, 0, 0), a \neq 0$ следует, что $\varphi(x, x) = 0$, хотя $x \neq 0$. Ненулевой вектор, для которого $\varphi(x, x) = 0$, называется *изотропным*.

Заметим, что из определения изотропного вектора следует отсутствие изотропных векторов у знакопостоянной квадратичной формы. Оказывается верно и обратное.

Теорема 1. *Если квадратичная форма не имеет изотропных векторов, то она знакопостоянна.*

Доказательство. Предположим, что это не так и найдутся два ненулевых вектора u и v, на которых квадратичная форма имеет разные знаки. Так как для двух коллинеарных векторов x, y существует $\lambda \neq 0, \lambda \in R$, что $x = \lambda y$, на которых квадратичная форма имеет один и тот же знак

$$\varphi(x, x) = \varphi(\lambda y, \lambda y) = \lambda^2 \varphi(y, y),$$

то векторы u и v неколлинеарны.

Для любого вещественного числа λ выполняется равенство

$$\varphi(u + \lambda v, u + \lambda v) = \varphi(u, u) + \lambda(\varphi(v, u) + \varphi(u, v)) + \lambda^2 \varphi(v, v). \qquad (1)$$

Правая часть этого равенства – многочлен второй степени относительно переменной λ. Так как $\varphi(u, u)$ и $\varphi(v, v)$ по предположению имеют разные знаки, то многочлен (1) имеет два корня разного знака. Пусть λ_0 – один из них, тогда $\varphi(u + \lambda_0 v, u + \lambda_0 v) = 0$ и $u + \lambda_0 v$ – изотропный вектор. Но вектор $u + \lambda_0 v$ не нулевой в силу линейной независимости векторов u и v, поэтому обращение в ноль на нём квадратичной формы невозможно по условию. Противоречие доказывает теорему.

Из доказанной теоремы и сделанного чуть выше замечания получим следствие:

Следствие. *Знакопостоянство квадратичной формы является необходимым и достаточным условием отсутствия изотропных векторов.*

2 Матрица квадратичной формы.

Пусть $\varphi(x, x), x \in L_n$ – квадратичная форма и $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – базис пространства L_n, в котором $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, тогда:

$$\varphi(x, x) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \varphi(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j. \qquad (2)$$

Матрица $A = (a_{ij}) = (\varphi(e_i, e_j))$ называется *матрицей квадратичной формы.* Как видно из (2) каждой квадратичной форме в конечномерном пространстве соответствует своя матрица, зависящая от базиса. Заметим, что эта матрица симметрична, так как

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j a_{ji}.$$

Всякую квадратичную форму можно представить как умножение матриц. Для этого достаточно ввести вектор-строку $X' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, состоящую из компонент вектора $x \in L_n$, тогда

$$\varphi(x, x) = X'AX.$$

Если матрица квадратичной формы диагональна и на диагонали стоят либо $+1$, либо -1, либо 0, то такой вид квадратичной формы называется *нормальным*. В частности, в примерах 3) и 4) квадратичная форма имеет нормальный вид.

Заметим, что, например, для квадратичной формы

$$\varphi(x, x) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 9x_2^2 \tag{3}$$

можно сделать преобразования

$$\varphi(x, x) = (2x_1 + x_2)^2 + 8x_2^2 = y_1^2 + y_2^2,$$

где $y_1 = 2x_1 + x_2, y_2 = 2\sqrt{2}x_2$ – новые переменные, приводящие её к нормальному виду, при этом видно, что $\varphi(x, x) > 0$ для всех $x \neq 0$. Таким образом квадратичная форма положительна. Оказывается, любую квадратичную форму можно привести к нормальному виду. Чтобы убедиться в этом обратимся к матричному представлению квадратичной формы.

Например, матрица квадратичной формы (3) имеет следующий вид $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$. С помощью элементарных преобразований диагонализуем её:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \underset{\hookleftarrow}{\cdot(-\tfrac{1}{2})} \to \underset{-\frac{1}{2}\uparrow}{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}} \to \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

– вначале первую строку умножили на $-\frac{1}{2}$ и прибавили ко второй, затем первый столбец также умножили $-\frac{1}{2}$ и прибавили ко второму столбцу.

Заметим, что в силу симметричности матрицы A элементарные преобразования столбцов оказались точно такими же как элементарные преобразования строк. Это элементарные преобразования второго типа (см. стр. **??**). Известно (теорема **??**), что каждому элементарному преобразованию второго типа соответствует матрица элементарного преобразования с единичным определителем, при этом преобразованию строк соответствует умножение на эту матрицу слева, а преобразованию столбцов – справа, а так как матрица квадратичной формы симметрична, то матрица преобразования строк получается транспонированием матрицы преобразования столбцов. Откуда приходим к выводу

Предложение 1. *Для любой матрицы A квадратичной формы существует матрица S, что*

$$A = S'DS, \qquad detS = 1, \tag{4}$$

где D – диагональная матрица.

Следовательно,

$$\varphi(x,x) = X'AX = X'S'DS = (SX)'D(SX) = Y'DY,$$

где $Y = SX$. Таким образом, приведение матрицы квадратичной формы к диагональному виду равносильно линейному преобразованию векторов квадратичной формы. Переопределим вектор $y : y_i = y_i'/\sqrt{|d_{ii}|}, d_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n$ и получим нормальный вид квадратичной формы. Следовательно, для любого вектора $x \in L_n$ существует вектор $y \in L_n$, что $Y = SX$, при этом матрица квадратичной формы примет нормальный вид.

3 Инерция квадратичной формы.

Число положительных и отрицательных членов квадратичной формы в нормальном виде называется соответственно положительным и отрицательным *индексом инерции* квадратичной формы.

В общем случае диагональная матрица квадратичной формы не обязательно состоит только из ненулевых элементов. Если ранг матрицы квадратичной формы равен r, то в её диагональной матрице D будет ровно r ненулевых элементов. В этом случае говорят, что ранг квадратичной формы равен r. Число $d = n - r$ называется *дефектом* квадратичной формы.

Например,

$$\varphi(x,x) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 = \qquad (5)$$

$$= (x_1 + x_2 - x_3)^2 + (2x_1 - x_3)^2 = y_1^2 + y_2^2.$$

При этом ранг матрицы квадратичной формы равен 2, так как

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом ранг квадратичной формы в (5) равен двум, а её дефект равен 1.

Пусть задана квадратичная форма

$$\varphi(x,x) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2.$$

Теорема 2. *(Закон инерции квадратичной формы.) Число положительных и отрицательных членов в нормальном виде квадратичной формы не зависит от способа её приведения.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x,x)$ – квадратичная форма и A – её матрица ранга r. Приведём матрицу квадратичной формы A к диагональному виду двумя различными преобразованиями S^1 и S^2. Тогда

$$\varphi(x,x) = X'AX = (S^1X)'D_1(S^1X) = Y'D_1Y =$$

$$= y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2 = (S^2X)'D_2(S^2X) =$$

$$= Z'D_2Z = z_1^2 + \ldots + z_l^2 - z_{l+1}^2 - \ldots - z_r^2. \qquad (6)$$

Пусть $k < l$. Рассмотрим систему равенств:

$$y_1 = \ldots = y_k = z_{l+1} = \ldots = z_n = 0. \qquad (7)$$

Так как

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}^1 x_j, \quad det(s_{ij}^1) \neq 0, \qquad (8)$$

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}^2 x_j, \quad det(s_{ij}^2) \neq 0, \tag{9}$$

то имеется система $k + n - l$ линейных однородных уравнений (7-9) с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Так как число неизвестных больше числа уравнений, то существует ненулевое решение $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*)$, для которого, как следует из (6),

$$-y_{k+1}^2(\xi^*) - \ldots - y_r^2(\xi^*) = z_1^2(\xi^*) + \ldots + z_l^2(\xi^*),$$

что возможно только тогда, когда $z_1(\xi^*) = \ldots = z_l(\xi^*) = 0$. Учитывая условие: $z_{l+1}(\xi^*) = \ldots = z_n(\xi^*) = 0$, приходим к выводу, что имеется система n однородных линейных уравнений $z_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n$ с n неизвестными и ненулевым определителем матрицы коэффициентов S^2, для которой найдено ненулевое решение ξ^*. Противоречие, так как по теореме **??** такая система имеет единственное – тривиальное решение $\xi^* = 0$. Понятно, что к такому же выводу мы придём, предполагая $l < k$. Следовательно $l = k$. Теорема доказана.

Заметим, если $r < n$, то у квадратичной формы имеется изотропный вектор, так как существует ненулевой вектор x, для которого выполняются равенства: $\sum_j s_{ij} x_j = 0$ с невырожденной матрицей S равносильные $\varphi(x, x) = 0$. По этой причине и по следствию из теоремы 1, получим важное следствие из теоремы 2.

Следствие. *Квадратичная форма положительно (отрицательно) определена тогда и только тогда, когда её положительный (отрицательный) индекс инерции равен размерности пространства.*

4 Критерий знакоопределённости квадратичные формы.

Пусть вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L_n$. Определим *главные подпространства* $L_k^{m.}, k \leqslant n$ пространства L_n следующим образом $L_k^{m.} = \{\forall x \in L_n | x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)\}$. Квадратичная форма $\varphi(x, x), x \in L_n$ индуцирует квадратичные формы $\varphi_k(x, x), x \in L_k^{m.}$. Матрицы квадратичных форм $\varphi_k(x, x)$ совпадают с матрицами главных миноров $A^{(k)}$ квадратичной формы $\varphi(x, x)$. Так как матрицы квадратичных форм $\varphi_k(x, x)$

симметричны, то в соответствии с Предложением 1 существуют матрицы $S^{(k)}, detS^{(k)} = 1$, что

$$A^{(k)} = (S^{(k)})' D^{(k)} S^{(k)}, \tag{10}$$

где $D^{(k)}$ – диагональные матрицы порядка k. Заметим, что при этом

$$D^{(k)} = \begin{pmatrix} D^{(k-1)} & 0 \\ 0 & d_{kk} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Из определения знакоопределённости квадратичной формы следует, если квадратичная форма $\varphi(x, x)$ положительно определена, то и формы $\varphi_k(x, x), k = 1, 2, \ldots, n$ также положительно определены. Критерий же положительной определённости квадратичной формы $\varphi(x, x)$ устанавливает

Теорема 3. *(Критерий Сильвестра.) Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры её матрицы были положительны, то есть*

$$|A^{(1)}| = a_{11} > 0, \ldots, |A^{(n)}| = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Доказательство. Пусть все главные миноры $|A^{(k)}|, k = 1, 2, \ldots, n$ матрицы A квадратичной формы $\varphi(x, x)$ положительны, тогда при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ существуют матрицы $S^{(k)}$ (10), что

$$|A^{(k)}| = |(S^{(k)})' D^{(k)} S^{(k)}| = |S^{(k)}|^2 |D^{(k)}| = |D^{(k)}| > 0, \tag{12}$$

где

$$D^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \ldots & 0 \\ 0 & d_{22} \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 \ldots & d_{kk} \end{pmatrix}.$$

Следовательно $a_{11} = |A^{(1)}| > 0, d_{22} > 0$, так как $|A^{(2)}| = a_{11} d_{22} > 0$ и т. д., то есть все элементы главной диагонали D положительны, а квадратичная форма соответственно положительно определена.

Пусть теперь квадратичная форма $\varphi(x,x)$ положительно определена, тогда её диагональная матрица D положительна. Так как квадратичные формы $\varphi_k(x,x)$ также положительно определены, то и все $D^{(k)}$ также положительны. Из (12) следует положительная определённость всех главных миноров матрицы квадратичной формы. Теорема доказана.

Матрица отрицательно определённой квадратичной формы равна $-A$, где A – матрица положительно определённой квадратичной формы. Так как при умножение матрицы на число умножаются все строки этой матрицы на это число, то, как следует из критерия Сильвестра, знаки главных миноров матрицы $-A$ будут чередоваться: $|A^{(1)}| < 0, |A^{(2)}| > 0, \ldots$, поэтому справедлива

Теорема 4. *Для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров матрицы квадратичной формы чередовались, то есть*

$$|A^{(1)}| = a_{11} < 0, |A^{(2)}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, |A^{(3)}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \ldots .$$

Например, пусть

$$\varphi(x,x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_3^2.$$

Так как

$$|A^{(1)}| = -2 < 0, |A^{(2)}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 5 > 0,$$

$$|A^{(3)}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -2 < 0,$$

то эта квадратичная форма отрицательно определена.