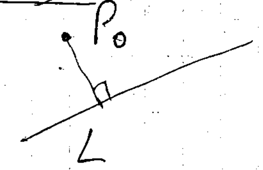
Семинар 15 (24.11.16)

$L: Ax + By + C = 0$

$P_0 = (x_0, y_0)$



$$d(L, P_0) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Функция $f(x)$ называется <u>дифференц. в точке x_0</u>, если

1) функция $f(x)$ опред. в нек. окрестности точки x_0,

2) существует постоянная A такая, что имеет место равенство

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + A\Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0$$

Функция $f(x)$ называется <u>бесконечно малой по сравнению с функцией $g(x)$</u> при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Обозначение: $f(x)=o(g(x)),\ x\to x_0$

Пример $x^3=o(2x^2)$ при $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^2}=\lim\frac{x}{2}=0$$

Пример $2x^2=o(7x^3)$ при $x\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{7x^3}=\cancel{\lim}\lim\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{x}=0.$$

Если Δx мало, то имеет место прибл. формула

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+A\Delta x.$$

Утв. (Ф-я $f(x)$ дифференц. в т. x_0) $\Longleftrightarrow$ (Функция $f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0)

Функция $f(x,y)$ называется **дифференц.** в точке (x_0,y_0), если существуют постоянные A и B такие, что имеет место равенство

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0) + A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \text{ при } \rho \to 0$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

Определение дифференцируемости функции одной переменной дается по аналогии:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \underbrace{A\Delta x} + o(\Delta x)$$

главная линейная часть приращения функции.

<u>Дифференциалом</u> функции $f(x)$ в точке x_0 называется главная линейная часть приращ. ф-ии в этой точке.

<u>Обозначение:</u> $df(x_0, \Delta x)$.

$$df(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\Delta x$$

дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0, соответствующей приращению аргумента Δx.

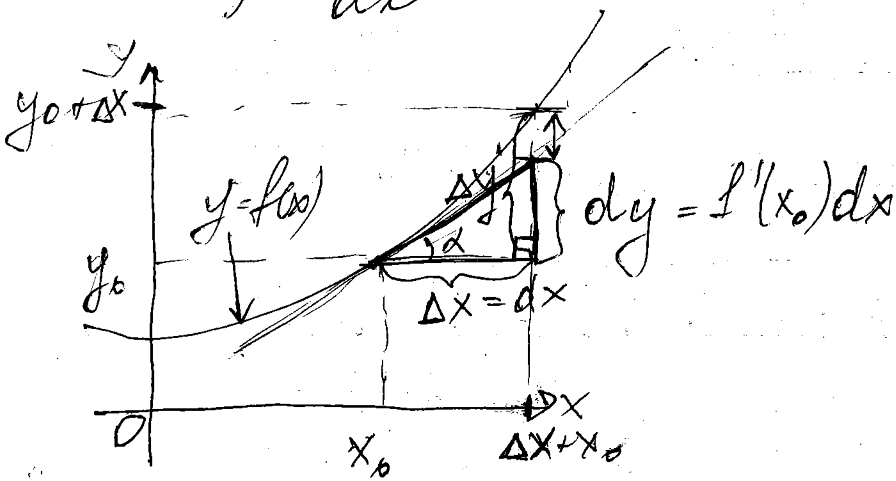
$$\boxed{dx = \Delta x}$$

$$f(x) = x$$

$$df = dx = (x')\Delta x = \Delta x$$

$$dy = f'(x_0)\,dx$$

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$



$$df = f'(x)\,dx$$

<u>Задача</u> $f(x) = x \ln x - x$.

Найти df.

$$df = (\ln x + 1 - 1)\,dx = \ln x\,dx$$

Задача. $f(x) = \arcsin\frac{1}{x}$

Найти: df

$$df = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right)dx = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= -\frac{dx}{\sqrt{x^2-x^4}}$$

Задача $f(x) = 3x^2+x$, $x_0 = 1$,

$\Delta x = 0,1$. приращение

Найти [redacted] Δy. и dy.

дифференциал

$f'(x) = 6x+1$,

$dy = f'(x_0)\cdot dx = 7\cdot 0,1 = 0,7$.

Δy.

[redacted]

$f(\Delta x + x_0) = f(1,1) = 3\cdot 1,21 + 1,1 = 3,63 + 1,1 =$

$= 4,73$

$\Delta y = f(\Delta x + x_0) - f(x_0) = 0,73$

Задача $f(x)=x^x$, $x_0=2$. Найти dy

$f(x)=(e^{\ln x})^x=e^{x\ln x}$

$f'(x)=e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)=x^x\cdot(\ln x+1)$

$dy=f'(x_0)\cdot dx=(4\ln 2+4)dx$

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$$
$\Delta x\to 0$

Если Δx мало, то

$$\boxed{f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x}$$

Задача №16 (в-т 5)

Найти приближенно число

$a=3^{2,1}$.

Решение Рассмотрим функцию $f(x)=3^x$. Тогда

$f'(x)=3^x\ln 3$

$a=3^{2,1}=f(2,1)=f(2+0,1)\approx$

$\approx f(2)+f'(2)\cdot 0,1=3^2+3^2\ln 3\cdot 0,1=$

$= 9 + 0{,}9\ln 3 = \underbrace{9{,}9}8875,$ 6 знач. цифр.

Точное значение.

$a = 3^{2,1} = 10{,}04510.$

Задача № 16 (в-т 16)

Найти приближенно число

$a = \text{ctg}\, 46^\circ$

Решение Рассмотрим функцию $f(x) = \text{ctg}\, x$.

Тогда $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Имеем:

$$a = \text{ctg}\, 46^\circ = f(46^\circ) = f(45^\circ + 1^\circ) =$$

$$= f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{180} =$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot \frac{\pi}{180} = 1 - \frac{2\pi}{180} = 1 - \frac{\pi}{90} =$$

$= 0{,}\underbrace{96509}\ldots$

точное знач. $a = \text{ctg}\, 46^\circ = 0{,}96568.$

Задача 6.17. (В-т 5)

$a = \operatorname{arctg} 0{,}9$

Решение. Рассмотрим ф-ю $f(x) = \operatorname{arctg} x$

Тогда $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Имеем:

$a = \operatorname{arctg}(1+(-0{,}1)) = f(1) + f'(1)\cdot(-0{,}1) =$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(-0{,}1) = 0{,}73539\ldots$

точное знач. $a = \operatorname{arctg} 0{,}9 = 0{,}73281\ldots$

Тема 9 Производные высших порядков

$f(x) = \ln|x+1|$

$f^{(0)}(x) = \ln(x+1)$

$f'(x) = \frac{1}{x+1}$

$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$

$f'''(x) = 2\frac{1}{(x+1)^3}$

$f^{(4)}(x) = -6\frac{1}{(x+1)^4}$

$$f^{V} = \frac{24}{(x+1)^5}$$

И. т. д.

Задача найти производную 3-го порядка $f(x) = x\ln x$.

$$f'(x) = \ln x + 1.$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Задача $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2-3x+2}$

Найти $f^{(5)}(x)$

$$f(x) = \frac{x+5}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

$$x+5 = A(x-2) + B(x-1)$$

$$x+5 = Ax + Bx - 2A - B$$

$$\begin{cases} A+B = 1. \\ -2A - B = 5. \end{cases} \quad \cancel{A=6} \quad \cancel{A=6} \quad \begin{cases} A = -6 \\ B = \cancel{5}\ 7. \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{6}{x+1} + \frac{7}{x-2}$$

$$f^{(5)} = \frac{+6!\cdot\cancel{5!}}{(x+1)^6} - \frac{7\cdot 5!}{(x-2)^6} = \frac{720}{(x-1)^6} - \frac{840}{(x-2)^6}$$

$$g(x) = \frac{1}{x-a}$$

$$g'(x) = -(x-a)^{-2}$$

$$g''(x) = 2(x-a)^{-3}$$

$$g'''(x) = -6(x-a)^{-4}$$

$$g^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$$

Семинар 16 (01.12.16)

Задача $f(x) = \sin x$

Найти $f^{(n)}(x)$

Решение $f'(x) = f' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + \pi)$$

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}$$

Задача $f(x) = \cos(2x+3)$

Найти $f^{(n)}(x)$

$$f'(x) = -2\sin(2x+3) = 2\cos\left(2x+3+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -4\sin\left(2x+3+\frac{\pi}{2}\right) = 4\cos(2x+3+\pi)$$

257

$$f^{(n)}(x) = 2^n\cos\left(2x+3+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

Задача $f(x) = \sin 3x \cdot \cos^2 x$

Найти ~~f(n)~~ $f^{(n)}(x)$

$f(x) = \cancel{\sin 3x \cdot \cos x \cdot \cos x} = \sin 3x \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} =$

$= \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin 3x \cdot \cos 2x =$

$= \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{4}(\sin 5x + \frac{1}{4}\sin x$

$\cancel{f^{(n)}} f^{(n)} = \frac{3^n}{2} \cdot \cancel{2^n} \sin\left(3x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \frac{5^n}{4}\sin\left(5x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$+ \frac{1}{4}\sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

Формула Лейбница

$(fg)' = f'g + fg'$

$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''$

$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(k)} g^{(n-k)}}$$

Бином Ньютона

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k \cdot b^{(n-k)}$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

треугольник Паскаля

Задача

$f(x) = x \cdot e^{2x}$

Найти $f^{(n)}(x)$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (x)^{(k)} \cdot (e^{2x})^{(n-k)} =$$

$$= x \cdot (e^{2x})^{n} + C_n^1 (e^{2x})^{(n-1)} = x \cdot 2^n e^{2x} + n \cdot e^{2x} \cdot 2^{n-1}$$

Задача $f(x) = x \cdot \ln(2x^2 - 5x + 2)$

Найти $f^{(n)}(x)$ - ?

Решение

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (x)^{(n)} \cdot (\ln(2x^2 - 5x + 2))^{(n-k)} =$$

$$= x \cdot (\ln(2x^2 - 5x + 2))^{n} + n \cdot 1 \cdot (\ln(2x^2 - 5x + 2))^{(n-1)}$$

$$\ln(2x^2 - 5x + 2) = \ln 2(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \ln(x-2)(2x-1) = \ln|x-2| + \ln|2x-1|$$

$$(\ln|x-2|)' = \frac{1}{x-2}$$

259

$$(\ln|x-2|)'' = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

$$(\ln|x-2|)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(x-2)^n}$$

$$(\ln|2x-1|)' = \frac{1}{2x-1} \cdot 2 \cdot \cancel{(\ )}$$

$$(\ln|2x-1|)'' = -\frac{2^2}{(2x-1)^2} \cdot \cancel{(-2)}$$

$$(\ln|2x-1|)''' = \frac{2^3}{(2x-1)^3} \cdot \cancel{(-6)} (+2)$$

$$(\ln|2x-1|)^{IV} = -\frac{2^4}{(2x-1)^4} \cdot (+6)$$

$$(\ln|2x-1|)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2^n \cdot (n-1)!}{(2x-1)^n}$$

$$f^{(n)} = x \cdot \left((-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(2x-1)^n} \cdot 2^n + (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(x-2)^n}\right) +$$

$$+ n \cdot \left((-1)^n \frac{(n-2)!}{(2x-1)^{n-1}} \cdot 2^{(n-1)} + (-1)^n \frac{(n-2)!}{(x-2)^{n-1}}\right)$$

Задача Доказать, что $\forall$ ф-я $y = e^x \cdot \cos x$ является решением ~~ур~~ диф-ого ур-я $y'' - 2y' + 2y = 0$.

$y' = e^x \cdot \cos x - \sin x \cdot e^x$

$y'' = e^x \cdot \cos x - 2e^x \cdot \sin x \mp e^x \cos x =$

$= -2e^x \cdot \sin x.$

$-2e^x \cdot \sin x - 2e^x \cdot \cos x + 2\sin x \cdot e^x + 2e^x \cdot \cos x = 0$

– верно.

Значит ф-я $y = e^x \cdot \cos x$ является решением данного дифф-ого ур-я

<u>Нахождение $y'', y''', \ldots$ для функций заданных парам-ки</u>

<u>Пример</u>

$$\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = e^{5t} \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{5e^{5t}}{3t^2}$$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x =$$

$$= \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{e^{5t}}{t^2}\right)'_t \cdot \frac{1}{3t^2} =$$

$$=\frac{5}{3}\cdot\frac{5e^{5t}\cdot t^2-2t\cdot e^{5t}}{t^4}\cdot\frac{1}{3t^2}=$$

$$=\frac{5}{9}\,\frac{5t-2}{t^5}\cdot e^{5t}$$

Задача
$$\begin{cases} x_t=2\cos t \\ y_t=3\sin t \end{cases}$$

Найти $y'_x,\ y''_{xx},\ y'''_{xxx}$

$$x'_t=-2\sin t$$

$$y'_t=3\cos t$$

$$y'_x=-\frac{3}{2}\operatorname{ctg} t$$

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\left(-\frac{3}{2}\operatorname{ctg} t\right)'_t\cdot\left(-\frac{1}{2\sin t}\right)=$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2 t}\cdot\frac{1}{2\sin t}=-\frac{3}{4\sin^3 t}$$

$$y'''_{xxx}=\frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}=\left(-\frac{3}{4\sin^3 t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2\sin t}\right)$$

$$= +\frac{3}{4}\cdot(-3)\frac{1}{\sin^4 t}\cdot\cos t\cdot\frac{1}{2\sin t} =$$

$$= -\frac{9\cos t}{8\sin^5 t}$$

<u>Нахождение</u> <u>$y', y'', y''', \dots$ для</u>
<u>функций заданных неявно</u>

<u>Пример</u>

$$e^{x-y} = x+y$$

$$\left(e^{x-y}\right)'_x = (x+y)'_x$$

$$e^{x-y}(1-y') = 1+y'$$

$$-1+e^{x-y} = y' + e^{x-y}\cdot y'$$

$$y' = \frac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}+1}$$

$$y'' = (y')' = \left(\frac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}+1}\right)' = \cancel{e^{x-y}(1}$$

$$= \frac{e^{x-y}(1-y')(e^{x-y}+1) - e^{x-y}(1-y')(e^{x-y}-1)}{(e^{x-y}+1)^2} =$$

$$= e^{x-y}(1-y')\frac{2}{(e^{x-y}+1)^2} =$$

$$= \frac{2e^{x-y}\left(1-\frac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}+1}\right)}{(e^{x-y}+1)^2} =$$

$$= \frac{4e^{x-y}}{(e^{x-y}+1)^3} = \frac{4x+4y}{(x+y+1)^3}$$

<u>Задача</u>

$$2x^2+3y^2=1.$$

Найти: y', y'', y'''.

$$(2x^2+3y^2)'_x = (1)'_x$$

$$4x+6y\cdot y'=0$$

$$y' = -\frac{4x}{6y} = -\frac{2x}{3y}.$$

$$y'' = \left(-\frac{2x}{3y}\right)' = -\frac{2}{3}\cdot\frac{y-y'x}{y^2} =$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{y+\frac{2x^2}{3y}}{y^2} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{3y^2+2x^2}{3y^3} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y^3}$$

$$y''' = -\frac{2}{9}\cdot(-3)\cdot\frac{1}{y^4}\cdot y' = \frac{2}{3y^4}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{x}{y} =$$

$$= -\frac{4x}{9y^5}$$

Семинар 17 (03.12.16)

Тема 10.

Теоремы о дифференцируемых функциях.

Теорема Ролля. Пусть

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$

2) функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b)

3) $f(a)=f(b)$

Тогда существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $f'(c)=0$ 265