

## 博弈论

### 巴什博弈

有  $n$  个石子，两个人轮流从中取走石子，每次最多取  $m$  个，最少取 1 个，取完者获胜，问先手方有没有必胜的策略。

```
n%(m+1)? "YES": "NO"
```

### 威佐夫博弈

有两堆石子，石子数量分别为  $a, b$ 。两人轮流取石子，取法有两种：

- 取走一堆中任意个石子；
- 从两堆中取走相同数目的石子。取完所有石子的一方获胜，问先手方有没有必胜的策略。

```
if(a>b) swap(a,b);
auto t = (sqrt(5)+1)/2;
if(int(t*(b-a))==a) cout<<"NO"<<"\n";
else cout<<"YES"<<"\n";
```

### Nim 游戏

有  $n$  堆石子  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，两人轮流从任意一组取若干个石子，谁取完谁赢，问先手有没有必胜策略。

```
if(accumulate(v.begin(), v.end(), 0, [](int a,int b) { return a^b; }))
    cout<<"YES"<<"\n";
else cout<<"NO"<<"\n";
```

### SG 定理

$$\text{mex}(S) = \min\{x\} \quad (x \notin S, x \in N)$$

$$\text{SG}(x) = \text{mex}\{\text{SG}(y_1), \text{SG}(y_2), \dots, \text{SG}(y_k)\}$$

对于一个由  $n$  个有向图组成的游戏，当且仅当下式成立时，这个游戏是先手必胜的：

$$\text{SG}(s_1) \oplus \text{SG}(s_2) \oplus \dots \oplus \text{SG}(s_n) \neq 0$$