组合数学

排列组合

球盒模型

n 个小球放到 m 个盒子里:

- 球相同，盒子不同，不能有空盒：$\binom{n-1}{m-1}$
- 球相同，盒子不同，可以有空盒：$\binom{n+m-1}{n}$
- 球不同，盒子不同，可以有空盒：m^n
- 球不同，盒子相同，不能有空盒：$S(n,m)$，S 为第二类斯特林数（见后文）
- 球不同，盒子不同，不能有空盒：$m! \times S(n,m)$
- 球不同，盒子相同，可以有空盒：$\sum_{i=1}^{m} S(n,i)$
- 球相同，盒子相同，可以有空盒：

  设 $f[n][m]$ 为 n 个球放到 m 个盒子里的方案数

  如果只有一个盒子或者没有小球，方案数自然为 1

  如果小球比盒子要少，小球肯定是放不满盒子的，由于盒子相同，可以得到转移 $f[i][j]=f[i][i]$

  如果小球比盒子要多，就分为将盘子放满和没放满两种情况，即 $f[i][j]=f[i-j][j]+f[i][j-1]$

  ```
  for(int i=0;i<=n;i++)
  {
      for(int j=1;j<=m;j++)
      {
          if(i==0||j==1) f[i][j] = 1;
          else if(i<j) f[i][j] = f[i][i];
          else if(i>=j) f[i][j] = f[i-j][j]+f[i][j-1];
      }
  }
  ```

- 球相同，盒子相同，不能有空盒：

  假设在每一个盒子里都放上了一个球，就跟上面的情况一样了。结果：$f[n-m][m]$

组合数性质

- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$
- $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$
- $\sum_{i=0}^{n} i^2\binom{n}{i} = n(n+1)2^{n-2}$
- $\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$
- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} = F_{n+1}$，$F$ 为斐波那契数列

二项式定理

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

- $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$
- $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=[n=0]$

错位排列

前几项: $0,1,2,9,44,265$

对于 $1\sim n$ 的排列 P, 如果满足 $P_i\neq i$, 则称 P 是 n 的错位排列。

$$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$$

$$D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$$

$$D_n=\left\lfloor\frac{n!}{e}\right\rfloor$$

圆排列

n 个物品选 m 个排成一个环的方案数

$$Q_n^m=\frac{A_n^m}{m}=\frac{n!}{r\times(n-r)!}$$

其他

n 个完全相同的元素, 要求将其分为 m 组, 要求每组至少有 a_i 个元素 ($\sum a_i\leq n$), 一共有 $\binom{n-\sum a_i+k-1}{n-\sum a_i}$ 种分法

$1\sim n$ 中选 m 个, 这 m 个数中任何两个数都不相邻的组合有 $\binom{n-m+1}{m}$ 种。

斯特林数

第二类斯特林数

$$S(n,m)$$

$$\begin{Bmatrix}n\\m\end{Bmatrix}$$

表示将 n 个两两不同的元素, 划分为 m 个互不区分的非空子集的方案数。

递推:

$$\begin{Bmatrix}n\\m\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}n-1\\m-1\end{Bmatrix}+m\begin{Bmatrix}n-1\\m\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}n\\0\end{Bmatrix}=[n=0]$$

通项:

$$\begin{Bmatrix}n\\m\end{Bmatrix}=\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^{m-i}i^n}{i!(m-i)!}$$

第一类斯特林数

$$s(n,m)$$

$$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}$$

表示将 n 个两两不同的元素，划分为 m 个互不区分的非空轮换的方案数。

一个轮换就是一个首尾相接的环形排列。我们可以写出一个轮换 $[A,B,C,D]$，并且 $[A,B,C,D]=[B,C,D,A]=[C,D,A,B]=[D,A,B,C]$，即，两个可以通过旋转而互相得到的轮换是等价的。注意，两个可以通过翻转而相互得到的轮换不等价，即 $[A,B,C,D]\neq[D,C,B,A]$。

$$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n-1\\m-1\end{bmatrix}+(n-1)\begin{bmatrix}n-1\\m\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}=[n=0]$$

卡特兰数

前几项：$1,1,2,5,14,42,132$

1. 有 $2n$ 个人排成一行进入剧场。入场费 5 元。其中只有 n 个人有一张 5 元钞票，另外 n 人只有 10 元钞票，剧院无其它钞票，问有多少种方法使得只要有 10 元的人买票，售票处就有 5 元的钞票找零？
2. 一位大城市的律师在她住所以北 n 个街区和以东 n 个街区处工作。每天她走 $2n$ 个街区去上班。如果他从不穿越（但可以碰到）从家到办公室的对角线，那么有多少条可能的道路？
3. 在圆上选择 $2n$ 个点，将这些点成对连接起来使得所得到的 n 条线段不相交的方法数？
4. 对角线不相交的情况下，将一个凸多边形区域分成三角形区域的方法数？
5. 一个栈（无穷大）的进栈序列为 $1,2,3,\cdots,n$ 有多少个不同的出栈序列？
6. n 个结点可构造多少个不同的二叉树？

$$H_n=\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}(n\geq 2,n\in\mathbf{N}_+)$$

$$H_n=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}H_{i-1}H_{n-i} & n\geq 2,n\in\mathbf{N}_+\\1 & n=0,1\end{cases}$$

$$H_n=\frac{H_{n-1}(4n-2)}{n+1}$$

$$H_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$$

贝尔数

前几项: $1,1,2,5,15,52,203$

$$B_n$$

基数为 n 的集合的划分方法的数目。例如 3 个元素的集合 $\{a,b,c\}$ 有 5 种不同的划分方法:$\{\{a\},\{b\},\{c\}\},\{\{a\},\{b,c\}\},\{\{b\},\{a,c\}\},\{\{c\},\{a,b\}\},\{\{a,b,c\}\}$

$$B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$$

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)$$

贝尔三角形

用以下方法构造一个三角矩阵 (形式类似杨辉三角形):

- 第一行第一项为 1 $(a_{1,1}=1)$;
- 对于 $n>1$, 第 n 行第一项等于第 $n-1$ 行的第 $n-1$ 项 $(a_{n,1}=a_{n-1,n-1})$;
- 对于 $m,n>1$, 第 n 行的第 m 项等于它左边和左上角两个数之和 $(a_{n,m}=a_{n,m-1}+a_{n-1,m-1})$

每行的首项是贝尔数。可以利用这个三角形来递推求出 Bell 数。

卢卡斯定理

$$\binom{n}{m} \bmod p=\binom{\lfloor n/p\rfloor}{\lfloor m/p\rfloor}\cdot\binom{n \bmod p}{m \bmod p} \bmod p$$

```
ll fac[maxn];   //* 预处理阶乘到 p-1
ll C(ll n,ll m,ll p)
{
    return n>=m?fac[n]*qpow(fac[m],p-2,p)%p*qpow(fac[n-m],p-2,p)%p:0;
}
ll lucas(ll n,ll m,ll p)    // C(n,m) mod p
{
    return m?lucas(n/p, m/p, p)*C(n%p, m%p, p)%p:1;
}
```

康托展开

求一个排列的排名, 可用于哈希

```
//* include 树状数组
ll fac[maxn];   //* 预处理阶乘到 n
ll cantor(const vector<int>& v)
{
    for(int i=1;i<=n;i++) modify(i, 1);
    ll sum = 1;
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        modify(v[i-1], -1);
        sum = (sum+fac[n-i]*query(v[i-1]))%mod;
    }
    return sum;
}
```

逆康托展开

以第 38 名长度为 5 的排列为例：

1. $37 \div 4! = 1 \cdots 13$，故首位为 2；
2. $13 \div 3! = 2 \cdots 1$，故第二位为 4（前面已有一个 2）；
3. $1 \div 2! = 0 \cdots 1$，故第三位为 1；
4. $1 \div 1! = 1$，故第四位为 5（前面已有 $1, 2, 4$）；
5. 故第五位为 3，原排列为 $2, 4, 1, 5, 3$。

可以使用线段树维护，方法与康托展开相似。

$n \times m$ 网格中矩形数量

$$\frac{nm(n+1)(m+1)}{4}$$