Vektorgrafik: Einführung, Transformationen

Vorlesung “Computergrafik und Bildverarbeitung”

Lehrstuhl für Medieninformatik
Institut für Information und Medien, Sprache und Kultur
Fakultät für Informatik und Data Science

Universität Regensburg

Themen heute

- **Vektoren**
  - Koordinatensysteme, Vektoren
  - Addition, Multiplikation
  - Skalarprodukt, Kreuzprodukt
  - Lineare Abhängigkeit
- **Matrizen**
  - Rechenregeln
  - Einheitsmatrix und inverse Matrix
- **Transformation von Vektoren mittels Matrizen**
  - Grundprinzipien
  - Homogene Koordinaten

Vektoren

#01

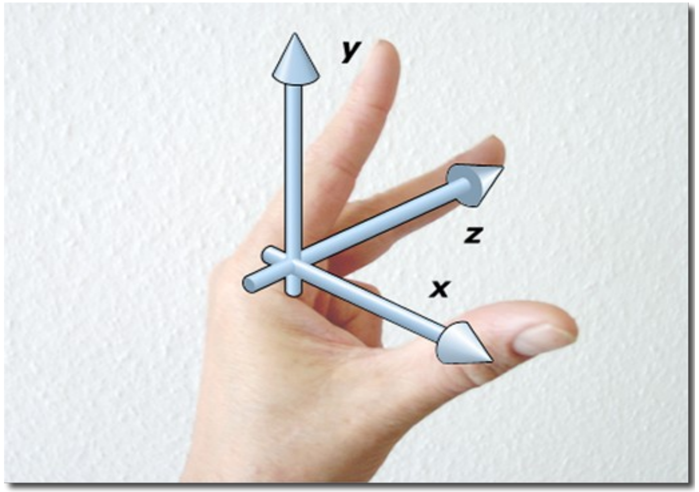
Koordinatensysteme

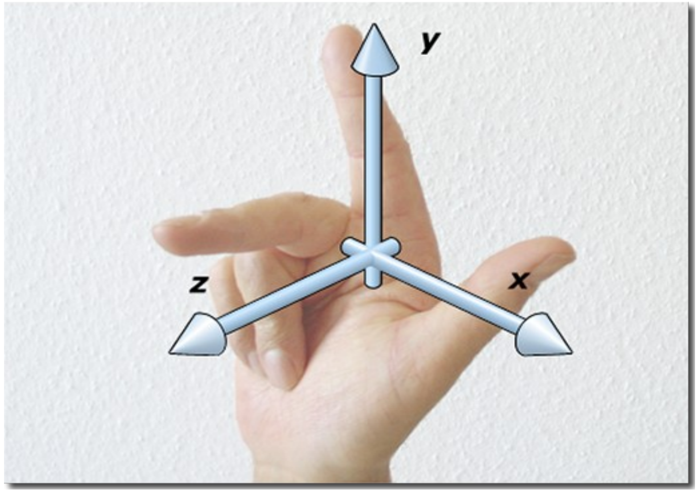
X – Richtung des Daumens

Y – Zeigefinger

Z – Mittelfinger

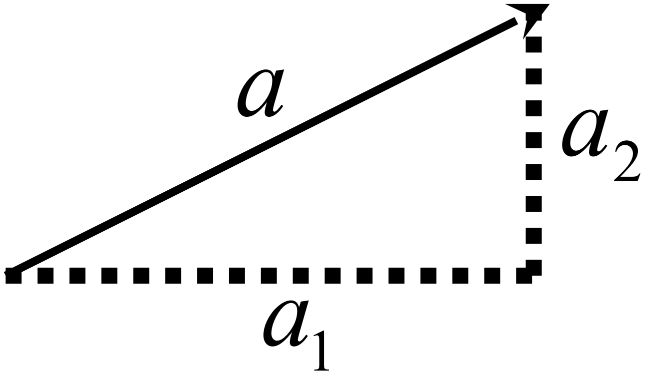
Die beiden Koordinatensysteme sind spiegelbildlich
und nicht durch Drehung ineinander zu überführen.





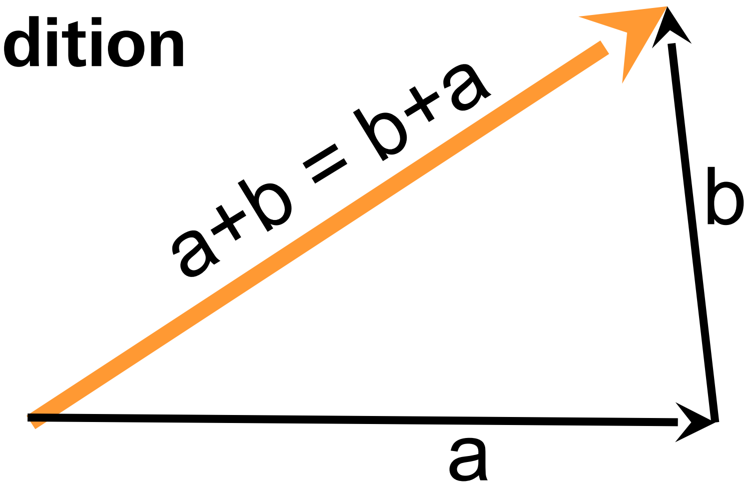
Quelle: Skript zur Vorlesung Computergrafik 1 im SS09
Prof. Dr. Ing. Axel Hoppe – LMU München

Vektoren - Grundbegriffe



- **Elemente eines Vektorraums**
- **Länge und Richtung = Verschiebung**
- **keine Aussage über absolute Position**
- **Schreibweise:** $\vec{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- **Betrag/ Norm/ Länge eines Vektors:** $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$

Vektoren - Addition



- geometrisch: Anfang des zweiten Pfeils an Spitze des ersten Pfeils
- Addition ist kommutativ
- im kartesischen Koordinatensystem:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

Vektoren – Multiplikation 1: Skalarmultiplikation

Multiplikation mit einem Skalar/ Skalarmultiplikation:

$$\vec{a} * \alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} * \alpha = \begin{pmatrix} x * \alpha \\ y * \alpha \\ z * \alpha \end{pmatrix}$$

- **Veränderung der Vektorlänge um Faktor des Skalars**
- **das Ergebnis ist wieder ein Vektor**
- **bei Multiplikation mit negativem Skalar dreht sich die Richtung des Vektors**

Vektoren – Multiplikation 2: Skalarprodukt

Multiplikation eines Vektors mit einem Vektor:

$$\langle a,b\rangle \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

- **das Ergebnis ist ein Skalar**
- **wenn Skalarprodukt = 0, stehen die Vektoren senkrecht aufeinander bzw sind orthogonal**
- **Verwendung: Winkel zwischen Vektoren ausrechnen**

$$\cos\lambda = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||\cdot||\vec{b}||}$$

Vektoren – Multiplikation 3: Kreuz-/Vektorprodukt

Ziel: Zwei Vektoren zu einem Normalenvektor der Ebene verbinden.

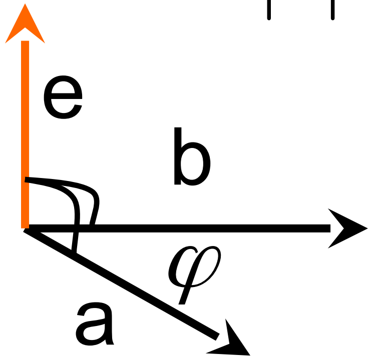
Welcher Vektor steht auf beiden Vektoren senkrecht?

Die Länge dieses Vektors ist die Flächengröße des Parallelogramms mit den Seiten a und b .

$$a \times b = |a| \cdot |b| \cdot \sin(\varphi) \cdot e$$

Phi = Winkel, eingeschlossen von a und b

e = Einheitsvektor, zu beiden Vektoren orthogonal



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Vektoren – Lineare Abhängigkeit

Mehrere Vektoren sind linear abhängig, wenn

- **sie parallel (2D) oder koplanar (3D) zueinander sind ODER**
- **man einen aus den anderen erstellen kann ODER**
- **man mit ihnen den Nullvektor ausdrücken kann, d.h.**
- **es** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ **gibt, nicht alle Null, so daß gilt:**

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

Geraden im R³

Geraden im R³ haben folgende Form:

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Punkt

Geraden-
parameter

Richtungs-
vektor

Zur Berechnung eines Geradenschnittpunkts:

- Beide Geradengleichungen gleichsetzen
- eine Gleichung für jede Koordinate
- Geradenparameter berechnen
- Einsetzen

Matrix Cookbook:

http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/publication_details.php?id=3274

Matrizen

#02

Matrizen - Grundbegriffe

- **Anordnung von Elementen (m x n = m Zeilen, n Spalten)**
- **Verwendung zur Transformation von Punkten und Vektoren**
  - **Translation, Rotation, Scheren, Skalieren**
- **Addition und Multiplikation mit einem Skalar: Element für Element**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrizen – Multiplikation mit einer Matrix

- **Spalten in Matrix 1 = Zeilen in Matrix 2**
- **Element (i,j) im Produkt ist Produkt der Zeile i der Matrix 1 und Spalte j der Matrix 2**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 27 & 33 & 13 \\ 19 & 44 & 61 & 26 \\ 8 & 28 & 32 & 12 \end{pmatrix}$$

- **nicht kommutativ: AB != BA**
- **assoziativ: A*(B*C) = (A*B)*C**
- **distributiv: A*(B+C) = AB + AC**

Matrizen – Multiplikation mit einer Matrix

(Falkesches Schema)

- Spalten in Matrix 1 = Zeilen in Matrix 2
- Element (i,j) im Produkt ist Produkt der Zeile i der Matrix 1 und Spalte j der Matrix 2

Zeile i \ Spalte j			1	2	3	4
			3	6	9	4
			2	7	8	3
1	1	3	**9**	**27**	**33**	**13**
2	5	2	**19**	**44**	**61**	**26**
3	0	4	**8**	**28**	**32**	**12**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrizen – Multiplikation mit einem Vektor

- **Vektor als einspaltige Matrix (m x 1)**

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

Matrizen – Transponieren einer Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Matrizen – Einheitsmatrix

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zwei Matrizen, deren Produkt bei der Matrizenmultiplikation die Einheitsmatrix ist, sind zueinander invers.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Matrizen – Inverse Matrix

Zwei Matrizen, deren Produkt bei der Matrizenmultiplikation die Einheitsmatrix ist, sind zueinander invers.

Manuelles Ermitteln der inversen Matrix: Anwenden von elementaren Zeilenumformungen auf Matrix und Einheitsmatrix:

- Vertauschung zweier Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einer konstanten Zahl != 0
- Addition des beliebigen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Matrix zur Einheitsmatrix umformen
2. gleiche Schritte auf Einheitsmatrix anwenden
3. umgeformte Einheitsmatrix ist Inverse der Quellmatrix

Transformation von Vektoren mittels Matrizen

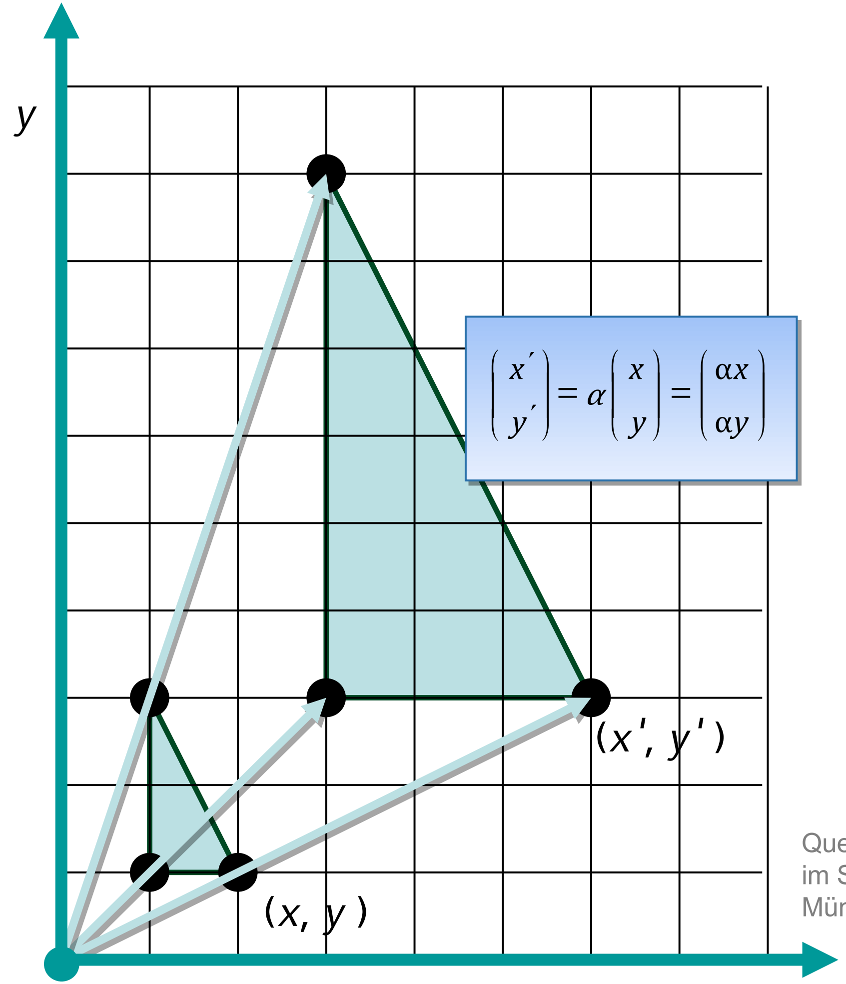
#03

Transformationen in 2D - Grundbegriffe

Bewegungen = Transformationen

- Veränderung der Position von Punkten
- Verschiebung = Translation
- Größenveränderungen = Skalierung
- Drehung = Rotation
- Weitere affine (linienerhaltende) Transformationen:
  - Spiegelung
  - Scherung

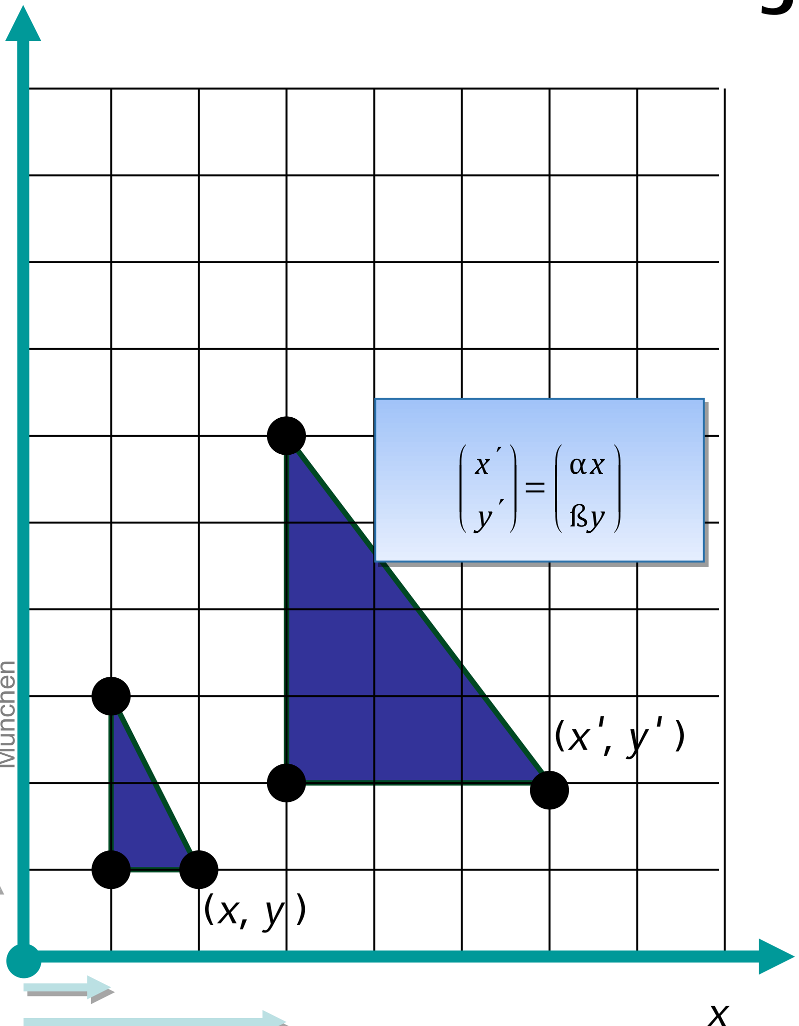
Uniforme Skalierung



- Zentrum der Skalierung ist 0, Skalierung erfolgt in alle Richtungen uniform mit dem skalaren Faktor α
- Multiplikation mit dem Skalierungsfaktor
- Ortsvektor zu (x, y) wird auf das α-fache verlängert, um (x', y') zu erhalten

Quelle: Skript zur Vorlesung Computergrafik 1 im SS09 – Prof. Dr. Ing. Axel Hoppe – LMU München

Nicht-uniforme Skalierungen



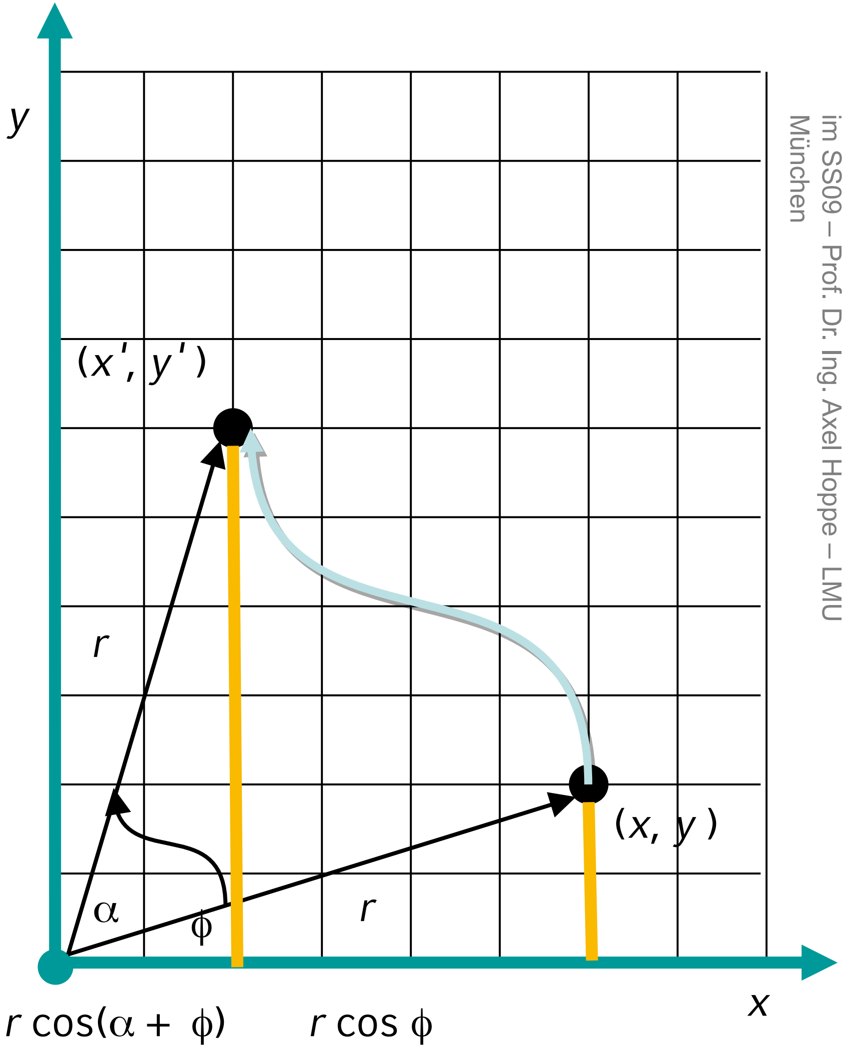
Quelle: Skript zur Vorlesung Computergrafik 1 im SS09 – Prof. Dr. Ing. Axel Hoppe – LMU München

Zentrum der Skalierung ist o, Skalierung erfolgt in *x*-Richtung mit dem Faktor α, in *y*-Richtung mit β (Skalierungsvektor $(\alpha, \beta)^T$)

- Multiplikation mit entsprechenden Skalierungsfaktoren
- Ortsvektor zu (*x*, *y*) wird auf das α-fache in *x*-Richtung und das β-fache in *y*-Richtung verlängert.
- eine Darstellung als Matrizenmultiplikation ist möglich:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \beta y \end{pmatrix}$$

Rotation



Quelle: Skript zur Vorlesung Computergrafik 1 im SS09 – Prof. Dr. Ing. Axel Hoppe – LMU München

- Rotationszentrum ist der Nullpunkt.
- Positive Werte von α ergeben eine Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn.
- Punkt (x, y) wird um den Winkel α um den Nullpunkt gedreht, so dass sich der Punkt (x', y') ergibt.

Rotation: Berechnungs-Vorschrift

Rotationen um negative Winkel erfolgen
mit dem Uhrzeigersinn;

ausnutzen:

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ und
$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

die Berechnungs-Vorschrift

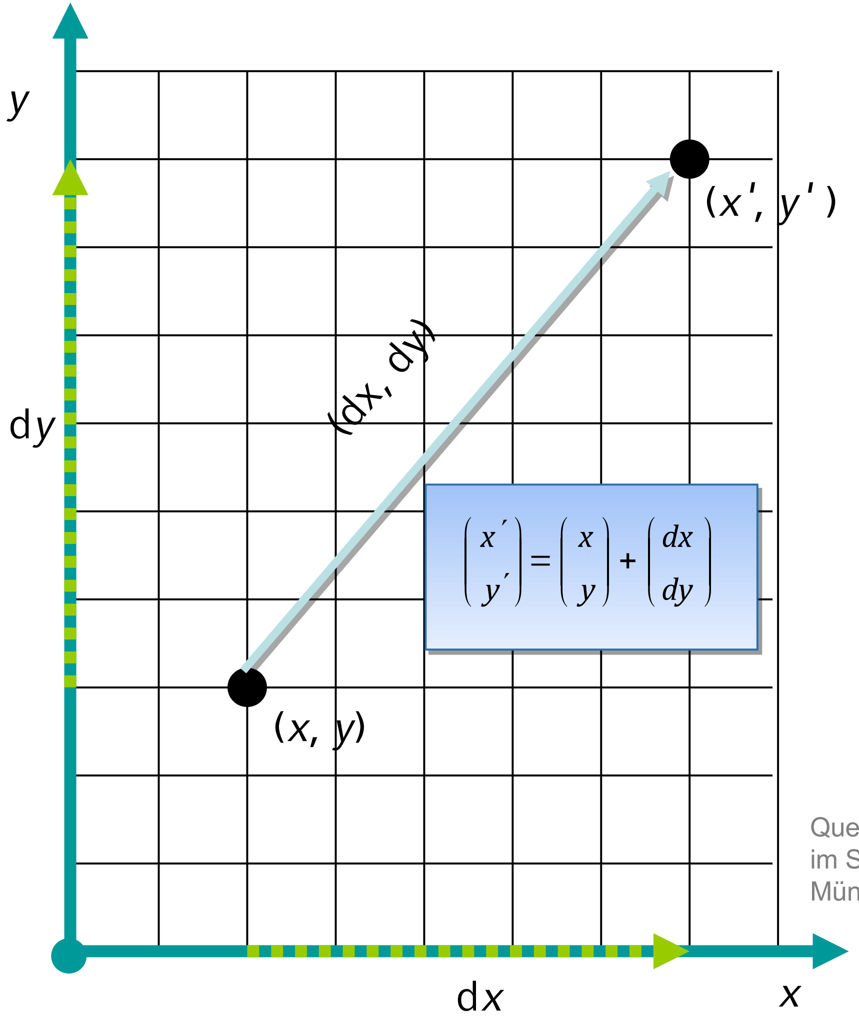
$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

kann als Matrix-Vektormultiplikation
ausgedrückt werden:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Translation



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

- Punkt (*x*, *y*) wird auf gerade Linie nach (*x*', *y*') verschoben.
- Addition des Verschiebungsvektors
- Beschreibung der Translation durch einen Vektor (d*x*, d*y*), der die Verschiebungsweite in *x*- und *y*-Richtung angibt

Quelle: Skript zur Vorlesung Computergrafik 1 im SS09 – Prof. Dr. Ing. Axel Hoppe – LMU München

Zusammenfassung

Skalierung = **Multiplikation** mit Vektor/ Skalierungsmatrix

Rotation = **Multiplikation** mit orthonormaler Rotationsmatrix

Translation = **Addition** eines Translationsvektors

Matrizenmultiplikation ist assoziativ*, lange Ketten von Transformationsmatrizen könnten also zusammengefasst werden. Wie lässt sich die Translation als Matrizenmultiplikation ausdrücken?

➔Homogene Koordinaten

➔Translation als Matrixmultiplikation:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + x \\ \beta + y \\ 1 \end{pmatrix}$$

VORTEIL:

Repräsentation aller Punkte in homogenen Koordinaten ermöglicht einheitliche Behandlung der Transformationen, Geschwindigkeitsgewinn

** Matrizen A,B und Vektor x: A*(B*x) = (A*B)*x*

Transformationen in 2D

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Translation

$$S = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Skalierung

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation

Transformationen in 3D

- Vorgehensweise analog zu 2D
- Arbeit mit homogenen Koordinaten
- homogene Koordinaten sind jetzt vierdimensional
- Transformationsmatrizen demzufolge 4×4-Matrizen
- Anwendung wie in 2D

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Translation

$$S = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Skalierung

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation

Bezier-Kurven

#04

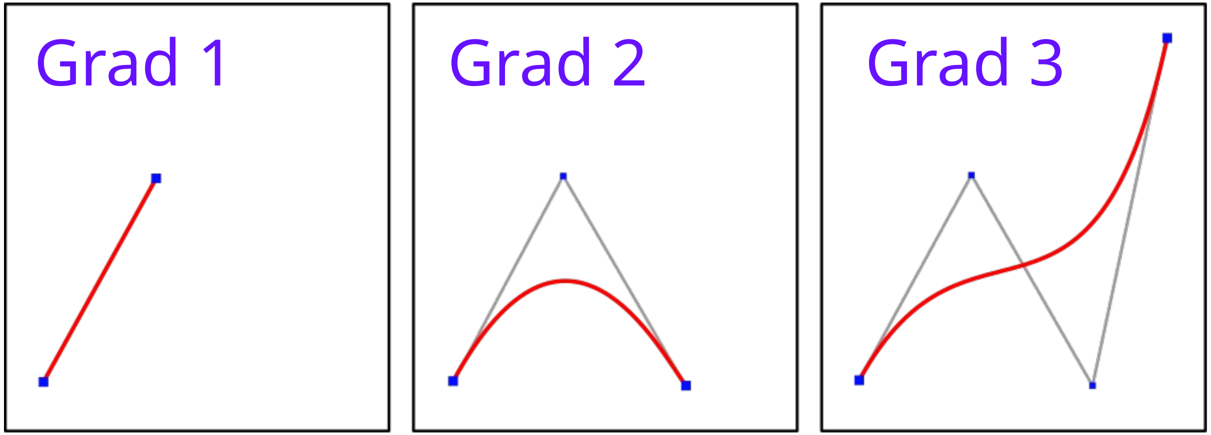
Bezier-Kurven

- Repräsentation von gebogenen Linien
- Definition durch Kontrollpunkte
- Grad = Anzahl Kontrollpunkte + 1
- Grad 1: Linie
- Grad 2: quadratische Bezierkurve
- Grad 3: kubische Bezierkurve

$$\mathbf{b}(t) = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1 \ , \ t \in [0,1]$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(t) &= \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} t^i (1-t)^{2-i} \mathbf{b}_i \\ &= (1-t)^2 \mathbf{b}_0 + 2t(1-t)\mathbf{b}_1 + t^2 \mathbf{b}_2 \\ &= (\mathbf{b}_0 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)t^2 + (-2\mathbf{b}_0 + 2\mathbf{b}_1)t + \mathbf{b}_0 \ , \ t \in [0,1] \ .\end{aligned}$$

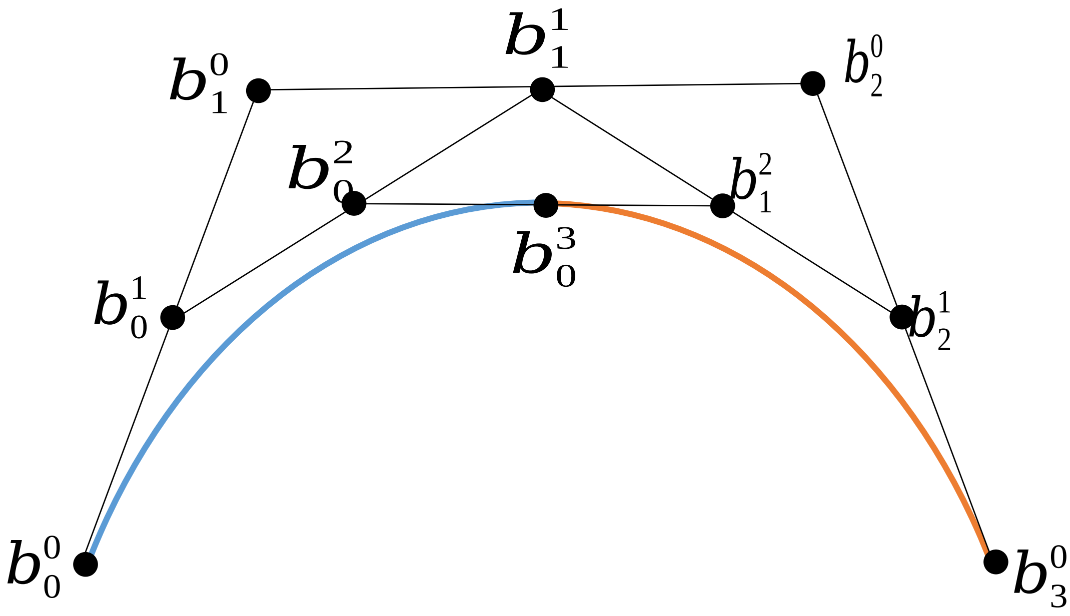
$$\begin{aligned}\mathbf{b}(t) &= \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i} \mathbf{b}_i \\ &= (1-t)^3 \mathbf{b}_0 + 3t(1-t)^2 \mathbf{b}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{b}_2 + t^3 \mathbf{b}_3 \\ &= (-\mathbf{b}_0 + 3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3)t^3 + (3\mathbf{b}_0 - 6\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2)t^2 + (-3\mathbf{b}_0 + 3\mathbf{b}_1)t + \mathbf{b}_0 \ , \ t \in [0,1] \ .\end{aligned}$$



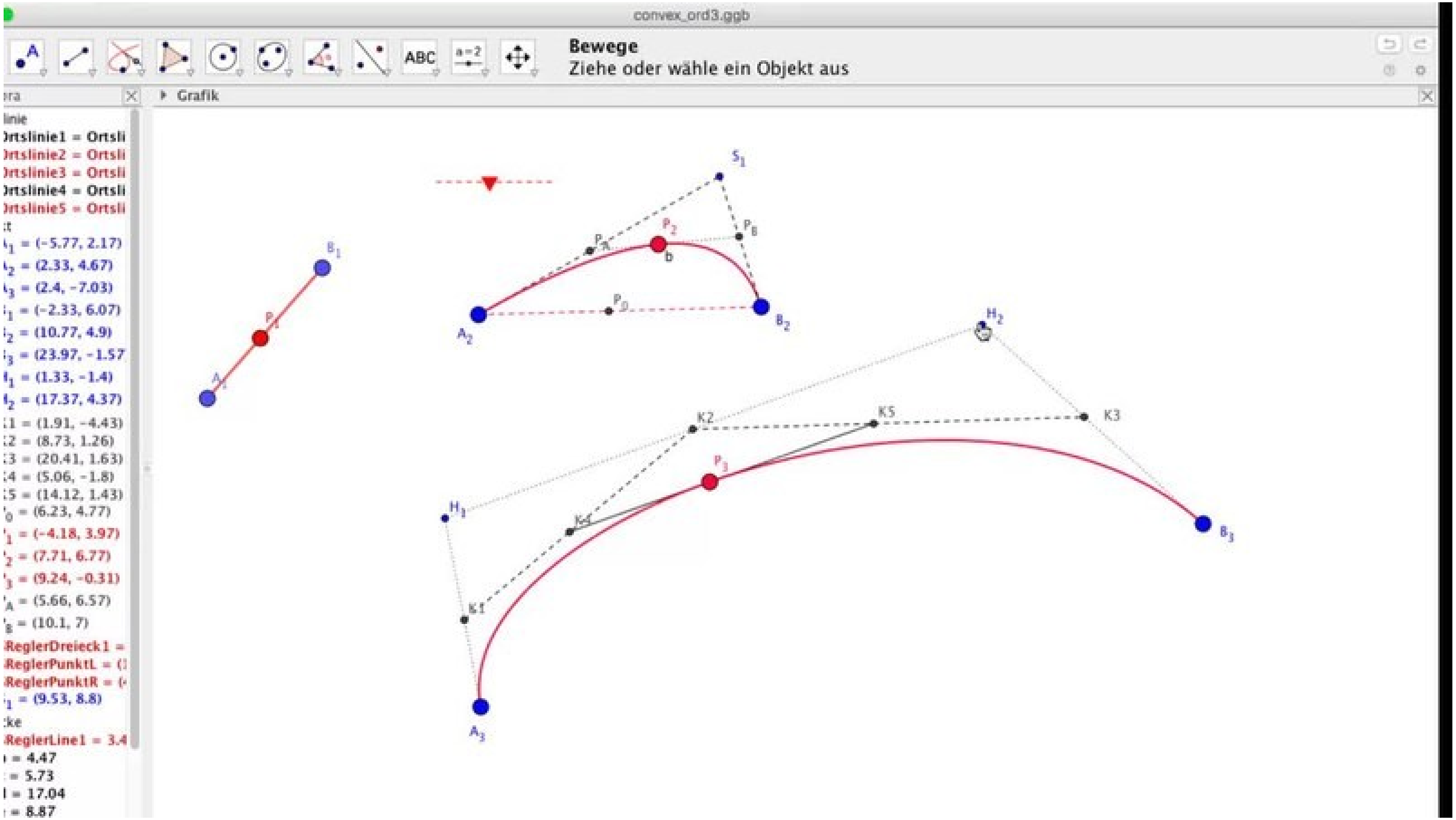
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bezier_grad123.svg

De-Casteljau-Algorithmus

- Effizientes Verfahren zum Zeichnen von Bezierkurven
- Idee: wandernde Sehnen auf den Strecken zwischen Kontrollpunkten
- Wert zwischen 0% und 100%
- Beispiel rechts: Punkt bei 50%



Interaktive Demo: https://www.geogebra.org/m/ek7RHvuc



https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Convex_combination_geogebra.webm