3.Esercizi sulle ricorrenze lineari

Testo e svolgimento

Dott. Simone Staccone
simone.staccone@uniroma2.it

Dipartimento di Ingegneria civile e Ingegneria informatica (DICII)
DAMON Research Group

TOR VERGATA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

Overview

1. Dimostrare che $\log(n!) = \Theta(n \log n)$
2. Dimostrare che $\sum_{i=1}^{n} \log i = \Theta(n \log n)$
3. Per ognuna delle seguenti coppie di funzioni $f(n)$ e $g(n)$, proporre una costante c appropriata tale che $f(n) \leq c\,g(n) \quad \forall n > 1$
   - $f(n) = n^2 + n + 1 \quad g(n) = 2n^3$
   - $f(n) = n\sqrt{n} + n^2 \quad g(n) = n^2$
   - $f(n) = n^2 - n + 1 \quad g(n) = \frac{n^2}{2}$
4. Per la soluzione di un problema, vi è stato proposto di scegliere fra un algoritmo iterativo che ha complessità $O(n^2)$ e un algoritmo ricorsivo la cui complessità è data da
$$T(n) = \begin{cases} a\,T\left(\frac{n}{4}\right) + 1 & n > 1 \\ n & n = 1 \end{cases}$$
Quale algoritmo preferite? Motivate la risposta.

Esercizi iniziali

5. Ordinare le seguenti funzioni in accordo alla notazione asintotica.
$\frac{1}{n}, 2^{\log n}, 2^{100}, 2^{2^n}, 2^n, 2n\log^2 n, 3n^{0.5}, 4^{\log n}, 4n^{\frac{3}{2}}, 4^n, 5n, 6n\log n, \log\log n, \log^2 n, n\log_4 n$
$n^{0.01}, n^2\log n, n^3, \sqrt{\log n}, \sqrt{n}$
6. Siano
   - $T(n) = 7\,T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$, una funzione di costo di un algoritmo A, e
   - $S(n) = a\,S\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$, una funzione di costo di un algoritmo B.

   Qual è il massimo valore intero di a che rende B asintoticamente più veloce di A?

Esercizi iniziali

7. Ordinare le seguenti funzioni in accordo alla loro complessità asintotica:

$$f_1(n) = 2^{n+2}$$
$$f_2(n) = \log^2 n$$
$$f_3(n) = \log_n (\sqrt{n})^2 + \frac{1}{n^2}$$
$$f_4(n) = 3n^{0.5}$$
$$f_5(n) = 16^{\frac{n}{4}}$$
$$f_6(n) = 2\sqrt{n} + 4n^{1/4} + 8n^{1/8} + 16n^{1/16}$$
$$f_7(n) = \sqrt{\log n \log n}$$
$$f_8(n) = \frac{n^3}{(n+1)(n+3)}$$
$$f_9(n) = 2^n$$

1. Dimostrare che $\log(n!) = \Theta(n \log n)$

Soluzione: Dobbiamo dimostrare che $\log(n!) = O(n \log n) \wedge \log(n!) = \Omega(n \log n)$

Limite Superiore:

$\log n! = \log(n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1) \leq \log(n \cdot n \cdot ... \cdot n) = \log(n^n) = n \log n = O(n \log n)$

Limite Inforiore:

$\log n! = \log(n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot \frac{n}{2} \cdot ... \cdot 2 \cdot 1) \geq \log(\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot ... \cdot 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1) = \log\left(\frac{n}{2}^{\frac{n}{2}}\right) = \frac{n}{2} \log \frac{n}{2} = \Omega(n \log n)$

$$\boxed{\log(n!) = \Theta(n \log n)}$$

2. Dimostrare che $\sum_{i=1}^{n} \log i = \Theta(n \log n)$

Soluzione: $\sum_{i=1}^{n} \log i = \log(\prod_{i=1}^{n} i) = \log(n!)$

Quindi per l'esercizio 1 sappiamo che $\log n! = \Theta(n \log n)$, allora:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \log i = \Theta(n \log n)}$$

3. Per ognuna delle seguenti coppie di funzioni $f(n)$ e $g(n)$, proporre una costante c appropriata tale che $f(n) \leq c\, g(n) \quad \forall n > 1$

1: $f(n) = n^2 + n + 1 \quad g(n) = 2n^3$

Passo Base: $3 \leq 2c \Rightarrow c \geq \frac{3}{2}$
Passo Induttivo: $n^2 + n + 1 \leq 2cn^3 \Rightarrow c \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3}$
Questo è una funzione decrescente al crescere di n, quindi ha il suo massimo quando n è minimo e essendo nel passo induttivo abbiamo $n > 1$, quindi scegliendo $n = 2$ si ha: $c \geq \frac{7}{16}$

2: $f(n) = n\sqrt{n} + n^2 \quad g(n) = n^2$

Passo Base: $2 \leq c \Rightarrow c \geq 2$

Passo Induttivo: $n\sqrt{n} + n^2 \leq cn^2 \Rightarrow c \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + 1$

Questo è una funzione decrescente al crescere di n, quindi ha il suo massimo quando n è minimo e essendo nel passo induttivo abbiamo $n > 1$, quindi scegliendo $n = 2$ si ha: $c \geq \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

3: $f(n) = n^2 - n + 1 \quad g(n) = \frac{n^2}{2}$

Passo Base: $1 \leq \frac{c}{2} \Rightarrow c \geq 2$

Passo Induttivo: $n^2 - n + 1 \leq \frac{cn^2}{2} \Rightarrow c \geq 2 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}$

Questo è una funzione decrescente al crescere di n, quindi ha il suo massimo quando n è minimo e essendo nel passo induttivo abbiamo $n > 1$, quindi scegliendo $n = 2$ si ha: $c \geq \frac{3}{2}$

4. Per la soluzione di un problema, vi è stato proposto di scegliere fra un algoritmo iterativo che ha complessità $O(n^2)$ e un algoritmo ricorsivo la cui complessità è data da
$$T(n) = \begin{cases} aT\left(\frac{n}{4}\right) + 1 & n > 1 \\ n & n = 1 \end{cases}$$
Quale algoritmo preferite? Motivate la risposta.

Soluzione: Posso applicare il Master Theorem e andare a studiare al variare dei valori di a la complessità asintotica di $T(n)$ e dato che $\alpha = \log_4 a \wedge \beta = 0$

$$\begin{cases} \log_4 a = 0 \Rightarrow a = 1 \wedge T(n) = \Theta(\log n) \\ \log_4 a > 0 \Rightarrow a > 1 \wedge T(n) = \Theta(n^a) \end{cases}$$

quindi per favorire l'algoritmo iterativo rispetto a quello ricorsivo devo avere che $\log_4 a \leq 2 \Rightarrow a \leq 16$

5. Ordinare le seguenti funzioni in accordo alla notazione asintotica.
$\frac{1}{n}, 2^{\log n}, 2^{100}, 2^{2^n}, 2^n, 2n\log^2 n, 3n^{0.5}, 4^{\log n}, 4n^{\frac{3}{2}}, 4^n, 5n, 6n\log n, \log\log n, \log^2 n, n\log_4 n$
$n^{0.01}, n^2\log n, n^3, \sqrt{\log n}, \sqrt{n}$

Soluzione: L'idea è quella di ordinare le funzioni stimando se sono costanti, logaritmiche o polinomiali $(\Theta(1), \Theta(\log n), \Theta(n))$

$\frac{1}{n} < 2^{100} < \log\log n < \sqrt{\log n} < \log^2 n < n^{0.01} < \sqrt{n} = 3n^{0.5} < 2^{\log n} = 5n < 6n\log n = \log_4 n < 2n\log^2 n < 4n^{\frac{3}{2}} < 4^{\log n} < n^2\log n < n^3 < 2^n < 4^n < 2^{2^n}$

Alucni accorgimenti:

$\lim_{n\to\inf} \frac{\log n}{n} = 0,\ 2^{\log n} = n,\ 4^{\log n} = n^2$

6. Siano
   - $T(n) = 7\,T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$, una funzione di costo di un algoritmo A, e
   - $S(n) = a\,S\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$, una funzione di costo di un algoritmo B.

Qual è il massimo valore intero di a che rende B asintoticamente più veloce di A?

Soluzione:
Per stimare la complessità computazionale degli algoritmi A e B uso il Master Theorem.
A) $\alpha_A = \log_2 7 \approx 2.8074$, $\beta_A = 2$, quindi $T(n) = \Theta(n^{\log_2 7})$
B) $\alpha_B = \log_4 a$, $\beta_B = 2$, quindi se $\log_4 a > 2 \Rightarrow a > 16$ si ha $S(n) = \Theta(n^{\log_4 a})$

per cui avremo che l'algoritmo B è asintoticamente più veloce di A $\iff$ $\log_4 a < \log_2 7$

$$\log_4 a = \frac{\log_2 a}{\log_2 4} = \frac{\log_2 a}{2} < \log_2 7 \iff a < 49$$

7. Ordinare le seguenti funzioni in accordo alla loro complessità asintotica:

Soluzione:

$$f_3(n) < f_7(n) < f_2(n) < f_4(n) = f_6(n) < f_8(n) < f_1(n) = f_5(n) = f_9(n)$$

Alcuni accorgimenti:

$$f_3(n) = \log_n (\sqrt{n})^2 + \frac{1}{n^2} = \log_n n + \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n^2} = \Theta\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$f_5(n) = 16^{\frac{n}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{n}{4}} = 2^n = \Theta(2^n)$$

Overview

Si trovi la stima asintotica migliore possibile per le seguenti relazioni di ricorrenza assumendo $T(1) = 1$, usando il Master Theorem.

1. $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$
2. $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + n$
3. $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + n^2$
4. $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n$
5. $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^3$

1. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

Parametri:

$$a = 2, \quad b = 2, \quad c = 1, \quad \beta = 1$$

Calcoliamo:

$$\alpha = \log_b a = \log_2 2 = 1$$

Confronto: $\beta = \alpha \Rightarrow$ *secondo caso.*

$$\boxed{T(n) = \Theta(n^\alpha \log n) = \Theta(n \log n)}$$

2. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

Parametri:

$$a = 3, \quad b = 3, \quad c = 1, \quad \beta = 1$$

Calcoliamo:

$$\alpha = \log_b a = \log_3 3 = 1$$

Confronto: $\beta = \alpha \Rightarrow$ *secondo caso.*

$$\boxed{T(n) = \Theta(n^\alpha \log n) = \Theta(n \log n)}$$

3. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

Parametri:

$$a = 3, \quad b = 3, \quad c = 1, \quad \beta = 2$$

Calcoliamo:

$$\alpha = \log_b a = \log_3 3 = 1$$

Confronto: $\beta > \alpha \Rightarrow$ *terzo caso*.

$$\boxed{T(n) = \Theta(n^\beta) = \Theta(n^2)}$$

4. $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

Parametri:

$$a = 9, \quad b = 3, \quad c = 1, \quad \beta = 1$$

Calcoliamo:

$$\alpha = \log_b a = \log_3 9 = 2$$

Confronto: $\beta < \alpha \Rightarrow$ *primo caso*.

$$\boxed{T(n) = \Theta(n^\alpha) = \Theta(n^2)}$$

5. $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$

Parametri:

$$a = 8, \quad b = 2, \quad c = 1, \quad \beta = 3$$

Calcoliamo:

$$\alpha = \log_b a = \log_2 8 = 3$$

Confronto: $\beta = \alpha \Rightarrow$ *secondo caso.*

$$\boxed{T(n) = \Theta(n^\alpha \log n) = \Theta(n^3 \log n)}$$

Overview

Ricorrenze lineari di ordine costante

Si trovi la stima asintotica migliore possibile per le seguenti relazioni di ricorrenza assumendo $T(1) = 1$, usando il teorema delle ricorrenza lineari.

1. $T(n) = T(n-1) + 1$
2. $T(n) = T(n-3) + 5$
3. $T(n) = 2T(n-1) + 1$
4. $T(n) = T(n-1) + T(n-5) + n^2$
5. $T(n) = 3T(n-1) + T(n-2) + 1$

1. $T(n) = T(n-1) + 1, \quad T(1) = 1$

Parametri:

$$a_1 = 1, \quad h = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \sum_{i=1}^{h} a_i = 1$$

Inoltre $c = 1$, $\beta = 0$ (poiché il termine aggiuntivo è $1 = 1 \cdot n^0$).

Caso del teorema: $a = 1 \Rightarrow$ prima riga del teorema.

$$\boxed{T(n) = \Theta(n^{\beta+1}) = \Theta(n^{0+1}) = \Theta(n)}$$

2. $T(n) = T(n-3) + 5, \quad T(1) = 1$

Parametri:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1, \quad h = 3 \quad \Rightarrow \quad a = \sum_{i=1}^{3} a_i = 1$$

Inoltre $c = 5,\ \beta = 0$ (poiché il termine aggiuntivo è $5 = 5 \cdot n^0$).

Caso del teorema: $a = 1 \Rightarrow$ prima riga del teorema.

$$\boxed{T(n) = \Theta(n^{\beta+1}) = \Theta(n^{0+1}) = \Theta(n)}$$

3. $T(n) = 2\,T(n-1) + 1, \quad T(1) = 1$

Parametri:

$$a_1 = 2, \quad h = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \sum_{i=1}^{1} a_i = 2$$

Inoltre $c = 1,\ \beta = 0$ (poiché il termine aggiuntivo è $1 = 1 \cdot n^0$).

Caso del teorema: $a \geq 2 \Rightarrow$ seconda riga del teorema.

$$\boxed{T(n) = \Theta(a^n n^\beta) = \Theta(2^n n^0) = \Theta(2^n)}$$

4. $T(n) = T(n-1) + T(n-5) + n^2, \quad T(1) = 1$

Parametri:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ a_4 = 0,\ a_5 = 1, \quad h = 5 \quad \Rightarrow \quad a = \sum_{i=1}^{5} a_i = 2$$

Inoltre $c = 1,\ \beta = 2$ (poiché il termine aggiuntivo è $n^2 = 1 \cdot n^2$).

Caso del teorema: $a \geq 2 \Rightarrow$ seconda riga del teorema.

$$\boxed{T(n) = \Theta(a^n n^\beta) = \Theta(2^n n^2)}$$

5. $T(n) = 3\,T(n-1) + T(n-2) + 1, \quad T(1) = 1$

Parametri:

$$a_1 = 3,\ a_2 = 1, \quad h = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \sum_{i=1}^{2} a_i = 4$$

Inoltre $c = 1,\ \beta = 0$ (poiché il termine aggiuntivo è $1 = 1 \cdot n^0$).

Caso del teorema: $a \geq 2 \Rightarrow$ seconda riga del teorema.

$$\boxed{T(n) = \Theta(a^n n^\beta) = \Theta(4^n n^0) = \Theta(4^n)}$$

Overview

Metodo Iterativo

Si trovi la stima asintotica migliore possibile per le seguenti relazioni di ricorrenza assumendo $T(1) = 1$, usando il metodo iterativo dello "srotolamento".

1. $T(n) = T(n-1) + 1$
2. $T(n) = T(n-2) + n$
3. $T(n) = T(n-1) + \log n$
4. $T(n) = T(n-1) + 2^n$

1. $T(n) = T(n-1) + 1, \quad T(1) = 1.$

Srotolamento:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + 1 \\
&= T(n-2) + 1 + 1 \\
&= \dots \\
&= T(1) + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-1 \text{ volte}} \\
&= 1 + (n-1) = n
\end{aligned}
$$

$$\boxed{T(n) = \Theta(n)}$$

2. $T(n) = T(n-2) + n, \quad T(1) = 1$

Srotolamento:

$$T(n) = T(n-2) + n = T(n-4) + (n-2) + n = \cdots = T(s) + \sum_{i=0}^{t-1}(n-2i)$$

dove $s \in \{1,2\},\ t = \lceil n/2 \rceil$

Somma:

$$\sum_{i=0}^{t-1}(n-2i) = tn - t(t-1) = t(n-(t-1)) = \Theta(n^2)$$

$$\boxed{T(n) = \Theta(n^2)}$$

3. $T(n) = T(n-1) + \log n, \quad T(1) = 1.$

Srotolamento:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + \log n \\ &= T(n-2) + \log(n-1) + \log n \\ &= \dots \\ &= T(1) + \sum_{i=2}^{n} \log i \end{aligned}$$

Usando $\sum_{i=1}^{n} \log i = \log(n!) = \Theta(n \log n)$ otteniamo

$$\boxed{T(n) = \Theta(n \log n)}$$

4. $T(n) = T(n-1) + 2^n, \quad T(1) = 1.$

Srotolamento:

$$T(n) = T(n-1) + 2^n = T(n-2) + 2^{n-1} + 2^n = \cdots = T(1) + \sum_{i=2}^{n} 2^i$$

Serie geometrica:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2^i - (2^0) = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} - 1 = 2 \cdot 2^n - 2$$

Essendo la somma dominata da 2^n, otteniamo:

$$\boxed{T(n) = \Theta(2^n)}$$

Overview

Si trovi la stima asintotica migliore possibile per le seguenti relazioni di ricorrenza assumendo $T(1) = 1$, usando il metodo della "sostituzione" con l'ausilio delle dimostrazioni per induzione.

1. $T(n) = 3T(n-1) + 2$
2. $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$
3. $T(n) = 2T(n-1) + n$
4. $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + T(\frac{2}{3}n) + 1$
5. $T(n) = 2T(\frac{n}{8}) + 2T(\frac{n}{4}) + n \log n$
6. $T(n) = 2T(\frac{n}{8}) + 2T(\frac{n}{4}) + n$

1. $T(n) = 3T(n-1) + 2$

Ipotesi induttiva: Si assuma che $T(k) \leq c3^k - 2 \quad \forall k < n$

Passo base: k = 2

$$3c3^1 - 6 + 2 = 9c - 4 \leq 9c - 2 \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}^+$$

Passo induttivo:

$$3c3^{k-1} - 6 + 2 = c3^k - 4 \leq c3^k - 2$$

Dato che $c3^k - 4 \leq c3^k - 2$ è vera $\forall c \in \mathbb{R}^+$, allora

$$\boxed{T(n) = O(3^n)}.$$

1. $T(n) = 3T(n-1) + 2$

Osservo che:

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T(n-1) + 2 \\ &= 3(3T(n-2) + 2) + 2 \\ &= 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 + 2 \cdot \ldots + \ldots \\ &> 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 3^{n-1} \end{aligned}$$

se ho idea di come si "srotolerebbe" questa ricorrenza mi basta capire che c'è un termine esponenziale 3^{n-1} che si somma ad altri termini positivi per porre questa disequazione e ottenere quindi che:

$$\boxed{T(n) = \Omega(3^n)}.$$

2. $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$

Ipotesi induttiva: Si assume $T(k) \leq c \cdot 2^k \quad \forall k < n$

Passo base: $k = 2$

$$c2^1 + c2^0 + 1 \leq c2^2 \Rightarrow 3c + 1 \leq 4c \Rightarrow c \geq 1$$

Passo induttivo:

$$c2^{k-1} + c2^{k-2} + 1 = c2^k(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) + 1 = \frac{3}{4}c2^k + 1$$

Dato che $\frac{3}{4}c2^k + 1 \leq c2^k$ è vera per $c \geq \frac{4}{2^k}$ e dato che $\frac{4}{2^k}$ è decrescente e positiva al crescere di k, il suo massimo si ha per $k = 3$ che è il valore minimo ammissibile nel passo induttivo. Perciò la disequazione è verificata per $c \geq \frac{2}{3}$, e allora:

$$\boxed{T(n) = O(2^n)}$$

2. $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$

Osservo che:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + T(n-2) + 1 > 2T(n-2) + 1 \\ &= 2T(n-4) + 2 + 1 \\ &= \sum_{i=2}^{n-2} n - 2i + \dots \\ &> \sum_{i=1}^{n-2} n - 2i = \end{aligned}$$

se ho idea di come si "srotolerebbe" questa ricorrenza mi basta capire che c'è un termine esponenziale 2^{n-1} (derivato dallo srotolamento di $T(n-1)$) che si somma ad altri termini positivi per porre questa disequazione e ottenere quindi che:

3. $T(n) = 2T(n-1) + n$

Ipotesi induttiva: Si assume $T(k) \leq c \cdot k \cdot 2^k \quad \forall k < n$

Passo base: $k = 2$

$$2 \cdot c \cdot 2^1 \cdot 1 + 1 = 4c + 1 \leq 2c2^2 = 8c \Rightarrow c \geq \frac{1}{4}$$

Passo induttivo:

$$2c(k-1)2^{k-1} + k = c2^k k - c2^k + k \leq kc2^k \Rightarrow c2^k \geq k \Rightarrow c \geq \frac{k}{2^k}$$

Dato che $\frac{k}{2^k}$ è decrescente e positiva al crescere di k, il suo massimo si ha per $k = 3$ che è il valore minimo ammissibile nel passo induttivo. Perciò la disequazione è verificata per $c \geq \frac{3}{8}$, e allora:

$$\boxed{T(n) = O(n2^n)}$$

3. $T(n) = 2T(n-1) + n$

Osservo che:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n-1) + n \\ &= 2(2T(n-2) + n) + n \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i n = n\frac{1-2^n}{1-2} \end{aligned}$$

$$\boxed{T(n) = \Omega(n2^n)}$$

4. $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + T(\frac{2}{3}n) + 1$

Ipotesi induttiva: Si assume $T(k) \leq c \cdot k^2 \quad \forall k < n$

Passo base: $k = 1$

$$2c\frac{1}{9} + c\frac{4}{9} + 1 = \frac{2}{3}c + 1 \leq 9c \Rightarrow c \geq \frac{3}{25}$$

Passo induttivo:

$$ck^2\frac{2}{9} + ck^2\frac{4}{9} + 1 = \frac{2}{3}ck^2 + 1 \leq ck^2 \Rightarrow c \geq \frac{3}{k^2}$$

Dato che $\frac{3}{k^2}$ è decrescente e positiva al crescere di k, il suo massimo si ha per $k = 2$ che è il valore minimo ammissibile nel passo induttivo. Perciò la disequazione è verificata per $c \geq \frac{3}{4}$, e allora:

$$\boxed{T(n) = O(n^2)}$$

4. $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + T(\frac{2}{3}n) + 1$

Osservo che:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2}{3}n\right) + 1 > 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$$

quindi applicando il Master theorem ho che:

$$\boxed{T(n) = \Omega(n)}$$

5. $T(n) = 2T(\frac{n}{8}) + 2T(\frac{n}{4}) + n \log n$

Ipotesi induttiva: Si assume $T(k) \leq c \cdot k \log k \quad \forall k < n$

Passo base: $k = 16$

$$2c2 \log 2 + 2c4 \log 4 + 16 \log 16 = 4c + 16c + 64 = 20c + 64 \leq 64c \rightarrow c \geq \frac{64}{44} = \frac{16}{11}$$

Passo induttivo:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot c \cdot \frac{k}{8} \cdot \log \frac{k}{8} + 2 \cdot c \cdot \frac{k}{4} \cdot \log \frac{k}{4} + k \log k \\ &= c\frac{k}{4} \log \frac{k}{8} + c\frac{k}{2} \log \frac{k}{4} + k \log k \leq c\frac{k}{4} \log k + c\frac{k}{2} \log k + k \log k \\ &= \frac{3}{4} ck \log k + k \log k \leq ck \log k \Rightarrow c \geq 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{T(n) = O(n \log n)}$$

5. $T(n) = 2T(\frac{n}{8}) + 2T(\frac{n}{4}) + n\log n$

Osservo che:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{8}\right) + 2T\left(\frac{n}{4}\right) + n\log n \geq n\log n$$

quindi possiamo dire che:

$$\boxed{T(n) = \Omega(n\log n)}$$

6. $T(n) = 2T(\frac{n}{8}) + 2T(\frac{n}{4}) + n$

Ipotesi induttiva: Si assume $T(k) \leq c \cdot k \quad \forall k < n$

Passo base: $k = 8$

$$2c + 4c + 8 \leq 8c \Rightarrow c \geq \frac{4}{3}$$

Passo induttivo:

$$2c\frac{k}{8} + 2c\frac{k}{4} + k = \frac{3}{4}ck + k \leq ck \Rightarrow c \geq 4$$

$$\boxed{T(n) = O(n)}$$

6. $T(n) = 2T(\frac{n}{8}) + 2T(\frac{n}{4}) + n$

Osservo che:

$$T(n) = 2T(\frac{n}{8}) + 2T(\frac{n}{4}) + n \geq n$$

$$\boxed{T(n) = \Omega(n)}$$

Overview

Esercizi Vari

Risolvi utilizzando il metodo più appropriato

$$T(n) = T(n/2) + 1$$
$$T(n) = T(n/3) + n$$
$$T(n) = T(n/2) + n^2$$
$$T(n) = T(n/4) + n \log n$$
$$T(n) = 2T(n/2) + n$$
$$T(n) = T(n-1) + T(n/2) + 1$$
$$T(n) = 2T(n/2) + T(n/4) + n$$
$$T(n) = T(n-1) + \frac{1}{n}$$
$$T(n) = 2T(n/2) + \log n$$
$$T(n) = 3T(n/3) + n \log n$$

$$T(n) = 4T(n/2) + n$$
$$T(n) = 4T(n/2) + n^2$$
$$T(n) = 4T(n/2) + n^3$$
$$T(n) = T(n-1) + n$$
$$T(n) = T(n-1) + \log n$$
$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$
$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$$
$$T(n) = T(n/4) + T(3n/4) + n$$
$$T(n) = T(n-d) + T(d) + n^2 \quad d \geq 1$$
$$T(n) = \sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}) + n \log \sqrt{n}$$
$$T(n) = \sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}) + O(n)$$