Analisi Complessità

Anno Accademico 2022/2023

Dott. Staccone Simone

TOR VERGATA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

Tecniche per derivare le classi di complessità

- Analisi dei livelli:
  - “srotoliamo” la ricorrenza in un albero i cui nodi rappresentano i costi ai vari livelli della ricorsione
- Analisi per tentativi o per sostituzione:
  - cerchiamo di “indovinare” una soluzione e dimostriamo induttivamente che questa soluzione è vera
- Ricorrenze comuni:
  - vi è una classe di ricorrenze che possono essere risolte facendo riferimento ad alcuni teoremi specifici

Master Theorem

Il *master theorem* permette di determinare la classe di complessità di alcune famiglie di relazioni di ricorrenza nella forma:

$$T(n) = \begin{cases} aT(n/b) + cn^{\beta} & \mathrm{n} > 1 \\ d & n \leq 1 \end{cases}$$

Dove a ≥ 1 e b ≥ 2 sono costanti intere, c > 0 e ß ≥ 0 sono costanti reali.
Posto: $\alpha = \log_b a$, abbiamo:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta^{(n^{\alpha})} & \alpha > \beta \\ \Theta^{(n^{\alpha} \log n)} & \alpha = \beta \\ \Theta^{(n^{\beta})} & \alpha < \beta \end{cases}$$

Ricorrenze lineari di ordine costante

Data una relazione di ricorrenza nella forma:

$$T(n) = \begin{cases} \sum_{1 \le i \le h} a_i \, T(n-i) + cn^{\beta} & n > 1 \\ \Theta(1) & n \le 1 \end{cases}$$

Dove $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono costanti intere non negative, con h costante positiva, $c > 0$ e $\beta \ge 0$ sono costanti reali.

Posto $a = \sum_{1 \le i \le h} a_i$, abbiamo:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\beta+1}) & a = 1 \\ \Theta(a^n \, n^{\beta}) & a \ge 2 \end{cases}$$

Ricorrenze

Trovare la soluzione delle seguenti relazioni di ricorrenza, utilizzando il master theorem quando possibile, oppure il metodo di sostituzione o il metodo iterativo. (Assumere il costo per il caso $n \leq 1$ unitario)

(In classe)

$T(n) = 4T(n/2) + n$

$T(n) = 4T(n/2) + n^2$

$T(n) = 4T(n/2) + n^3$

$T(n) = T(n - 1) + n$

$T(n) = T(n - 1) + \log n$

$T(n) = 2T(n - 1) + 1$

$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$

(Extra)

$T(n) = T(n/4) + T(3n/4) + n$

$T(n) = T(n - d) + T(d) + n^2$ $\quad d \geq 1$ costante

$T(n) = \sqrt{n}\, T(\sqrt{n}) + n \log \sqrt{n}$

$T(n) = \sqrt{n}\, T(\sqrt{n}) + O(n)$

Esercizio 1

Trovare la soluzione delle seguenti relazioni di ricorrenza, utilizzando il master theorem quando possibile, oppure il metodo di sostituzione o il metodo iterativo.

$$T(n) = 4T(n/2) + n$$

Esercizio 1 - 2

Trovare la soluzione delle seguenti relazioni di ricorrenza, utilizzando il master theorem quando possibile, oppure il metodo di sostituzione o il metodo iterativo.

$T(n) = 4T(n/2) + n$

Applico il master theorem:

Ip.
$a \geq 1$ e $b \geq 2$ sono costanti intere, $c > 0$ e $\beta \geq 0$ sono costanti reali.

$a = 4$; $b = 2$; $c = 1$; $\beta = 1$; (Ipotesi verificate)

$\alpha = \log_2 4 = 2$; $\beta = 1$; Primo caso master theorem $\rightarrow \alpha > \beta \rightarrow \Theta(n^{\alpha}) = \Theta(n^2)$

Esercizio 2

Trovare la soluzione delle seguenti relazioni di ricorrenza, utilizzando il master theorem quando possibile, oppure il metodo di sostituzione o il metodo iterativo.

$$T(n) = 4T(n/2) + n^2$$

Esercizio 2 -2

Trovare la soluzione delle seguenti relazioni di ricorrenza, utilizzando il master theorem quando possibile, oppure il metodo di sostituzione o il metodo iterativo.

$T(n) = 4T(n/2) + n^2$

Applico il master theorem:

Ip.
$a \geq 1$ e $b \geq 2$ sono costanti intere, $c > 0$ e $\beta \geq 0$ sono costanti reali.

$a = 4$; $b = 2$; $c = 1$; $\beta = 2$; (Ipotesi verificate)

$\alpha = \log_2 4 = 2$; $\beta = 2$; Secondo caso master theorem → $\alpha = \beta$ → $\Theta(n^\alpha) = \Theta(n^2 \log n)$

Esercizio 3

Trovare la soluzione delle seguenti relazioni di ricorrenza, utilizzando il master theorem quando possibile, oppure il metodo di sostituzione o il metodo iterativo.

$T(n) = 4T(n/2) + n^3$

Esercizio 3 - 2

Trovare la soluzione delle seguenti relazioni di ricorrenza, utilizzando il master theorem quando possibile, oppure il metodo di sostituzione o il metodo iterativo.

$T(n) = 4T(n/2) + n^3$

Applico il master theorem:

Ip.
$a \geq 1$ e $b \geq 2$ sono costanti intere, $c > 0$ e $\beta \geq 0$ sono costanti reali.

$a = 4$; $b = 2$; $c = 1$; $\beta = 3$; (Ipotesi verificate)

$\alpha = \log_2 4 = 2$; $\beta = 3$; Terzo caso master theorem $\rightarrow \alpha < \beta \rightarrow \Theta(n^\beta) = \Theta(n^3)$

Esercizio 4

Trovare la soluzione delle seguenti relazioni di ricorrenza, utilizzando il master theorem quando possibile, oppure il metodo di sostituzione o il metodo iterativo.

$$T(n) = T(n - 1) + n$$

Esercizio 4 - 2

Trovare la soluzione delle seguenti relazioni di ricorrenza, utilizzando il master theorem quando possibile, oppure il metodo di sostituzione o il metodo iterativo.

$T(n) = T(n - 1) + n$

Applico il teorema sulle ricorrenze lineari:

Ip.
$a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono costanti intere non negative, con h costante positiva, $c > 0$ e $\beta \geq 0$ sono costanti reali. (Ipotesi verificate)

$a = 1$; Secondo caso $\rightarrow \Theta(n^{\beta+1}) = \Theta(n^2)$

Esercizio 5

Trovare la soluzione delle seguenti relazioni di ricorrenza, utilizzando il master theorem quando possibile, oppure il metodo di sostituzione o il metodo iterativo.

$$T(n) = T(n - 1) + \log n$$

Esercizio 5 - 2

Trovare la soluzione delle seguenti relazioni di ricorrenza, utilizzando il master theorem quando possibile, oppure il metodo di sostituzione o il metodo iterativo.

$T(n) = T(n - 1) + \log n$

Non posso applicare nessuna ricorrenza nota, utilizzo il metodo per sostituzione: proviamo a dimostrare che $T(n) = O(n^2)$.

La nostra ipotesi induttiva è che $T(m) \leq cm^2$ per tutti gli $m < n$, e vogliamo dimostrare che la proprietà è vera per n.

Caso base: $T(2) = T(1) + \log 2 = 1 + 1 = 2 \leq c(2)^2 = 4c \rightarrow c \geq 2$

$T(n) = T(n -1) + \log n \leq c(n - 1)^2 + \log n \leq cn^2 + n^2 = dn^2$ con $d = c+1$
$T(n) = O(n^2)$

Si può fare di meglio?

Esercizio 5 - 3

Trovare la soluzione delle seguenti relazioni di ricorrenza, utilizzando il master theorem quando possibile, oppure il metodo di sostituzione o il metodo iterativo.

$T(n) = T(n - 1) + \log n$

Non posso applicare nessuna ricorrenza nota, utilizzo il metodo per sostituzione: proviamo a dimostrare che $T(n) = O(n \log n)$.

La nostra ipotesi induttiva è che $T(m) \leq cm \log m$ per tutti gli $m < n$, e vogliamo dimostrare che la proprietà è vera per n.

Caso base: $T(2) = T(1) + \log 2 = 1 + 1 = 2 \leq c2 \log 2 = 2 \rightarrow c \geq 1$

$T(n) = T(n -1) + \log n \leq c(n - 1) \log(n - 1) + \log n \leq c(n - 1) \log n + \log n = cn \log n - c \log n + \log n$

$cn \log n - c \log n + \log n$

$T(n) = O(n \log n)$

Entrambe le sostituzioni sono corrette, ma quest'ultima è più raffinata dell'altra

Esercizio 5 - 4

Trovare la soluzione delle seguenti relazioni di ricorrenza, utilizzando il master theorem quando possibile, oppure il metodo di sostituzione o il metodo iterativo.

$T(n) = T(n - 1) + \log n$

$T(n) = O(n \log n)$

Come faccio ad essere sicuro che questa sia la soluzione migliore? In questo caso provo a srotolare la ricorrenza:

$T(n) = T(n-2) + \log(n-1) + \log n = T(n-3) + \log(n-2) + \log(n-1) + \log n = \ldots =$

$= T(1) + \log(n*(n-1)*..*1) =$ (Proprietà dei logaritmi: $\log n + \log(n-1) = \log(n*(n-1))$)

$= T(1) + \log(n!)$

Applico l'approssimazione di Sterling: $n! \sim n^n/e^n$

$T(n) \sim \log(n^n) = n \log(n)$

$T(n) = O(n \log(n))$

Esercizio 6 – Torre di Hanoi

Trovare la soluzione delle seguenti relazioni di ricorrenza, utilizzando il master theorem quando possibile, oppure il metodo di sostituzione o il metodo iterativo.

$T(n) = 2T(n - 1) + 1$

Esercizio 6 - Torre di Hanoi - 2

Trovare la soluzione delle seguenti relazioni di ricorrenza, utilizzando il master theorem quando possibile, oppure il metodo di sostituzione o il metodo iterativo.

$T(n) = 2T(n - 1) + 1$

Potrei applicare il teorema delle ricorrenze costanti, ma applico il metodo dello 'srotolamento':

$T(n) = 2T(n - 1) + 1 = 2(2T(n -2) + 1) + 1 = 4T(n-2) + 2 + 1 =$
$= 4(2T(n-3) + 1) + 2 + 1 = 8T(n-3) + 4 + 2 + 1 =$
$= 16T(n-4) + 8 + 4 + 2 + 1 = ...$
$... = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{n-4} + ... + 1$

Da cui ci possiamo convincere che la complessità dell'algoritmo per risolvere il problema delle torre di hanoi è $O(2^n)$.

Per approfondire: http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads/2010/04/Problemi-sulle-torri-di-Hanoi.pdf

Esercizio 7

Trovare la soluzione delle seguenti relazioni di ricorrenza, utilizzando il master theorem quando possibile, oppure il metodo di sostituzione o il metodo iterativo.

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$$

Esercizio 7 - 2

Trovare la soluzione delle seguenti relazioni di ricorrenza, utilizzando il master theorem quando possibile, oppure il metodo di sostituzione o il metodo iterativo.

$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$

Questo non è banale: dobbiamo utilizzare qualche trucco algebrico. Quindi, poniamo $n = 2^m$. La ricorrenza viene riscritta nel modo seguente:
$T(2^m) = 2T(2^{m/2}) + \log 2^m = 2T(2^{m/2}) + m$
Ora poniamo $S(m) = T(2^m)$, sostituiamo e semplifichiamo:
$S(m) = 2S(m/2) + m$
la cui soluzione sappiamo essere $S(m) = (m \log m)$. Sapendo che $m = \log n$, otteniamo
$T(n) = \log n \log (\log n)$