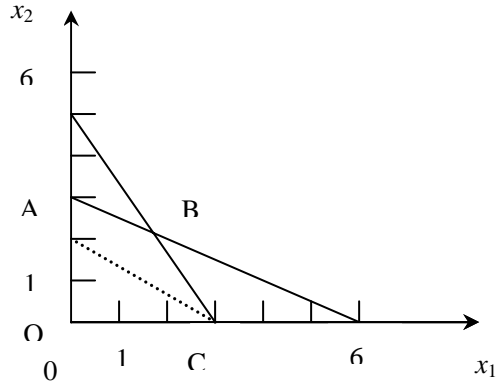


第2章 线性规划的图解法

1、解：

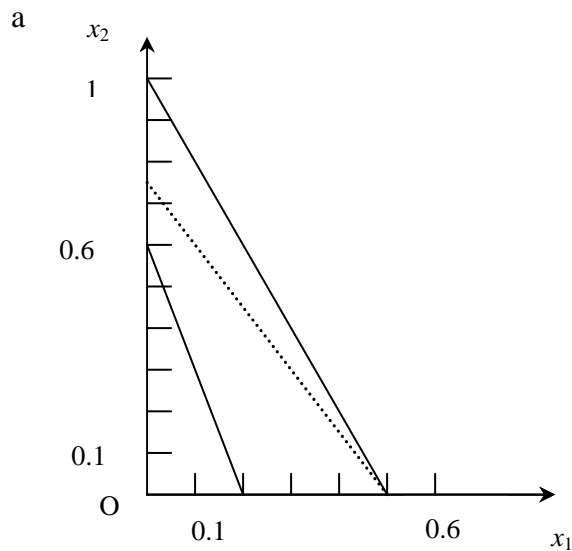


a.可行域为 OABC。

b.等值线为图中虚线所示。

c.由图可知，最优解为 B 点，最优解： $x_1 = \frac{12}{7}$ $x_2 = \frac{15}{7}$ ， 最优目标函数值：
 $\frac{69}{7}$ 。

2、解：



有唯一解 $x_1 = 0.2$ 函数值为 3.6
 $x_2 = 0.6$

b 无可行解

c 无界解

d 无可行解

e 无穷多解

$$\begin{array}{l} \text{f 有唯一解} \\ x_1 = \frac{20}{3} \\ x_2 = \frac{8}{3} \end{array} \quad \text{函数值为 } \frac{92}{3}$$

3、解：

a 标准形式：

$$\max f = 3x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

$$9x_1 + 2x_2 + s_1 = 30$$

$$3x_1 + 2x_2 + s_2 = 13$$

$$2x_1 + 2x_2 + s_3 = 9$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

b 标准形式：

$$\max f = -4x_1 - 6x_3 - 0s_1 - 0s_2$$

$$3x_1 - x_2 - s_1 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 10$$

$$7x_1 - 6x_2 = 4$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

c 标准形式：

$$\max f = -x_1' + 2x_2' - 2x_2'' - 0s_1 - 0s_2$$

$$-3x_1 + 5x_2' - 5x_2'' + s_1 = 70$$

$$2x_1' - 5x_2' + 5x_2'' = 50$$

$$3x_1' + 2x_2' - 2x_2'' - s_2 = 30$$

$$x_1', x_2', x_2'', s_1, s_2 \geq 0$$

4 、解：

$$\text{标准形式： } \max z = 10x_1 + 5x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

$$3x_1 + 4x_2 + s_1 = 9$$

$$5x_1 + 2x_2 + s_2 = 8$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

$$s_1 = 2, s_2 = 0$$

5、解：

标准形式： $\min f = 11x_1 + 8x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

$$10x_1 + 2x_2 - s_1 = 20$$

$$3x_1 + 3x_2 - s_2 = 18$$

$$4x_1 + 9x_2 - s_3 = 36$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

$$s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 13$$

6、解：

$$b \quad 1 \leq c_1 \leq 3$$

$$c \quad 2 \leq c_2 \leq 6$$

$$d \quad \begin{aligned} x_1 &= 6 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$e \quad x_1 \in [4, 8] \quad x_2 = 16 - 2x_1$$

$$f \quad \text{变化。原斜率从 } -\frac{2}{3} \text{ 变为 } -1$$

7、解：

模型：

$$\max z = 500x_1 + 400x_2$$

$$2x_1 \leq 300$$

$$3x_2 \leq 540$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 440$$

$$1.2x_1 + 1.5x_2 \leq 300$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$a \quad x_1 = 150 \quad x_2 = 70 \quad \text{即目标函数最优值是 } 103000$$

$$b \quad 2, 4 \text{ 有剩余, 分别是 } 330, 15. \text{ 均为松弛变量}$$

$$c \quad 50, \quad 0, \quad 200, \quad 0 \quad \text{额外利润 } 250$$

$$d \quad \text{在 } [0, 500] \text{ 变化, 最优解不变。}$$

$$e \quad \text{在 } 400 \text{ 到正无穷变化, 最优解不变。}$$

$$f \quad \text{不变}$$

8 、解：

a 模型： $\min f = 8x_a + 3x_b$

$$50x_a + 100x_b \leq 1200000$$

$$5x_a + 4x_b \geq 60000$$

$$100x_b \geq 300000$$

$$x_a, x_b \geq 0$$

基金 a,b 分别为 4000, 10000。

回报率： 60000

b 模型变为： $\max z = 5x_a + 4x_b$

$$50x_a + 100x_b \leq 1200000$$

$$100x_b \geq 300000$$

$$x_a, x_b \geq 0$$

推导出： $x_1 = 18000 \quad x_2 = 3000$

故基金 a 投资 90 万，基金 b 投资 30 万。

第3章 线性规划问题的计算机求解

1、解：

- a $x_1 = 150$ $x_2 = 70$ 目标函数最优值 103000
- b 1, 3 使用完 2, 4 没用完 0, 330, 0, 15
- c 50, 0, 200, 0
- 含义： 1 车间每增加 1 工时，总利润增加 50 元
3 车间每增加 1 工时，总利润增加 200 元
2、4 车间每增加 1 工时，总利润不增加。
- d 3 车间，因为增加的利润最大
- e 在 400 到正无穷的范围内变化，最优产品的组合不变
- f 不变 因为在 $[0, 500]$ 的范围内
- g 所谓的上限和下限值指当约束条件的右边值在给定范围内变化时，约束条件 1 的右边值在 $[200, 440]$ 变化，对偶价格仍为 50（同理解释其他约束条件）
- h $100 \times 50 = 5000$ 对偶价格不变
- i 能
- j 不发生变化 允许增加的百分比与允许减少的百分比之和没有超出 100%
- k 发生变化

2、解：

- a 4000 10000 62000
- b 约束条件 1：总投资额增加 1 个单位，风险系数则降低 0.057
约束条件 2：年回报额增加 1 个单位，风险系数升高 2.167
- c 约束条件 1 的松弛变量是 0，约束条件 2 的剩余变量是 0
约束条件 3 为大于等于，故其剩余变量为 700000
- d 当 c_2 不变时， c_1 在 3.75 到正无穷的范围内变化，最优解不变

当 c_1 不变时， c_2 在负无穷到 6.4 的范围内变化，最优解不变
- e 约束条件 1 的右边值在 $[780000, 1500000]$ 变化，对偶价格仍为 0.057（其他同理）
- f 不能，理由见百分之一百法则二

3、解：

- a 18000 3000 102000 153000
- b 总投资额的松弛变量为 0 基金 b 的投资额的剩余变量为 0
- c 总投资额每增加 1 个单位，回报额增加 0.1
基金 b 的投资额每增加 1 个单位，回报额下降 0.06
- d c_1 不变时， c_2 在负无穷到 10 的范围内变化，其最优解不变

 c_2 不变时， c_1 在 2 到正无穷的范围内变化，其最优解不变

- e 约束条件 1 的右边值在 300000 到正无穷的范围内变化, 对偶价格仍为 0.1
 约束条件 2 的右边值在 0 到 1200000 的范围内变化, 对偶价格仍为-0.06

f $\frac{600000}{900000} + \frac{300000}{900000} = 100\%$ 故对偶价格不变

4、解:

a $x_1 = 8.5 \quad x_2 = 1.5 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 1$ 最优目标函数 18.5

b 约束条件 2 和 3 对偶价格为 2 和 3.5

c 选择约束条件 3, 最优目标函数值 22

d 在负无穷到 5.5 的范围内变化, 其最优解不变, 但此时最优目标函数值变化

e 在 0 到正无穷的范围内变化, 其最优解不变, 但此时最优目标函数值变化

5、解:

a 约束条件 2 的右边值增加 1 个单位, 目标函数值将增加 3.622

b x_2 产品的利润提高到 0.703, 才有可能大于零或生产

c 根据百分之百法则判定, 最优解不变

d 因为 $\frac{15}{30-9.189} + \frac{65}{111.25-15} > 100\%$ 根据百分之百法则二, 我们不能判定
 其对偶价格是否有变化

第4章 线性规划在工商管理中的应用

1、解：为了用最少的原材料得到 10 台锅炉，需要混合使用 14 种下料方案

方案 规格	1	2	3	4	5	6	7
2640	2	1	1	1	0	0	0
1770	0	1	0	0	3	2	2
1651	0	0	1	0	0	1	0
1440	0	0	0	1	0	0	1
合计	5280	4410	4291	4080	5310	5191	4980
剩余	220	1090	1209	1420	190	309	520
方案 规格	8	9	10	11	12	13	14
2640	0	0	0	0	0	0	0
1770	1	1	1	0	0	0	0
1651	2	1	0	3	2	1	0
1440	0	1	2	0	1	2	3
合计	5072	4861	4650	4953	4742	4531	4320
剩余	428	639	850	547	758	969	1180

设按 14 种方案下料的原材料的根数分别为 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}$ ，则可列出下面的数学模型：

$$\min f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}$$

$$\text{s. t. } 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 80$$

$$x_2 + 3x_5 + 2x_6 + 2x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 350$$

$$x_3 + x_6 + 2x_8 + x_9 + 3x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 420$$

$$x_4 + x_7 + x_9 + 2x_{10} + x_{12} + 2x_{13} + 3x_{14} \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14} \geq 0$$

用管理运筹学软件我们可以求得此问题的解为：

$$x_1 = 40, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 116.667, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 0,$$

$$x_9 = 0, x_{10} = 0, x_{11} = 140, x_{12} = 0, x_{13} = 0, x_{14} = 3.333$$

最优值为 300。

2、解：从上午 11 时到下午 10 时分成 11 个班次，设 x_i 表示第 i 班次安排的临时工的人数，则可列出下面的数学模型：

$$\min f = 16 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11})$$

$$\text{s. t. } x_1 + 1 \geq 9$$

$$x_1 + x_2 + 1 \geq 9$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2 \geq 9$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2 \geq 3$$

$$\begin{aligned}
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 1 &\geq 3 \\
x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2 &\geq 3 \\
x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + 1 &\geq 6 \\
x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2 &\geq 12 \\
x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + 2 &\geq 12 \\
x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + 1 &\geq 7 \\
x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + 1 &\geq 7
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11} \geq 0$$

用管理运筹学软件我们可以求得此问题的解为：

$$x_1=8, x_2=0, x_3=1, x_4=1, x_5=0, x_6=4, x_7=0, x_8=6, x_9=0, x_{10}=0, x_{11}=0$$

最优值为 320。

- a、在满足对职工需求的条件下，在 10 时安排 8 个临时工，12 时新安排 1 个临时工，13 时新安排 1 个临时工，15 时新安排 4 个临时工，17 时新安排 6 个临时工可使临时工的总成本最小。
- b、这时付给临时工的工资总额为 80 元，一共需要安排 20 个临时工的班次。

约束	松弛/剩余变量	对偶价格
-----	-----	-----
1	0	-4
2	0	0
3	2	0
4	9	0
5	0	-4
6	5	0
7	0	0
8	0	0
9	0	-4
10	0	0
11	0	0

根据剩余变量的数字分析可知，可以让 11 时安排的 8 个人工作 3 小时，13 时安排的 1 个人工作 3 小时，可使得总成本更小。

C、设在 11: 00-12: 00 这段时间内有 x_1 个班是 4 小时， y_1 个班是 3 小时；

设在 12: 00-13: 00 这段时间内有 x_2 个班是 4 小时， y_2 个班是 3 小时；其他时段也类似。

则：由题意可得如下式子：

$$\min z = 16 \sum_{i=1}^{11} x_i + 12 \sum_{i=1}^{11} y_i$$

S. T

$$x_1 + y_1 + 1 \geq 9$$

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + 1 \geq 9$$

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 + 1 + 1 \geq 9$$

$$x_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 + x_4 + y_4 + 1 + 1 \geq 3$$

$$x_2 + x_3 + y_3 + x_4 + y_4 + x_5 + y_5 + 1 \geq 3$$

$$x_3 + x_4 + y_4 + x_5 + y_5 + x_6 + y_6 + 1 + 1 \geq 3$$

$$x_4 + x_5 + y_5 + x_6 + y_6 + x_7 + y_7 + 1 \geq 6$$

$$x_5 + x_6 + y_6 + x_7 + y_7 + x_8 + y_8 + 1 + 1 \geq 12$$

$$x_6 + x_7 + y_7 + x_8 + y_8 + x_9 + y_9 + 1 + 1 \geq 12$$

$$x_7 + x_8 + y_8 + x_9 + y_9 + x_{10} + y_{10} + 1 \geq 7$$

$$x_8 + x_9 + y_9 + x_{10} + y_{10} + x_{11} + y_{11} + 1 \geq 7$$

$$x_i \geq 0, y_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,11$$

稍微变形后，用管理运筹学软件求解可得：总成本最小为 264 元。

安排如下： $y_1=8$ （即在此时间段安排 8 个 3 小时的班）， $y_3=1$ ， $y_5=1$ ， $y_7=4$ ， $x_8=6$ 这样能比第一问节省：320-264=56 元。

3、解：设生产 A、B、C 三种产品的数量分别为 x_1 ， x_2 ， x_3 ，则可列出下面的数学模型：

$$\max z = 10x_1 + 12x_2 + 14x_3$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 + 1.5x_2 + 4x_3 \leq 2000$$

$$2x_1 + 1.2x_2 + x_3 \leq 1000$$

$$x_1 \leq 200$$

$$x_2 \leq 250$$

$$x_3 \leq 100$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

用管理运筹学软件我们可以求得此问题的解为：

$$x_1=200, x_2=250, x_3=100$$

最优值为 6400。

- a、在资源数量及市场容量允许的条件下，生产 A 200 件，B 250 件，C 100 件，可使生产获利最多。
- b、A、B、C 的市场容量的对偶价格分别为 10 元，12 元，14 元。材料、台时的对偶价格均为 0。说明 A 的市场容量增加一件就可使总利润增加 10 元，B 的市场容量增加一件就可使总利润增加 12 元，C 的市场容量增加一件就可使总利润增加 14 元。但增加一千克的材料或增加一个台时数都不能使总利润增加。如果要开拓市场应当首先开拓 C 产品的市场，如果要增加资源，则应在 975 到正无穷上增加材料数量，在 800 到正无穷上增加机器台时数。

4、解：设白天调查的有孩子的家庭的户数为 x_{11} ，白天调查的无孩子的家庭的户

数为 x_{12} ，晚上调查的有孩子的家庭的户数为 x_{21} ，晚上调查的无孩子的家庭的户数为 x_{22} ，则可建立下面的数学模型：

$$\min f = 25x_{11} + 20x_{12} + 30x_{21} + 24x_{22}$$

$$\text{s. t. } x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} \geq 2000$$

$$x_{11} + x_{12} = x_{21} + x_{22}$$

$$x_{11} + x_{21} \geq 700$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 450$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \geq 0$$

用管理运筹学软件我们可以求得此问题的解为：

$$x_{11} = 700, x_{12} = 300, x_{21} = 0, x_{22} = 1000$$

最优值为 47500。

- a、白天调查的有孩子的家庭的户数为 700 户，白天调查的无孩子的家庭的户数为 300 户，晚上调查的有孩子的家庭的户数为 0，晚上调查的无孩子的家庭的户数为 1000 户，可使总调查费用最小。
- b、白天调查的有孩子的家庭的费用在 20—26 元之间，总调查费用不会变化；白天调查的无孩子的家庭的费用在 19—25 元之间，总调查费用不会变化；晚上调查的有孩子的家庭的费用在 29—无穷之间，总调查费用不会变化；晚上调查的无孩子的家庭的费用在 20—25 元之间，总调查费用不会变化。
- c、调查的总户数在 1400—无穷之间，总调查费用不会变化；有孩子家庭的最少调查数在 0—1000 之间，总调查费用不会变化；无孩子家庭的最少调查数在负无穷—1300 之间，总调查费用不会变化。

5、解：设第 i 个月签订的合同打算租用 j 个月的面积为 x_{ij} ，则需要建立下面的数学模型：

$$\min f = 2800(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}) + 4500(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 6000(x_{13} + x_{23}) + 7300x_{14}$$

$$\text{s. t. } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 15$$

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 10$$

$$x_{13} + x_{14} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} \geq 20$$

$$x_{14} + x_{23} + x_{32} + x_{41} \geq 12$$

$$x_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, 3, 4$$

用管理运筹学软件我们可以求得此问题的解为：

$$x_{11} = 5, x_{12} = 0, x_{13} = 10, x_{14} = 0, x_{21} = 0, x_{22} = 0, x_{23} = 0, x_{31} = 10,$$

$$x_{32} = 0, x_{41} = 0$$

最优值为 102000。

即：在一月份租用 500 平方米一个月，租用 1000 平方米三个月；在三月份租用 1000 平方米一个月，可使所付的租借费最小。

6、解：设 x_{ij} 表示第 i 种类型的鸡需要第 j 种饲料的量，可建立下面的数学模型：

$$\max z = 9(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 7(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 8(x_{31} + x_{32} + x_{33}) - 5.5(x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 4(x_{12} + x_{22} + x_{32}) - 5(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

$$\text{s. t. } x_{11} \geq 0.5(x_{11} + x_{12} + x_{13})$$

$$x_{12} \leq 0.2 (x_{11} + x_{12} + x_{13})$$

$$x_{21} \geq 0.3 (x_{21} + x_{22} + x_{23})$$

$$x_{23} \leq 0.3 (x_{21} + x_{22} + x_{23})$$

$$x_{33} \geq 0.5 (x_{31} + x_{32} + x_{33})$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 30$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 30$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 30$$

$$x_{ij} \geq 0, i, j=1, 2, 3$$

用管理运筹学软件我们可以求得此问题的解为：

$$x_{11}=30, x_{12}=10, x_{13}=10, x_{21}=0, x_{22}=0, x_{23}=0, x_{31}=0,$$

$$x_{32}=20, x_{33}=20$$

最优值为 365。

即：生产雏鸡饲料 50 吨，不生产蛋鸡饲料，生产肉鸡饲料 40 吨。

7、

设 X_i ——第 i 个月生产的产品 I 数量

Y_i ——第 i 个月生产的产品 II 数量

Z_i, W_i 分别为第 i 个月末产品 I、II 库存数

S_{1i}, S_{2i} 分别为用于第 $(i+1)$ 个月库存的自有及租借的仓库容积（立方米）。则

可建立如下模型：

$$\min z = \sum_{i=1}^5 (5x_i + 8y_i) + \sum_{i=6}^{12} (4.5x_i + 7y_i) + \sum_{i=1}^{12} (s_{1i} + 1.5s_{2i})$$

s.t.

$$X_1 - 10000 = Z_1$$

$$X_2 + Z_1 - 10000 = Z_2$$

$$X_3 + Z_2 - 10000 = Z_3$$

$$X_4 + Z_3 - 10000 = Z_4$$

$$X_5 + Z_4 - 30000 = Z_5$$

$$X_6 + Z_5 - 30000 = Z_6$$

$$X_7 + Z_6 - 30000 = Z_7$$

$$X_8 + Z_7 - 30000 = Z_8$$

$$X_9 + Z_8 - 30000 = Z_9$$

$$X_{10} + Z_9 - 100000 = Z_{10}$$

$$X_{11} + Z_{10} - 100000 = Z_{11}$$

$$X_{12} + Z_{11} - 100000 = Z_{12}$$

$$Y_1 - 50000 = W_1$$

$$Y_2 + W_1 - 50000 = W_2$$

$$Y_3 + W_2 - 15000 = W_3$$

$$Y_4 + W_3 - 15000 = W_4$$

$$Y_5 + W_4 - 15000 = W_5$$

$$Y_6 + W_5 - 15000 = W_6$$

$$Y_7 + W_6 - 15000 = W_7$$

$$Y_8 + W_7 - 15000 = W_8$$

$$Y_9 + W_8 - 15000 = W_9$$

$$Y_{10} + W_9 - 50000 = W_{10}$$

$$Y_{11} + W_{10} - 50000 = W_{11}$$

$$Y_{12} + W_{11} - 50000 = W_{12}$$

$$S_{1i} \leq 15000 \quad 1 \leq i \leq 12$$

$$X_i + Y_i \leq 120000 \quad 1 \leq i \leq 12$$

$$0.2Z_i + 0.4W_i = S_{1i} + S_{2i} \quad 1 \leq i \leq 12$$

$$X_i \geq 0, Y_i \geq 0, Z_i \geq 0, W_i \geq 0, S_{1i} \geq 0, S_{2i} \geq 0$$

用管理运筹学软件我们可以求得此问题的解为：

最优值= 4910500

$$X_1=10000, X_2=10000, X_3=10000, X_4=10000, X_5=30000, X_6=30000, X_7=30000,$$

$$X_8=45000, X_9=105000, X_{10}=70000, X_{11}=70000, X_{12}=70000;$$

$$Y_1=50000, Y_2=50000, Y_3=15000, Y_4=15000, Y_5=15000,$$

$$Y_6=15000, Y_7=15000, Y_8=15000, Y_9=15000, Y_{10}=50000, Y_{11}=50000, Y_{12}=50000;$$

$$Z_8=15000, Z_9=90000, Z_{10}=60000, Z_{11}=30000;$$

$$S_{18}=3000, S_{19}=15000, S_{110}=12000, S_{111}=6000;$$

$$S_{28}=3000;$$

其余变量都等于 0

8、解：设第 i 个车间生产第 j 种型号产品的数量为 x_{ij} ，可建立下面的数学模型：

$$\max z = 25(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51}) + 20(x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52}) + 17(x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53}) + 11(x_{14} + x_{24} + x_{44})$$

$$s. \quad t. \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} \leq 1400$$

$$x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52} \geq 300$$

$$x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52} \leq 800$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53} \leq 8000$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{44} \geq 700$$

$$5x_{11} + 7x_{12} + 6x_{13} + 5x_{14} \leq 18000$$

$$6x_{21} + 3x_{23} + 3x_{24} \leq 15000$$

$$4x_{31} + 3x_{32} \leq 14000$$

$$3x_{41} + 2x_{42} + 4x_{43} + 2x_{44} \leq 12000$$

$$2x_{51} + 4x_{52} + 5x_{53} \leq 10000$$

$$x_{ij} \geq 0, i=1, 2, 3, 4, 5 \quad j=1, 2, 3, 4$$

用管理运筹学软件我们可以求得此问题的解为：

$$x_{11}=0, x_{12}=0, x_{13}=1000, x_{14}=2400, x_{21}=0, x_{23}=5000, x_{24}=0,$$

$$x_{31}=1400, x_{32}=800, x_{41}=0, x_{42}=0, x_{43}=0, x_{44}=6000, x_{51}=0,$$

$$x_{52}=0, x_{53}=2000$$

最优值为 279400

9、解：设第一个月正常生产 x_1 ，加班生产 x_2 ，库存 x_3 ；第二个月正常生产 x_4 ，加班生产 x_5 ，库存 x_6 ；第三个月正常生产 x_7 ，加班生产 x_8 ，库存 x_9 ；第四个月正常生产 x_{10} ，加班生产 x_{11} ，可建立下面的数学模型：

$$\min f = 200(x_1 + x_4 + x_7 + x_{10}) + 300(x_2 + x_5 + x_8 + x_{11}) + 60(x_3 + x_6 + x_9)$$

s. t.

$$x_1 \leq 4000$$

$$x_4 \leq 4000$$

$$x_7 \leq 4000$$

$$x_{10} \leq 4000$$

$$x_3 \leq 1000$$

$$x_6 \leq 1000$$

$$x_9 \leq 1000$$

$$x_2 \leq 1000$$

$$x_5 \leq 1000$$

$$x_8 \leq 1000$$

$$x_{11} \leq 1000$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 4500$$

$$x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 3000$$

$$x_6 + x_7 + x_8 - x_9 = 5500$$

$$x_9 + x_{10} + x_{11} = 4500$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11} \geq 0$$

计算结果是：

minf= 3710000 元

$x_1=4000$ 吨, $x_2=500$ 吨, $x_3=0$ 吨, $x_4=4000$ 吨, $x_5=0$ 吨 ,

$x_6=1000$ 吨, $x_7=4000$ 吨, $x_8=500$ 吨, $x_9=0$ 吨, $x_{10}=4000$ 吨,

$x_{11}=500$ 吨。

第 5 章 单纯形法

1、解：表中 a、c、e、f 是可行解，a、b、f 是基本解，a、f 是基本可行解。

2、解：a、该线性规划的标准型为：

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 9x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 0.5x_1 + x_2 + s_1 = 8 \\ & x_1 + x_2 - s_2 = 10 \\ & 0.25x_1 + 0.5x_2 - s_3 = 6 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0. \end{aligned}$$

b、有两个变量的值取零，因为有三个基变量、两个非基变量，非基变量取零。

c、(4, 6, 0, 0, -2)

d、(0, 10, -2, 0, -1)

e、不是。因为基本可行解要求基变量的值全部非负。

3、解：a、

迭代次数	基变量	C _B	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	b
			6	30	25	0	0	0	
0	s1	0	3	1	0	1	0	0	40
	s2	0	0	2	1	0	1	0	50
	s3	0	2	[1]	-1	0	0	1	20
	x _j		0	0	0	0	0	0	0
	c _j - x _j		6	30*	25	0	0	0	

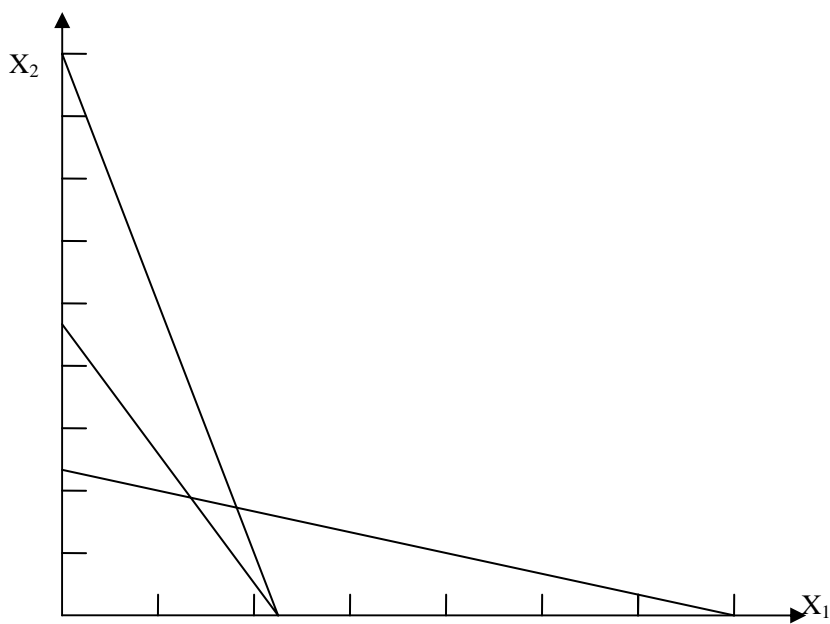
b、线性规划模型为：

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 30x_2 + 25x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 + x_2 + s_1 = 40 \\ & 2x_1 + x_3 + s_2 = 50 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 + s_3 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

c、初始解的基为 (s₁, s₂, s₃)，初始解为 (0, 0, 0, 40, 50, 20)，对应的目标函数值为 0。

d、第一次迭代时，入基变量是 x₂，出基变量为 s₃。

4、解：最优解为 (2.25, 0)，最优值为 9。



5、解： a、最优解为 $(2, 5, 4)$ ，最优值为 84。

b、最优解为 $(0, 0, 4)$ ，最优值为 -4 。

6、解： a、有无界解

b、最优解为 $(0.714, 2.143, 0)$ ，最优值为 -2.144 。

7、解： a、无可行解

b、最优解为 $(4, 4)$ ，最优值为 28。

c、有无界解

d、最优解为 $(4, 0, 0)$ ，最优值为 8。

第 6 章 单纯形法的灵敏度分析与对偶

1

- a. $c_1 \leq 24$
- b. $c_2 \geq 6$
- c. $c_{s2} \leq 8$

2

- a. $c_1 \geq -0.5$
- b. $-2 \leq c_3 \leq 0$
- c. $c_{s2} \leq 0.5$

3

- a. $b_1 \geq 150$
- b. $0 \leq b_2 \leq 83.333$
- c. $0 \leq b_3 \leq 150$

4

- a. $b_1 \geq -4$
- b. $0 \leq b_2 \leq 300$
- c. $b_3 \geq 4$

5

- a. 利润变动范围 $c_1 \leq 3$, 故当 $c_1=2$ 时最优解不变
- b. 根据材料的对偶价格为 1 判断, 此做法不利
- c. $0 \leq b_2 \leq 45$
- d. 最优解不变, 故不需要修改生产计划
- e. 此时生产计划不需要修改, 因为新的产品计算的检验数为-12 小于零, 对原生产计划没有影响。

6

均为唯一最优解, 根据从计算机输出的结果看出, 如果松弛或剩余变量为零且对应的对偶价格也为零, 或者存在取值为零的决策变量并且其相差值也为零时, 可知此线性规划有无穷多组解。

7

- a. $\min f = 10y_1 + 20y_2.$
s.t. $y_1 + y_2 \geq 2,$
 $y_1 + 5y_2 \geq 1,$
 $y_1 + y_2 \geq 1,$
 $y_1, y_2 \geq 0.$
- b. $\max z = 100y_1 + 200y_2.$
s.t. $1/2y_1 + 4y_2 \leq 4,$
 $2y_1 + 6y_2 \leq 4,$

$$\begin{aligned} 2y_1 + 3y_2 &\leq 2, \\ y_1, y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

8.

a. $\min f = -10y_1 + 50y_2 + 20y_3 - 20y_4.$
s.t. $-2y_1 + 3y_2 + y_3 - y_4 \geq 1,$
 $3y_1 + y_2 \geq 2,$
 $-y_1 + y_2 + y_3 - y_4 = 5,$
 $y_1, y_2, y_4 \geq 0, y_3$ 没有非负限制。

b. $\max z = 6y_1 - 3y_2 + 2y_3 - 2y_4.$
s.t. $y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \leq 1,$
 $2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 = 3,$
 $-3y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 \leq 2,$
 $y_1, y_2, y_4 \geq 0, y_3$ 没有非负限制

9. 对偶单纯形为

$$\begin{aligned} \max z &= 4y_1 - 8y_2 + 2y_3 \\ \text{s.t. } y_1 - y_2 &\leq 1, \\ -y_1 - y_2 + y_3 &\leq 2, \\ y_1 - 2y_2 - y_3 &\leq 3, \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

目标函数最优值为: 10

最优解: $x_1=6, x_2=2, x_3=0$

第 7 章 运输问题

1.

(1) 此问题为产销平衡问题

	甲	乙	丙	丁	产量
1 分厂	21	17	23	25	300
2 分厂	10	15	30	19	400
3 分厂	23	21	20	22	500
销量	400	250	350	200	1200

最优解如下

起 发点	至 1	销点 2	3	4
-----	-----	-----	-----	-----
1	0	250	0	50
2	400	0	0	0
3	0	0	350	150

此运输问题的成本或收益为: 19800

此问题的另外的解如下:

起 发点	至 1	销点 2	3	4
-----	-----	-----	-----	-----
1	0	250	50	0
2	400	0	0	0
3	0	0	300	200

此运输问题的成本或收益为: 19800

(2) 如果 2 分厂产量提高到 600, 则为产销不平衡问题

最优解如下

起 发点	至 1	销点 2	3	4
-----	-----	-----	-----	-----
1	0	250	0	0
2	400	0	0	200
3	0	0	350	0

此运输问题的成本或收益为： 19050

注释：总供应量多出总需求量 200

第 1 个产地剩余 50

第 3 个产地剩余 150

(3) 销地甲的需求提高后，也变为产销不平衡问题
最优解如下

起 发点	至 销点 1	2	3	4
-----	-----	-----	-----	-----
1	50	250	0	0
2	400	0	0	0
3	0	0	350	150

此运输问题的成本或收益为： 19600

注释：总需求量多出总供应量 150

第 1 个销地未被满足，缺少 100

第 4 个销地未被满足，缺少 50

2. 本题运输模型如下：

	i	ii	iii	iv	v	VI	
甲	0.3	0.4	0.3	0.4	0.1	0.9	300
乙	0.3	0.1	-0.4	0.2	-0.2	0.6	500
丙	0.05	0.05	0.15	0.05	-0.05	0.55	400
丁	-0.2	0.3	0.1	-0.1	-0.1	0.1	100
	300	250	350	200	250	150	

最优解如下

起 发点	至 销点 1	2	3	4	5	6	7	8
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
1	0	0	100	0	0	200	0	0
2	0	0	0	0	350	0	0	150
3	0	50	0	100	0	0	250	0
4	0	100	0	0	0	0	0	0
5	150	0	50	0	0	0	0	0

此运输问题的成本或收益为： 1.050013E+07

3. 建立的运输模型如下：

	1	2	3	
1	600	$600+60$	$600+60\times 2$	3
1'	$600+600\times 10\%$	$600+600\times 10\%+60$	$600+600\times 10\%+60\times 2$	3
2		700	$700+60$	4
2'		$700+700\times 10\%$	$700+700\times 10\%+60$	2
3			650	2
3'			$650+650\times 10\%$	3
	3	5	6	

最优解如下

起 发点	至 1	销点 2	3	4
-----	-----	-----	-----	-----
1	2	0	0	0
2	1	1	1	0
3	0	0	0	3
4	0	4	0	0
5	0	0	0	2
6	0	0	2	0
7	0	0	3	0

此运输问题的成本或收益为： 8465

此问题的另外的解如下：

起 发点	至 1	销点 2	3	4
-----	-----	-----	-----	-----
1	2	0	0	0
2	1	2	0	0
3	0	0	0	3
4	0	3	1	0
5	0	0	0	2
6	0	0	2	0
7	0	0	3	0

此运输问题的成本或收益为： 8465

4.

	甲	乙	A	B	C	D	
甲	0	100	150	200	180	240	1600
乙	80	0	80	210	60	170	1700
A	150	80	0	60	110	80	1100
B	200	210	70	0	140	50	1100
C	180	60	110	130	0	90	1100
D	240	170	90	50	85	0	1100
	1100	1100	1400	1300	1600	1200	

最优解如下

起 发点	至 销点					
	1	2	3	4	5	6
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
1	1100	0	300	200	0	0
2	0	1100	0	0	600	0
3	0	0	1100	0	0	0
4	0	0	0	1100	0	0
5	0	0	0	0	1000	100
6	0	0	0	0	0	1100

此运输问题的成本或收益为: 130000

5.

建立的运输模型如下

$$\min f = 500x_1 + 300x_2 + 550x_3 + 650x_4.$$

$$\text{s.t. } 54x_1 + 49x_2 + 52x_3 + 64x_4 \leq 1100,$$

$$57x_1 + 73x_2 + 69x_3 + 65x_4 \leq 1000,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

	1	2	3	4	
A	54	49	52	64	1100
B	57	73	69	65	1000
	500	300	550	650	

最优解如下

起 发点	至 销点				
	1	2	3	4	5
-----	-----	-----	-----	-----	-----
1	250	300	550	0	0
2	250	0	0	650	100

此运输问题的成本或收益为: 113300

6.

a. 最小元素法的初始解如下:

	1		2		3		产量
甲		8		7		4	15 0
					15		
乙		3		5		9	25 15 5 0
	10		10		5		
丙		0		0		0	10 0
	10						
销量	20 10 0		10 0		20 5 0		

b. 最优解如下

起 发点	至 销点 1	2	3
-----	-----	-----	-----
1	0	0	15
2	20	5	0
3	0	5	5

此运输问题的成本或收益为: 145

c. 该运输问题只有一个最优解，因为其检验数均不为零

d. 最优解如下

起 发点	至 销点 1	2	3
-----	-----	-----	-----
1	0	0	15
2	25	0	0

此运输问题的成本或收益为: 135

第 8 章 整数规划

1. 求解下列整数规划问题

a. $\max z=5x_1+8x_2$

s.t.

$$x_1+x_2 \leq 6,$$

$$5x_1+9x_2 \leq 45,$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{且为整数}$$

目标函数最优解为 : $x_1^*=0, x_2^*=5, z^*=40$ 。

b. $\max z=3x_1+2x_2$

s.t.

$$2x_1+3x_2 \leq 14,$$

$$2x_1+x_2 \leq 9,$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{且} x_1 \text{为整数。}$$

目标函数最优解为 : $x_1^*=3, x_2^*=2.6667, z^*=14.3334$ 。

c. $\max z=7x_1+9x_2+3x_3$

s.t.

$$-x_1+3x_2+x_3 \leq 7,$$

$$7x_1+x_2+x_3 \leq 38,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{且} x_1 \text{为整数, } x_3 \text{为0-1变量。}$$

目标函数最优解为 : $x_1^*=5, x_2^*=3, x_3^*=0, z^*=62$ 。

2. 解: 设 x_i 为装到船上的第 i 种货物的件数, $i=1,2,3,4,5$ 。则该船装载的货物取得最大价值目标函数的数学模型可写为:

$$\max z=5x_1+10x_2+15x_3+18x_4+25x_5$$

s.t.

$$20x_1+5x_2+10x_3+12x_4+25x_5 \leq 400000,$$

$$x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5 \leq 50000,$$

$$x_1+4x_4 \leq 10000$$

$$0.1x_1+0.2x_2+0.4x_3+0.1x_4+0.2x_5 \leq 750,$$

$$x_i \geq 0, \text{且为整数, } i=1,2,3,4,5。$$

目标函数最优解为 : $x_1^*=0, x_2^*=0, x_3^*=0, x_4^*=2500, x_5^*=2500, z^*=107500$ 。

3. 解: 设 x_i 为第 i 项工程, $i=1,2,3,4,5$, 且 x_i 为 0-1 变量, 并规定,

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{当第}i\text{项工程被选定时,} \\ 0, & \text{当第}i\text{项工程没被选定时.} \end{cases}$$

根据给定条件，使三年后总收入最大的目标函数的数学模型为：

$$\max z = 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5$$

s.t.

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25,$$

$$x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 25,$$

$$8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + x_4 + 10x_5 \leq 25,$$

$$x_i \text{ 为 } 0-1 \text{ 变量, } i=1,2,3,4,5.$$

目标函数最优解为 $x_1^*=1, x_2^*=1, x_3^*=1, x_4^*=1, x_5^*=0, z^*=95$

4. 解：这是一个混合整数规划问题

设 x_1 、 x_2 、 x_3 分别为利用 A、B、C 设备生产的产品的件数，生产准备费只有在利用该设备时才投入，为了说明固定费用的性质，设

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{当利用第}i\text{种设备生产时, 即}x_i>0, \\ 0, & \text{当不利用第}i\text{种设备生产时, 即}x_i=0. \end{cases}$$

故其目标函数为：

$$\min z = 100y_1 + 300y_2 + 200y_3 + 7x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

为了避免没有投入生产准备费就使用该设备生产，必须加以下的约束条件， M 为充分大的数。

$$x_1 \leq y_1 M,$$

$$x_2 \leq y_2 M,$$

$$x_3 \leq y_3 M,$$

$$\text{设 } M=1000000$$

a. 该目标函数的数学模型为：

$$\min z=100y_1+300y_2+200y_3+7x_1+2x_2+5x_3$$

s.t.

$$x_1+x_2+x_3=2000,$$

$$0.5x_1+1.8x_2+1.0x_3 \leq 2000,$$

$$x_1 \leq 800,$$

$$x_2 \leq 1200,$$

$$x_3 \leq 1400,$$

$$x_1 \leq y_1M,$$

$$x_2 \leq y_2M,$$

$$x_3 \leq y_3M,$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$, 且为整数, y_1, y_2, y_3 为0-1变量。

目标函数最优解为 : $x_1^*=370, x_2^*=231, x_3^*=1399, y_1=1, y_2=1, y_3=1, z^*=10647$

b.该目标函数的数学模型为:

$$\min z=100y_1+300y_2+200y_3+7x_1+2x_2+5x_3$$

s.t.

$$x_1+x_2+x_3=2000,$$

$$0.5x_1+1.8x_2+1.0x_3 \leq 2500,$$

$$x_1 \leq 800,$$

$$x_2 \leq 1200,$$

$$x_3 \leq 1400,$$

$$x_1 \leq y_1M,$$

$$x_2 \leq y_2M,$$

$$x_3 \leq y_3M,$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$, 且为整数, y_1, y_2, y_3 为0-1变量。

目标函数最优解为 : $x_1^*=0, x_2^*=625, x_3^*=1375, y_1=0, y_2=1, y_3=1, z^*=8625$

c.该目标函数的数学模型为：

$$\min z=100y_1+300y_2+200y_3+7x_1+2x_2+5x_3$$

s.t.

$$x_1+x_2+x_3=2000,$$

$$0.5x_1+1.8x_2+1.0x_3 \leq 2800,$$

$$x_1 \leq 800,$$

$$x_2 \leq 1200,$$

$$x_3 \leq 1400,$$

$$x_1 \leq y_1M,$$

$$x_2 \leq y_2M,$$

$$x_3 \leq y_3M,$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$, 且为整数, y_1, y_2, y_3 为0-1变量。

目标函数最优解为 : $x_1^*=0, x_2^*=1000, x_3^*=1000, y_1=0, y_2=1, y_3=1, z^*=7500$

d.该目标函数的数学模型为：

$$\min z=100y_1+300y_2+200y_3+7x_1+2x_2+5x_3$$

s.t.

$$x_1+x_2+x_3=2000,$$

$$x_1 \leq 800,$$

$$x_2 \leq 1200,$$

$$x_3 \leq 1400,$$

$$x_1 \leq y_1M,$$

$$x_2 \leq y_2M,$$

$$x_3 \leq y_3M,$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$, 且为整数, y_1, y_2, y_3 为0-1变量。

目标函数最优解为 : $x_1^*=0, x_2^*=1200, x_3^*=800, y_1=0, y_2=1, y_3=1, z^*=6900$

5. 解：设 x_{ij} 为从 D_i 地运往 R_i 地的运输量, $i=1, 2, 3, 4, j=1, 2, 3$ 分别代表从北京、上海、广州、武汉运往华北、华中、华南的货物件数, 并规定,

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{当} i \text{地被选设库房,} \\ 0, & \text{当} i \text{地没被选设库房.} \end{cases}$$

该目标函数的数学模型为：

$$\min z = 45000y_1 + 50000y_2 + 70000y_3 + 40000y_4 + 200x_{11} + 400x_{12} + 500x_{13} + 300x_{21} + 250x_{22} + 400x_{23} + 600x_{31} + 350x_{32} + 300x_{33} + 350x_{41} + 150x_{42} + 350x_{43}$$

s.t.

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 500,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 800,$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 700,$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1000y_1,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1000y_2,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1000y_3,$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 1000y_4,$$

$$y_2 \leq y_4,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 2,$$

$$y_3 + y_4 \leq 1,$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ 且为整数, } y_i \text{ 为0-1分量, } i=1,2,3,4.$$

目标函数最优解为

$$x_{11}^*=500, x_{12}^*=0, x_{13}^*=500, x_{21}^*=0, x_{22}^*=0, x_{23}^*=0, x_{31}^*=0, x_{32}^*=0, x_{33}^*=0, \\ x_{41}^*=0, x_{42}^*=800, x_{43}^*=200, y_1=1, y_2=0, y_3=0, y_4=1, z^*=625000$$

也就是说在北京和武汉建库房，北京向华北和华南各发货 500 件，武汉向华中发货 800 件，向华南发货 200 件就能满足要求，即这就是最优解。

6. 解：引入 0-1 变量 x_{ij} ，并令 $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当指派第 } i \text{ 人去完成第 } j \text{ 项工作时,} \\ 0, & \text{当不指派第 } i \text{ 人去完成第 } j \text{ 项工作时.} \end{cases}$

a. 为使总消耗时间最少的目标函数的数学模型为：

$$\min z = 20x_{11} + 19x_{12} + 20x_{13} + 28x_{14} + 18x_{21} + 24x_{22} + 27x_{23} + 20x_{24} + 26x_{31} + 16x_{32} + 15x_{33} + 18x_{34} + 17x_{41} + 20x_{42} + 24x_{43} + 19x_{44}$$

s.t.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1,$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1,$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1,$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1,$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1,$$

$$x_{ij} \text{ 为0-1变量, } i=1,2,3,4, j=1,2,3,4.$$

目标函数最优解为：

$$\begin{aligned}x_{11}^*=0, x_{12}^*=1, x_{13}^*=0, x_{14}^*=0, x_{21}^*=1, x_{22}^*=0, x_{23}^*=0, x_{24}^*=0, x_{31}^*=0, x_{32}^*=0, x_{33}^*=1, \\x_{34}^*=0, x_{41}^*=0, x_{42}^*=0, x_{43}^*=0, x_{44}^*=1, z^*=71\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}x_{11}^*=0, x_{12}^*=1, x_{13}^*=0, x_{14}^*=0, x_{21}^*=0, x_{22}^*=0, x_{23}^*=0, x_{24}^*=1, x_{31}^*=0, x_{32}^*=0, x_{33}^*=1, \\x_{34}^*=0, x_{41}^*=1, x_{42}^*=0, x_{43}^*=0, x_{44}^*=0, z^*=71\end{aligned}$$

即安排甲做 B 项工作，乙做 A 项工作，丙 C 项工作，丁 D 项工作，或者是安排甲做 B 项工作，乙做 D 项工作，丙 C 项工作，丁 A 项工作，最少时间为 71 分钟。

b.为使总收益最大的目标函数的数学模型为：

将 a 中的目标函数改为求最大值即可。

目标函数最优解为：

$$\begin{aligned}x_{11}^*=0, x_{12}^*=0, x_{13}^*=0, x_{14}^*=1, x_{21}^*=0, x_{22}^*=1, x_{23}^*=0, x_{24}^*=0, x_{31}^*=1, x_{32}^*=0, x_{33}^*=0, \\x_{34}^*=0, x_{41}^*=0, x_{42}^*=0, x_{43}^*=1, x_{44}^*=0, z^*=102\end{aligned}$$

即安排甲做 D 项工作，乙做 C 项工作，丙 A 项工作，丁 B 项工作，最大收益为 102。

c.由于工作多人少，我们假设有一个工人戊，他做各项工作的所需的时间均为 0，该问题就变为安排 5 个人去做 5 项不同的工作的问题了，其目标函数的数学模型为：

$$\min z = 20x_{11} + 19x_{12} + 20x_{13} + 28x_{14} + 17x_{15} + 18x_{21} + 24x_{22} + 27x_{23} + 20x_{24} + 20x_{25} \\ + 26x_{31} + 16x_{32} + 15x_{33} + 18x_{34} + 15x_{35} + 17x_{41} + 20x_{42} + 24x_{43} + 19x_{44} + 16x_{45}$$

s.t.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1,$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1,$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1,$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1,$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1,$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1,$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1,$$

$$x_{ij} \text{ 为 } 0-1 \text{ 变量, } i=1,2,3,4,5, j=1,2,3,4,5。$$

目标函数最优解为:

$$x_{11}^*=0, x_{12}^*=1, x_{13}^*=0, x_{14}^*=0, x_{15}^*=0, x_{21}^*=1, x_{22}^*=0, x_{23}^*=0, x_{24}^*=0, x_{25}^*=0, x_{31}^*=0, \\ x_{32}^*=0, x_{33}^*=1, x_{34}^*=0, x_{35}^*=0, x_{41}^*=0, x_{42}^*=0, x_{43}^*=0, x_{44}^*=0, x_{45}^*=1, z^*=68$$

即安排甲做 B 项工作，乙做 A 项工作，丙做 C 项工作，丁做 E 项工作，最少时间为 68 分钟。

d.该问题为人多任务少的问题，其目标函数的数学模型为：

$$\min z = 20x_{11} + 19x_{12} + 20x_{13} + 28x_{14} + 18x_{21} + 24x_{22} + 27x_{23} + 20x_{24} + 26x_{31} + 16x_{32} \\ + 15x_{33} + 18x_{34} + 17x_{41} + 20x_{42} + 24x_{43} + 19x_{44} + 16x_{51} + 17x_{52} + 20x_{53} + 21x_{54}$$

s.t.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 1,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 1,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 1,$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} \leq 1,$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} \leq 1,$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1,$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1,$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1,$$

$$x_{ij} \text{ 为 } 0-1 \text{ 变量, } i=1,2,3,4, j=1,2,3,4,5。$$

目标函数最优解为:

$$x_{11}^*=0, x_{12}^*=0, x_{13}^*=0, x_{14}^*=0, x_{21}^*=0, x_{22}^*=0, x_{23}^*=0, x_{24}^*=1, x_{31}^*=0, x_{32}^*=0, x_{33}^*=1, \\ x_{34}^*=0, x_{41}^*=1, x_{42}^*=0, x_{43}^*=0, x_{44}^*=0, x_{51}^*=0, x_{52}^*=1, x_{53}^*=0, x_{54}^*=0, z^*=69$$

或

$$x_{11}^*=0, x_{12}^*=0, x_{13}^*=0, x_{14}^*=0, x_{21}^*=1, x_{22}^*=0, x_{23}^*=0, x_{24}^*=0, x_{31}^*=0, x_{32}^*=0, x_{33}^*=1, \\ x_{34}^*=0, x_{41}^*=0, x_{42}^*=0, x_{43}^*=0, x_{44}^*=1, x_{51}^*=0, x_{52}^*=1, x_{53}^*=0, x_{54}^*=0, z^*=69$$

或

$$x_{11}^*=0, x_{12}^*=1, x_{13}^*=0, x_{14}^*=0, x_{21}^*=0, x_{22}^*=0, x_{23}^*=0, x_{24}^*=0, x_{31}^*=0, x_{32}^*=0, x_{33}^*=1, \\ x_{34}^*=0, x_{41}^*=0, x_{42}^*=0, x_{43}^*=0, x_{44}^*=1, x_{51}^*=1, x_{52}^*=0, x_{53}^*=0, x_{54}^*=0, z^*=69$$

即安排乙做 D 项工作, 丙做 C 项工作, 丁做 A 项工作, 戊做 B 项工作; 或安排乙做 A 项工作, 丙做 C 项工作, 丁做 D 项工作, 戊做 B 项工作; 或安排甲做 B 项工作, 丙做 C 项工作, 丁做 D 项工作, 戊做 A 项工作, 最少时间为 69 分钟。

7.解: 设飞机停留一小时的损失为 a 元, 则停留两小时损失为 4a 元, 停留 3 小时损失为 9 元, 依次类推, 对 A、B、C 三个城市建立的指派问题的效率矩阵分别如下表所示:

城市 A

<div>起 飞</div> <div>到 达</div>	101	102	103	104	105
106	4a	9a	64a	169a	225a
107	361a	400a	625a	36a	64a
108	225a	256a	441a	4a	16a
109	484a	529a	16a	81a	121a
110	196a	225a	400a	625a	9a

解得最优解为：

<div>起 飞</div> <div>到 达</div>	101	102	103	104	105
106	0	1	0	0	0
107	0	0	0	1	0
108	0	0	0	0	1
109	0	0	1	0	0
110	1	0	0	0	0

城市 B

<div>起 飞</div> <div>到 达</div>	106	107	108	111	112
101	256a	529a	9a	625a	36a
102	225a	484a	4a	576a	25a
103	100a	289a	441a	361a	576a
113	64a	225a	361a	289a	484a
114	256a	529a	9a	625a	36a

解得最优解为：

起 飞 到 达	101	102	103	104	105
106	0	0	1	0	0
107	1	0	0	0	0
108	0	1	0	0	0
109	0	0	0	1	0
110	0	0	0	0	1

或为：

起 飞 到 达	101	102	103	104	105
106	0	0	0	0	1
107	1	0	0	0	0
108	0	1	0	0	0
109	0	0	0	1	0
110	0	0	1	0	0

城市 C

起 飞 到 达	109	110	113	114
104	49a	225a	225a	49a
105	25a	169a	169a	25a
111	169a	441a	441a	169a
112	64a	256a	256a	64a

解得最优解为：

起 飞 到 达	109	110	113	114
104	0	1	0	0
105	0	0	1	0
111	1	0	0	0
112	0	0	0	1

或为：

起 飞 到 达	109	110	113	114
104	0	0	1	0
105	0	1	0	0
111	1	0	0	0
112	0	0	0	1

或为：

起 飞 到 达	109	110	113	114
104	0	1	0	0
105	0	0	1	0
111	0	0	0	1
112	1	0	0	0

或为：

起 飞 到 达	109	110	113	114
104	0	0	1	0
105	0	1	0	0
111	0	0	0	1
112	1	0	0	0

第9章 目标规划

1. 某工厂试对产品 A、B 进行生产。市场需求并不是很稳定，因此对每种产品分别预测了在销售良好和销售较差时的预期利润。这两种产品都经过甲、乙两台设备加工。已知产品 A 和 B 分别在甲和乙设备上的单位加工时间，甲、乙设备的可用加工时间以及预期利润如下表所示，要求首先是保证在销售较差时，预期利润不少于 5 千元，其次是要求销售良好时，预期利润尽量达到 1 万元。试建立多目标规划模型并求解。

单位加工时间 设备 \ 产品	A	B	可用时间
甲	4	3	45
乙	2	5	30
销售良好时的预期利润 (百元 / 件)	8	6	100
销售较差时的预期利润 (百元 / 件)	5	5	50

1、解：设工厂生产 A 产品 x_1 件，生产 B 产品 x_2 件。按照生产要求，建立如下目标规划模型：

$$\begin{aligned} \min \quad & P_1(d_1^-) + P_2(d_2^-) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 45 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ 5x_1 + 5x_2 - d_1^+ + d_1^- = 50 \\ 8x_1 + 6x_2 - d_2^+ + d_2^- = 100 \\ x_1, x_2, d_i^+, d_i^- \geq 0, i=1,2 \end{cases} \end{aligned}$$

由管理运筹学软件先求解得： $x_1 = 11.25, x_2 = 0, d_1^- = 0, d_2^- = 10, d_1^+ = 6.25, d_2^+ = 0$

由图解法或进一步计算可知，本题在求解结果未要求整数解的情况下，满意解有无穷多个，为线段 $\alpha(135/14, 15/7) + (1-\alpha)(45/4, 0), \alpha \in [0, 1]$ 上的任一点。

2、解：设食品厂商在电视上发布广告 x_1 次，在报纸上发布广告 x_2 次，在广播中发布广告 x_3 次。

目标规划模型为：

$$\begin{aligned} \min \quad & P_1(d_1^-) + P_2(d_2^-) + P_3(d_3^+) + P_4(d_4^+) \\ & \begin{cases} x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 20 \\ x_3 \leq 15 \\ 20x_1 + 10x_2 + 5x_3 - d_1^+ + d_1^- = 400 \\ 0.7x_1 - 0.3x_2 - 0.3x_3 - d_2^+ + d_2^- = 0 \\ -0.3x_1 - 0.3x_2 + 0.7x_3 - d_3^+ + d_3^- = 0 \\ 2.5x_1 + 0.5x_2 + 0.3x_3 - d_4^+ + d_4^- = 20 \\ x_1, x_2, x_3, d_i^+, d_i^- \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \end{aligned}$$

用管理运筹学软件先求下述问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & d_1^- \\ & \begin{cases} x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 20 \\ x_3 \leq 15 \\ 20x_1 + 10x_2 + 5x_3 - d_1^+ + d_1^- = 400 \\ 0.7x_1 - 0.3x_2 - 0.3x_3 - d_2^+ + d_2^- = 0 \\ -0.3x_1 - 0.3x_2 + 0.7x_3 - d_3^+ + d_3^- = 0 \\ 2.5x_1 + 0.5x_2 + 0.3x_3 - d_4^+ + d_4^- = 20 \\ x_1, x_2, x_3, d_i^+, d_i^- \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \end{aligned}$$

得： $d_1^- = 0$ ，将其作为约束条件求解下述问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & d_2^- \\ & \begin{cases} x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 20 \\ x_3 \leq 15 \\ 20x_1 + 10x_2 + 5x_3 - d_1^+ + d_1^- = 400 \\ 0.7x_1 - 0.3x_2 - 0.3x_3 - d_2^+ + d_2^- = 0 \\ -0.3x_1 - 0.3x_2 + 0.7x_3 - d_3^+ + d_3^- = 0 \\ 2.5x_1 + 0.5x_2 + 0.3x_3 - d_4^+ + d_4^- = 20 \\ d_1^- = 0 \\ x_1, x_2, x_3, d_i^+, d_i^- \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \end{aligned}$$

得最优值 $d_2^- = 0$ ，将其作为约束条件计算下述问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & d_3^+ \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 20 \\ x_3 \leq 15 \\ 20x_1 + 10x_2 + 5x_3 - d_1^+ + d_1^- = 400 \\ 0.7x_1 - 0.3x_2 - 0.3x_3 - d_2^+ + d_2^- = 0 \\ -0.3x_1 - 0.3x_2 + 0.7x_3 - d_3^+ + d_3^- = 0 \\ 2.5x_1 + 0.5x_2 + 0.3x_3 - d_4^+ + d_4^- = 20 \\ d_1^- = 0 \\ d_2^- = 0 \\ x_1, x_2, x_3, d_i^+, d_i^- \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \end{aligned}$$

得最优值 $d_3^+ = 0$ ，将其作为约束条件计算下述问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & d_4^+ \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 20 \\ x_3 \leq 15 \\ 20x_1 + 10x_2 + 5x_3 - d_1^+ + d_1^- = 400 \\ 0.7x_1 - 0.3x_2 - 0.3x_3 - d_2^+ + d_2^- = 0 \\ -0.3x_1 - 0.3x_2 + 0.7x_3 - d_3^+ + d_3^- = 0 \\ 2.5x_1 + 0.5x_2 + 0.3x_3 - d_4^+ + d_4^- = 20 \\ d_1^- = 0 \\ d_2^- = 0 \\ d_3^+ = 0 \\ x_1, x_2, x_3, d_i^+, d_i^- \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \end{aligned}$$

得：

$$x_1 = 9.474, x_2 = 20, x_3 = 2.105, d_1^+ = 0, d_1^- = 0, d_2^+ = 8.387, d_2^- = 0, d_3^+ = 0, d_3^- = 7.368, \\ d_4^+ = 14.316, d_4^- = 0,$$

所以食品厂商为了依次达到 4 个活动目标，需在电视上发布广告 9.474 次，报纸上发布广告 20 次，广播中发布广告 2.105 次。（管理运筹学 2.0 可一次求解上述问题）

3、解：（a）设该化工厂生产 x_1 升粘合剂 A 和 x_2 升粘合剂 B。则根据工厂要求，建立以下目标规划模型：

$$\min P_1(d_1^- + d_2^+) + P_2(d_3^- + d_4^-) + P_3(d_5^-)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{5}{12}x_2 - d_1^+ + d_1^- = 80 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{5}{12}x_2 - d_2^+ + d_2^- = 100 \\ x_1 - d_3^+ + d_3^- = 100 \\ x_2 - d_4^+ + d_4^- = 120 \\ x_1 + x_2 - d_5^- + d_5^+ = 300 \\ x_1, x_2, x_3, d_i^+, d_i^- \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

(b)

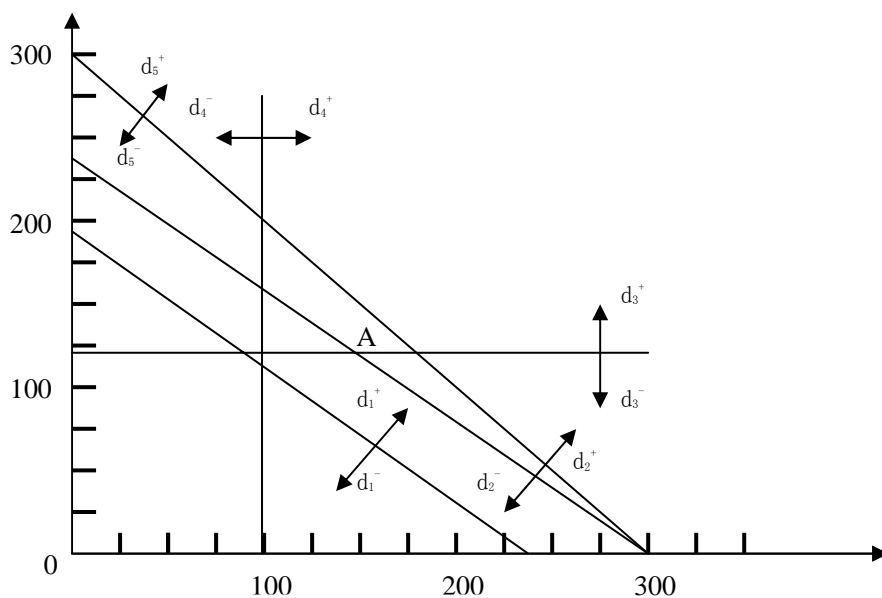


图 1 图解法求解

图解法求解如图 1：目标 1，2 可以达到，目标 3 达不到，所以有满意解为 A 点 (150, 120)。

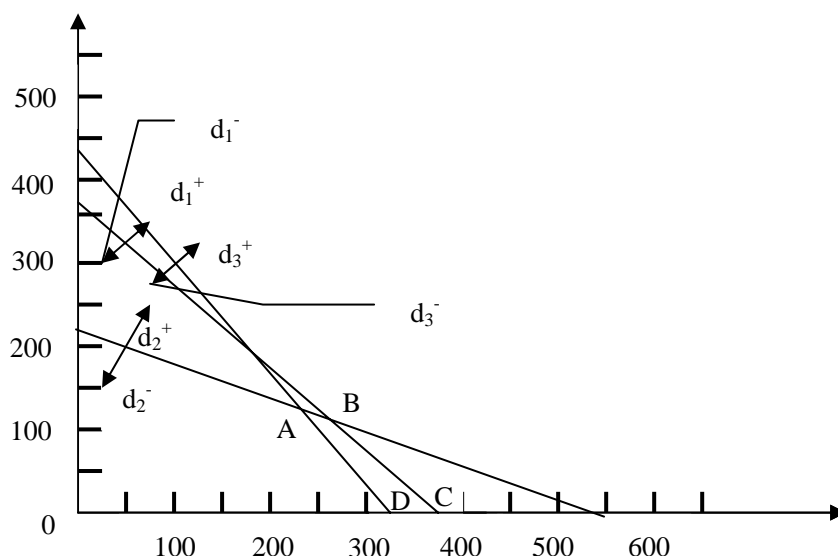
4、解：设该汽车装配厂为达到目标要求生产产品 A x_1 件，生产产品 B x_2 件。

$$\min P_1(d_1^+ + d_2^+) + P_2(d_3^-)$$

(a) 目标规划模型为：

$$\begin{cases} \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - d_1^+ + d_1^- = 60 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{5}{6}x_2 - d_2^+ + d_2^- = 180 \\ 4x_1 + 3x_2 - d_3^+ + d_3^- = 1300 \\ x_1, x_2, x_3, d_i^+, d_i^- \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

用图解法求解：



如图所示，所示解为区域 ABCD，有无穷多解。

(b) 由上图可知，如果不考虑目标 1 和目标 2，仅仅把它们加工时间的最大限度分别为 60 和 180 小时作为约束条件，而以利润最大化为目标，那么最优解为 C 点 (360, 0)，即生产产品 A360 件，最大利润为 1420 元。结果与 (a) 是不相同的，原因是追求利润最大化而不仅仅是要求利润不少于 1300 元。

(c) 如果设目标 3 的优先权为 P_1 ，目标 1 和目标 2 的优先权为 P_2 ，则由上图可知，满意解的区域依然是 ABCD，有无穷多解，与 (a) 的解是相同的，原因是 (a) 和 (c) 所设定的目标只是优先级别不同，但都能够依次达到。

5. 在环境污染日益得到重视的今天，越来越多的企业开始注重工业废水污水排污。某纸张制造厂生产一般类型纸张的利润为 300 元 / 吨，每吨纸产生的工业废水的处理费用为 30 元；生产某种特种纸张的利润为 500 元 / 吨，每吨特种纸产生的工业废水的处理费用为 40 元。

该纸张制造厂近期目标如下：

目标 1：纸张利润不少于 15 万；

目标 2：工业废水的处理费用不超过 1 万元。

a. 设目标 1 的优先权为 P_1 ，目标 2 的优先权为 P_2 ， $P_1 > P_2$ ，建立目标规划模型并用图解法求解。

b. 若目标 2 的优先权为 P_1 ，目标 1 的优先权为 P_2 ，建立目标规划模型并求解。所得的解是否与 a 中的解相同？

c. 若目标 2 的罚数权重为 5，目标 1 的罚数权重为 2，建立加权目标规划模型求解。

5、解：设该纸张制造厂需要生产一般类型纸张 x_1 吨，生产特种纸张 x_2 吨。

(a)、目标规划模型为：

$$\begin{aligned} \min \quad & P_1(d_1^-) + P_2(d_2^+) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 300x_1 + 500x_2 - d_1^+ + d_1^- = 150000 \\ 30x_1 + 40x_2 - d_2^+ + d_2^- = 10000 \\ x_1, x_2, d_i^+, d_i^- \geq 0, i=1, 2 \end{cases} \end{aligned}$$

图解法略，求解得 $x_1 = 0, x_2 = 300, d_1^- = 0, d_2^- = 0, d_1^+ = 0, d_2^+ = 200$

(b)、目标规划模型为：

$$\begin{aligned} \min \quad & P_1(d_2^+) + P_2(d_1^-) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 300x_1 + 500x_2 - d_1^+ + d_1^- = 150000 \\ 30x_1 + 40x_2 - d_2^+ + d_2^- = 10000 \\ x_1, x_2, d_i^+, d_i^- \geq 0, i=1, 2 \end{cases} \end{aligned}$$

图解法略，求解得 $x_1 = 0, x_2 = 250, d_1^- = 250, d_2^- = 0, d_1^+ = 0, d_2^+ = 0$

由此可见，所得结果与(a)中的解是不相同的。

(c)、加权目标规划模型为：

$$\begin{aligned} \min \quad & P_1(5d_2^+ + 2d_1^-) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 300x_1 + 500x_2 - d_1^+ + d_1^- = 150000 \\ 30x_1 + 40x_2 - d_2^+ + d_2^- = 10000 \\ x_1, x_2, d_i^+, d_i^- \geq 0, i=1, 2 \end{cases} \end{aligned}$$

求解得 $x_1 = 0, x_2 = 300, d_1^- = 250, d_2^- = 0, d_1^+ = 0, d_2^+ = 12000$

第 10 章 动态规划

- 1、最优解：A—B2—C1—D1—E；A—B3—C1—D1—E；A—B3—C2—D2—E
最优值：13
- 2、最优解：项目 A：300 万元、项目 B：0 万元、项目 C：100 万元、
最优值：Z=71+49+70=190 万元
- 3、设每个月的产量是 X_i 百台 ($i=1, 2, 3, 4$)
最优解：X1=4、X2=0、X3=4、X4=3
即第一个月生产 4 台，第一个月生产 0 台，第一个月生产 4 台，第一个月生产 3 台。
最优值：Z=252000 元
- 4、最优解：运送第一种产品 5 件
最优值：Z=500 元
5. 最大利润 2790 万元。最优安排如下表：

年度	年初完好设备	高负荷工作设备数	低负荷工作设备数
1	125	0	125
2	100	0	100
3	80	0	80
4	64	64	0
5	32	32	0

6. 最优解 (0, 200, 300, 100) 或 (200, 100, 200, 100) 或者 (100, 100, 300, 100) 或 (200, 200, 0, 200)。总利润最大增长额为 134 万。
7. 在区 1 建 3 个分店，在区 2 建 2 个分店，不在区 3 建立分店。最大总利润 22。
8. 最优解为：第一年继续使用，第二年继续使用，第三年更新，第四年继续使用，第五年继续使用，总成本=4500 元。
9. 最优解为第一年购买的设备到第二、三、四年初各更新一组，用到第 5 年末，其总收入为 17 万元。
10. 最优解为第一批投产 3 台，如果无合格品，第二批再投产 3 台，如果仍全部不合格，第三批投产 4 台。总研制费用最小为 796 元。
- 11.

月份	采购量	待销数量
1	0	200
2	900	0
3	900	900
4	0	900

最大利润为 14000。

12.
最优策略为 (1,2,3) 或者 (2,1,3)，即该厂应订购 6 套设备，可分别分给三个厂 1,2,3 套或者 2,1,3 套。每年利润最大为 18 万元。

第 11 章 图与网络模型

习题 1

解：这是一个最短路问题，要求我们求出从 v_1 到 v_7 配送的最短距离。用 Dijkstra 算法求解可得到这问题的解为 27。我们也可以用此书附带的管理运筹学软件进行计算而得出最终结果为：

从节点 1 到节点 7 的最短路

起点	终点	距离
----	----	----
1	2	4
2	3	12
3	5	6
5	7	5

此问题的解为:27

即：配送路线为： $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_5 \rightarrow v_7$

习题 2

解：这是一个最短路的问题，用 Dijkstra 算法求解可得到这问题的解为 4.8，即在 4 年内购买、更换及运行维修最小的总费用为：4.8 万元。

最优更新策略为：第一年末不更新
第二年末更新
第三年末不更新
第四年末处理机器

我们也可以用此书附带的管理运筹学软件进行求解，结果也可以得出此问题的解为 4.8。

习题 3

解：此题是一个求解最小生成树的问题，根据题意可知它要求出连接 v_1 到 v_8 的最小生成树。解此题可以得出结果为 18。也可以使用管理运筹学软件，得出如下结果：

此问题的最小生成树如下：

起点	终点	距离
----	----	----
1	3	2
3	4	2
1	2	4
2	5	2
5	7	3

7	8	2
7	6	3

此问题的解为:18

习题 4

解：此题是一个求解最大流的问题，根据题意可知它要求出连接 v_1 到 v_6 的最大流量。解此题可以得出最大流量为 22。使用管理运筹学软件，我们也可以得出结果为：

v_1 从节点 1 到节点 6 的最大流

起点	终点	距离
----	----	----
1	2	6
1	4	6
1	3	10
2	4	0
2	5	6
3	4	5
3	6	5
4	5	5
4	6	6
5	6	11

此问题的解为:22

即从 v_1 到 v_6 的最大流量为：22

习题 5

解：此题是一个求解最小费用最大流的问题，根据题意可知它要求出连接 v_1 到 v_6 的最小费用最大流量。解此问题可以得出最大流为 5，最小费用为 39。使用管理运筹学软件，我们也可以得出结果如下：

从节点 1 到节点 6 的最大流

起点	终点	流量	费用
----	----	----	----
1	2	1	3
1	3	4	1
2	4	2	4
3	2	1	1
3	5	3	3
4	6	2	4

5 6 3 2

此问题的最大流为:5

此问题的最小费用为:39

第 12 章 排序与统筹方法

习题 1

解：各零件的平均停留时间为： $\frac{6p_1+5p_2+4p_3+3p_4+2p_5+p_1}{6}$

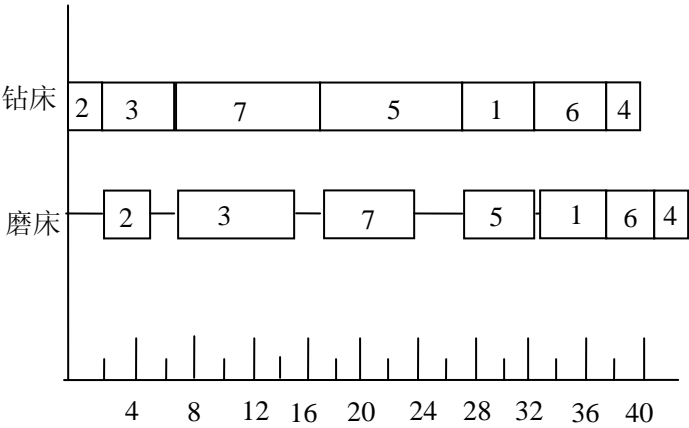
由此公式可知，要让停留的平均时间最短，应该让加工时间越少的零件排在越前面，加工时间越多的零件排在后面。

所以，此题的加工顺序为：3，7，6，4，1，2，5

习题 2

解：此题为两台机器，n 个零件模型，这种模型加工思路为：钻床上加工时间越短的零件越早加工，同时把在磨床上加工时间越短的零件越晚加工。

根据以上思路，则加工顺序为：2，3，7，5，1，6，4。



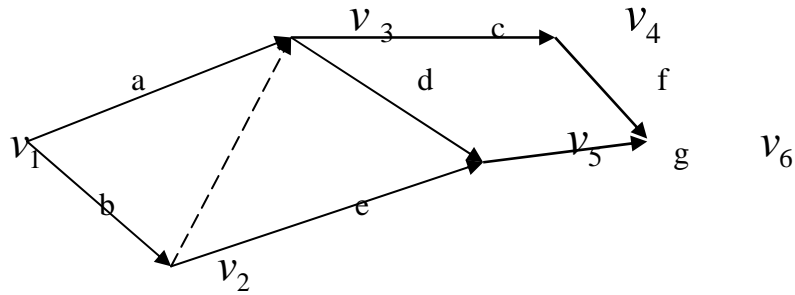
钻床的停工时间是：40.1。磨床的停工时间是：42.6。

习题 3

- 解：a. 工序 j 在绘制上有错，应该加一个虚拟工序来避免 v_3 和 v_4 有两个直接相连的工序。
- b. 工序中出现了缺口，应在 v_6 和 v_7 之间加一个虚拟工序避免缺口。
- c. 工序 v_1 、 v_2 、 v_3 和 v_4 之间存在了闭合回路。

习题 4

解：



习题 5

解：这是一个已知工序时间的关键路径问题，由管理运筹学软件可得出如下结果：

工序安排

工序	最早开始时间	最迟开始时间	最早完成时间	最迟完成时间	时差	是否关键工序
A	0	0	2	2	2	---
B	0	0	4	4	0	YES
C	4	5	9	10	1	---
D	4	4	8	8	0	YES
E	4	5	7	8	1	---
F	9	10	11	12	1	---
G	8	8	12	12	0	YES

本问题关键路径是：B--D--G
本工程完成时间是：12

习题 6

解：这是一个不确定工序时间的关键路径问题，由管理运筹学软件可得出如下结果：

工序	期望时间	方差
---	-----	----
A	2.08	.07
B	4.17	.26
C	4.92	.18
D	4.08	.18
E	3.08	.07
F	2.17	.26
G	3.83	.26

工序安排

工序	最早开始时间	最迟开始时间	最早完成时间	最迟完成时间	时差	是否关键工序
----	--------	--------	--------	--------	----	--------

A	0	0	2.08	2.08	2.08	---
B	0	0	4.17	4.17	0	YES
C	4.17	5	9.08	9.92	.83	---
D	4.17	4.17	8.25	8.25	0	YES
E	4.17	5.17	7.25	8.25	1	---
F	9.08	9.92	11.25	12.08	.83	---
G	8.25	8.25	12.08	12.08	0	YES

本问题关键路径是：B--D--G

本工程完成时间是：12.08

这个正态分布的均值 $E(T)=12.08$

其方差为： $\sigma^2 = \sigma_b^2 + \sigma_d^2 + \sigma_g^2 = 0.70$ 则 $\sigma = 0.84$

当以 98 % 的概率来保证工作如期完成时，即： $\phi(u) = 0.98$ ，所以 $u=2.05$

此时提前开始工作的时间 T 满足： $\frac{T-12.08}{0.84} = 2.05$

所以 $T = 13.8 \approx 14$

习题 7

解：最短的施工工时仍为 $4 + 5 + 6 = 15$

具体的施工措施如下：

工序	最早开始时间	最迟开始时间	最早完成时间	最迟完成时间	时差	是否关键工序
A	0	0	1	1	0	---
B	0	0	3	3	0	---
C	7	7	10	10	0	---
D	0	0	4	4	0	YES
E	1	2	3	4	1	---
F	3	3	7	7	0	---
G	3	6	6	9	3	---
H	4	4	9	9	0	YES
I	10	10	15	15	0	---
J	7	9	13	15	2	---
K	9	9	15	15	0	YES

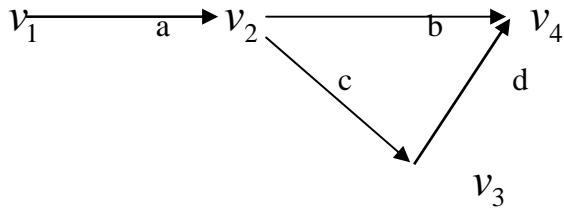
本问题关键路径是：D--H--K

本工程最短完成时间是：15

经过这样调整后，任意一时间所需要的人力数都不超过 15 人。

习题 8

解：此题的网络图如下：



设第 V_i 发生的时间为 x_i ， (V_i, V_j) 间的工序提前完工的时间为 y_{ij} ，

目标函数 $\min f = 4.5(x_4 - x_1) + 4y_{12} + y_{24} + 4y_{23} + 2y_{34}$

s.t.

$$x_2 - x_1 \geq 3 - y_{12}$$

$$x_3 - x_2 \geq 4 - y_{23}$$

$$x_4 - x_2 \geq 7 - y_{24}$$

$$x_4 - x_3 \geq 5 - y_{34}$$

$$x_1 = 0$$

$$y_{12} \leq 2$$

$$y_{23} \leq 2$$

$$y_{24} \leq 4$$

$$y_{34} \leq 3$$

$$x_i \geq 0, y_{ij} \geq 0$$

以上 $i=1, 2, 3, 4$; $j=1, 2, 3, 4$

用管理运筹学软件中的线性规划部分求解，得到如下结果：

$$\min f = 46.5$$

$$x_1=0, x_2=1, x_3=5, x_4=7,$$

$$y_{12} = 2$$

$$y_{23} = 0$$

$$y_{24} = 1$$

$$y_{34} = 3$$

第 13 章 存贮论

1. 运用经济订购批量存贮模型, 可以得到

a. 经济订货批量 $Q^* = \sqrt{\frac{2Dc_3}{c_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 4800 \times 350}{40 \times 25\%}} \approx 579.66$ 件

b. 由于需要提前 5 天订货, 因此仓库中需要留有 5 天的余量, 故再订货点为 $\frac{4800 \times 5}{250} = 96$ 件

c. 订货次数为 $\frac{4800}{579.7} \approx 8.28$ 次, 故两次订货的间隔时间为 $\frac{250}{8.28} \approx 30.19$ 工作日

d. 每年订货与存贮的总费用 $TC = \frac{1}{2}Q^*c_1 + \frac{D}{Q^*}c_3 \approx 5796.55$ 元

(使用管理运筹学软件, 可以得到同样的结果。)

2. 运用经济订购批量存贮模型, 可以得到

a. 经济订货批量 $Q^* = \sqrt{\frac{2Dc_3}{c_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 14400 \times 1800}{1500 \times 2\%}} \approx 1314.53$ 吨

b. 由于需要提前 7 天订货, 因此仓库中需要留有 7 天的余量, 故再订货点为 $\frac{14400 \times 7}{365} \approx 276.16$ 吨

c. 订货次数为 $\frac{14400}{1314.53} \approx 10.95$ 次, 故两次订货的间隔时间为 $\frac{365}{10.95} \approx 33.32$ 天

d. 每年订货与存贮的总费用 $TC = \frac{1}{2}Q^*c_1 + \frac{D}{Q^*}c_3 \approx 39436.02$ 元

(使用管理运筹学软件, 可以得到同样的结果。)

3. 运用经济订购批量存贮模型, 可知

a. 经济订货批量 $Q^* = \sqrt{\frac{2Dc_3}{c_1}} = \sqrt{\frac{2Dc_3}{p \times 22\%}} = 8000$, 其中 p 为产品单价,

变换可得 $\frac{2Dc_3}{p} = 8000^2 \times 22\%$, 当存贮成本率为 27% 时,

$$Q^{*'} = \sqrt{\frac{2Dc_3}{c_1'}} = \sqrt{\frac{2Dc_3}{p \times 27\%}} = \sqrt{\frac{8000^2 \times 22\%}{27\%}} \approx 7221 \text{ 箱}$$

b. 存贮成本率为 i 时, 经济订货批量 $Q^* = \sqrt{\frac{2Dc_3}{c_1}} = \sqrt{\frac{2Dc_3}{p \times i}}$, 其中 p 为产品单价,

变换可得 $\frac{2Dc_3}{p} = Q^{*2} \cdot i$, 当存贮成本率变为 i' 时,

$$Q^{*'} = \sqrt{\frac{2Dc_3}{c_1'}} = \sqrt{\frac{2Dc_3}{p \times i'}} = \sqrt{\frac{Q^{*2} \cdot i}{i'}}$$

4. 运用经济生产批量模型, 可知

a. 最优经济生产批量 $Q^* = \sqrt{\frac{2Dc_3}{(1-\frac{d}{p})c_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 18000 \times 1600}{(1-\frac{18000}{30000}) \times 150 \times 18\%}} \approx 2309.4$ 套

b. 每年生产次数为 $\frac{18000}{2309.4} \approx 7.79$ 次

c. 两次生产间隔时间为 $\frac{250}{7.79} \approx 32.08$ 工作日

d. 每次生产所需时间为 $\frac{250 \times 2309.4}{30000} \approx 19.25$ 工作日

e. 最大存贮水平为 $(1-\frac{d}{p})Q^* \approx 923.76$ 套

f. 生产和存贮的全年总成本为 $TC = \frac{1}{2}(1-\frac{d}{p})Q^*c_1 + \frac{D}{Q^*}c_3 \approx 24941.53$ 元

g. 由于生产准备需要 10 天, 因此仓库中需要留有 10 天的余量, 故再订货点为 $\frac{18000 \times 10}{250} = 720$ 套

(使用管理运筹学软件, 可以得到同样的结果。)

5. 运用经济生产批量模型, 可知

a. 最优经济生产批量 $Q^* = \sqrt{\frac{2Dc_3}{(1-\frac{d}{p})c_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 30000 \times 1000}{(1-\frac{30000}{50000}) \times 130 \times 21\%}} \approx 2344.04$

件

b. 每年生产次数为 $\frac{30000}{2344.04} \approx 12.8$ 次

c. 两次生产间隔时间为 $\frac{250}{12.8} \approx 19.53$ 工作日

- d. 每次生产所需时间为 $\frac{250 \times 2344.04}{50000} \approx 11.72$ 工作日
- e. 最大存贮水平为 $(1 - \frac{d}{p})Q^* \approx 937.62$ 件
- f. 生产和存贮的全年总成本为 $TC = \frac{1}{2}(1 - \frac{d}{p})Q^*c_1 + \frac{D}{Q^*}c_3 \approx 25596.88$ 元
- g. 由于生产准备需要 5 天, 因此仓库中需要留有 5 天的余量, 故再订货点为 $\frac{30000 \times 5}{250} = 600$ 件
(使用管理运筹学软件, 可以得到同样的结果。)

6. 运用允许缺货的经济订购批量模型, 可以得到

- a. 最优订货批量 $Q^* = \sqrt{\frac{2Dc_3(c_1 + c_2)}{c_1c_2}} = \sqrt{\frac{2 \times 4800 \times 350(10 + 25)}{10 \times 25}} \approx 685.86$ 件
- b. 最大缺货量 $S^* = \sqrt{\frac{2Dc_3c_1}{c_2(c_1 + c_2)}} = \sqrt{\frac{2 \times 4800 \times 350 \times 10}{25 \times (10 + 25)}} \approx 195.96$ 件, 另外由于需要提前 5 天订货, 因此仓库中需要留有 5 天的余量, 即在习题 1 中所求出的 96 件, 故再订货点为 $-195.96 + 96 = -99.96$ 件
- c. 订货次数为 $\frac{4800}{685.86} \approx 7.0$ 次, 故两次订货的间隔时间为 $\frac{250}{7} \approx 35.7$ 工作日
- d. 每年订货、存贮与缺货的总费用
 $TC = \frac{(Q^* - S^*)^2}{2Q^*}c_1 + \frac{D}{Q^*}c_3 + \frac{S^{*2}}{2Q^*}c_2 \approx 4898.98$ 元
- e. 显然, 在允许缺货的情况下, 总花费最小。因为在允许缺货时, 企业可以利用这个宽松条件, 支付一些缺货费, 少付一些存贮费和订货费, 从而可以在总费用上有所节省。
(使用管理运筹学软件, 可以得到同样的结果。)

7. 运用允许缺货的经济生产批量模型, 可知

- a. 最优经济生产批量 $Q^* = \sqrt{\frac{2Dc_3(c_1 + c_2)}{(1 - \frac{d}{p})c_1c_2}} = \sqrt{\frac{2 \times 30000 \times 1000(27.3 + 30)}{(1 - \frac{30000}{50000}) \times 27.3 \times 30}} \approx 3239.52$ 件
- b. 最大缺货量 $S^* = \sqrt{\frac{2Dc_3c_1(1 - \frac{d}{p})}{c_2(c_1 + c_2)}} = \sqrt{\frac{2 \times 30000 \times 27.3 \times 1000 \times (1 - \frac{30000}{50000})}{30 \times (27.3 + 30)}} \approx 617.37$ 件, 另外由于需要 5 天来准备生产, 因此要留有 5 天的余量, 即

在习题 5 中所求出的 600 件，故再生产点为 $-617.37 + 600 = -17.37$ 件

c. 生产次数为 $\frac{30000}{3239.52} \approx 9.26$ 次，故两次订货的间隔时间为 $\frac{250}{9.26} \approx 27$ 工作日

d. 每年生产准备、存贮与缺货的总费用 $TC = \sqrt{\frac{2Dc_1c_2c_3(1-\frac{d}{p})}{(c_1+c_2)}} \approx 18521.25$

元

e. 显然，在允许缺货的情况下，总花费最小。因为在允许缺货时，企业可以利用这个宽松条件，支付一些缺货费，少付一些存贮费和生产准备费，从而可以在总费用上有所节省。

(使用管理运筹学软件，可以得到同样的结果。)

8. 运用经济订货批量折扣模型，

已知根据定购数量不同，有四种不同的价格。我们可以求得这四种情况的最优订货量如下：

当订货量 Q 为 0—99 双时，有

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2Dc_3}{c_1'}} = \sqrt{\frac{2 \times 2000 \times 300}{360 \times 20\%}} \approx 129 \text{ 个};$$

当订货量 Q 为 100—199 双时，有

$$Q_2^* = \sqrt{\frac{2Dc_3}{c_1''}} = \sqrt{\frac{2 \times 2000 \times 300}{320 \times 20\%}} \approx 137 \text{ 个};$$

当订货量 Q 为 200—299 双时，有

$$Q_3^* = \sqrt{\frac{2Dc_3}{c_1'''}} = \sqrt{\frac{2 \times 2000 \times 300}{300 \times 20\%}} \approx 141 \text{ 个};$$

当订货量 Q 大于 300 双时，有

$$Q_4^* = \sqrt{\frac{2Dc_3}{c_1''''}} = \sqrt{\frac{2 \times 2000 \times 300}{280 \times 20\%}} \approx 146 \text{ 个}。$$

可以注意到，在第一种情况中，我们用订货量在 0—99 时的价格 360 元/双，计算出的最优订货批量 Q_1^* 却大于 99 个，为 129 个。为了得到 360 元/双的价格，

又使得实际订货批量最接近计算所得的最优订货批量 Q_1^* ，我们调整其最优订货批量 Q_1^* 的值，得

$$Q_1^* = 99 \text{ 双}。$$

同样我们调整第三种和第四种情况得最优订货批量 Q_3^* 和 Q_4^* 的值，得

$$Q_3^* = 200 \text{ 双}, \quad Q_4^* = 300 \text{ 双}。$$

可以求得当 $Q_1^* = 100$ 双, $Q_2^* = 137$ 双, $Q_3^* = 200$ 双, $Q_4^* = 300$ 双时的每年的总费用如下表所示:

折扣等级	旅游鞋单价	最优订货批量 Q^*	每年费用			
			存贮费 $\frac{1}{2}Q^*c_1$	订货费 $\frac{D}{Q^*}c_3$	购货费 DC	总费用
1	360	99	3564	6060.606	720000	729624.6
2	320	137	4384	4379.562	640000	648763.6
3	300	200	6000	3000	600000	609000
4	280	300	8400	2000	560000	570400

由上表可知, 最小成本的订货批量为 $Q^* = 300$ 双,

此时花费的总成本 $TC = \frac{1}{2}Q^*c_1 + \frac{D}{Q^*}c_3 + D \cdot c = 570400$ 元,

若每次的订货量为 500 双, 则此时的总成本 $TC = \frac{1}{2}Qc_1 + \frac{D}{Q}c_3 + D \cdot c = 575200$ 元,

这时要比采取最小成本订货时多花费 4800 元。

(使用管理运筹学软件, 可以得到同样的结果。)

9.

a. 在不允许缺货时, 运用经济订货批量模型, 可知此时的最小成本为

$$TC = \frac{1}{2}Q^*c_1 + \frac{D}{Q^*}c_3 \approx 848.53 \text{ 元}$$

在允许缺货时, 运用允许缺货的经济订货批量模型, 可知此时的最小成本

$$TC = \frac{(Q^* - S^*)^2}{2Q^*}c_1 + \frac{D}{Q^*}c_3 + \frac{S^{*2}}{2Q^*}c_2 \approx 791.26 \text{ 元}$$

所以, 在允许缺货时, 可以节约费用 57.27 元

(使用管理运筹学软件, 可以得到同样的结果。)

b. 此问缺少条件: 对缺货概率做出了不超过 15% 的要求, 但对订货提前周期 (三周) 内的需求状况却没有给出描述。此处, 在此问中添加条件: 在三个星期里, 对该产品的需求服从均值为 46, 均方差为 10 的正态分布。现解此问如下:

首先按照经济订货批量模型来求出最优订货批量 Q^* , 已知每年的平均需求量 \bar{D}

$$= 800 \text{ 件}, c_1 = 3 \text{ 元/件年}, c_3 = 150 \text{ 元}, \text{ 得 } Q^* = \sqrt{\frac{2\bar{D}c_3}{c_1}} \approx 282.84 \text{ 件}.$$

由于每年的平均需求量为 800 件，可知每年平均订货 $\frac{800}{282.84} \approx 2.83$ 次。

根据服务水平的要求， $P(\text{一个月的需求量} \leq r) = 1 - \alpha = 1 - 0.15 = 0.85$ ，其中 r 为再订货点。

由于需求量服从正态分布 $N(46, 10)$ ，上式即为 $\Phi(\frac{r-\mu}{\sigma}) = 0.85$ 。

查标准正态分布表，即得 $\frac{r-\mu}{\sigma} = 1.036$ ，故 $r = 1.036\sigma + \mu = 1.036 \times 10 + 46 \approx 56.36$ 件。

进而可以求得此时的总成本（存储成本和订货成本）为 879.64 元，大于不允许缺货时的总成本 848.53 元。

故公司不应采取允许缺货的政策。

10. 运用需求为随机的单一周期的存贮模型，

已知 $k=15$ ， $h=22$ ，有 $\frac{k}{k+h} = \frac{15}{15+22} \approx 0.41$ ，

$Q=11$ 时，有 $\sum_{d=0}^{10} p(d) = p(8) + p(9) + p(10) = 0.33$ ，

$$\sum_{d=0}^{11} p(d) = p(8) + p(9) + p(10) + p(11) = 0.53。$$

此时满足 $\sum_{d=0}^{10} p(d) < \frac{k}{k+h} \leq \sum_{d=0}^{11} p(d)$ 。

故应定购 11000 瓶，此时赚钱的期望值最大。

11. a. 运用需求为随机的单一周期的存贮模型，

已知 $k=1400$ ， $h=1300$ ，有 $\frac{k}{k+h} = \frac{1400}{1400+1300} \approx 0.52$ ，

故有 $P(d \leq Q^*) = \frac{k}{k+h} = 0.52$ ，

由于需求量服从正态分布 $N(250, 80)$ ，上式即为 $\Phi(\frac{Q^*-\mu}{\sigma}) = 0.52$ 。

查标准正态分布表，即得 $\frac{Q^*-\mu}{\sigma} = 0.05$ ，

故 $Q^* = 0.05\sigma + \mu = 0.05 \times 80 + 250 = 254$ 台

b. 商店卖出所有空调的概率是 $P(d > Q^*) = 1 - 0.52 = 0.48$ 。

（使用管理运筹学软件，可以得到同样的结果。）

12. a. 运用需求为随机的单一周期的存贮模型，

已知 $k=1.7$, $h=1.8$, 有 $\frac{k}{k+h} = \frac{1.7}{1.7+1.8} \approx 0.49$,

故有 $P(d \leq Q^*) = \frac{k}{k+h} = 0.49$,

由于需求量服从区间 $(600, 1000)$ 上的均匀分布, 即可得 $\frac{Q^*-600}{1000-600} = 0.49$,

故 $Q^* = 796$ 只

b. 商场缺货的概率是 $P(d > Q^*) = 1 - 0.49 = 0.51$ 。

(使用管理运筹学软件, 可以得到同样的结果。)

13. 运用需求为随机变量的定货批量、再订货点模型。

首先按照经济订货批量模型来求出最优订货批量 Q^* ,

已知每年的平均需求量 $\bar{D} = 450 \times 12 = 5400$ 立方米, $c_1 = 175$ 元/立方米年, $c_3 = 1800$ 元,

得 $Q^* = \sqrt{\frac{2\bar{D}c_3}{c_1}} \approx 333.3$ 立方米。

由于每年的平均需求量为 5400 立方米, 可知每年平均订货 $\frac{5400}{333.3} \approx 16.2$ 次。

根据服务水平的要求, $P(\text{一个月的需求量} \leq r) = 1 - \alpha = 1 - 0.05 = 0.95$, 其中 r 为再订货点。

由于需求量服从正态分布 $N(450, 70)$, 上式即为 $\Phi(\frac{r-\mu}{\sigma}) = 0.95$ 。

查标准正态分布表, 即得 $\frac{r-\mu}{\sigma} = 1.645$,

故 $r = 1.645\sigma + \mu = 1.645 \times 70 + 450 \approx 565$ 立方米。

综上所述, 公司应采取的策略是当仓库里剩下 565 立方米木材时, 就应订货, 每次的订货量为 333.3 立方米。

(使用管理运筹学软件, 可以得到同样的结果。)

14. 运用需求为随机变量的定期检查存贮量模型。

设该种笔记本的存贮补充水平为 M , 由统计学的知识可知:

$P(\text{笔记本的需求量 } d \leq M) = 1 - \alpha = 1 - 0.1 = 0.9$,

由于在 17 天内的笔记本需求量服从正态分布 $N(280, 40)$, 上式即为 $\Phi(\frac{M-\mu}{\sigma}) = 0.9$ 。

查标准正态分布表, 即得 $\frac{M-\mu}{\sigma} = 1.28$,

故 $M = 1.28\sigma + \mu = 1.28 \times 40 + 280 \approx 331.2$ 立方米。

第 14 章 排队论

- 1、为 M/M/1 系统: $\lambda = 50$ 人/小时, $\mu = 80$ 人/小时
 - A、顾客来借书不必等待的概率: $P_0 = 0.375$
 - B、柜台前的平均顾客数: $L_s = 1.6667$
 - C、顾客在柜台前平均逗留时间: $W_s = 0.333$ 分钟
 - D、顾客在柜台前平均等候时间: $W_q = 0.208$ 分钟
- 2、为 M/M/1 系统: $\lambda = 2$ 人/小时, $\mu_1 = 3$ 人/小时, $\mu_2 = 4$ 人/小时
 - A、 $P_0 = 0.3333$ 、 $L_q = 1.3333$ 、 $L_s = 2$ 、 $W_q = 0.667$ 小时、 $W_s = 1$ 小时
 - B、 $P_0 = 0.5$ 、 $L_q = 0.5$ 、 $L_s = 1$ 、 $W_q = 0.25$ 小时、 $W_s = 0.5$ 小时
 - C、因为 $Z_1 = 74$ 元/小时、 $Z_2 = 50$ 元/小时, 故应选择理发师乙。
- 3、A、为 M/M/1 系统: $\lambda = 30$ 人/小时, $\mu = 40$ 人/小时
 $P_0 = 0.25$ 、 $L_q = 2.25$ 、 $L_s = 3$ 、 $W_q = 0.075$ 小时、 $W_s = 0.1$ 小时
 - B、1) M/M/1 系统: $\lambda = 30$ 人/小时, $\mu = 60$ 人/小时
 $P_0 = 0.5$ 、 $L_q = 0.5$ 、 $L_s = 1$ 、 $W_q = 0.0167$ 小时、 $W_s = 0.0333$ 小时
 - 2) M/M/2 系统: $\lambda = 30$ 人/小时, $\mu = 40$ 人/小时
 $P_0 = 0.4545$ 、 $L_q = 0.1227$ 、 $L_s = 0.8727$ 、 $W_q = 0.0041$ 小时、 $W_s = 0.0291$ 小时系统二明显优于系统一。
- 4、为 M/G/1 系统: $\lambda = 5$ 辆/小时, $\mu = 12$ 辆/小时
 $P_0 = 0.5833$ 、 $L_q = 0.1726$ 、 $L_s = 0.5893$ 、 $W_q = 0.0345$ 小时、 $W_s = 0.1179$ 小时
- 5、为 M/M/1 系统: $\lambda = 10$ 人/小时, $\mu = 20$ 人/小时
 $L_q = 3$ 分钟
因为 $L_q = 3$ 分钟 < 4 分钟, 故不应该去另一电话亭。
- 6、为 M/D/1 系统: $\lambda = 5$ 辆/小时, $\mu = 12$ 辆/小时
 $P_0 = 0.5833$ 、 $L_q = 0.15$ 、 $L_s = 0.57$ 、 $W_q = 0.03$ 小时、 $W_s = 0.11$ 小时、 $P_w = 0.4167$
- 7、某单位电话交换台有一部 300 门内线的总机, 已知上班时, 有 30% 的内线电话平均每 30 分钟要一次外线电话, 70% 的分机每一小时要一次外线, 又知从外单位打来的电话呼唤率平均 30 秒一次, 设通话平均时间为 2 分钟, 以上均服从负指数分布。如果要求外线电话接通率为 95% 以上, 问应设多少条外线?

解: 为 M/M/n 系统: $\lambda = 510$ 次/小时, $\mu = 30$ 次/小时; 故至少需要 18 部外线才能满足系统运行。要求外线电话接通率为 95% 以上, 即 $P_w < 0.05$:

当 $n = 18$ 时: $P_w = 0.7437$

当 $n = 19$ 时: $P_w = 0.5413$

当 $n = 20$ 时: $P_w = 0.3851$

当 $n=21$ 时: $P_w=0.2674$

当 $n=22$ 时: $P_w=0.181$

当 $n=23$ 时: $P_w=0.1193$

当 $n=24$ 时: $P_w=0.0766$

当 $n=25$ 时: $P_w=0.0478$

故系统应设 25 条外线才能满足外线电话接通率为 95% 以上

8、为 M/M/n 系统: $\lambda=10$ 台/小时, $\mu=4$ 台/小时

至少需要 3 名修理工才能保证及时维修机器故障。

A、假设雇佣 3 名修理工, 则系统为 M/M/3 模型:

$L_s=6.0112$ 、 $W_q=0.3511$ 小时、 $W_s=0.6011$ 小时、 $Z=630.6742$ 元

假设雇佣 4 名修理工, 则系统为 M/M/4 模型:

$L_s=3.0331$ 、 $W_q=0.0533$ 小时、 $W_s=0.3033$ 小时、 $Z=541.9857$ 元

假设雇佣 5 名修理工, 则系统为 M/M/5 模型:

$L_s=2.6304$ 、 $W_q=0.013$ 小时、 $W_s=0.263$ 小时、 $Z=476.73$ 元、 $Z=607.824$

元

故雇佣 4 名修理工时总费用最小, 为 541.9857 元

B、等待修理时间不超过 0.5 小时, 即要求 $W_q < 0.5$

当雇佣 4 名修理工时, $W_q=0.0533$ 小时 < 0.5 小时

9、(1) 为 M/M/1/2 系统: $\lambda=3$ 人/小时, $\mu=5$ 人/小时

$P_0=0.5102$; $L_q=0.1837$; $L_s=0.6735$; $W_q=0.075$; $W_s=0.275$

(2) 为 M/M/1/3 系统: $\lambda=3$ 人/小时, $\mu=5$ 人/小时

$P_0=0.4596$; $L_q=0.364$; $L_s=0.9044$; $W_q=0.1347$; $W_s=0.3347$

第 15 章 对策论

1、解：因为 $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 0$ ，所以最优纯策略为 (α_2, β_2) ，对策值为 0。

2、解：(a)、

A、B 两家公司各有 8 个策略，分别为： α_1 、 β_1 表示不做广告； α_2 、 β_2 表示做电视广告； α_3 、 β_3 表示做电视、报纸广告； α_4 、 β_4 表示做电视、广播广告； α_5 、 β_5 表示做电视、报纸、广播广告； α_6 、 β_6 表示做报纸广告； α_7 、 β_7 表示做报纸、广播广告； α_8 、 β_8 表示做广播广告。

局中人 A 的损益矩阵为：

	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8
α_1	50%	25%	10%	15%	0	35%	25%	40%
α_2	75%	50%	35%	40%	25%	60%	50%	65%
α_3	90%	65%	50%	55%	40%	75%	65%	80%
α_4	85%	60%	45%	50%	35%	70%	60%	75%
α_5	100%	75%	60%	65%	50%	85%	75%	90%
α_6	65%	40%	25%	30%	15%	50%	40%	55%
α_7	75%	50%	35%	40%	25%	60%	50%	65%
α_8	60%	35%	20%	25%	10%	45%	45%	50%

(b)、 $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 50\%$ ，所以这个对策有鞍点。A 和 B 的最优策略为 (α_5, β_5) ，对策值为 50%。

3、解：求超市 A 的最优策略的线性规划模型为：

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 3x_1 + 4x_3 - 5x_4 \geq 1 \\ 6x_2 - 2x_3 - x_4 \geq 1 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 8x_4 \geq 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

用管理运筹学软件求得： $x_1 = 0.002, x_2 = 0.275, x_3 = 0.304, x_4 = 0.044$

由 $\frac{1}{v} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ 得 $v = 1.6$

由 $x'_i = v \cdot x_i$ 可得: $x'_1 = 0.0032, x'_2 = 0.44, x'_3 = 0.4864, x'_4 = 0.0704$

所以超市 A 的最优策略是以 0.0032 的概率采取策略 α_1 , 以 0.44 的概率采取策略 α_2 , 以 0.4864 的概率采取策略 α_3 , 以 0.0704 的概率采取策略 α_4 , 平均市场份额增加的百分数为 1.6。
求超市 B 的最优策略的线性规划模型为:

$$\begin{aligned} \max \quad & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 3y_1 + 4y_3 - 2y_4 \leq 1 \\ 6y_2 - y_3 - 3y_4 \leq 1 \\ 4y_1 - 2y_2 + 3y_3 + 5y_4 \leq 1 \\ -5y_1 - y_2 + 8y_3 + 7y_4 \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

用管理运筹学软件求得: $y_1 = 0.142, y_2 = 0.233, y_3 = 0.18, y_4 = 0.072$

由 $\frac{1}{v} = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$ 得 $v = 1.6$

由 $y'_i = v \cdot y_i$ 可得: $y'_1 = 0.2272, y'_2 = 0.3728, y'_3 = 0.2880, y'_4 = 0.1152$

所以超市 B 的最优策略是以 0.2272 的概率采取策略 β_1 , 以 0.3728 的概率采取策略 β_2 , 以 0.2880 的概率采取策略 β_3 , 以 0.1152 的概率采取策略 β_4 , 平均市场份额增加的百分数为 1.6。
管理运筹学 2.0 可从损益矩阵直接求得上述问题答案见下图, 结果差异是由于计算误差所致。

对策最优解如下

局中人甲: $X^* = (0.443, 0.489, 0.069)T$

局中人乙: $Y^* = (0.227, 0.371, 0.288, 0.114)T$

对策值为: 1.576

4、解: 甲、乙两队让自己的运动健将参加三项比赛中的两项的策略各有 $c_3^2 = 3$ 种, 分别为:

α_1, β_1 ——参加 100 米蝶泳和 100 米仰泳;

α_2, β_2 ——参加 100 米蝶泳和 100 米蛙泳;

α_3, β_3 ——参加 100 米仰泳和 100 米蛙泳;

则甲队的损益矩阵为:

$$\begin{array}{c}
 \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \\
 \alpha_1 \quad \left[\begin{array}{ccc} 13 & 12 & 12 \end{array} \right] \\
 \alpha_2 \quad \left[\begin{array}{ccc} 12 & 12 & 13 \end{array} \right] \\
 \alpha_3 \quad \left[\begin{array}{ccc} 12 & 13 & 14 \end{array} \right]
 \end{array}$$

采用优超原则简化后得矩阵：

$$\begin{array}{cc}
 \beta_1 & \beta_2 \\
 \alpha_1 & 13 \quad 12 \\
 \alpha_2 & 12 \quad 14
 \end{array}$$

由线性规划法得相互对偶的两个线性规划为：

$$\begin{array}{ll}
 \min & x_1 + x_2 \\
 \begin{cases} 13x_1 + 12x_2 \geq 1 \\ 12x_1 + 14x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} & \max \quad y_1 + y_2 \\
 & \begin{cases} 13y_1 + 12y_2 \leq 1 \\ 12y_1 + 14y_2 \leq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}
 \end{array}$$

由管理运筹学软件得：

$$x_1 = 0.053; x_2 = 0.026 \qquad y_1 = 0.053; y_2 = 0.026$$

$$\text{由 } \frac{1}{v} = x_1 + x_2 \text{ 得 } v = 12.6582$$

$$\text{由 } x'_i = v \cdot x_i \text{ 可得: } x'_1 = 0.6709, x'_2 = 0.3291$$

$$\text{由 } \frac{1}{v} = y_1 + y_2 \text{ 得 } v = 12.6582$$

$$\text{由 } y'_i = v \cdot y_i \text{ 可得: } y'_1 = 0.6709, y'_2 = 0.3291$$

所以甲队教练应以 0.6709 的概率出策略 α_1 ，以 0.3291 的概率出策略 α_3 ，平均得

分为 12.6582；乙队教练应以 0.6709 的概率出策略 β_1 ，以 0.3291 的概率出策略 β_3 ，

平均得分为 $27 - 12.6582 = 14.3418$ 。

管理运筹学 2.0 可从损益矩阵直接求得上述问题答案，结果如下图。

对策最优解如下

局中人甲： $X^* = (.671, .329)T$

局中人乙： $Y^* = (.671, .329)T$

对策值为： 12.658

5、解：设齐王和田忌赛马的策略分别有：

α_1, β_1 ——以上中下的次序出马；

α_2, β_2 ——以上下中的次序出马；

α_3, β_3 ——以中上下的次序出马；

α_4, β_4 ——以中下上的次序出马；

α_5, β_5 ——以下上中的次序出马；

α_6, β_6 ——以下中上的次序出马。

齐王的损益矩阵为：

	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
α_1	6	4	2	4	0	4
α_2	2	6	2	4	2	0
α_3	0	-2	6	4	4	4
α_4	-4	0	2	6	2	2
α_5	0	0	0	-2	6	4
α_6	0	0	-4	0	2	6

建立相互对偶的线性规划模型并用管理运筹学软件求解得：

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ \text{齐王: } \quad & \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 4x_4 \geq 1 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_6 \geq 1 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 - 2x_5 \geq 1 \\ 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 6x_5 + 2x_6 \geq 1 \\ 4x_1 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 6x_6 \geq 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 6 \end{cases} \end{aligned}$$

由管理运筹学软件求解得：

$$x_1 = 0.13, x_2 = 0.109, x_3 = 0.087, x_4 = 0, x_5 = 0.072, x_6 = 0$$

$$\text{由 } \frac{1}{v} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \text{ 得 } v = 2.5126$$

$$\text{由 } x'_i = v \cdot x_i \text{ 可得: } x'_1 = 0.3266, x'_2 = 0.2739, x'_3 = 0.2186, x'_4 = 0, x'_5 = 0.1809, x'_6 = 0$$

所以齐王的最优对策是以 0.3266 的概率出 α_1 ，以 0.2739 的概率出 α_2 ，以 0.2186

的概率出 α_3 ，以 0.1809 的概率出 α_5 。

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 \\ \text{田忌:} \quad & \begin{cases} 6y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 4y_6 \leq 1 \\ 2y_1 + 6y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 \leq 1 \\ -2y_2 + 6y_3 + 4y_4 + 4y_5 + 4y_6 \leq 1 \\ -4y_1 + 2y_3 + 6y_4 + 2y_5 + 2y_6 \leq 1 \\ -2y_4 + 6y_5 + 4y_6 \leq 1 \\ -4y_3 + 2y_5 + 6y_6 \leq 1 \\ y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 6 \end{cases} \end{aligned}$$

由管理运筹学软件求解得：

$$y_1 = 0.109, y_2 = 0.051, y_3 = 0.072, y_4 = 0, y_5 = 0.167, y_6 = 0$$

由 $\frac{1}{v} = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6$ 得 $v = 2.5063$ （与上面 2.5126 不同，是由计算误差导致）

$$\text{由 } y'_i = v \cdot y_i \text{ 可得: } y'_1 = 0.2732, y'_2 = 0.1278, y'_3 = 0.1805, y'_4 = 0, y'_5 = 0.4185, y'_6 = 0$$

所以田忌的最优对策是以 0.2732 的概率出 β_1 ，以 0.1278 的概率出 β_2 ，以 0.1805 的概率出 β_3 ，以 0.4185 的概率出 β_5 。（管理运筹学 2.0 可从损益矩阵直接求得上述问题答案）

第 16 章 决策分析

1. 公司收益表为：

方 案 \ 自然状态				
	N ₁	N ₂	N ₃	N ₄
S ₁	15	8	0	-6
S ₂	4	14	8	3
S ₃	1	4	10	12

a. S₂ 方案最优。

b. S₁ 方案最优。

c. S₂ 方案最优。

d. S₂ 方案最优。

e. 后悔矩阵为：

公 司 收 益 表 方 案 \ 自然状态	N ₁	N ₂	N ₃	N ₄	$\max_{1 \leq j \leq 4} \alpha'_{ij}$
S ₁	0	6	10	18	18
S ₂	11	0	2	9	
S ₃	11(min)				
	14	10	0	0	14

故 S₂ 方案最优。

2. 面包进货问题的收益矩阵为；

$N_1=S_5=360, \quad N_2=S_4=300, \quad N_3=S_3=240, \quad N_4=S_2=180, \quad N_5=S_1=120$

公司 收益 订 货 量	需求 量	N ₁	N ₂	N ₃	N ₄	N ₅
S ₁		84	84	84	84	84
S ₂		126	126	126	126	60
S ₃		168	168	168	102	36
S ₄		210	210	144	78	12
S ₅		252	186	120	54	-12

b.用最大最小准则得最优方案为：S₁，

用最大最大准则得最优方案为：S₅，

其后悔矩阵为：

公司 收益 订 货 量	需求 量	N ₁	N ₂	N ₃	N ₄	N ₅	$\max_{1 \leq j \leq 5} \alpha'_{ij}$
S ₁		168	126	84	42	84	168
S ₂		126	84	42	0	24	126
S ₃		84	42	0	24	48	84
S ₄		42	0	24	48	72	72(min)
S ₅		0	24	48	72	96	96

故用后悔值法得最优方案为：S₄，

用乐观系数法得最优方案为：S₅，

3. 第2题中需求量的分布概率已知，

$E(S_1)=84$ ， $E(S_2)=119.4$ ， $E(S_3)=141.6$ ， $E(S_4)=144$ ， $E(S_5)=126.6$

故用期望值法得最优方案为：S₄

4. 解： I₁表示不合格品的概率为0.05，I₂表示不合格品的概率为0.25，由题可得：

$P(I_1)=0.8$ ， $P(I_2)=0.2$ ，

a. 用S₁表示检验，S₂表示不检验，则该问题的收益矩阵为：

公 司 方 案	自然 状态 费用	$I_1 (P(I_1) = 0.8)$	$I_2 (P(I_2) = 0.2)$
S_1		1500	1500
S_2		750	3750

b. $E(S_1) = 1500 \times 0.8 + 1500 \times 0.2 = 1500$ 元。

$E(S_2) = 750 \times 0.8 + 3750 \times 0.2 = 1350$ 元。

故 S_2 为最优检验方案。

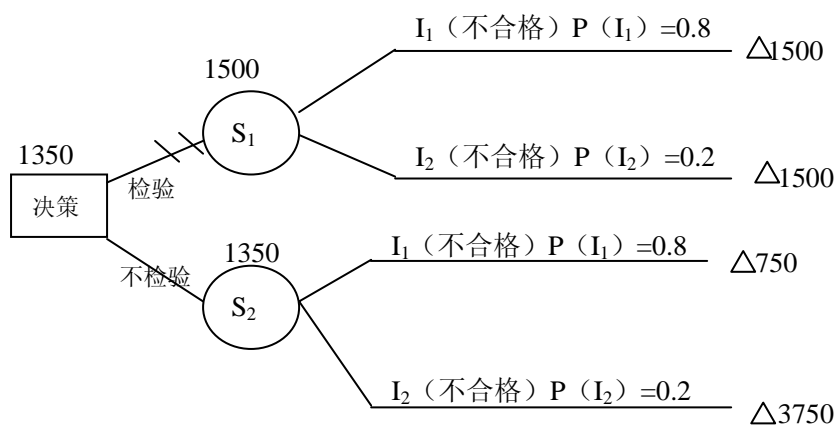
c. $E(S_1) = 1500P$

$E(S_2) = 750P + 3750(1-P) = 3750 - 3000P$

当 $E(S_1) = E(S_2)$ 时, $P = 0.833$

可见, 当 $P > 0.833$ 时, S_1 为最优方案, 当 $P < 0.833$ 时, S_2 为最优方案。

5. 解: 由前面的数据作出决策树图如下:



由图说明选定了方案 S_2 , 即不检验。

6. 解: 规定 S_1 表示投资开发事业, S_2 表示存放银行。

a. $E(S_1) = 50000 \times 0.2 \times 0.96 - 50000 \times 0.04 = 7600$ 元

$E(S_2) = 50000 \times 0.06 \times 1 = 3000$ 元

比较可知道 S_1 更优, 即选投资开发事业。即当我们不掌握全情报用期望值准则来决策时, S_1 是最优行动方案。故 $EV_{woPI} = 7600$ 元

$$b. EV_{wPI}=50000 \times 0.2 \times 0.96 + 50000 \times 0.06 \times 0.04 = 9720 \text{ 元}$$

$$EVPI = EV_{wPI} - EV_{woPI} = 9720 - 7600 = 2120 \text{ 元}$$

c. 用 I_1 表示咨询公司结论为开发, I_2 表示咨询公司结论为不开发, N_1 表示开发, N_2 表示不开发。为了求解题中的问题, 先根据题意求出其中的 $P(I_1)$ 、 $P(I_2)$ 、 $P(N_1/I_1)$ 、 $P(N_2/I_1)$ 、 $P(N_1/I_2)$ 、 $P(N_2/I_2)$ 的值

$$P(I_1/N_1) = 0.9, \quad P(I_2/N_1) = 0.1, \quad P(I_1/N_2) = 0.4,$$

$$P(I_2/N_2) = 0.6, \quad P(N_1) = 0.96, \quad P(N_2) = 0.04。$$

$$P(I_1) = P(N_1)P(I_1/N_1) + P(N_2)P(I_1/N_2) = 0.96 \times 0.9 + 0.04 \times 0.4 = 0.88,$$

$$P(I_2) = P(N_2)P(I_2/N_2) + P(N_1)P(I_2/N_1) = 0.04 \times 0.6 + 0.96 \times 0.1 = 0.12,$$

由贝叶斯公式, 我们可求得:

$$P(N_1/I_1) = \frac{P(N_1)P(I_1/N_1)}{P(I_1)} = \frac{0.96 \times 0.9}{0.88} = 0.9818,$$

$$P(N_2/I_1) = \frac{P(N_2)P(I_1/N_2)}{P(I_1)} = \frac{0.04 \times 0.4}{0.88} = 0.0182,$$

$$P(N_1/I_2) = \frac{P(N_1)P(I_2/N_1)}{P(I_2)} = \frac{0.96 \times 0.1}{0.12} = 0.8,$$

$$P(N_2/I_2) = \frac{P(N_2)P(I_2/N_2)}{P(I_2)} = \frac{0.04 \times 0.6}{0.12} = 0.2。$$

当调查结论为开发时:

$$E(S_1) = 0.9818 \times 50000 \times 0.2 - 0.0182 \times 50000 = 8908 \text{ 元}$$

$$E(S_2) = 50000 \times 0.06 = 3000 \text{ 元}$$

即此题应选择方案 S_1 。

当调查结论为不开发时:

$$E(S_1) = 0.8 \times 50000 \times 0.2 - 0.2 \times 50000 = -2000 \text{ 元}$$

$$E(S_2) = 50000 \times 0.06 = 3000 \text{ 元}$$

即此进应选择方案 S_1 。

因为咨询公司调查结论为开发的概率为 $P(I_1) = 0.88$, 不开发的概率 $P(I_2) = 0.12$, 故

$$E(\text{调}) = 0.88 \times 8908 + 0.12 \times 3000 = 8199.04 \text{ 元}$$

这就是当公司委托咨询公司进行市场调查即具有样本情报时, 公司的期望

收益可达到 8199.04 元，比不进行市场调查的公司收益 7600 元要高。故其

$$EVS I=8199.04-7600=599.04 \text{ 元}$$

$$\text{样本情报效率}=\frac{EVS I}{EVPI} \times 100\%=\frac{599.04}{2120} \times 100\%=28.27\%$$

因为 $599.04 < 800$ ，所以该咨询服务费用 800 元是不值得的。

可以直接输入管理运筹学软件直接得出结果。

7. 解：a.先求各效用值

$$1) U(80)=PU(100)+(1-P)U(-10)=0.9(10)+0.1(0)=9,$$

$$2) U(60)=PU(100)+(1-P)U(-10)=0.8(10)+0.1(0)=8,$$

$$3) U(10)=PU(100)+(1-P)U(-10)=0.25(10)+0.75(0)=2.5,$$

故其效用矩阵为：

<div> <div>概</div> <div>方</div> <div>案</div> </div> <div> <div>自然</div> <div>状态</div> <div>率</div> </div>	N ₁	N ₂	N ₃
	P(N ₁)=0.2	P(N ₂)=0.5	P(N ₃)=0.3
S ₁ (现在扩大)	10	9	0
S ₂ (明年扩大)	9	8	2.5

$$b. \quad E(S_1)=0.2 \times 100+0.5 \times 80+0.3 \times (-10)=57,$$

$$E(S_2)=80 \times 0.2+60 \times 0.5+10 \times 0.3=49,$$

故按实际盈利期望值法确定的最优方案为 S₁。

$$E[U(S_1)]=0.2 \times 10+0.5 \times 9+0.3 \times 0=6.5,$$

$$E[U(S_2)]=0.2 \times 9+0.5 \times 8+0.3 \times 2.5=6.55,$$

因为 $E[U(S_1)] > E[U(S_2)]$ ，所以 S₂ 为最优方案。

第 17 章 预测

1. a. $n=3$ 时, 第 13 个月的销售量为 $\frac{85+100+105}{3} \approx 96.7$;

$n=4$ 时, 第 13 个月的销售量为 $\frac{100+85+100+105}{4} \approx 97.5$

b. 结果如下表所示:

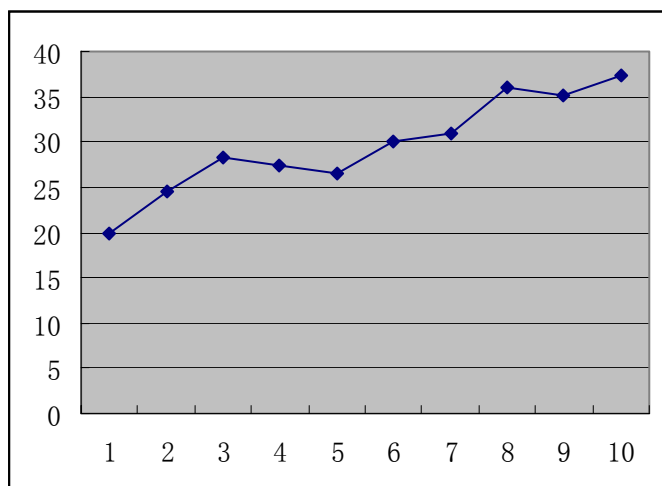
月份	销售量	$\alpha = 0.3$ 时的预测值	$\alpha = 0.5$ 时的预测值
1	105		
2	135	105	105
3	115	114	120
4	100	114.3	117.5
5	95	110.01	108.75
6	120	105.507	101.875
7	140	109.8549	110.9375
8	135	118.8984	125.4688
9	100	123.7289	130.2344
10	85	116.6102	115.1172
11	100	107.1272	100.0586
12	105	104.989	100.0293
13		104.9923	102.5146

2. a. $n=3$, 比例为 1: 2: 4 时, 第 11 周的股票价格为 $\frac{1}{7} \times 9.7 + \frac{2}{7} \times 9.6 + \frac{4}{7} \times 9.4 = 9.5$;

b. $n=3$, 比例为 1: 3: 5 时, 第 11 周的股票价格为 $\frac{1}{9} \times 9.7 + \frac{3}{9} \times 9.6 + \frac{5}{9} \times 9.4 = 9.5$;

c. 由 a、b 的结果可以看出, 两个结果相同。

3. a. 销售情况如下图所示:



由上图可以看出，该时间序列有一定的线性趋势。

b. 设线性方程为 $T_t = b_0 + b_1 t$ ，进行如下计算：

	t	Y_t	$t \cdot Y_t$	t^2
	1	20	20	1
	2	24.5	49	4
	3	28.2	84.6	9
	4	27.5	110	16
	5	26.6	133	25
	6	30	180	36
	7	31	217	49
	8	36	288	64
	9	35.2	316.8	81
	10	37.4	374	100
合计	55	296.4	1772.4	385

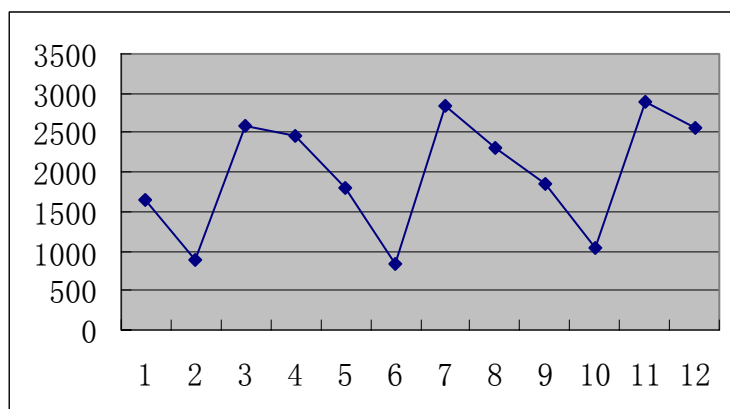
$$b_1 = \frac{\sum t \cdot Y_t - (\sum t \cdot \sum Y_t) / n}{\sum t^2 - (\sum t)^2 / n} = \frac{1772.4 - (55 \times 296.4) / 10}{385 - 55^2 / 10} = 1.72,$$

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{t} = 20.18,$$

故所求直线方程为 $T_t = 20.18 + 1.72t$ 。

t=11 时， $T_t = 20.18 + 1.72 \times 11 = 39.1$ ，即第 11 年的销售量为 39.11 万台。

4. a. 根据销售数据，可以做出下图：



由图可看出，销量有较为明显的上升趋势和季节影响。

b. 根据销售数据，可以做出下表：

季度	销售量	四个季度移动平均值	中心移动平均值	季节于不规则因素的指标值
1	1650			
2	900			
3	2580	1897.5	1916.25	1.34638
4	2460	1935	1927.5	1.276265
1	1800	1920	1953.75	0.921305
2	840	1987.5	1967.5	0.426938
3	2850	1947.5	1953.75	1.458733
4	2300	1960	1985	1.15869
1	1850	2010	2013.75	0.918684
2	1040	2017.5	2050	0.507317
3	2880	2082.5		
4	2560			

去掉指标值中的不规则因素，第三季度的季节指数为 $\frac{1.34638+1.458733}{2} \approx 1.40$ ，同理可求得第一、二、四季度的季节指数为 0.92，0.47，1.22。进行调整后，四个季度的季节指数依次为 0.92，0.47，1.39，1.22。

c. 在时间序列中去掉季节因素，可得下表：

季度	销售量	季节指数	消除季节因素的销量
1	1650	0.92	1793
2	900	0.47	1915
3	2580	1.39	1856
4	2460	1.22	2016
1	1800	0.92	1957
2	840	0.47	1787
3	2850	1.39	2050

4	2300	1.22	1885
1	1850	0.92	2011
2	1040	0.47	2213
3	2880	1.39	2072
4	2560	1.22	2098

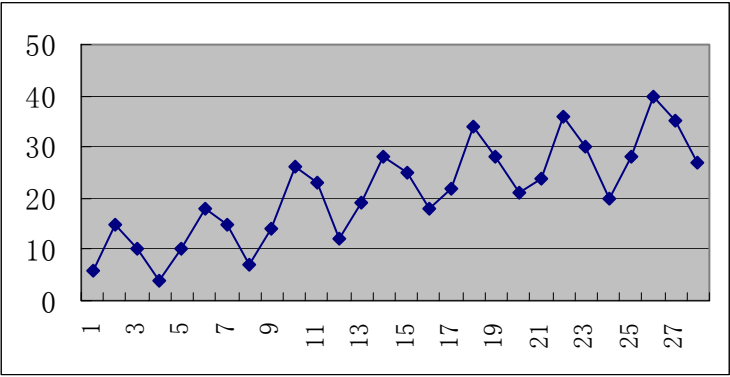
使用消除季节因素后的时间序列确定时间序列的趋势，可以得到直线方程为：

$$T_t = 1805 + 25.5t。$$

在第四年第四个季度， $t=16$ ，故 $T_t = 1805 + 25.5 \times 16 = 2213$ 。

第四季度的季节指数是 1.22，故预测值为 $2213 \times 1.22 = 2699.9$ 。

5. a. 根据销售数据，可以做出下图：



由上图可以看出，销量有明显的上升趋势和季节影响。

b. 根据销售数据，可以做出下表：

季度	销 售 量	四个季度移动平 均值	中心移动平均 值	季节于不规则 因素的指标值
1	6			6.7
2	15			11.0
3	10	8.75	9.25	8.9
4	4	9.75	10.125	6.5
1	10	10.5	11.125	11.1
2	18	11.75	12.125	13.2
3	15	12.5	13	13.4
4	7	13.5	14.5	11.3
1	14	15.5	16.5	15.6
2	26	17.5	18.125	19.1
3	23	18.75	19.375	20.5
4	12	20	20.25	19.4
1	19	20.5	20.75	21.1
2	28	21	21.75	20.6
3	25	22.5	22.875	22.3

4	18	23.25	24	29.0
1	22	24.75	25.125	24.4
2	34	25.5	25.875	25.0
3	28	26.25	26.5	25.0
4	21	26.75	27	33.9
1	24	27.25	27.5	26.7
2	36	27.75	27.625	26.5
3	30	27.5	28	26.8
4	20	28.5	29	32.3
1	28	29.5	30.125	31.1
2	40	30.75	31.625	29.4
3	35	32.5		31.3
4	27			43.5

去掉指标值中的不规则因素，并进行调整后，四个季度的季节指数依次为 0.90，1.36，1.12，0.62。

c. 在时间序列中去掉季节因素，可得下表：

季度	销售量	季节指数	消除季节因素的销量
1	6	0.90	6.7
2	15	1.36	11.0
3	10	1.12	8.9
4	4	0.62	6.5
1	10	0.90	11.1
2	18	1.36	13.2
3	15	1.12	13.4
4	7	0.62	11.3
1	14	0.90	15.6
2	26	1.36	19.1
3	23	1.12	20.5
4	12	0.62	19.4
1	19	0.90	21.1
2	28	1.36	20.6
3	25	1.12	22.3
4	18	0.62	29.0
1	22	0.90	24.4
2	34	1.36	25.0
3	28	1.12	25.0
4	21	0.62	33.9
1	24	0.90	26.7
2	36	1.36	26.5
3	30	1.12	26.8

4	20	0.62	32.3
1	28	0.90	31.1
2	40	1.36	29.4
3	35	1.12	31.3
4	27	0.62	43.5

使用消除季节因素后的时间序列确定时间序列的趋势，可以得到直线方程为：

$$T_t = 14.8 + 1.1t。$$

在第八年第四个季度， $t=32$ ，故 $T_t = 14.8 + 1.1 \times 32 = 50$ 。

第四季度的季节指数是 0.62，故预测值为 $50 \times 0.62 = 31$ 。