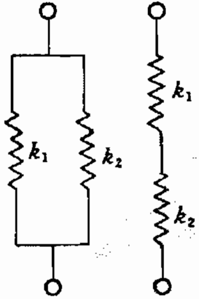
机械振动基础答案

1.3　设有两个刚度分别为k_1，k_2的线性弹簧如图 T—1.3 所示，试证明：

1) 它们并联时的总刚度k_{eq}为：$k_{eq}=k_1+k_2$

2) 它们串联时的总刚度k_{eq}满足：$\dfrac{1}{k_{eq}}=\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}$



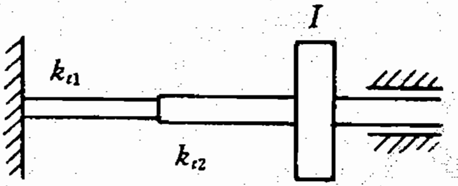
解：1) 对系统施加力 P，则两个弹簧的变形相同为x，但受力不同，分别为：

$$\begin{cases} P_1=k_1x \end{cases}$$

1.4　求图所示扭转系统的总刚度。两个串联的轴的扭转刚度分别为 k_{t1}， k_{t2}。

解：对系统施加扭矩 T，则两轴的转角为：

$$\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{T}{k_{t1}} \\ \theta_2 = \dfrac{T}{k_{t2}} \end{cases}$$



系统的总转角为：

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = T(\frac{1}{k_{t1}} + \frac{1}{k_{t2}})$$

1.5 两只减振器的粘性阻尼系数分别为 c_1， c_2，试计算总粘性阻尼系数 c_{eq}

1) 在两只减振器并联时，

2) 在两只减振器串联时。

解：1) 对系统施加力 P，则两个减振器的速度同为 $\dot{x}$，受力分别为：

$$\begin{cases} P_1 = c_1\dot{x} \\ P_2 = c_2\dot{x} \end{cases}$$

由力的平衡有： $P = P_1 + P_2 = (c_1 + c_2)\dot{x}$

1.6　一简谐运动，振幅为 0.5cm，周期为 0.15s，求最大速度和加速度。

解：简谐运动的 $\omega_n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.15}(rad/s)$，振幅为 $5\times10^{-3}m$；

即：$$\begin{cases} x = 5\times10^{-3}\cos(\frac{2\pi}{0.15}t)(m) \\ \dot{x} = -5\times10^{-3}\times\frac{2\pi}{0.15}t\sin(\frac{2\pi}{0.15}t)(m/s) \\ \ddot{x} = -5\times10^{-3}\times(\frac{2\pi}{0.15}t)^2\cos(\frac{2\pi}{0.15}t)(m/s^2) \end{cases}$$

1.7　一加速度计指示出结构振动频率为 82Hz，并具有最大加速度 50g，求振动的振幅。

解：由 $\ddot{x}_{\max} = A \times \omega_n^{\ 2}$ 可知：

$$A = \frac{\ddot{x}_{\max}}{\omega_n^{\ 2}} = \frac{\ddot{x}_{\max}}{(2\pi f)^2} = \frac{50 \times 9.8 m/s^2}{(2\pi \times 25)^2 1/s^2} = \frac{9.8}{50\pi^2} m$$

1.8　证明：两个同频率但不同相角的简谐运动的合成仍是同频率的简谐运动，即：$A\cos\omega t+B\cos(\omega t-\varphi)=C\cos(\omega t-\theta)$，并讨论 $\varphi=0$，$\pi/2$，π 三种特例。

证明：

$$
\begin{aligned}
&A\cos\omega t+B\cos(\omega t-\varphi)\\
&=A\cos\omega t+B\cos\omega t\cos\varphi+B\sin\omega t\sin\varphi\\
&=(A+B\cos\varphi)\cos\omega t+B\sin\varphi\sin\omega t\\
&=\sqrt{(A+B\cos\varphi)^2+(B\sin\varphi)^2}\cos(\omega t-\theta)\\
&=\sqrt{A^2+2AB\cos\varphi+B^2}\cos(\omega t-\theta)
\end{aligned}
$$

1.9　把复数4+5i表示为指数形式。

解： $4+5i=Ae^{i\theta}$，**其中：** $A=\sqrt{4^2+5^2}$，$\theta=arctg(\frac{5}{4})$

1.10 证明：一个复向量用 i 相乘，等于把它旋转 $\pi/2$。

证明： $Ae^{i\theta}\times i = Ae^{i\theta}\times e^{i\frac{\pi}{2}} = Ae^{i\theta+\frac{\pi}{2}}$

1.11 证明：梯度算子∇是线性微分算子，即

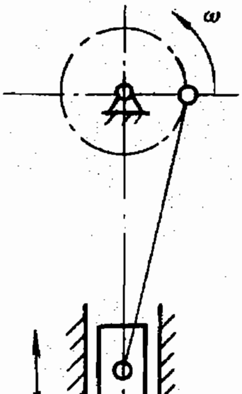
$$\nabla[af(x,y,z)+bg(x,y,z)]=a\nabla f(x,y,z)+b\nabla g(x,y,z)$$

这里，a, b 是与 x、y、z 无关的常数。

1.12 求函数 $g(t)=A\cos p\omega t+B\cos q\omega t$ 的均方值。考虑 p 与 q 之间的如下三种关系：

① $q=np$，这里 n 为正整数；

② q/p 为有理数；


ω

2.2　弹簧不受力时长度为65cm，下端挂上1kg物体后弹簧长85cm。设用手托住物体使弹簧回到原长后无初速度地释放，试求物体的运动方程、振幅、周期及弹簧力的最大值。

解：由题可知：弹簧的静伸长 $\Delta = 0.85 - 0.65 = 0.2(m)$

所以： $\omega_n = \sqrt{\dfrac{g}{\Delta}} = \sqrt{\dfrac{9.8}{0.2}} = 7(rad/s)$

取系统的平衡位置为原点，得到：

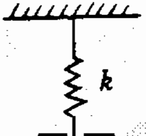
系统的运动微分方程为： $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$

2.3 重物 m_1 悬挂在刚度为 k 的弹簧上并处于静平衡位置，另一重物 m_2 从高度为 h 处自由落到 m_1 上而无弹跳，如图所示，求其后的运动。

解：取系统的上下运动 x 为坐标，向上为正，静平衡位置为原点 $x=0$，则当 m 有 x 位移时，系统有：

$$E_T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2$$

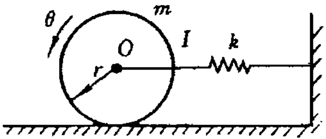
$$U=\frac{1}{2}kx^2$$



2.4 一质量为 m、转动惯量为 I 的圆柱体作自由纯滚动，圆心受到一弹簧 k 约束，如图所示，求系统的固有频率。

解：取圆柱体的转角 θ 为坐标，逆时针为正，静平衡位置时 $\theta = 0$，则当 m 有 θ 转角时，系统有：

$$E_T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{\theta}r)^2 = \frac{1}{2}(I + mr^2)\dot{\theta}^2$$

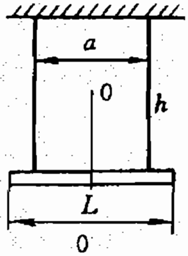


$$U = \frac{1}{2}k(\theta r)^2$$

由 $d(E_T + U) = 0$ 可知：$(I + mr^2)\ddot{\theta} + kr^2\theta = 0$

即：$\omega_n = \sqrt{kr^2/(I + mr^2)}$ （rad/s）

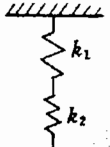
2.5 均质杆长 L、重 G，用两根长 h 的铅垂线挂成水平位置，如图所示，试求此杆相对铅垂轴 OO 微幅振动的周期。



2.6　求如图所示系统的周期，三个弹簧都成铅垂，且 $k_2 = 2k_1, k_3 = k_1$。

解：取 m 的上下运动 x 为坐标，向上为正，静平衡位置为原点 $x = 0$，则当 m 有 x 位移时，系统有：

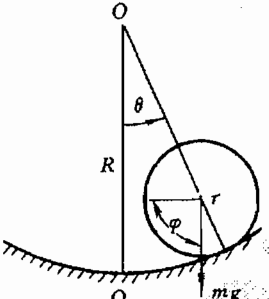
$$E_T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$



$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k_1x^2 = \frac{5}{6}k_1x^2 \quad \text{（其中：} k = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}\text{）}$$

2.7　如图所示，半径为 r 的均质圆柱可在半径为 R 的圆轨面内无滑动地、以圆轨面最低位置 O 为平衡位置左右微摆，试导出柱体的摆动方程，求其固有频率。

解：设物体重量 W，摆角坐标 θ 如图所示，逆时针为正，当系统有 θ 摆角时，则：

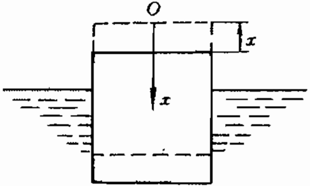


$$U=W(R-r)(1-\cos\theta)\approx W(R-r)\frac{\theta^2}{2}$$

设 $\dot{\varphi}$ 为圆柱体转角速度，质心的瞬时速度：

$\upsilon_c=(R-r)\dot{\theta}=r\dot{\varphi}$，即：$\dot{\varphi}=\frac{(R-r)}{\;}\dot{\theta}$

2.8 横截面面积为 A，质量为 m 的圆柱形浮子静止在比重为 γ 的液体中。设从平衡位置压低距离 x（见图），然后无初速度地释放，若不计阻尼，求浮子其后的运动。

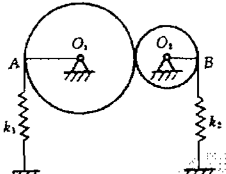


解：建立如图所示坐标系，系统平衡时 $x=0$，由牛顿第二定律得：

$m\ddot{x}+\gamma(Ax)g=0$，即：$\omega_n=\sqrt{\dfrac{\gamma A g}{m}}$

2.9　求如图所示系统微幅扭振的周期。图中两个摩擦轮可分别绕水平轴 O_1，O_2 转动，它们相互啮合，不能相对滑动，在图示位置(半径 O_1A 与 O_2B 在同一水平线上)，弹簧不受力。摩擦轮可以看做等厚均质圆盘，质量分别为 m_1，m_2。

解：两轮的质量分别为 m_1, m_2，因此轮的半径比为：

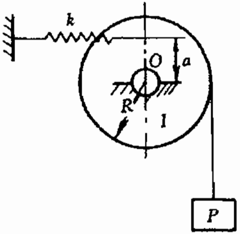


$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

由于两轮无相对滑动，因此其转角比为：

$$\frac{\theta_1}{\ } = \frac{r_2}{\ } = \frac{\dot{\theta}_1}{\ }$$

2.10　如图所示，轮子可绕水平轴转动，对转轴的转动惯量为I，轮缘绕有软绳，下端挂有重量为P的物体，绳与轮缘之间无滑动。在图示位置，由水平弹簧维持平衡。半径R与a均已知，求微振动的周期。



解：取轮的转角θ为坐标，顺时针为正，系统平衡时$\theta=0$，则当轮子有θ转角时，系统有：

$$E_T=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\frac{P}{g}(\dot{\theta}R)^2=\frac{1}{2}(I+\frac{P}{g}R^2)\dot{\theta}^2$$

$$U=\frac{1}{2}k(\theta a)^2$$

2.11　弹簧悬挂一质量为 m 的物体，自由振动的周期为 T，如果在 m 上附加一个质量 m_1，则弹簧的静伸长增加 Δl，求当地的重力加速度。

解：

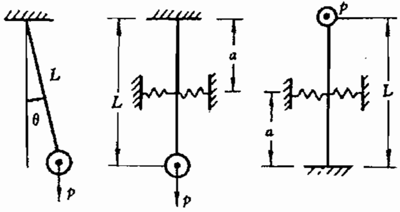
$$\because T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\therefore k=\frac{4\pi^2 m}{T}$$

$$\because m_1 g=k\Delta l$$

$$\therefore g=\frac{k\Delta l}{\ }=\frac{4\pi^2 m}{\ }\frac{\Delta l}{\ }$$

2.12　用能量法求图所示三个摆的微振动的固有频率。摆锤重P，(b)与(c)中每个弹簧的弹性系数为$k/2$。(1)杆重不计；(2)若杆质量均匀，计入杆重。



(a)　　(b)　　(c)

解：取系统的摆角θ为坐标，静平衡时$\theta = 0$

（a）若不计杆重，系统作微振动，则有：

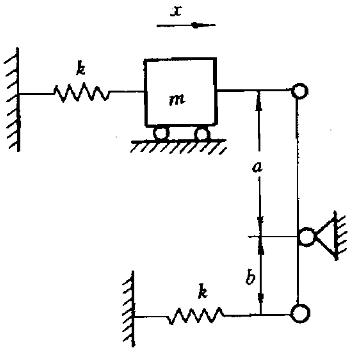
即： $\omega_n = \sqrt{\dfrac{(\dfrac{P}{g}+\dfrac{m_L}{2})g+\dfrac{kL}{4}}{(\dfrac{P}{g}+\dfrac{m_L}{3})L}}$ （rad/s）

（c）如果考虑杆重，系统作微振动，则有：

$$E_T = \frac{1}{2}(\frac{P}{g}L^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_L L^2)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(\frac{P}{g}+\frac{m_L}{3})L^2\dot{\theta}^2$$

$$U \approx -(\frac{P}{g}+\frac{m_L}{2})gL\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}(\frac{k}{2})(\theta\frac{L}{2})^2 \times 2$$

2.13 求如图所示系统的等效刚度，并把它写成与 x 的关系式。

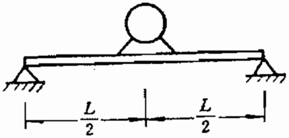


2.14　一台电机重470N，转速为1430r / min，固定在两根5号槽钢组成的简支梁的中点，如图所示。每根槽钢长1.2m，重65.28N，弯曲刚度$EI=1.66\times10^5\text{N}\cdot\text{m}^2$。

(*a*)不考虑槽钢质量，求系统的固有频率；

(*b*)设槽钢质量均布，考虑分布质量的影响，求系统的固有频率；

(*c*)计算说明如何避开电机和系统的共振区。



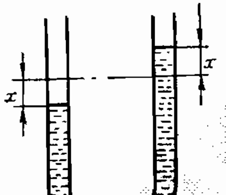
2.15　一质量m固定于长L，弯曲刚度为EI，密度为r 的弹性梁的一端，如图所示，试以有效质量的概念计算其固有频率。

2.16　求等截面 U 形管内液体振动的周期，阻力不计，假定液柱总长度为 L。

解：假设U形管内液柱长 l，截面积为 A，密度为 ρ，取系统静平衡时势能为0，左边液面下降 x 时，有：

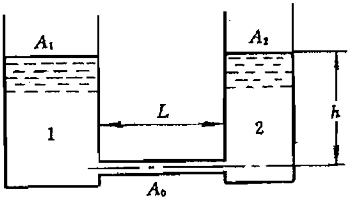
$$E_T = \frac{1}{2}\rho A l \dot{x}^2$$

$$U = \rho A \times x \times g \times x$$



由 $d(E_T + U) = 0$ 可知：$\rho A l \ddot{x} + 2g\rho A x = 0$

2．17　水箱1与2的水平截面面积分别为 A_1、A_2，底部用截面为 A_0 的细管连接。求液面上下振动的固有频率。

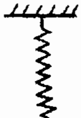


解：设液体密度为 ρ，取系统静平衡时势能为0，当左边液面下降 x_1 时，右边液面上升 x_2，液体在水箱1与2和细管中的速度分别为 $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$，则有：

2.18 如图所示，一个重 W、面积为 A 的薄板悬挂在弹簧上，使之在粘性液体中振动。设 T_1、T_2 分别为无阻尼的振动周期和在粘性液体中的阻尼周期。试证明：

$$\mu = \frac{2\pi W}{gAT_1T_2}\sqrt{T_2^2 - T_2^2}$$

并指出 μ 的意义(式中液体阻尼力 $F_d=m\cdot 2Av$)。



2.19 试证明：对数衰减率也可用下式表示 $\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{x_0}{x_n}$，(式中 x_n 是经过 n 个循环后的振幅)。并给出在阻尼比 ζ 为 0.01、0.1、0.3 时振幅减小到 50%以下所需要的循环数。

解： 设系统阻尼自由振动的响应为 $x(t)$；

t_0 时刻的位移为 x_0；$t_n = t_0 + nT$ 时刻的位移为 x_n；则：

2.20 某双轴汽车的前悬架质量为m_1=1151kg，前悬架刚度为$k_1=1.02\times10^5\mathrm{N/m}$，若假定前、后悬架的振动是独立的，试计算前悬架垂直振动的偏频。如果要求前悬架的阻尼比$\zeta=0.25$，那么应给前悬架设计多大阻尼系数(c)的悬架减振器？

2.21 重量为 P 的物体，挂在弹簧的下端，产生静伸长 δ，在上下运动时所遇到的阻力与速度 v 成正比。要保证物体不发生振动，求阻尼系数 c 的最低值。若物体在静平衡位置以初速度 v_0 开始运动，求此后的运动规律。

解：设系统上下运动为 x 坐标系，系统的静平衡位置为原点，得到系统的运动微分方程为：

$$\frac{P}{g}\ddot{x}+c\dot{x}+\frac{P}{\delta}x=0$$

系统的阻尼比：$\zeta=\frac{c}{2\sqrt{mk}}=\frac{c}{2\sqrt{\frac{P}{\ }\frac{P}{\ }}}$

2.22 一个重 5500N 的炮管具有刚度为 $3.03\times10^5 N/m$ 的驻退弹簧。如果发射时炮管后座 1.2m，试求：

①炮管初始后座速度；

②减振器临界阻尼系数(它是在反冲结束时参加工作的)；

③炮管返回到离初始位置 0.05m 时所需要的时间。

2.23 设系统阻尼比 $\zeta=0.1$，试按比例画出在 ω/ω_n =0.5、1.0、2.0 三种情况下微分方程的向量关系图。

2.24 试指出在简谐激励下系统复频率响应、放大因子和品质因子之间的关系，并计算当 $\zeta=0.2$、ω_n=5rad/s 时系统的品质因子和带宽。

2.25 已知单自由度系统振动时其阻力为 cv(其中 c 是常数，v 是运动速度)，激

2.26 某单自由度系统在液体中振动，它所受到的激励为 $F=50\cos\omega t$(N)，系统在周期 T=0.20s 时共振，振幅为 0.005cm，求阻尼系数。

解：由 $T=0.20s$ 时共振可知，系统固有频率为：$\omega_n=\dfrac{2\pi}{T}=10\pi$

当 $\omega\to\omega_n$ 时，已知响应振幅：$X=\dfrac{F_0}{c\omega}$，（参教材 P30）

所以：$c=\dfrac{F_0}{X\omega}=\dfrac{10^5}{\pi}(N\cdot s/m)$

2.27 一个具有结构阻尼的单自由度系统，在一周振动内耗散的能量为它的最大势能的1.2%，试计算其结构阻尼系数γ。

2.28 要使每一循环消耗的能量与频率比无关，需要多大的阻尼系数。

2.29 若振动物体受到的阻力与其运动速度平方成正比，即

$$\begin{cases} F_d = a\dot{x}^2 & \dot{x} \le 0 \\ F_d = -a\dot{x}^2 & \dot{x} > 0 \end{cases}$$

求其等效阻尼系数和共振时的振幅。

解：实际上，这是一种低粘度流体阻尼。

设系统的运动为： $x(t) = X\cos(\omega t - \varphi)$

$$\omega_c = \int \alpha\, \dot{x}^2 dx$$

$$\int^{\pi/w} \alpha\, \dot{x}^2 d(A\,|\,H(w)\,|\,w)(wt-\varphi)$$

$$X = \sqrt{\frac{3\pi F_0}{8\,a x w_n^2}} = \frac{1}{2w_n^2}\sqrt{\frac{3\pi F_0}{2a}}$$

2.29

$$F_d = \begin{cases} \alpha \dot{x}^2 & \dot{x} \le 0 \\ -\alpha \dot{x}^2 & \dot{x} \ge 0 \end{cases}$$

$$\omega_e = \int F_d dx = 4\int_0^{T/4} \alpha \dot{x}^2 dx$$

$$= 4\int_0^{T/4} \alpha \dot{x}^3 dx$$

$$= 4\int_0^{T/4} X^3 \omega^3 \cos^3(\omega t - \varphi)\, dt$$

2.30 KGlⅡ电动机重 P，装在弹性基础上，静下沉量为 d。当转速为 n r / min 时，由于转子失衡，沿竖向有正弦激励，电机产生振幅为 A 的强迫振动。试求激励的幅值，不计阻尼。

2.31 电动机重 P，装在弹性梁上，使梁有静挠度 d。转子重 Q，偏心距为 e。试求当转速为 w 时，电动机上下强迫振动的振幅 A，不计梁重。

2.32 一飞机升降舵的调整片铰接于升降舵的 O 轴上(图 T—2.32)，并由一联动装置控制。该装置相当于一刚度为 k_T 的扭转弹簧。调整片转动惯量为 I，因而系统固有频率 $\omega_n = K_T / I$，但因 k_T 不能精确计算，必须用试验测定 ω_n。为此固定升降舵，利用弹簧 k_2 对调整片做简谐激励，并用弹簧 k_1 来抑制。改变激励频率 ω 直至达到其共振频率 ω_T。试以 ω_T 和试

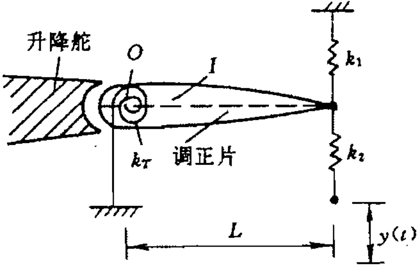
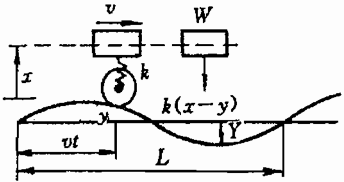


图 T—2.32

2.33 如图所示由悬架支承的车辆沿高低不平的道路行进。试求 W 的振幅与行进速度的关系，并确定最不利的行进速度。



解：由题目

2.33

$T=\frac{L}{V}$　　$w=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi V}{L}$

$y=Y\cos\frac{2\pi V}{L}t$

2.34　单摆悬点沿水平方向做简谐运动(图 T—2.34)，x =asinw t。试求在微幅的强迫振动中偏角q 的变化规律。已知摆长为 L，摆锤质量为 m。

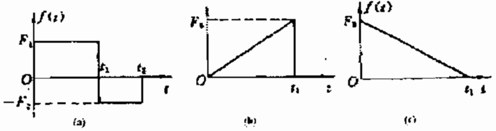
2.35　一个重 90N 的飞机无线电要与发动机的频率 1600～2200r/min 范围的振动隔离，为了隔离 85%，隔振器的静变形需要多少?

2.36　试从式(2.95)证明：

1. 无论阻尼比 ζ 取何值，在频率比 $\omega/\omega_n=\sqrt{2}$ 时，恒有 X=A。

2. 在 $\omega/\omega_n<\sqrt{2}$，X/A 随 ζ 增大而减小，而在 $\omega/\omega_n>\sqrt{2}$，X/A 随 ζ 增大而增大。

2.40 求单自由度无阻尼系统对图所示激励的响应，设初始条件为零。



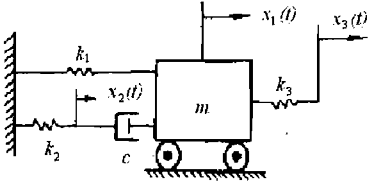
解:

a

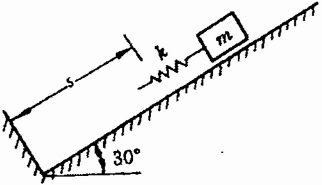
$$h(t)=\frac{1}{m\omega_d}e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_d t$$

$$h(t-\tau)=\frac{1}{m\omega_d}e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\sin[\omega_d(t-\tau)]$$

2.41 求图 *T*—2.41 所示系统的传递函数，这里激励是 $x_3(t)$。



2.42 一弹簧质量系统从一倾斜角为 30^0 的光滑斜面下滑，如图所示。求弹簧与墙壁开始接触到脱离接触的时间。



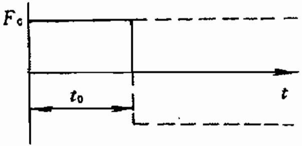
解：弹簧接触墙壁时，m 的速度为：

$$\upsilon_0 = \sqrt{2gs\sin 30^\circ} = \sqrt{gs}$$

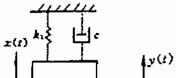
以接触时 m 的位置为原点，斜下方为正，则 m 的微分方程为：

$$m\ddot{x} + kx = mg\sin 30^\circ$$

2.43　一个高 F_0、宽 t_0 的矩形脉冲力加到单自由度无阻尼系统上，把这个矩形脉冲力看做两个阶跃脉冲力之和，如图所示。用叠加原理求 $t>t_0$ 后的响应。



2.44　如图 T—2.44 所示，系统支承受凸轮作用，运动波形为图中所示的锯齿波，求系统的稳态响应。



$$U=\frac{1}{2}k_{t1}\theta_1^{\ 2}+\frac{1}{2}k_{t2}(\theta_1-\theta_2)^2=\frac{1}{2}(k_{t1}+k_{t2})\theta_1^{\ 2}+\frac{1}{2}k_{t2}\theta_2^{\ 2}-k_{t1}\theta_1\theta_2$$

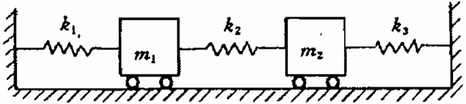
求偏导也可以得到 $[M],[K]$

由于 $I_1=2I_2;k_{t1}=k_{t2}$**，所以** $[M]=I_2\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},[K]=k_{t1}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

2)设系统固有振动的解为： $\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}\cos\omega t$**，代入（a）可得：**

$$([K]-\omega^2[M])\begin{Bmatrix}u_1\\ \end{Bmatrix}=0 \qquad \text{............ (b)}$$

3.2 求图所示系统的固有频率和振型。设 $m_1 = 3m_2; k_3 = 3k_2 = 3k_1$。并画出振型图。



解：1)以静平衡位置为原点，设 m_1, m_2 的位移 x_1, x_2 为广义坐标，画出 m_1, m_2 隔离体，根据牛顿第二定律得到运动微分方程：

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = 0 \end{cases}$$

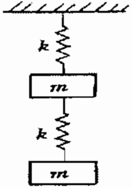
所以：$\omega_1=\sqrt{\frac{(7-2\sqrt{7})}{3}\frac{k_2}{m_2}}<\omega_2=\sqrt{\frac{(7+2\sqrt{7})}{3}\frac{k_2}{m_2}}$ ………… **(c)**

将（c）代入（b）可得：

$$\begin{bmatrix} 2k_2-3\cdot\frac{(7\pm2\sqrt{7})}{3}\frac{k_2}{m_2}\cdot m_2 & -k_2 \\ -k_2 & 4k_2-\frac{(7\pm2\sqrt{7})}{3}\frac{k_2}{m_2}\cdot m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}=0$$

解得： $\frac{u_{11}}{u_{21}}=-\frac{2\sqrt{7}+5}{3}$； $\frac{u_{12}}{u_{22}}=\frac{5-2\sqrt{7}}{3}$

3.3 如图所示弹簧质量系统，写出系统的频率方程并求出固有频率和振型，画出振型图。

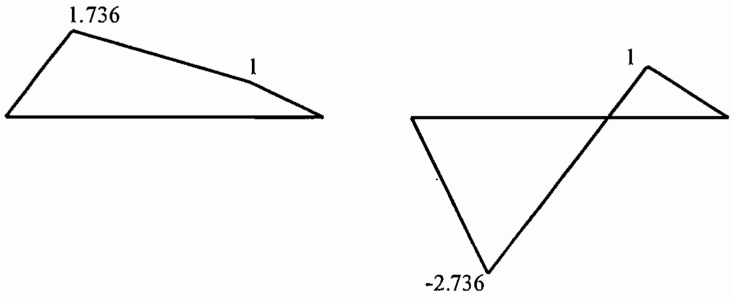


解：以静平衡位置为原点，设 m_1, m_2 的位移 x_1, x_2 为广义坐标，系统的动能和势能分别为

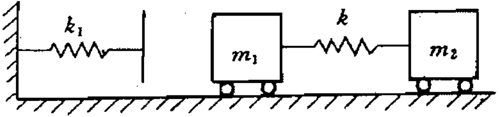
$$E_T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 + mg(x_1 + x_2)$$

求得：$[M] = m\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$，$[K] = k\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$


1.736
1
1
-2.736

3.4　如图 T—3.4 所示，由一弹簧是连接两个质量 m_1，m_2 构成的系统以速度 v 撞击制动器 k_1，求传到基础上的力的最大值。设 v 为常数且弹簧无初始变形，并设 $m_1=m_2$ 与 $k_1=2k$。



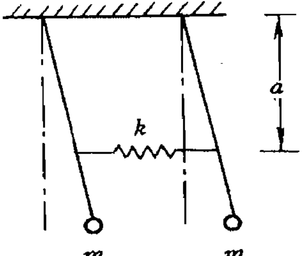
3.5　求图所示系统的固有频率和振型，并画出振型图。设杆质量分布均匀。

3.7 如图 T—3.7 所示由弹簧耦合的双摆，杆长为 L。

1．写出系统的刚度矩阵、质量矩阵和频率方程；

2．求出固有频率和振型；

3．讨论是值改变对固有频率的影响。



$$E_T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^{\ 2} + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^{\ 2} + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^{\ 2}$$

$$U = \frac{1}{2}k_1 x_1^{\ 2} + \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_3(x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2}k_4 x_3^{\ 2} + \frac{1}{2}(k_5 + k_6)x_2^{\ 2}$$

$$U = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x_1^{\ 2} + \frac{1}{2}(k_2 + k_3 + k_5 + k_6)x_2^{\ 2} + \frac{1}{2}(k_3 + k_4)x_3^{\ 2} - k_2x_1x_2 - k_3x_2x_3$$

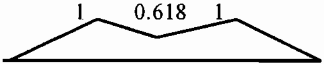
求偏导也可以得到$[M],[K]$

2)设系统固有振动的解为： $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}\cos\omega t$**，代入（a）得：**

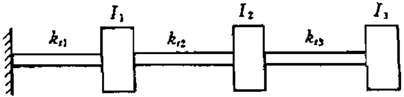
$$u_{12}:u_{22}:u_{32}\approx -1:0:1;$$

$$u_{13}:u_{23}:u_{33}\approx 1:\frac{-\sqrt{5}-1}{2}:1;$$

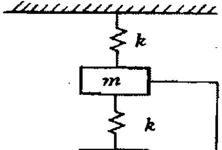
令 $u_3=1$，**得到系统的振型为：**

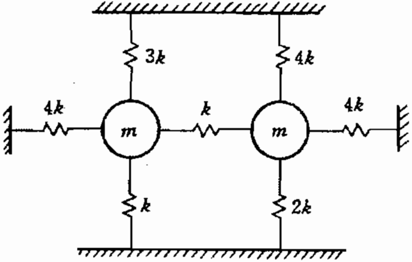


4.2　按定义求如图 T—4.2 所示三自由度扭转系统的刚度矩阵和质量矩阵。



4.3　求如图 T—4.3 所示三自由度弹簧质量系统的固有频率和振型。质量只能沿铅垂方向运动。





4.7　如图 T—4.7 所示系统，求出系统的全部固有频率和振型。

4.11　证明：对系统的任一位移{x}，Rayleigh 商

$$R(x)=\frac{\{x\}^T[K]\{x\}}{\{x\}^T[M]\{x\}}$$

满足

$$\omega_1^2 \le R(x) \le \omega_n^2$$

这里，[K]和[M]分别是系统的刚度矩阵和质量矩阵， ω_1 **和** ω_n **分别为系统的最低和最高固有频率。**

证明：对振动系统的任意位移{x}由展开定理，{x}可按n个彼此正交的正规化固

所以：$$\frac{\omega_1^2\sum_{i=1}^{n}c_i^2}{\sum_{i=1}^{n}c_i^2}\le R(x)\le\frac{\omega_n^2\sum_{i=1}^{n}c_i^2}{\sum_{i=1}^{n}c_i^2}$$

也就是：$\omega_1^2\le R(x)\le\omega_n^2$

证明完毕。