

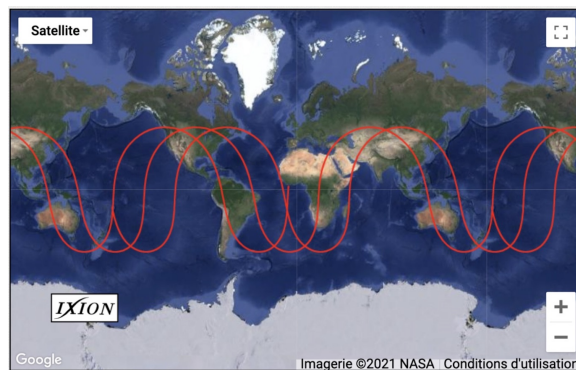
Master PPMD/Géodésie de l'ENSG

TD noté d'orbitographie - 11 février 2021

L'objectif de ce TD est (i) d'exploiter les propriétés dynamiques et géométriques des orbites précessantes sous l'influence des premiers termes zonaux du champ de gravité terrestre, et (ii) de faire une comparaison avec une orbite précise. Tous documents et moyens de calcul sont autorisés, mais je serai particulièrement attentif à la qualité de la rédaction. Éviter les discours fleuve dans les réponses.

Exercice 1 : *Interprétation de trajectoire*

La trajectoire représentée ci-dessous en repère terrestre est celle d'un satellite qu'il s'agit d'identifier, sur la base de sa trace, donnée ici sur 3 journées.



1. Qu'appelle-t-on la trace d'un satellite ? La définir sur un schéma.
2. À partir d'une interprétation de la figure, donner une estimation (la plus précise possible) de l'inclinaison de ce satellite.
3. Repérer le nombre de révolutions du satellite au cours de ces 3 journées, et en déduire une évaluation du demi-grand axe du satellite.
4. Repérer la latitude du périégée, et en déduire une évaluation de la valeur de l'argument du périégée. À quoi pourrait-on repérer sur la trace qu'il n'est pas égal exactement à 90° ?
5. À partir de la relation de l'énergie dans le problème des deux corps, en se rappelant que l'énergie mécanique vaut $-\mu/(2a)$, déterminer les vitesses à l'apogée et au périégée en fonction des éléments képlériens. Exprimer ensuite l'excentricité à partir du rapport de ces deux vitesses (éventuellement en supposant l'excentricité petite).
6. Donner l'ordre de grandeur de l'excentricité de cette trajectoire.
7. En déduire les valeurs du rayon à l'apogée et du rayon au périégée.
8. Imaginons que l'on souhaite modifier le demi-grand axe de cette trajectoire pour l'amener à celle du demi-grand axe nominal de la constellation Galileo. Après avoir rappelé quelle est cette valeur à atteindre, évaluer quelle modification de vitesse on devrait appliquer au satellite pour modifier sa trajectoire en ce sens.

Exercice 2 : *Calcul de demi-grand axe à partir des TLE*

1. Dans IXION, représenter l'évolution au cours du temps des satellites GLONASS 2471 et 2433. On précisera les éventuels événements que l'on repère sur les séries temporelles.
2. À partir de la donnée du rapport de commensurabilité entre la période de révolution des satellites GLONASS et la rotation de la Terre, calculer le demi-grand axe théorique des satellites GLONASS, dans l'hypothèse d'une modélisation keplerienne.
3. Reprendre le calcul de la question précédente en tenant cette fois-ci également compte de l'effet de J_2 .

4. Les TLE ne fournissent pas directement la valeur du demi-grand axe, qui doit être calculé. On donne ci-après des extraits du « Spacetrak report » qui permettent de faire ces calculs.

The NORAD mean element sets can be used for prediction with SGP4. All symbols not defined below are defined in the list of symbols in Section Twelve. The original mean motion (n_o'') and semimajor axis (a_o'') are first recovered from the input elements by the equations

$$a_1 = \left(\frac{k_e}{n_o} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\delta_1 = \frac{3}{2} \frac{k_2}{a_1^2} \frac{(3 \cos^2 i_o - 1)}{(1 - e_o^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$a_o = a_1 \left(1 - \frac{1}{3} \delta_1 - \delta_1^2 - \frac{134}{81} \delta_1^3 \right)$$

$$\delta_o = \frac{3}{2} \frac{k_2}{a_o^2} \frac{(3 \cos^2 i_o - 1)}{(1 - e_o^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$n_o'' = \frac{n_o}{1 + \delta_o}$$

$$a_o'' = \frac{a_o}{1 - \delta_o}.$$

avec

<u>Variable name</u>	<u>Definition</u>	<u>Value</u>
CK2	$\frac{1}{2}J_2a_E^2$	5.413080E-4
CK4	$-\frac{3}{8}J_4a_E^4$.62098875E-6
E6A	10^{-6}	1.0 E-6
QOMS2T	$(q_o - s)^4 \text{ (er)}^4$	1.88027916E-9
S	$s \text{ (er)}$	1.01222928
TOTHRD	$2/3$.66666667
XJ3	J_3	-.253881E-5
XKE	$k_e \left(\frac{\text{er}}{\text{min}} \right)^{\frac{3}{2}}$.743669161E-1
XKMPER	kilometers/Earth radii	6378.135
XMNPDA	time units/day	1440.0

76

AE	distance units/Earth radii	1.0
DE2RA	radians/degree	.174532925E-1
PI	π	3.14159265
PIO2	$\pi/2$	1.57079633
TWOPI	2π	6.2831853
X3PIO2	$3\pi/2$	4.71238898

Le code fortran originel de cette partie est :

```

*          SGP4                                3 NOV 80
SUBROUTINE SGP4(IFLAG,TSINCE)
COMMON/E1/XMO,XNODEO,OMEGA0,E0,XINCL,XNO,XNDT20,
1          XNDD60,BSTAR,X,Y,Z,XDOT,YDOT,ZDOT,EPOCH,DS50
COMMON/C1/CK2,CK4,E6A,QOMS2T,S,TOTHRD,
1          XJ3,XKE,XKMPER,XMNPDA,AE
DOUBLE PRECISION EPOCH, DS50

IF (IFLAG .EQ. 0) GO TO 100

*          RECOVER ORIGINAL MEAN MOTION (XNODP) AND SEMIMAJOR AXIS (AODP)
*          FROM INPUT ELEMENTS

A1=(XKE/XNO)**TOTHRD
COSIO=COS(XINCL)
THETA2=COSIO*COSIO
X3THM1=3.*THETA2-1.
EOSQ=E0*E0
BETA02=1.-EOSQ
BETA0=SQRT(BETA02)
DEL1=1.5*CK2*X3THM1/(A1*A1*BETA0*BETA02)
AO=A1*(1.-DEL1*(.5*TOTHRD+DEL1*(1.+134./81.*DEL1)))
DELO=1.5*CK2*X3THM1/(AO*AO*BETA0*BETA02)
XNODP=XNO/(1.+DELO)
AODP=AO/(1.-DELO)

```

On demande de comprendre cette valeur de XKE, en notant que "er" a la signification de "Earth radius". En déduire la valeur du paramètre gravitationnel μ_{SGP4} utilisé dans cette théorie.

- En différenciant la troisième loi de Kepler, évaluer la différence sur l'évaluation du demi-grand axe à l'altitude de GLONASS selon que l'on utilise la valeur de μ_{SGP4} ou la valeur de μ communément admise aujourd'hui.
- Évaluer le demi-grand axe d'un satellite GLONASS à partir d'un TLE que l'on mentionnera. Comparer la valeur à celles obtenues en tenant compte des commensurabilités.

```

!Ajustement du demi-grand axe
peranomal = 1440._DP/mm
N0 = DPI/(peranomal*60._DP)
dga = (xmu(1)/DPI**2*(peranomal**2))
dgakep = dga
dgatemp = 0. ; niter = 0
boucle_dga: DO WHILE (ABS(dgakep - dgatemp) > 1e-10)
  dgatemp = dga
  CALL effsec(dgatemp,exc,in)
  effsecm(0:3),effsecor(0:3)
  dga = (xmu(1)/N0**2)**(1._DP)
  niter = niter + 1
  IF (niter > 10) EXIT boucle_dga
END DO boucle_dga

```

- Mon propre calcul de demi grand axe de satellite à partir de TLE utilise le code itératif suivant :
Retranscrire ce code lisible sous la forme d'un algorithme. Le recoder et l'utiliser pour calculer le demi-grand axe à partir du même TLE que dans la question précédente.
- Mettre en évidence l'influence du choix de la valeur de μ .

Exercice 3 : Autour des précessions apsidales

- Dans IXION, représenter l'évolution au cours du temps de l'excentricité et de l'argument du périhélie du satellite Terra. Identifier deux régimes différents dans les variations.
- Quelle est la cause physique des précessions apsidales.
- On donne les taux de variations de l'excentricité et du périhélie jusque J_5 (dans le cas des petites excentricités). En

notant $p = a(1 - e^2)$, on a :

$$\frac{\dot{e}}{\bar{n}} = \frac{3}{8} J_3 \left(\frac{R_0}{p} \right)^3 (5 \cos^2 i - 1) \cos \omega \quad (1)$$

$$\frac{\dot{\omega}}{\bar{n}} = \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_0}{p} \right)^2 (5 \cos^2 i - 1) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{J_3}{J_2} \frac{R}{p} \frac{1}{e} \sin i \sin \omega + \frac{5}{16} \frac{J_5}{J_2} \left(\frac{R}{p} \right)^3 \frac{\sin i}{e} \left(1 - 9 \cos^2 i + \frac{24 \cos^4 i}{5 \cos^2 i - 1} \right) \sin \omega \right) \quad (2)$$

$$= \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_0}{p} \right)^2 (5 \cos^2 i - 1) (A_{sec} + A_{LP, J_3} + A_{LP, J_5}) \quad (3)$$

4. Indiquer où se situe la contribution de J_4 non explicitement mentionnée dans les équations ci-dessus
5. Définir ce qu'on appelle l'excentricité gelée et en donner une expression explicite. De quel ordre de grandeur est cette excentricité gelée ?
6. sur la Terre, $J_3 < 0$ tandis que sur Mars $J_3 > 0$. En déduire les valeurs de l'argument du périhélie "gelé".
7. Calculer l'excentricité gelée dans le cas de Terra. Que constate-t-on ?
8. Comparer une valeur estimée de la précession apsidale à partir des TLE, à celle calculée dans IXION. Que constate-t-on ?
9. Dans quels cas est-il indispensable de prendre en compte les termes en J_4 et en J_5 . Mettre en évidence avec IXION un tel cas.
10. Reprendre la formulation de l'excentricité gelée en écrivant les équations du mouvement vérifiées par $C = e \cos \omega$ et $S = e \sin \omega$

Exercice 4 : Calcul d'orbite : Analyse d'un fichier d'orbite

Le format du fichier d'orbite fourni est le suivant :

col1 : date (number of days since 1/1/1950)

col2 : number of seconds in the days

col3-4-5 : position vector components x, y, z (m)

col6-7-8 : velocity vector components $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ (m.s⁻¹)

1. Tracer la série temporelle du demi-grand axe et de l'excentricité
2. Analyser les perturbations engendrées en termes de fréquence et d'amplitude.
3. On propose un modèle prenant en compte la perturbation principale due à J_2 :

$$a(t) = \bar{a} + \frac{3}{2} J_2 \bar{a} \left(\frac{R_e}{\bar{a}} \right)^2 \sin^2 i \cos 2(\bar{\omega} + \bar{M}) \quad (4)$$

$$e(t) = \bar{e} + J_2 \left(\frac{R_e}{\bar{a}} \right)^2 \left(3 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \right) \cos M + \frac{21}{24} \sin^2 i \cos (2\bar{\omega} + 3\bar{M}) \right) \quad (5)$$

Programmer cette relation avec python ou scilab, et superposer la courbe obtenue sur les séries temporelles précédentes.

4. Filtrer les courtes périodes dues à J_2 sur le demi-grand axe et l'excentricité, et analyser les effets résiduels (en termes d'amplitudes et de périodes)
5. Retrouver dans IXION des TLE correspondant au graphique réalisé en début d'exercice, et analyser si les valeurs des TLE et du fichier d'orbite précis sont compatibles.