Oppgave 1.(a)

Les av $\overline{x}$ og s fra Figur 1 for hver av stasjonene 1, 2 og 3.

Svar: Vi får at de forskjellige $\overline{x}$ og s til å bli:

$$\overline{x}_1 = 125 \qquad \overline{x}_2 = 150 \qquad \overline{x}_3 = 250$$
$$s_1 = 250 \qquad s_2 = 210 \qquad s_3 = 395$$

Oppgave 1.(b)

Lag et 95 konfidensintervall for hver av μ_1, μ_2 og μ_3 (totalt tre intervaller).

Svar: Fra definisjonen kan vi finne konfidensintervallet med:

$$\overline{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Først μ_1 og vi har $n_1 = 18$, $s_1 = 250$, $\overline{x}_1 = 125$, og $z_{\alpha/2} = 1.96$

$$125 \pm 1.96 \frac{250}{\sqrt{18}} = [9.506, 240.494]$$

Så μ_2 og vi har $n_2 = 20$, $s_2 = 210$ og $\overline{x}_2 = 150$

$$150 \pm 1.96 \frac{210}{\sqrt{20}} = [57.963, 242.037]$$

Til slutt μ_3 og vi har $n_3 = 13$, $s_3 = 395$ og $\overline{x}_3 = 250$

$$250 \pm 1.96 \frac{395}{\sqrt{13}} = [35.276, 464.724]$$

Oppgave 1.(c)

Hvilke av de tre konfidensintervallene som du konstruerte under punkt b) inneholder $\mu_{Ref} = 354$?

Svar: Vi kan se at μ_3 inneholder $\mu_{Ref} = 354$

Hvis du har lest kapittel 9: gjenkjenner du dette spørsmåøet som en hypotesetest (hvilke hypotese?)

Oppgave 2.(a)

Gitt n observasjoner $t_1, \ldots, t_n$ finn sannsynlighetsmaksimeringsestimatet $\hat{\theta}$ for θ. Finn en nummerisk verdi for $\hat{\theta}$ når en har følgende 10 observerte betjeningstider: t_i : $1, 1.4, 2.0, 0.5, 0.7, 2.0, 1.3, 1.1, 1.8, 0.2$, der tidsenhet er ett minutt.

Svar: Vi har

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta t_i} = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} t_i}$$

Slik at

$$\ln L = n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^{n} t_i$$

og

$$\frac{d}{d\theta} \ln L = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} t_i$$

dette git at sannsynlighetsmaksimeringsestimatet er gitt ved

$$\hat{\theta} = n / \sum_{i=1}^{n} t_i = 1/\bar{t}$$

Vi får nå estimatet til å bli

$$\hat{\theta} = 10/\sum_{i=1}^{10} t_i = \frac{10}{12} = 0.833$$

Oppgave 2.(b)

Er $\hat{\theta}$ en forventningsrett estimator for θ? Begrunn svaret.

Svar: $\hat{\theta}$ er ikke en forventningsrett estimator for θ, siden

$$E\left(1/\overline{T}\right) \neq 1/E\left(\overline{T}\right)$$

Oppgave 3.(a)

Vis at utrykket for log-likelihood funkjsonen er gitt ved

$$l(\theta) = [5\ln(2) - \ln(3!) - \ln(5!)] + 8\ln\theta - 3\theta.$$

Plott $l(\theta)$ for verdier av $\theta \in [0, 10]$ (en grov skisse er OK). For ca hvilken vedi av θ har $l(\theta)$ sitt maksimum?

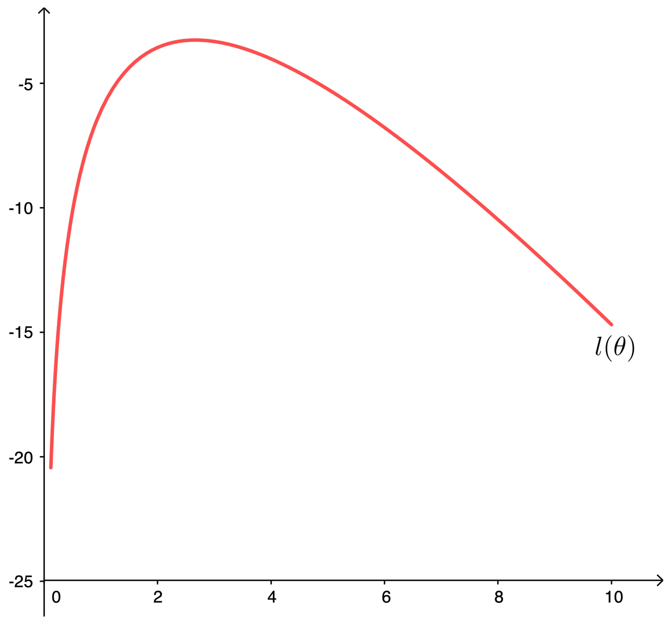
Vi vet at

$$P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{1}{x!}\lambda^x \qquad L(\lambda; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} e^{-\lambda}\frac{1}{x_j!}\lambda^{x_j}$$

Vi får nå

$$\begin{aligned}
L(X = 3, Y = 5; \theta, 2\theta) =& e^{-\theta}\frac{1}{3!}\theta^3 e^{-2\theta}\frac{1}{5!}(2\theta)^5 \\
\ln(L) = l(\theta) =& \ln\left(e^{-\theta}\frac{1}{3!}\theta^3 e^{-2\theta}\frac{1}{5!}2^5\theta^5\right) \\
=& -\theta - \ln 3! + 3\ln\theta - 2\theta - \ln 5! + 5\ln 2 + 5\ln\theta \\
=& 5\ln 2 - \ln 3! - \ln 5! + 8\ln\theta - 3\theta
\end{aligned}$$

Som vi skulle vise



Når $\theta = 2.667$ har $l(\theta)$ ca sitt maksimum.

Oppgave 3.(b)

Beregn sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren $\hat{\theta}$ for de observerte verdiene

$x = 3$ og $y = 5$. **Svar:** Begynner med å derivere l med hensyn på θ

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}l(\theta) =& \frac{d}{d\theta}\left(5\ln 2 - \ln 3! - \ln 5! + 8\ln\theta - 3\theta\right) \\
=& \frac{d}{d\theta}\left(\ln\frac{2\theta^8}{45} - 3\theta\right) \\
=& \frac{d}{d\theta}\left(ln\frac{2\theta^8}{45}\right) - \frac{d}{d\theta}(3\theta \\
=& \frac{8}{\theta} - 3
\end{aligned}$$

Så se på når $\frac{d}{d\theta}l(\theta) = 0$ og løse for θ

$$\begin{aligned}
\frac{8}{\theta} - 3 &= 0 \\
\theta &= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren $\hat{\theta}$ for de observerte verdiene blir 8/3 Oppgave 4.(a)
Vis at disse har forventning og varians:

$$\begin{aligned}
E(X_1) &= \theta, & V(X_1) &= \theta(1-\theta) \\
E(X_2) &= 4\theta, & V(X_2) &= 4\theta(1-4\theta) \\
E(X_3) &= 5\theta, & V(X_3) &= 5\theta(1-5\theta)
\end{aligned}$$

Du vil bestemme et estimat for sannsynligheten θ ut fra de tre observasjonene X_1, X_2, X_3. Du foreslår at man skal bruke en av disse estimatorene:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{10}(X_1 + X_2 + X_3), \qquad \hat{\theta}_2 = \frac{1}{3}(X_1 + \frac{X_2}{4} + \frac{X_3}{5}).$$

Svar: Alle tre X_1, X_2, X_3 er binomisk fordelt med $n = 1$ og henholdsvis $p_1 = \theta, p_2 = 4\theta$ og $p_5 = 5\theta$. For en binomisk fordeling med $n = 1$ har vi $E(X) = np = p$ og $V(X) = np(1 - np) = p(1 - p)$.
Vi får

$$\begin{aligned}
E(X_1) &= p_1 = \theta & V(X_1) &= p_1(1-p_1) = \theta(1-\theta) \\
E(X_2) &= p_2 = 4\theta & V(X_2) &= p_2(1-p_2) = 4\theta(1-4\theta) \\
E(X_3) &= p_3 = 5\theta & V(X_3) &= p_3(1-p_3) = 5\theta(1-5\theta)
\end{aligned}$$

Oppgave 4.(b)
Vis at begge estimatorene er forventingsrette. Fin uttrykk for variansene til $\hat{\theta}_1$ og $\hat{\theta}_2$ uttrykt vet θ. Avgjør hvilken estimator som er best når $\theta = 0.2$.
Svar: Forventingsrett er at estimatoren har forventning θ

$$\begin{aligned}
E(\hat{\theta}_1) =& E\left(\frac{1}{10}(X_1 + X_2 + X_3)\right) \\
=& \frac{1}{10}(E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)) \\
=& \frac{1}{10}(\theta + 4\theta + 5\theta) = \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\hat{\theta}_2) =& E\left(\frac{1}{3}\left(X_1 + \frac{X_2}{4} + \frac{X_3}{5}\right)\right) \\
=& \frac{1}{3}\left(E(X_1) + \frac{E(X_2)}{4} + \frac{E(X_3)}{5}\right) \\
=& \frac{1}{3}\left(\theta + \frac{4\theta}{4} + \frac{5\theta}{5}\right) = \theta
\end{aligned}$$

Begge estimatorene er forventingsrette

$$\begin{aligned}
V(\hat{\theta}_2) &= V\left(\frac{1}{10^2}(X_1+X_2+X_3)\right) \\
&= \frac{1}{10^2}(V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)) \\
&= \frac{1}{10^2}(\theta(1-\theta)+4\theta(1-4\theta)+5\theta(1-5\theta)) \\
&= \frac{1}{10^2}(\theta-\theta^2+4\theta-16\theta^2+5\theta-25\theta^2) \\
&= \frac{1}{10^2}(10\theta-42\theta^2) \\
&= \frac{\theta}{10}-\frac{21\theta^2}{50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(\hat{\theta}_2) &= V\left(\frac{1}{3^2}\left(X_1+\frac{X_2}{4}+\frac{X_3}{5}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3^2}\left(V(X_1)+\frac{V(X_2)}{4}+\frac{V(X_3)}{5}\right) \\
&= \frac{1}{3^2}\left(\theta(1-\theta)+\frac{4\theta(1-4\theta)}{4}+\frac{5\theta(1-5\theta)}{5}\right) \\
&= \frac{1}{3^2}(\theta-\theta^2+\theta-4\theta^2+\theta-5\theta^2) \\
&= \frac{1}{3^2}(3\theta-10\theta^2) \\
&= \frac{\theta}{3}-\frac{10\theta^2}{3}
\end{aligned}$$

Velger den med minst varians

$$V(\hat{\theta}_1) = \frac{0.2}{10}-\frac{21\cdot 0.2^2}{50} = 0.0032 \qquad V(\hat{\theta}_2) = \frac{0.2}{3}-\frac{10\cdot 0.2^2}{3^2} \approx 0.022$$

Derfor er $\hat{\theta}_1$ best

Oppgave 5.(a)

Hvis en velger et kålhode tilfeldig, hva er sannsynligheten for at dette skal: i) veie mindre enn 1.5 kg? ii) veie mellom 2 og 2.5 kg? Hva er sannsynligheten for at vektforskjellen mellom to tilfelidig valgte kålhoder skal være mer enn 1 kg?

svar: i) vil finne $P(X < 1.5)$

$$P(X<1.5) = P\left(Z < \frac{1.5-2.2}{0.8}\right) = P(Z<0.875) = 0.1908$$

ii) Vil finne $P(2 < X < 2.5)$

$$\begin{aligned}
P(2<X<2.5) &= P\left(\frac{2-2.2}{0.8} < Z < \frac{2.5-2.2}{0.8}\right) \\
&= P(-0.25 < Z < 0.375) \\
&= 0.6443 - 0.4013 = 0.24
\end{aligned}$$

Vi har to uavhengige variabler X_1 og X_2 og vi vil finne $P(|X_1 - X_2| > 1)$.

$$\sigma^2 = \sqrt{V(X_1)+V(X_2)} = \sqrt{0.64+0.64} = 1.13 \qquad \mu = E(X_1)-E(X_2) = 2.2-2.2 = 0$$

Som gir

$$P(|X_1-X_2|>1) = P\left(\frac{|X_1-X_2|}{1.13} > \frac{1}{1.13}\right) = 2P\left(Z < \frac{-1}{1.13}\right) = 0.3788$$

Oppgave 5.(b)

Gitt at et kålhode oppgyller kravet (veier minst 1.5 kg), hva er sannsynligheten for at det veier mellom 2 og 2.5 kg?

Svar:

$$\begin{aligned}
P(2<X<2.5|Z>1.5) &= \frac{P(X<2.5)-P(X<2)}{P(X>1.5)} \\
&= P\left(Z<\frac{2.5-\mu}{\sigma}\right) - P\left(Z<\frac{2-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \frac{0.24}{1-0.1908} = 0.297
\end{aligned}$$

Oppgave 5.(c)

Hvilke estimator ville di bruke for å estimere μ_Y? Skriv opp estimatoren og regn ut estimatet fra dataene i tabellen. Finn et 90%-konfidensitervall for μ_Y. Hva blir lengden av konfidensintervallet? Hvor mange planter måtte vi minst hatt for at lengden av konfidensintervallet skullet blitt mindre enn 0.2 kg?

Svar: En estimator for normalfordeling kan være $\hat{\mu}_Y = \overline{Y}$ og da blir estimatet

$$\hat{\mu}_Y = \overline{y} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i = 2.65$$

90% konfidensintervallet blir med $Z_{0.05} = 1.645$

$$2.65 \pm 1.645\frac{0.8}{\sqrt{10}} = [2.23, 3.07]$$

Lengden av konfidensintervallet blir

$$2 \cdot 1.645\frac{0.8}{\sqrt{10}} = 0.83$$

For at lengden n av konfidensintervallet skal bli mindre enn 0.2 kg

$$2 \cdot 1.645\frac{0.8}{\sqrt{n}} < 0.2$$
$$n > \left(\frac{2 \cdot 1.645 \cdot 0.8}{0.2}\right)^2 = 13.16$$

Derfor må $n = 14$ for at bredden av intervallet skal bli mindre enn 0.2

Oppgave 6.(a)

Finn et 95% konfidensintervall for μ basert på dataene som er gitt ovenfor. Hvordan tolker du en dekningsgrad på 95%

Svar: Vi har at $\overline{x} = 284$ og $s = \sqrt{2342/4} = 24.2$.

95% konfidensintervall er gitt ved

$$284 \pm 1.96 \cdot \frac{24.2}{\sqrt{5}} = [262.79, 305.21]$$

Det vil si at hvis vi gjentar målingene n ganger vil [nedre, øvre] inneholde den sanne graden av forurensingen 95% av gangene.