Faculté des Sciences et Ingénierie - Sorbonne Université
Master Informatique parcours ANDROIDE

COMPLEX - Complexité, algorithmes randomisés et approchés

Rapport de projet

Arbres Cartésien et Algorithmes associés

Réalisé par :

PINHO FERNANDES Enzo

BEN SALAH Adel

Novembre 2024

Table des matières

Introduction du projet

Les arbres cartésiens sont une structure de données qui combine les propriétés des arbres binaires de recherche et des tas. Ils ont été proposés par Jean Vuillemin en 1980. Voici un aperçu de leur structure et de leur fonctionnement :

Structure

— **Noeuds :** chaque noeud d'un arbre cartésien contient une clé (qui respecte l'ordre d'un arbre binaire de recherche) et une priorité (qui respecte l'ordre d'un tas).

— **Arbre binaire de recherche :** les noeuds sont organisés de manière à ce que, pour tout noeud, les clés de son sous-arbre gauche soient inférieures à sa clé, et celles de son sous-arbre droit soient supérieures.

— **Tas :** les noeuds sont également organisés selon la priorité, de sorte qu'un parent ait toujours une priorité inférieure à celle de ses enfants.

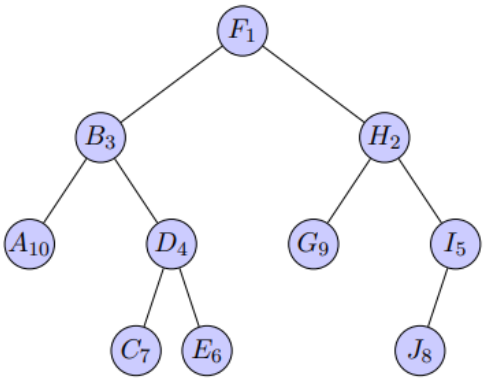


FIGURE 1 – Exemple d'arbre cartésien contenant les clés de {A,B,...,J} avec les valeurs de priorités dans {1,...,10} données en indice.

Propriétés

— **Équilibre probabiliste :** Les arbres cartésiens maintiennent une structure équilibrée de manière **probabiliste**. Cela signifie que les opérations d'insertion, de suppression et de recherche ont une complexité en temps moyenne de $O(\log n)$ même si dans le pire des cas, cela peut atteindre $O(n)$ (où n désigne le nombre de noeuds de l'arbre cartésien).

— **Insertion et suppression :** Lors de l'insertion, un nouveau noeud est placé comme un noeud feuille dans l'arbre binaire de recherche. Puis, si sa priorité est inférieure à celle de son parent, il est "élevé" à travers des rotations jusqu'à ce que l'ordre du tas soit respecté (*cf.* Exercice 3).

— **Recherche :** La recherche d'une clé suit les règles d'un arbre binaire de recherche, ce qui la rend efficace.

Les arbres cartésiens sont utilisés dans diverses applications où une structure de données dynamique et équilibrée est nécessaire, comme la gestion de fichiers, les bases de données et les algorithmes de traitement d'événements. Le but de ce projet est d'implanter et d'analyser cette structure de données et d'effectuer des tests d'efficacités.

Exercice 1

Arbres cartésiens - Premières propriétés

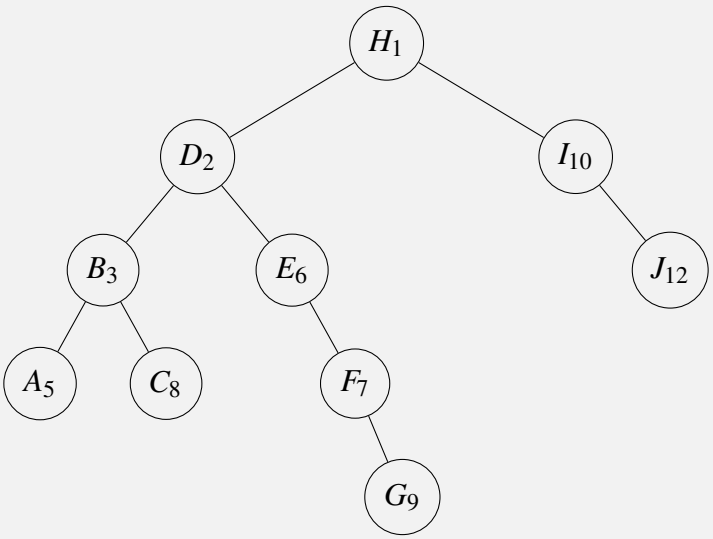
1.a] Construire un arbre cartésien dont les noeuds sont donnés par la liste suivante (la lettre représentant la clé du noeud et l'entier sa priorité) :

$$(A:5),(B:3),(C:8),(D:2),(E:6),(F:7),(G:9),(H:1),(I:10),(J:12)$$

Existe-t-il plusieurs solutions ? Qu'en est-il pour un arbre cartésien dont toutes les priorités sont différentes (ce que nous ferons dans toute la suite du projet). Justifier votre réponse.

Réponse à la 1.a - 1/2

Arbre cartésien de la liste précédente :



Il n'existe pas plusieurs solutions, et cela est vrai également pour tout arbre cartésien dont toutes les priorités sont différentes, grâce aux propriétés d'un arbre de recherche binaire et d'un tas.

En effet, dans un arbre cartésien, la **racine** doit être le noeud avec **la priorité la plus faible** parmi tous les noeuds par la propriété du tas. Par conséquent, il n'y a qu'une possibilité, le choix de la racine est unique.

Réponse à la 1.a - 2/2

Une fois cela fait, l'ensemble des autres noeuds de priorité inférieure seront divisés en deux sous-ensembles selon leur clé, d'après la propriété d'un arbre de recherche binaire :

- Le sous-arbre gauche contiendra tous les noeuds ayant des clés inférieures à celle de la racine.
- Le sous-arbre droit contiendra tous les noeuds ayant des clés supérieures à celle de la racine.

Ces deux sous-ensembles sont indépendants l'un de l'autre, et surtout uniques. Chacun de ces sous-ensembles doivent représenter eux-même un arbre cartésien.

On suivra le même raisonnement récursivement sur les sous-ensembles gauche et droit :

- On choisit le noeud du premier sous-ensemble avec la priorité la plus faible comme racine.
- On choisit le noeud du second sous-ensemble avec la priorité la plus faible comme racine.

Et on recommence jusqu'à que tous les noeuds soient placés dans l'arbre cartésien.

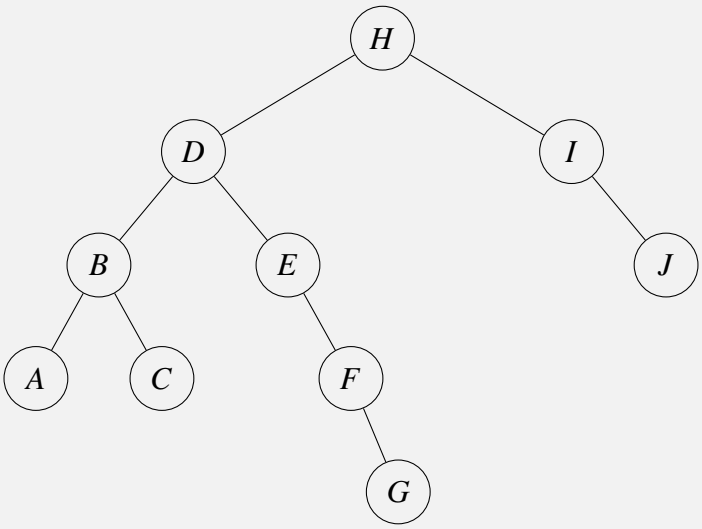
En conclusion, **tout arbre cartésien est unique** (si toutes les priorités sont différentes) puisque chaque décision de construction est unique, alias :

- Le choix de la racine, de par sa priorité la plus faible de son sous-ensemble, grâce à la propriété du tas.
- Le choix des deux sous-ensembles, de par les clés des noeuds, grâce à la propriété des arbres de recherche binaire.

1.b] Considérer l'arbre binaire de recherche construit en insérant dans l'ordre les noeuds dont les clés sont les suivantes : $H, D, B, A, E, F, C, G, I$ et J et comparer à l'arbre cartésien de la question précédente. Généraliser et démontrer ce résultat pour un arbre cartésien général (dont les priorités sont différentes).

Réponse à la 1.b - 1/1

L'arbre issu de l'insertion de ces noeuds, dans cet ordre, donne exactement le même arbre cartésien de la question précédente.



Nous avons cette corrélation entre les deux arbres parce que nous avons inséré les noeuds selon leur priorité (en ordre croissant) dans l'arbre cartésien.

On peut généraliser ce résultat en : un arbre cartésien est un ABR où nous avons inséré les noeuds dans l'ordre croissant de leur priorité (si elles sont toutes différentes).

En effet, trois propriétés sont visibles dans ce cas précis :

- La racine des deux arbres sont les mêmes, alias le noeud dont la priorité est la plus faible.
- La propriété de l'ABR est respecté dans les deux cas, étant donné la nature des arbres.
- La propriété du tas est respecté pour l'arbre cartésien bien évidemment, mais également pour cet ABR. En effet, pour ce dernier, on insère les noeuds dans l'ordre croissant de leur priorité. D'après l'algorithme d'insertion de ce dernier, il deviendra forcément une des feuilles de l'arbre à la fin de l'insertion, et il n'y a pas de rotation. Par conséquent, tout parent de cet arbre aura une priorité plus faible que leurs enfants.

Étant donné que tout arbre respectant les propriétés d'un ABR et d'un tas est unique, et que dans ce cas précis, nos deux arbres respectent ces propriétés et possèdent la même racine, alors... Ils sont égaux, dû à leur unicité.

1.c] Programmer la structure de données d'un noeud (contenant la clé et la priorité, le pointeur vers le fils gauche, le pointeur vers le fils droit) avec les constructeurs et les fonctions associés.

Réponse à la 1.c - 1/1

Nous avons décidé d'implémenter nos différentes structures de données en JAVA, pour sa simplicité quant à l'utilisateur des pointeurs ainsi que de la mémoire.

En effet, le garbage collector s'occupe de libérer la mémoire dès qu'un objet n'est plus référencé, ce qui nous sera très pratique au moment de la suppression des noeuds.

L'Implantation se trouve dans le fichier : ./src/Node.java

1.d] Programmer la structure de données d'un arbre cartésien (avec au minimum un constructeur pour l'arbre cartésien vide, une fonction pour tester si un arbre cartésien est vide, pour accéder au fils droit/gauche d'un noeud donné).

Réponse à la 1.d - 1/1

L'Implantation se trouve dans le fichier : ./src/CartesianTree.java

1.e] Avec votre implantation, construire "manuellement" l'arbre cartésien de la question 1.a.

Réponse à la 1.e - 1/1

La construction de l'arbre se trouve dans le fichier test : ./test/Exo_1_e.java

Le test "testTreeStructure" affiche l'arbre obtenu dans la console de débogage.

Exercice 2

Recherche dans un arbre cartésien

2.a] Implanter l'algorithme de recherche d'un noeud contenant une clé donnée dans un arbre cartésien. L'algorithme est identique à celui de recherche dans un arbre binaire de recherche.

Réponse à la 2.a - 1/1

Les méthodes `searchKey` et `searchKeyRec` dans le fichier ./src/CartesianTree.java correspondent à l'implantation de l'algorithme de recherche de noeud. (l.60-85)

2.b] Donner la complexité de cet algorithme en fonction de la profondeur du noeud recherché (en cas de recherche fructueuse) ou de la profondeur de son successeur ou prédécesseur du noeud recherché (en cas de recherche infructueuse).

Réponse à la 2.b - 1/2

L'algorithme de recherche d'un noeud dans un arbre cartésien est le même que celui dans un ABR.

Lors de la recherche, à chaque itération, on identifie trois cas :

- Si la clé recherchée est la clé du noeud courant, on a trouvé le noeud.
- Si la clé recherchée est inférieure à celle du noeud courant, on continue la recherche chez le fils gauche.
- Si la clé recherché est supérieure à celle du noeud courant, on continue la recherche chez le fils droit.

En toute logique, la complexité de la recherche dépendra donc du nombre de noeuds parcourus depuis la racine, jusqu'au noeud recherché si la recherche est fructueuse, sinon, jusqu'à une feuille en cas de recherche infructueuse.

Posons $d(x)$ la profondeur du noeud x étant soit le noeud recherché en cas de recherche fructueuse, sinon la feuille atteinte. Alors la complexité de la recherche est en $O(d(x))$.

Réponse à la 2.b - 2/2

Mais ce n'est pas tout, on peut distinguer deux cas :

— **Le cas moyen :** Quand l'arbre cartésien est "relativement équilibré", alors la profondeur moyenne d'un noeud est environ à $O(\log n)$, n étant le nombre de noeuds de l'arbre. Ce sera donc la complexité de la recherche dans le cas d'un arbre cartésien dont les ensembles de clés et de priorités sont bien répartis.

— **Le cas critique :** Quand l'arbre est déséquilibré, par exemple un arbre qui représente une liste, alors la profondeur serait en $O(n)$. Ce sera donc la complexité dans le pire cas, où l'ensembles de clés et de priorités sont mal répartis.

En conclusion, on aura comme complexité pour un arbre cartésien à n noeuds :

— **S'il est équilibré :** $O(\log n)$

— **S'il est déséquilibré :** $O(n)$

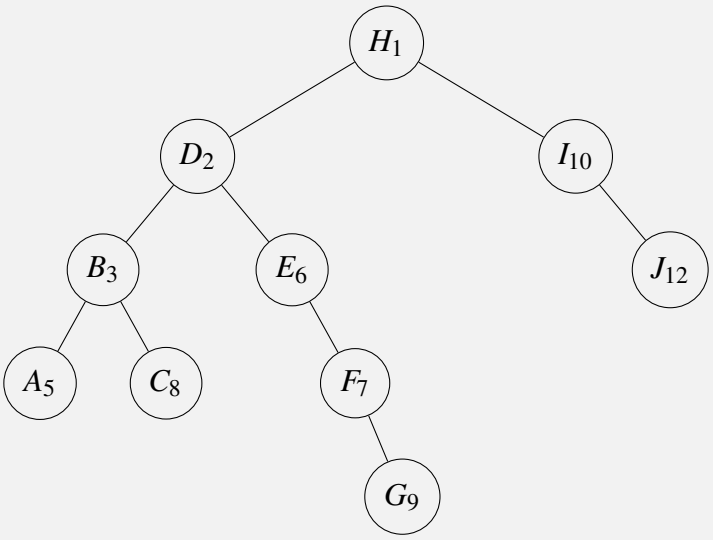
Exercice 3

Insertion dans un arbre cartésien

3.a] Montrer, sur l'exemple de la question 1.a. que l'insertion d'un noeud dans un arbre cartésien en suivant la méthode d'insertion dans un arbre binaire de recherche, peut résulter en un arbre qui ne vérifie plus la propriété de tas.

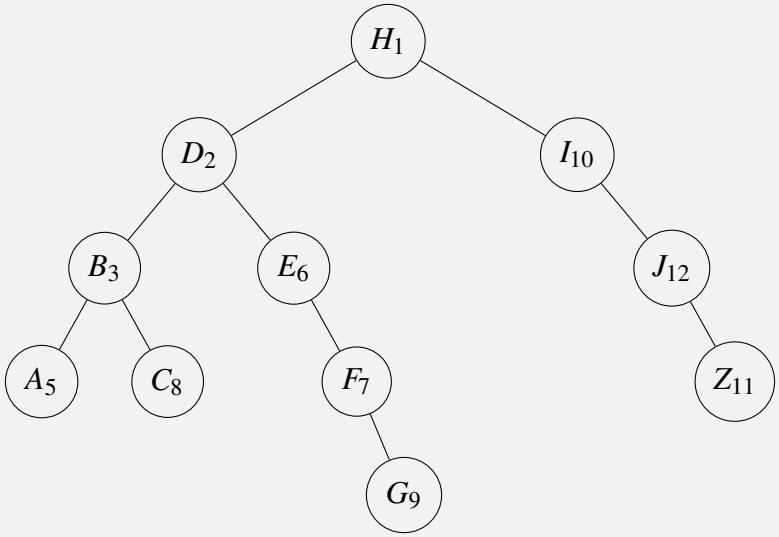
Réponse à la 3.a - 1/2

Prenons l'exemple de la question 1.a. Pour rappel, l'arbre cartésien est ce dernier :



Réponse à la 3.a - 2/2

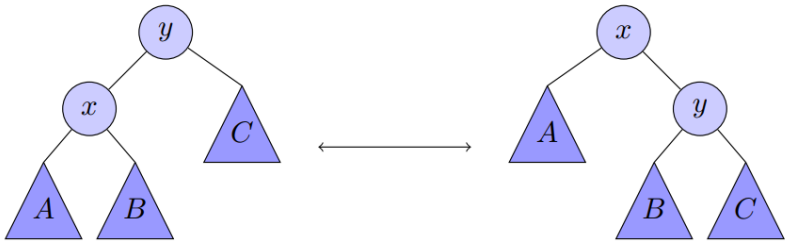
Essayons d'insérer le noeud (Z : 11) suivant l'algorithme d'insertion d'un ABR. Le résultat sera :



Nous voyons bien que cet arbre ne respecte pas les propriétés d'un arbre cartésien, étant donné qu'un parent a une priorité plus grande qu'un de ses fils, ici (J : 12) alias le parent de (Z : 11).

Par conséquent, l'insertion d'un noeud dans un arbre cartésien en suivant la méthode d'insertion dans un arbre binaire de recherche peut résultat en un arbre qui ne vérifie plus la propriété du tas.

Pour réparer cela, l'insertion dans un arbre cartésien va se faire arbre cartésien va se faire initialement comme dans un arbre binaire de recherche mais devra effectuer des *rotations* d'arbre (voir le diagrame suivant pour une rotation au noeud x) pour rétablir la propriété du tas.



Une telle rotation préserve la propriété d'arbre binaire mais permet de rétablir la propriété de tas. Désormais pour insérer un noeud z dans un arbre cartésien, il sera inséré comme dans un arbre binaire de recherche mais une fois cela effectué, tant que sa priorité est inférieure à celle de son noeud parent, effectuer une rotation au noeud z. Chaque rotation diminue la profondeur du noeud z de 1 et augmente celle de son parent de 1. Les rotations peuvent être effectuées en temps constant puisqu'il s'agit simplement de manipulation de pointeurs.

3.b] Donnez la complexité de cet algorithme en fonction de la profondeur de son prédécesseur.

Réponse à la 3.b - 1/2

L'insertion dans un arbre cartésien suit deux étapes :

- L'insertion classique dans un arbre binaire de recherche.
- La succession de rotations jusqu'à que la propriété du tas soit respectée.

Posons x le noeud à insérer.

L'insertion d'un noeud dans un ABR consiste à une suite de comparaison pour rechercher la future place de ce dernier, en respectant l'ordre des clés. Comme pour son algorithme de recherche, son insertion repose sur le nombre de comparaisons nécessaires pour trouver la position du nouveau noeud, alias $d(x)$ la profondeur du noeud inséré.

Donc pour la première étape, l'insertion classique d'un ABR a une complexité de $O(d(x))$.

Réponse à la 3.b - 2/2

La seconde étape consiste à une succession de rotations jusqu'à que la propriété du tas soit respectée. Ces rotations n'affectent en rien la propriété des ABR. A chaque rotation, la profondeur du noeud inséré diminuera de 1. On recommence cette étape jusqu'à que la propriété du tas soit respectée.

Dans le pire des cas, nous devons remonter le noeud jusqu'à la racine, on aura donc $d(x)$ rotations à faire car on le remonte d'un seul niveau par rotation. C'est le nombre maximal de rotations.

Etant donné que chaque rotation se fait en temps constant, la complexité totale des rotations est en $O(d(x))$.

La complexité totale de l'insertion dans un arbre cartésien est donc de :

$$O(d(x)) + O(d(x)) = O(d(x))$$

En conclusion, pour les mêmes raisons qu'en 2.b, on aura comme complexité pour un arbre cartésien à n noeuds :

- **S'il est équilibré :** $O(\log n)$
- **S'il est déséquilibré :** $O(n)$

3.b] Implanter cet algorithme.

Réponse à la 3.c - 1/1

Les méthodes `insert` et `insertRec` dans le fichier ./src/CartesianTree.java correspondent à l'implantation de l'algorithme d'insertion de noeud. (l.95-136)

3.d] Appliquer votre algorithme pour créer les arbres cartésiens obtenus en insérant les noeuds suivant dans l'ordre donné :

1. (A :5), (B :3), (C :8), (D :2), (E :6), (F :7), (G :6), (H :1), (I :10), (J :12)
2. (H :1), (G :9), (A :5), (B :3), (D :2), (F :7), (C :8), (J :12), (I :10), (E :6)
3. (E :6), (H :1), (B :3), (D :2), (C :8), (F :7), (G :9), (J :12), (A :5), (I :10)

et vérifier que vous obtenez bien à chaque fois le même arbre cartésien que dans la question **1.a.**

Réponse à la 3.d - 1/1

Les tests d'insertion se trouvent dans le fichier test : ./test/Exo_3_d.java

Chaque test vérifie que l'arbre obtenu est bien celui de la question **1.a** grâce à la méthode `equals` qui teste si un arbre est égal à un autre (selon les clés). De plus, chaque arbre est affiché dans la console de débogage.

Exercice 4

Suppression dans un arbre cartésien

4.a] Expliquer pourquoi pour supprimer un noeud z dans un arbre cartésien, il est possible de faire des rotations dans l'autre sens avec son fils qui a la priorité la plus faible jusqu'à l'amener à une feuille de l'arbre où il peut être supprimer. Chaque rotation augmente alors la profondeur du noeud z de 1 et diminue celle de son fils qui a la priorité la plus faible de 1.

Réponse à la 4.a - 1/1

Pour commencer, nous savons que les rotations préservent la propriété d'un ABR.

Posons z le noeud à supprimer et x son fils qui a la priorité la plus faible. Nous souhaitons descendre z de l'arbre jusqu'à qu'il devienne une feuille, et donc qu'on puisse le supprimer. Pour ça, nous pouvons déjà rechercher le noeud, et ensuite nous ferons une suite de rotations dans l'autre sens avec x, jusqu'à qu'il devienne une feuille.

Nous pouvons facilement constater que chaque rotation ne violera pas la propriété du tas (sans compter z), en effet :

- x aura comme sous-noeuds : z, son frère initial et ses enfants, ainsi que ses enfants initiaux.
- Étant donné qu'on cherche à supprimer z, on ne le considère pas pour la propriété du tas.
- x était le fils de z avec la priorité la plus basse, il respecte donc la propriété du tas avec son frère initial, qui est maintenant à un niveau inférieur. C'est également le cas avec les enfants du frère, qui ont une plus grande priorité que ce dernier.
- x a une priorité inférieure à ses enfants initiaux d'après l'arbre cartésien pré-rotation.

En répétant ce processus, nous finirons bien avec z qui deviendra une feuille, vu qu'il perd petit à petit son lien avec ses enfants à chaque rotation. Et enfin, nous pourrons le supprimer, tout en respectant les propriétés d'un arbre cartésien à la fin.

4.b] Donner la complexité de l'algorithme obtenu.

Réponse à la 4.b - 1/1

L'algorithme de suppression dans un arbre cartésien se fait en deux étapes :

- La recherche du noeud à supprimer.
- Une suite de rotation du noeud à supprimer, jusqu'au fond de l'arbre.

Nous remarquons vite que nous parcourons l'arbre du haut vers le bas, jusqu'à tomber sur une feuille, et que chaque étape se fait en temps constant.

- Comparer la clé du noeud à supprimer avec le noeud courant : temps constant.
- S'il y a une rotation : temps constant.

La complexité de l'algorithme sera donc la profondeur de la feuille x rencontrée, que ce soit le noeud à supprimer ou non $\Rightarrow \Theta(d(x))$.

En conclusion, pour les mêmes raisons qu'en 2.b, on aura comme complexité pour un arbre cartésien à n noeuds :

- **S'il est équilibré :** $\Theta(\log n)$
- **S'il est déséquilibré :** $\Theta(n)$

4.c] Implanter cet algorithme.

Réponse à la 4.c - 1/1

Les méthodes `delete` et `deleteRec` dans le fichier ./src/CartesianTree.java correspondent à l'implantation de l'algorithme de suppression de noeud. (l.195-252)

4.d] Appliquer votre algorithme pour créer des arbres cartésiens obtenus en supprimant successivement les noeuds suivants dans l'arbre cartésien de la question **1.a** :

$$(A : 5), (J : 12), (H : 1)$$

Réponse à la 4.d - 1/1

Les tests d'insertion se trouvent dans le fichier test : ./test/Exo_4_d.java

Chaque test vérifie que l'arbre obtenu après suppression est correct grâce à la méthode `equals`. En effet, on construit également un arbre avec les insertions SANS le noeud supprimé à côté. De plus, après chaque suppression, l'arbre est affiché dans la console de débogage.

Exercice 5

Priorités aléatoires - Aspect expérimental

Un arbre cartésien *aléatoire* est un arbre dans lequel les priorités sont tirés uniformément aléatoirement dans l'intervalle [0,1]. Il est possible d'utiliser des entiers dans un intervalle suffisamment grand pour espérer que tous les noeuds auront des clés différentes avec une très forte probabilité.

Pour insérer une nouvelle clé dans un arbre cartésien aléatoire, une priorité est itrée uniformément aléatoirement et c'est le noeud formé de cette clé et de cette priorité qui est inséré dans l'arbre.

Effectuer une analyse très détaillée d'efficacité expérimentale de votre structure de données pour un tel arbre cartésien aléatoire. En particulier :

- expliquer quelles métriques sont pertinentes pour évaluer l'équilibre et l'efficacité d'un arbre cartésien par rapport à d'autres structures de données ;
- faire une analyse de ces métriques sur des arbres cartésiens avec un nombre de noeuds le plus grand possible (pour votre implantation) ;
- donner un exemple d'une séquence d'insertion qui pourrait déséquilibrer un arbre binaire de recherche classique et expliquez comment un arbre cartésien se défend contre cela grâce à sa structure aléatoire ;
- discuter, le cas échéant, des implications de la collision des priorités sur la structure de l'arbre et sur les performances des opérations.

Les métriques pertinentes

Afin d'évaluer l'équilibre et l'efficacité d'un arbre cartésien par rapport à d'autres structures de données, on utilisera les métriques suivantes :

- **La profondeur moyenne et maximale :** En effet, ces derniers reflettent l'équilibre d'un arbre, et aura forcément un coup sur la complexité de certaines opérations. Il est donc important de les comparer avec les autres structures.
- **Le temps d'exécution :** Il faut comparer le temps de recherche, d'insertion et de suppression de notre arbre cartésien aléatoire et des autres structures de données.
- **Comparaison avec des structures de données équilibrées** : Nous allons comparer les métriques précédentes en utilisant les AVL et les arbres rouge-noir, qui donnent des arbres équilibrés. Si les résultats sont "proches", alors notre arbre cartésien aléatoire est intéressante, et naturellement presque équilibrée.

Analyse des métriques - 1/2

Après avoir exécuté ./src/Experimentation_CartesienTreeRandom.java plusieurs fois, et pour des n différents, voici une moyenne des résultats :

Taille n	Profondeur moyen (cartésien)	Profondeur max (Cartésien)	Profondeur max (AVL)	Profondeur max (Rouge-noir)
10 000	15	30	14	16
100 000	20	40	15	17
1 000 000	25	52	18	20
10 000 000	29	57	20	22

Taille n	Temps d'insertion (ms)	Temps de recherche (ms)	Temps de suppression (ms)	Pour les AVL et Rouge-Noir
10 000	7	3	2	log(n)
100 000	27	17	16	log(n)
1 000 000	226	172	139	log(n)
10 000 000	2359	1721	1077	log(n)

Pour commencer, nous voyons bien que la profondeur moyenne est proche de $O(logn)$. En effet, en faisant pour chacune des profondeurs moyennes des arbres cartésien $\log_2(n)$, nous aurons un peu près les mêmes valeurs. Par exemple, $\log_2(10000) = 13$, ce qui est proche de 15.

Pour les profondeurs max, il est normal qu'ils soient supérieures à ceux des autres structures de données équilibrées. En effet, dû à la nature probabiliste des priorités, il se peut que certaines sous-arbres soient déséquilibrés. Mais les résultats restent satisfaisants.

Analyse des métriques - 2/2

Pour les temps d'exécution des opérations insertion, recherche et suppression, ceux des arbres équilibrées VL et Rouge-Noir sont de l'ordre de $O(\log n)$.

L'arbre cartésien nous montre que les résultats croit de manière significative avec n, mais ça reste plus lent que n lui-même, et les valeurs de temps sont relativement proportionnelle à $\log n$.

On peut le vérifier une dernière fois avec la différence de croissance de temps.

- **Croissance des log pour chaque n** : $\log(10000) = 4$, $\log(100000) = 5$, $\log(1000000) = 6$, $\log(10000000) = 7$
- **Croissance du temps d'insertion** :
  - **Entre n = 10000 et 100000** : 20 ms (insertion), 14 ms (recherche), 14 ms (suppression).
  - **Entre n = 100000 et 1000000** : 199 ms (insertion), 155 ms (recherche), 120 ms (suppression).
  - **Entre n = 1000000 et 10000000** : 2130 ms (insertion), 1549 ms (recherche), 938 ms (suppression).

Les différences sont significatives, certes, mais on voit qu'ils suivent la tendance d'augmentation des temps qui est proportionnelle à $\log(n)$.

En conclusion, pour des n de plus en plus grand, notre arbre cartésien aléatoire deviendra naturellement équilibré, permettant donc d'avoir une complexité d'insertion, de recherche et de suppression optimale. Bien évidemment, à cause de l'aléatoire, nous pouvons tomber sur des cas où les performances sont moindres, voir dans les cas extrêmes, d'avoir un arbre déséquilibré. Mais cela reste de plus en plus rare, quand n augmente.

La défense de l'arbre cartésien aléatoire face à l'arbre binaire de recherche - 1/1

Prenons une insertion où chaque nouvelle clé insérée est forcément supérieure à celles précédentes. Dans la logique d'insertion d'un arbre binaire de recherche, nous finirons sur un arbre totalement déséquilibré qui représentera plus une chaîne qu'un arbre.

Grâce à la structure aléatoire de notre arbre cartésien classique, on garde l'avantage d'un arbre binaire de recherche avec les clés... Mais aussi d'éviter le plus possible le cas d'une suite d'insertion non-avantageuse. En effet, en attribuant au hasard des priorités à ces éléments, l'ordre d'insertion devient négligeable, étant donné que la priorité dicte la hauteur des noeuds.

De plus, nous avons vu plus haut que la nature aléatoire des priorités permettent d'avoir un équilibre probable, quoi que leurs clés soient triés ou non. Nous pouvons le vérifier avec notre code, où nous avons inséré constamment une clé supérieure après une autre.

En conclusion, un arbre cartsien se défend bien face à ce genre de séquence d'insertion en rendant uniformément aléatoire la priorité des noeuds, permettant ainsi d'avoir une très faible chance d'avoir un arbre totalement déséquilibré.

La collision des priorités et les performances des opérations - 1/1

Dans le cas rare mais possible qu'on tombe sur des noeuds ayant les mêmes priorités, alors nous pouvons avoir plusieurs soucis.

Par exemple, dans **l'ordre d'insertion**, la stratégie implantée est ambigue. On ne sait pas quelle noeud doit être le parent de l'autre. Par conséquent, cela pourrait s'avérer être du hasard, et nous pourrions voir le risque d'avoir un arbre totalement déséquilibré. Et forcément, les performances des opérations seraient négativement impactées, étant donné qu'elles reposent sur les profondeurs des noeuds.

Les collisions des priorités peut donc devenir un grave soucis pour la complexité des opérations, et pour l'équilibre de l'arbre. Dans le cas de l'arbre cartésien aléatoire, il est certes possible d'en avoir, mais si nous choisissons nos clés uniformément aléatoirement dans un intervalle suffisamment grand, alors il reste très peu probable que ça arrive. Les bienfaits de cette structure surclasse donc l'inconvénient des collisions des priorités, et reste intéressante comme alternatives.

Exercice 6

Priorités aléatoires - Aspect théorique

L'objectif de cet exercice est de démontrer que la profondeur moyenne d'un noeud d'un arbre cartésien à n noeuds est en $O(\log n)$. Considérons un tel arbre et x_k le noeud dont la clé est la k-ième plus petite de l'arbre. Notons X_{ik} la variable aléatoire indiquant que x_i est un ancêtre propre de x_k (pour le tirage aléatoire des priorités).

6.a] Montrer que la profondeur moyenne de x_k est égale à $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_{ik}]$.

Réponse à la 6.a - 1/2

Pour commencer, nous devons trouver une formulation pour exprimer la profondeur de x_k dans un arbre cartésien.

La profondeur d'un noeud x_k noté $d(x_k)$ dans un arbre représente le nombre d'arêtes qu'on doit traverser de la racine jusqu'à x_k. Autrement dit, sa profondeur représente le nombre d'ancêtre propre qu'il possède.

Par conséquent, si on définie la variable aléatoire X_{ik} de la manière suivante :

$$X_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ si } x_i \text{ est un ancêtre de } x_k. \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Alors nous pouvons formuler la profondeur de x_k comme :

$$d(x_k) = \sum_{i=1}^{n} X_{ik}$$

La moyenne des profondeurs de x_k correspond à l'espérance de cette formule :

$$d_{moy}(x_k) = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} X_{ik}]$$

Réponse à la 6.a - 2/2

Or, d'après la linéarisation de l'espérance, c'est-à-dire $\mathbb{E}[a+b] = \mathbb{E}[a] + \mathbb{E}[b]$, on a donc :

$$d_{moy}(x_k) = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} X_{ik}] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_{ik}]$$

En conclusion, nous avons démontré que la profondeur moyenne de x_k est égale à $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_{ik}]$.

6.b] Notons $X(i,k)$ l'ensemble des noeuds $\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k\}$ ou $\{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_i\}$ suivant selon $i < k$ ou $i > k$. Montrer que $X_{ik} = 1$ si et seulement si x_i est le noeud qui a la plus petite priorité dans $X(i,k)$.

Réponse à la 6.b - 1/1

Prouvons que $X_{ik} = 1 \iff x_i$ est le noeud ayant la priorité minimale dans $X(i,k)$.

Supposons que $X_{ik} = 1$. x_i est donc un ancêtre propre de x_k.

Nous savons que x_i appartient à l'ensemble $X(i,k)$, qui par définition, représente tous les noeuds entre x_i et x_k dans l'ordre des clés.

— Vu que x_i est un ancêtre propre de x_k, alors sa priorité est forcément plus faible.

Supposons par l'absurde qu'un noeud x_j tel que $(i < j < k)$ ou $(i > j > k)$ possède une priorité plus faible que x_i.

— **D'après la propriété du tas :** x_j serait au dessus de x_i et de x_k.
— **D'après la propriété d'un ABR :** étant donné qu'on a les clés $(i < j < k)$ ou $(i > j > k)$, alors x_i et x_k ne peuvent pas être dans le même sous-arbre de x_j, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse, x_i ne pourrait pas être un ancêtre propre de x_k.

Donc en supposant que $X_{ik} = 1$, x_i doit forcément avoir la priorité la plus faible de l'ensemble $X(i,k)$, sinon il y aurait une contradiction.

Supposons que x_i est le noeud ayant la priorité minimale dans $X(i,k)$.

Nous pouvons déduire que x_i est un ancêtre propre de x_k grâce à ces propriétés :

— **D'après la propriété du tas :** x_i est au dessus de tous les autres noeuds de $X(i,k)$, x_k compris.
— **D'après la propriété d'un ABR :** Etant donné que les clés de x_i et x_k délimitent $X(i,k)$, alors x_k est forcément dans un des sous-arbre de x_i.

Donc en supposant que x_i est le noeud ayant la priorité minimale dans $X(i,k)$, on a démontré que x_i est un ancêtre propre de x_k, donc que $X_{ik} = 1$.

Nous avons donc bien démontré que $X_{ik} = 1$ si et seulement si x_i est le noeud qui a la plus petite priorité dans $X(i,k)$

6.c] Conclure (en vous inspirant de la preuve de la complexité en moyenne du tri rapide vue en cours).

Réponse à la 6.c - 1/3

Pour rappel, nous savons que :

— la profondeur moyenne de x_k est égale à $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_{ik}]$.

— $X_{ik} = 1$ si et seulement si x_i est le noeud qui a la plus petite priorité dans $X(i,k)$.

Et on suppose que toutes les priorités sont différentes.

On sait que $X_{ik} = 1 \iff x_i$ est le noeud ayant la priorité minimale dans $X(i,k)$ et que les priorités de tous les noeuds sont tiré uniformément aléatoirement, par conséquent :

— **Grâce à la réciproque :** on peut déduire que la probabilité que $X_{i,k} = 1$ est égale à la probabilité que x_i possède la plus faible priorité dans $X(i,k)$, donc une chance sur tous les noeuds présents.

— **Grâce à l'uniformité de l'aléatoire :** on peut déduire que l'espérance de X_{ik} est égale à la probabilité que $X_{i,k} = 1$.

$$\mathbb{E}[X_{ik}] = P(X_{ik} = 1) = \frac{1}{|X(i,k)|}$$

De plus, nous pouvons facilement déduire que $|X(i,k)| = |i-k+1|$ noeuds, ou autrement dit :

$$|X(i,k)| = \begin{cases} i-k+1 \text{ noeuds} & \text{si i > k} \\ k-i+1 \text{ noeuds} & \text{si i < k} \end{cases}$$

Le cas $i = k$ n'est pas défini pour X(i,k), on l'ignorera donc.

Nous savons que la profondeur moyenne de x_k est égale à $\sum_{i \in 1,\dots,n} \mathbb{E}[X_{ik}]$. Par conséquent, nous avons :

$$d_{moy}(x_k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_{ik}] = \sum_{i \in \{1,\dots,n\} \setminus \{k\}} \frac{1}{|i-k|+1}$$

On peut donc le réécrire de cette manière :

$$d_{moy}(x_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{k-i+1} + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i-k+1}$$

Et avec un changement de variable où l'on pose $j = k - i$:

$$d_{moy}(x_k) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j+1} + \sum_{j=k+1}^{n-k} \frac{1}{j+1}$$

Réponse à la 6.c - 2/3

En cours, nous avons vu la preuve de la complexité en moyenne du tri rapide, qui comportait une partie sur les nombres harmoniques. On s'inspirera de cette dernière.

Pour la première somme de la formule que l'on notera S_1, nous avons :

$$S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j+1}$$

Nous avons donc :

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{t+1}\, dt \leq \frac{1}{j+1} \leq \int_{j-1}^{j} \frac{1}{t+1}\, dt$$

En sommant de 1 à $k-1$:

$$\int_1^{k} \frac{1}{t+1}\, dt \leq S_1 \leq 1 + \int_1^{k-1} \frac{1}{t+1}\, dt$$

Donc :

$$\ln(k+1) - \ln(2) \leq S_1 \leq 1 + (\ln(k) - \ln(2)) \quad \text{et} \quad S_1 \sim \ln(k)$$

Pour la seconde somme de la formule que l'on notera S_2, nous avons :

$$S_2 = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{n-k} = \sum_{j=k+1}^{n-k} \frac{1}{j+1}$$

Nous avons donc :

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{t+1}\, dt \leq \frac{1}{j+1} \leq \int_{j-1}^{j} \frac{1}{t+1}\, dt$$

En sommant de $k+1$ à $n-k$:

$$\int_{k+1}^{n-k+1} \frac{1}{t+1}\, dt \leq S_2 \leq \int_{k}^{n-k} \frac{1}{t+1}\, dt$$

Donc :

$$\ln(n-k+2) - \ln(k+2) \leq S_2 \leq \ln(n-k+1) - \ln(k+1) \quad \text{et} \quad S_2 \sim \ln(\frac{n}{k})$$

Réponse à la 6.c - 3/3

Nous avons réussi à donner une approximation aux deux sommes composant $d_{moy}(x_k)$, nous pouvons lui aussi l'approcher :

$$d_{moy}(x_k) = S_1 + S_2 \sim \ln(k) + \ln(\frac{n}{k})$$

$$d_{moy}(x_k) \sim \ln(k * \frac{n}{k})$$

$$d_{moy}(x_k) \sim \ln(n)$$

En conclusion, nous avons bel et bien démontré que la profondeur moyenne d'un noeud x_k d'un arbre cartésien à n noeuds est en $O(\ln n)$, et donc en $O(\log n)$.