НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
Дисциплина: «Теория вероятностей и математическая статистика»

Домашнее задание 2
Вариант 14

Выполнила: Карнаухова Алена,
студентка группы 172

Преподаватель: Горяинова Е.Р.,
доцент департамента матматики
факультета экономических наук

Москва 2018

Задача 1.

У центробежного регулятора стороны равны и составляют так называемый «параллелограмм» регулятора, острый угол ϕ этого параллелограмма – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $(\pi/6, \pi/4)$. Найти закон распределения диагоналей параллелограмма регулятора, если его сторона равна a.

Для начала выведем формулу зависимости длины диагонали параллелограмма от его сторон и угла. Обозначим длину длинной диагонали за d_1, длину короткой диагонали за d_2. По теореме косинусов:

$$d_1^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos\phi \tag{1}$$

Откуда:

$$d_1 = a\sqrt{2(1-\cos\phi)} \tag{2}$$

И:

$$d_2^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(\pi-\phi) \tag{3}$$

Откуда:

$$d_2 = a\sqrt{2(1+\cos\phi)} \tag{4}$$

По условию ϕ - случайная величина, распределенная равномерно. Ее функция плотности распределения:

$$f_\phi(x) = \begin{cases} \frac{12}{\pi}, & x \in (\pi/6, \pi/4) \\ 0, & x \notin (\pi/6, \pi/4) \end{cases} \tag{5}$$

Случайная величина $S_1(d_1(\phi) = a\sqrt{2(1-\cos\phi})$ - это длина короткой диагонали. Функция $d_1(\phi)$ гладкая и монотонно возрастает на $(\pi/6, \pi/4)$, а случайная величина ϕ непрерывна и имеет плотность распределения $f_\phi(x)$. Тогда плотность распределения случайной величины S_1 имеет следующий вид:

$$f_{S_1}(y) = f_\phi(d_1^{-1}(y)) \cdot (d_1^{-1}(y))' \tag{6}$$

Найдем обратную функцию к функции d_1. Для этого решим следующее уравнение относительно x:

$$w = d_1(x) \tag{7}$$

$$w = a\sqrt{2(1-\cos x)} \tag{8}$$

$$\frac{w}{a} = \sqrt{2(1-\cos x)} \tag{9}$$

$$\frac{w^2}{2a^2} = (1-\cos x), w > 0 \tag{10}$$

$$x = \arccos(1 - \frac{w^2}{2a^2}), w > 0 \tag{11}$$

Подставим (11) в (6).

$$f_{S_1}(y) = f_\phi(\arccos(1 - \frac{y^2}{2a^2})) \cdot (\arccos(1 - \frac{y^2}{2a^2}))', y > 0 \tag{12}$$

Найдем производную:

$$(\arccos(1 - \frac{y^2}{2a^2}))' = \frac{2}{\sqrt{4a^2 - y^2}}, y > 0 \tag{13}$$

Таким образом, функция плотности распределения случайной величины S_1:

$$f_{S_1}(y) = \begin{cases} \frac{12}{\pi} \cdot \frac{2}{\sqrt{4a^2-y^2}}, & \arccos(1 - \frac{y^2}{2a^2}) \in (\pi/6, \pi/4), y > 0 \\ 0, & \arccos(1 - \frac{y^2}{2a^2}) \notin (\pi/6, \pi/4) \end{cases} \tag{14}$$

$$f_{S_1}(y) = \begin{cases} \frac{12}{\pi} \cdot \frac{2}{\sqrt{4a^2-y^2}}, & 1 - \frac{y^2}{2a^2} \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), y > 0 \\ 0, & 1 - \frac{y^2}{2a^2} \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \end{cases} \tag{15}$$

Случайная величина $S_2(d_2(\phi) = a\sqrt{2(1 + \cos\phi})$ - это длина длинной диагонали. Функция $d_2(\phi)$ гладкая и монотонно убывает на $(\pi/6, \pi/4)$, а случайная величина ϕ непрерывна и имеет плотность распределения $f_\phi(x)$. Тогда плотность распределения случайной величины S_2 имеет следующий вид:

$$f_{S_2}(y) = f_\phi(d_2^{-1}(y)) \cdot |(d_2^{-1}(y))'| \tag{16}$$

Найдем обратную функцию к функции d_2. Для этого решим следующее уравнение относительно x:

$$w = d_2(x) \tag{17}$$

$$w = a\sqrt{2(1 + \cos x)} \tag{18}$$

$$\frac{w}{a} = \sqrt{2(1 + \cos x)} \tag{19}$$

$$\frac{w^2}{2a^2} = (1 + \cos x), w > 0 \tag{20}$$

$$x = \arccos(\frac{w^2}{2a^2} - 1), w > 0 \tag{21}$$

Подставим (21) в (16).

$$f_{S_2}(y) = f_\phi(\arccos(\frac{y^2}{2a^2} - 1)) \cdot |(\arccos(\frac{y^2}{2a^2} - 1))'|, y > 0 \tag{22}$$

Найдем производную:

$$(\arccos(\frac{y^2}{2a^2} - 1))' = -\frac{2}{\sqrt{4a^2 - y^2}}, y > 0 \tag{23}$$

Таким образом, функция плотности распределения случайной величины S_2:

$$f_{S_2}(y) = \begin{cases} \frac{12}{\pi} \cdot \frac{2}{\sqrt{4a^2-y^2}}, & \arccos(\frac{y^2}{2a^2} - 1) \in (\pi/6, \pi/4), y > 0 \\ 0, & \arccos(\frac{y^2}{2a^2} - 1) \notin (\pi/6, \pi/4) \end{cases} \tag{24}$$

$$f_{S_2}(y) = \begin{cases} \frac{12}{\pi} \cdot \frac{2}{\sqrt{4a^2-y^2}}, & \frac{y^2}{2a^2} - 1 \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), y > 0 \\ 0, & \frac{y^2}{2a^2} - 1 \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \end{cases} \tag{25}$$

Задача 2.

В Москве рождается каждый день в среднем 335 детей, т.е. в год около 122500 детей. Считая вероятность рождения мальчика 0.51, найти вероятность того, что число мальчиков, которые родятся в Москве в текущем году, превысит число девочек не менее, чем на 1500.

Пусть мальчков родится x. Тогда девочек родится $122500 - x$. Хотим, чтобы:

$$x - (122500 - x) \geq 1500; \tag{26}$$

$$2x \geq 124000; \tag{27}$$

$$x \geq 62000; \tag{28}$$

То есть, надо посчитать вероятность $P(62000 \leq x \leq 122500)$. Зная, что число детей n достаточно велико, воспользуемся интегральной теоремой Лапласа.

$$(k_1 \leq x \leq k_2) \approx \Phi(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}) \tag{29}$$

$$(62000 \leq x \leq 122500) \approx \Phi(\frac{122500 - 122500 \cdot 0.51}{\sqrt{122500 \cdot 0.51 \cdot 0.49}}) - \Phi(\frac{62000 - 122500 \cdot 0.51}{\sqrt{122500 \cdot 0.51 \cdot 0.49}}) =$$

$$= \Phi(\frac{60025}{174.96}) - \Phi(\frac{-475}{174.96}) = \Phi(343) - \Phi(-2.7) = 0.5 + \Phi(2.7) = 0.9965$$

Ответ: 0.9965;