НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
Дисциплина: «Теория вероятностей и математическая статистика»

Домашнее задание 2
Вариант 14

Выполнила: Карнаухова Алена,
студентка группы 172

Преподаватель: Горяинова Е.Р.,
доцент департамента матматики
факультета экономических наук

Москва 2018

Задача 1.

У центробежного регулятора стороны равны и составляют так называемый «параллелограмм» регулятора, острый угол ϕ этого параллелограмма – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $(\pi/6, \pi/4)$. Найти закон распределения диагоналей параллелограмма регулятора, если его сторона равна a.

Для начала выведем формулу зависимости длины диагонали параллелограмма от его сторон и угла. Обозначим длину длинной диагонали за d_1, длину короткой диагонали за d_2. По теореме косинусов:

$$d_1^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos\phi \tag{1}$$

Откуда:

$$d_1 = a\sqrt{2(1-\cos\phi)} \tag{2}$$

И:

$$d_2^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(\pi - \phi) \tag{3}$$

Откуда:

$$d_2 = a\sqrt{2(1+\cos\phi)} \tag{4}$$

По условию ϕ - случайная величина, распределенная равномерно. Ее функция плотности распределения:

$$f_\phi(x) = \begin{cases} \frac{12}{\pi}, & x \in (\pi/6, \pi/4) \\ 0, & x \notin (\pi/6, \pi/4) \end{cases} \tag{5}$$

Случайная величина $S_1(d_1(\phi) = a\sqrt{2(1-\cos\phi})$ - это длина короткой диагонали. Функция $d_1(\phi)$ гладкая и монотонно возрастает на $(\pi/6, \pi/4)$, а случайная величина ϕ непрерывна и имеет плотность распределения $f_\phi(x)$. Тогда плотность распределения случайной величины S_1 имеет следующий вид:

$$f_{S_1}(y) = f_\phi(d_1^{-1}(y)) \cdot (d_1^{-1}(y))' \tag{6}$$

Найдем обратную функцию к функции d_1. Для этого решим следующее уравнение относительно x:

$$w = d_1(x) \tag{7}$$

$$w = a\sqrt{2(1-\cos x)} \tag{8}$$

$$\frac{w}{a} = \sqrt{2(1-\cos x)} \tag{9}$$

$$\frac{w^2}{2a^2} = (1-\cos x), w > 0 \tag{10}$$

$$x = \arccos(1 - \frac{w^2}{2a^2}), w > 0 \tag{11}$$

Подставим (11) в (6).

$$f_{S_1}(y) = f_\phi(\arccos(1 - \frac{y^2}{2a^2})) \cdot (\arccos(1 - \frac{y^2}{2a^2}))', y > 0 \tag{12}$$

Найдем производную:

$$(\arccos(1 - \frac{y^2}{2a^2}))' = \frac{2}{\sqrt{4a^2 - y^2}}, y > 0 \tag{13}$$

Таким образом, функция плотности распределения случайной величины S_1:

$$f_{S_1}(y) = \begin{cases} \frac{12}{\pi} \cdot \frac{2}{\sqrt{4a^2 - y^2}}, & \arccos(1 - \frac{y^2}{2a^2}) \in (\pi/6, \pi/4), y > 0 \\ 0, & \arccos(1 - \frac{y^2}{2a^2}) \notin (\pi/6, \pi/4) \end{cases} \tag{14}$$

$$f_{S_1}(y) = \begin{cases} \frac{12}{\pi} \cdot \frac{2}{\sqrt{4a^2 - y^2}}, & 1 - \frac{y^2}{2a^2} \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), y > 0 \\ 0, & 1 - \frac{y^2}{2a^2} \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \end{cases} \tag{15}$$

Случайная величина $S_2(d_2(\phi) = a\sqrt{2(1 + \cos\phi})$ - это длина длинной диагонали. Функция $d_2(\phi)$ гладкая и монотонно убывает на $(\pi/6, \pi/4)$, а случайная величина ϕ непрерывна и имеет плотность распределения $f_\phi(x)$. Тогда плотность распределения случайной величины S_2 имеет следующий вид:

$$f_{S_2}(y) = f_\phi(d_2^{-1}(y)) \cdot |(d_2^{-1}(y))'| \tag{16}$$

Найдем обратную функцию к функции d_2. Для этого решим следующее уравнение относительно x:

$$w = d_2(x) \tag{17}$$

$$w = a\sqrt{2(1 + \cos x)} \tag{18}$$

$$\frac{w}{a} = \sqrt{2(1 + \cos x)} \tag{19}$$

$$\frac{w^2}{2a^2} = (1 + \cos x), w > 0 \tag{20}$$

$$x = \arccos(\frac{w^2}{2a^2} - 1), w > 0 \tag{21}$$

Подставим (21) в (16).

$$f_{S_1}(y) = f_\phi(\arccos(1-\frac{y^2}{2a^2}))\cdot|(\arccos(\frac{y^2}{2a^2}-1))'|, y>0 \tag{22}$$

Найдем производную:

$$(\arccos(\frac{y^2}{2a^2}-1))' = -\frac{2}{\sqrt{4a^2-y^2}}, y>0 \tag{23}$$

Таким образом, функция плотности распределения случайной величины S_2:

$$f_S(y) = \begin{cases} \frac{12}{\pi}\cdot\frac{2}{\sqrt{4a^2-y^2}}, & \arccos(1-\frac{y^2}{2a^2})\in(\pi/6,\pi/4), y>0 \\ 0, & \arccos(1-\frac{y^2}{2a^2})\notin(\pi/6,\pi/4) \end{cases} \tag{24}$$

$$f_S(y) = \begin{cases} \frac{12}{\pi}\cdot\frac{2}{\sqrt{4a^2-y^2}}, & 1-\frac{y^2}{2a^2}\in(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}), y>0 \\ 0, & 1-\frac{y^2}{2a^2}\in(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}) \end{cases} \tag{25}$$

Ответ:

Задача 2.

В Москве рождается каждый день в среднем 335 детей, т.е. в год около 122500 детей. Считая вероятность рождения мальчика 0.51, найти вероятность того, что число мальчиков, которые родятся в Москве в текущем году, превысит число девочек не менее, чем на 1500.

Решение

Ответ: 22;
Найдем границы, в которых изменяется диагональ d_1:

$$d_1(\frac{\pi}{6}) = a\sqrt{2(1-\cos\frac{\pi}{6})} = a\sqrt{2(1-\frac{\sqrt{3}}{2})} = a\sqrt{2-\sqrt{3}} \tag{26}$$

$$d_1(\frac{\pi}{4}) = a\sqrt{2(1-\cos\frac{\pi}{4})} = a\sqrt{2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})} = a\sqrt{2-\sqrt{2}} \tag{27}$$

Выразим ϕ через d_1:

$$d_1 = a\sqrt{2(1-\cos x)} \tag{28}$$

$$\frac{d_1}{a} = \sqrt{2(1-\cos x)} \tag{29}$$

$$\frac{d_1^2}{2a^2} = (1 - \cos x), d_1 > 0 \tag{30}$$

$$\phi = \arccos(1 - \frac{d_1^2}{2a^2}) \tag{31}$$

Функция распределения СВ:

$$P(\phi < x) = P(\arccos(1 - \frac{d_1^2}{2a^2}) < x) \tag{32}$$

$P(\arccos(1 - \frac{d_1^2}{2a^2}) < x) = P(1 - \frac{d_1^2}{2a^2} > cos(x)) = P(-\frac{d_1^2}{2a^2} > cos(x) - 1) =$

$= P(\frac{d_1^2}{2a^2} < 1 - cos(x)) = P(\frac{d_1^2}{2a^2} < 1 - cos(x)) = P(d_1^2 < 2a^2(1 - cos(x))) =$

$= P(d_1 < \sqrt{2a^2(1 - cos(x))}) = P(d_1 < a\sqrt{2(1 - cos(x))})$

Функция равномерного распределения СВ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \pi/6 \\ \frac{x - \pi/6}{\pi/12}, & x \in [\pi/6, \pi/4) \\ 1, & x \geq \pi/4 \end{cases} \tag{33}$$

Подставим $P(d_1 < a\sqrt{2(1 - cos(x))})$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & a\sqrt{2(1 - cos(x))} < \\ \frac{a\sqrt{2(1 - cos(x))} - \pi/6}{\pi/12}, & x \in [\pi/6, \pi/4) \\ 1, & x \geq \pi/4 \end{cases} \tag{34}$$