

Temă pentru acasă - partea B.

14 puncte [1p: B1] + [1p: B2] + [1p: B3] + [4p: B4 sau B5] + [7p: B6]

B1. (1 punct) Volumul conului

$$Con(r, h) = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{h^2} z^2, 0 \leq z \leq h \right\} \subseteq [-r, r] \times [-r, r] \times [0, h]$$

este $\frac{\pi r^2 h}{3}$. Estimați acest volum utilizând metoda Monte Carlo pentru $r = 2$, $h = 3$ și comparați rezultatul cu valoarea exactă. Folosiți eșantioane de dimensiune 10000, 20000 și 50000 și calculați erorile relative.

B2. (1 punct) Fie triunghiul definit astfel $T = \{(x, y) : y \geq 0, 2y \leq x, x + y \leq 3\}$. Determinați o zonă rectangulară $[a, b] \times [c, d]$ care include punctele interioare ale acestui triunghi și apoi estimați aria (necunoscută) a lui T folosind metoda Monte Carlo cu un eșantion de dimensiune 15000.

B3. (1 punct) Estimați valorile următoarelor integrale și comparați rezultatul cu valorile exacte:

$$(a) \int_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{x+1} dx = 4 - \pi, (b) \int_0^{+\infty} (1+2x)e^{-x} dx = 3.$$

B4. (4 puncte) Trei servere web oferă (serves) aceleași pagini posibililor clienți (web). Timpul necesar procesării unei cereri (request) HTTP este distribuit $\Gamma(6, 4)$ pe primul server, $\Gamma(6, 2)$ pe cel de-al doilea și $\Gamma(5, 3)$ pe cel de-al treilea (în miliseconde). La această durată se adaugă latența dintre client și servere pe Internet care are o distribuție exponențială cu $\lambda = 2$ (în miliseconde). Se știe că un client este direcționat către primul server cu probabilitatea 0.35, către al doilea cu probabilitate 0.4 și către al treilea server cu probabilitatea 0.25. Estimați timpul mediu necesar servirii unui client (de la lansarea cererii până la primirea răspunsului).

B5. (4 puncte) Două zeci și cinci de computere sunt conectate într-un LAN. Un virus infectează această rețea în felul următor: în fiecare zi, acest virus ajunge în mod independent de la orice computer infectat la orice alt computer "curat" cu probabilitate 0.15. De asemenea, în fiecare zi (începând cu a doua zi), administratorul de sistem alege la întâmplare trei computere infectate și în mod independent îndepărtează virusul de fiecare cu probabilitate 0.65. Se știe că în prima zi sunt infectate patru calculatoare. Estimați numărul mediu de zile necesare îndepărtării virusului din întreaga rețea (daca este posibil).

B6. (7 puncte) O pădure are forma unui triunghi cu vârfurile în punctele $(0, 0)$, $(196, 0)$ și $(98, 98)$. Rândul p conține copaci în pozițiile (p, p) , $(p+2, p)$, $(p+4, p)$, \dots , $(196-p, p)$, unde $0 \leq p \leq 98$.

În pădure ia naștere un incendiu: copacul din poziția (i, j) ia foc. După fiecare oră un copac poate lua foc de la unul dintre vecinii săi care deja arde. Vântul bate dinspre nord-est și un copac ia foc de la vecinul său nord-estic (dacă acesta deja arde) cu probabilitate 0.7. Celelalte probabilități ca un copac să ia foc de la vecin care arde deja sunt: 0.3 de la un vecin din vest sau sud, 0.5 de la un vecin din nord sau est, 0.4 de la un vecin din nord-vest sau sud-est. În plus se știe că un copac ia sigur foc dacă toți vecinii săi deja ard.

(a) (3 puncte) După câte ore în medie ia foc copacul din vârful triunghiului (poziția $(98, 98)$), dacă incendiul ia naștere în poziția $(50, 100)$.

(b) (4 puncte) Estimați probabilitatea ca cel puțin 25% din pădure să ardă după h ore, dacă incendiul ia naștere în poziția $(98, 98)$ ($h = 20, 30, 40, 50, 60, 70$).

Rezolvările acestor exerciții (funcțiile R și apelurile lor) vor fi redactate într-un singur script R.