一 波动方程

1. 一维情况

由 $$\Psi = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

得
$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\omega A}{u}\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2 A}{u^2}\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\omega A\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}$$

2. 三维情况

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

拉普拉斯算符 $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$

波动微分方程 $\nabla^2\Psi=\dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$ **线性微分方程**

波的线性叠加原理

任何物理量，无论是位移，还是电磁场，只要它与坐标、时间的函数关系是波动方程的解，那么该物理量的运动形式就一定是波动。

1）波动方程虽由简谐行波波函数得到，但其解并不限于简谐行波。它可以是一般的行波：

$$\Psi = f\left(t \pm \frac{x}{u}\right)$$

2）驻波是两列行波的叠加，而行波是波动方程的解，所以驻波也是波动方程的解。

3）反过来，行波也可看成是两个驻波的叠加。行波还是驻波解要看边界条件。

二 波的速度

机械波波传播速度 $\vec{u}$ 与介质性质有关

（a）流体：纵波与弹性介质的体积变化有关，而液体，气体只有体变弹性，故气体和液体只传播与体积变化有关的纵波。

$$u=\sqrt{\frac{k}{\rho}} \quad （纵波）$$

式中 k 为体积模量，ρ 为介质密度。

（b）固体中能产生切变、体变和长度变化等弹性形变，所以固体中既能传播横波又能传播纵波。

在固体中传播横波的速度 $u=\sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$

G 为介质的切变模量

在固体中传播纵波的速度 $u=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

E 为弹性模量

细棒中纵波方程

$$(F+dF)-F=(dm)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

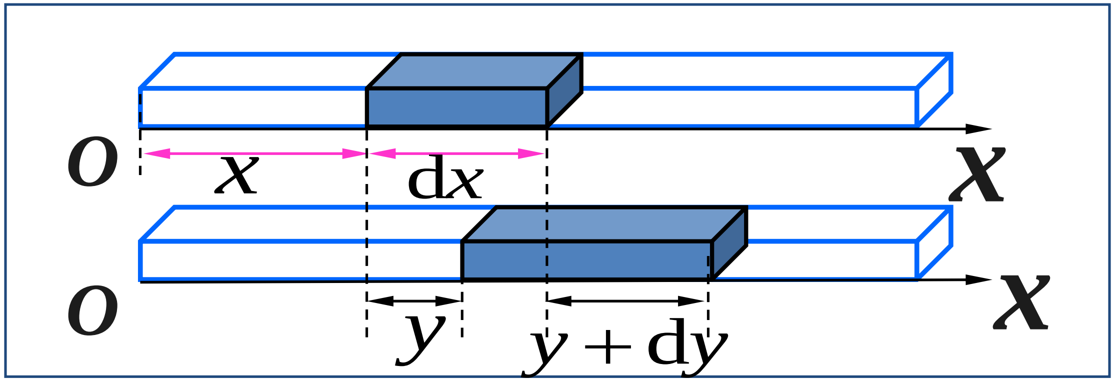
$$\frac{F}{S}=E\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$dF=\rho S dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$dF=ESdx\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$u=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$



一 波动能量的传播

1 波的能量

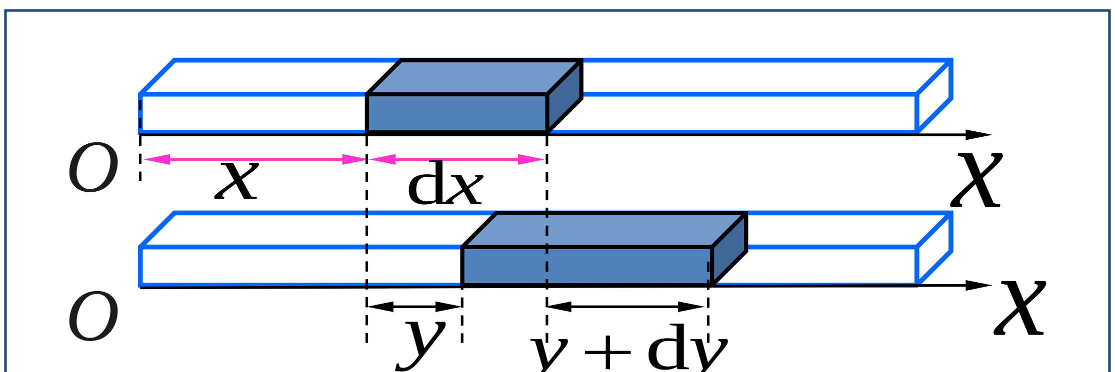
波的传播是能量的传播，传播过程中，介质中的质点运动，具有动能 W_k，介质形变具有势能 W_p .

以棒中传播的纵波为例分析波动能量的传播.

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}(\mathrm{d}m)v^{2}=\frac{1}{2}(\rho\mathrm{d}V)v^{2}\quad y=A\cos\omega(t-\frac{x}{u})$$

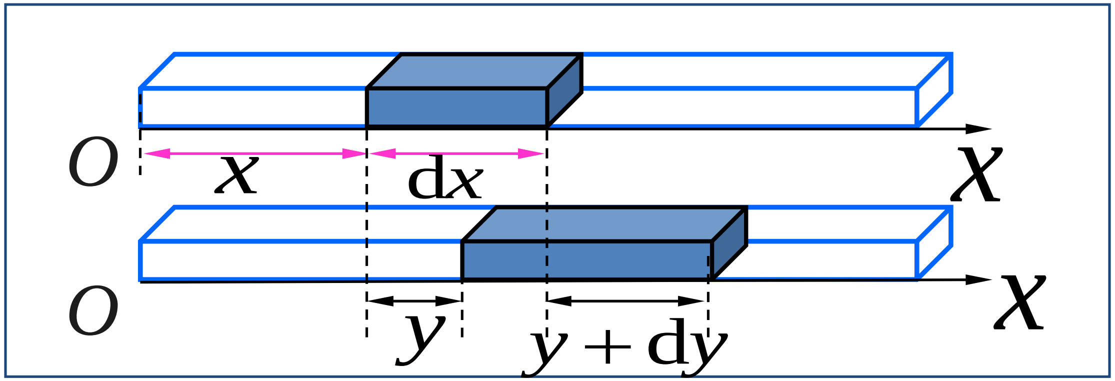
$$\therefore v=\frac{\partial y}{\partial t}=-\omega A\sin\omega(t-\frac{x}{u})$$

振动动能 $\mathrm{d}W_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}\rho\mathrm{d}VA^{2}\omega^{2}\sin^{2}\omega(t-\frac{x}{u})$



弹性势能 $$\mathrm{d}W_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}k(\mathrm{d}y)^2$$

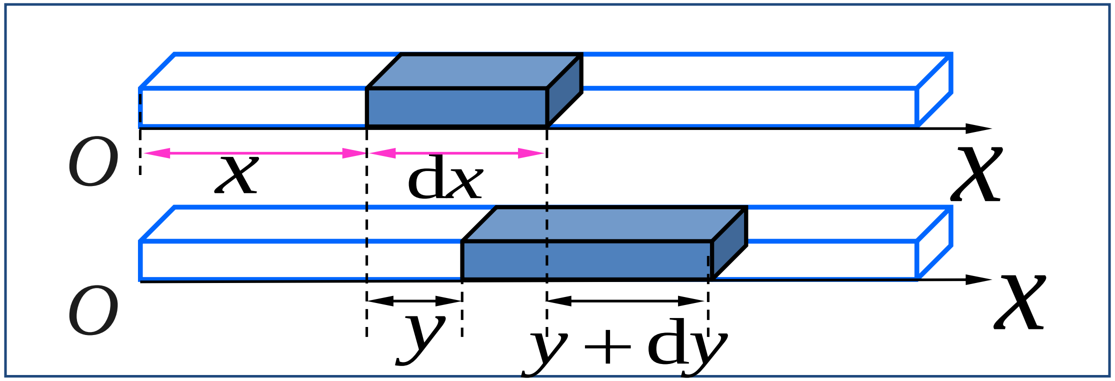
$$F = \frac{ES}{l}\Delta l \qquad \frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l} \qquad k = \frac{SE}{\mathrm{d}x}$$



$$\mathrm{d}W_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}k(\mathrm{d}y)^2=\frac{1}{2}ES\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\rho u^2\mathrm{d}V\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$$

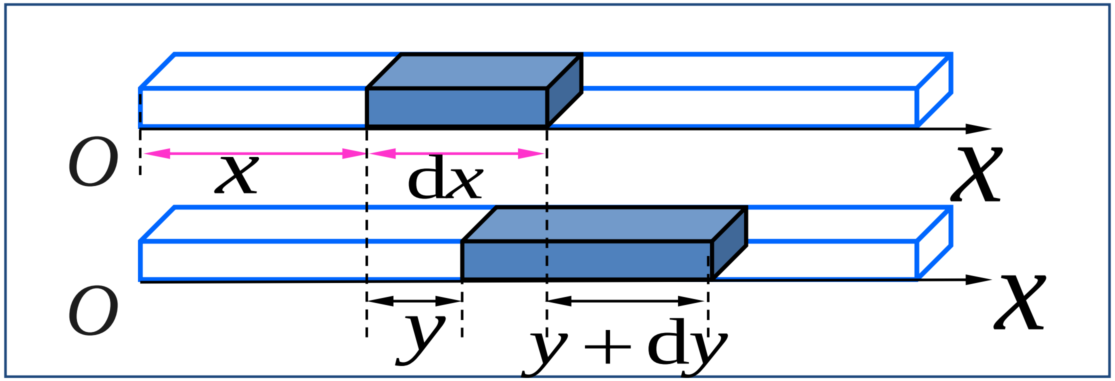
$$=\frac{1}{2}\rho\mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$



$$\mathrm{d}W=\rho\mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

体积元的总机械能

$$\mathrm{d}W=\mathrm{d}W_{\mathrm{k}}+\mathrm{d}W_{\mathrm{p}}=\rho\mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$



讨 论

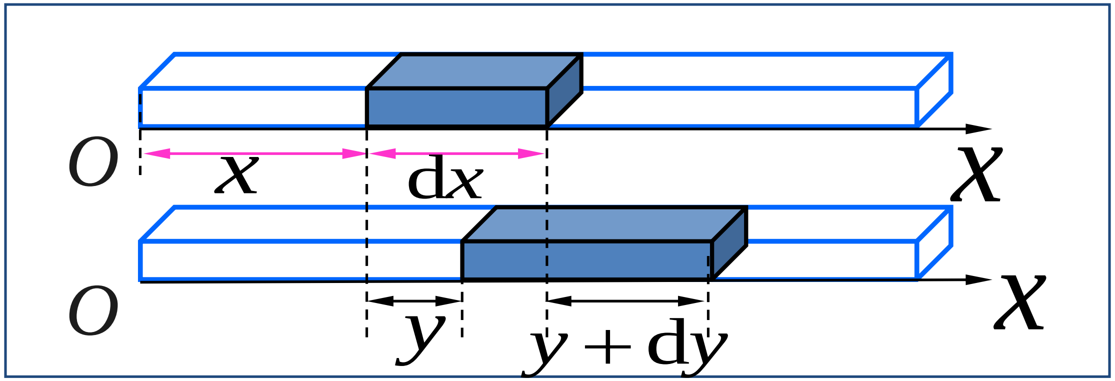
(1) 在波动传播的介质中，任一体积元的动能、势能、总机械能均随 x, t 作周期性变化，且变化是同相位的.

体积元在平衡位置时，动能、势能和总机械能均最大.

体积元的位移最大时，三者均为零.

$$\mathrm{d}W=\rho \mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

(2) 任一体积元都在不断地接收和放出能量，即不断地传播能量. 任一体积元的机械能不守恒. 波动是能量传递的一种方式 .

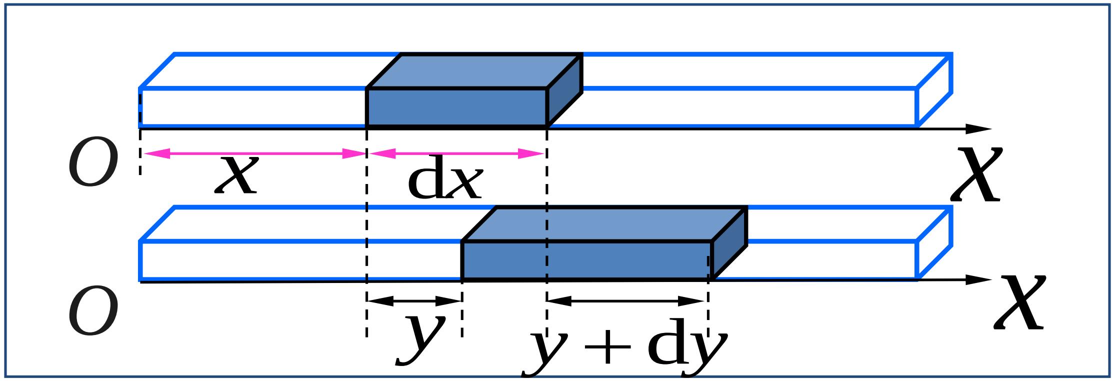


能量密度：单位体积介质中的波动能量

$$w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u})$$

平均能量密度：能量密度在一个周期内的平均值

$$\overline{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$$



一平面简谐波在弹性媒质中传播，在媒质质元从最大位移处回到平衡位置的过程中

（A）它的势能转换成动能

（B）它的动能转换成势能

（C）它从相邻的一段媒质质元获得能量，其能量逐渐增加

（D）它把自己的能量传给相邻的一段媒质质元，其能量逐渐减少

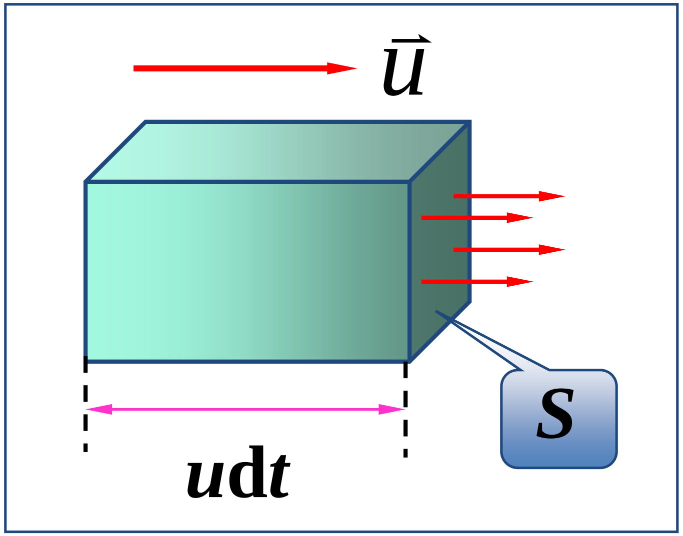
选择（ C ）

二　能流和能流密度

能流：单位时间内垂直通过某一面积的能量.

平均能流：

$$\boxed{\overline{P}=\overline{w}uS}$$



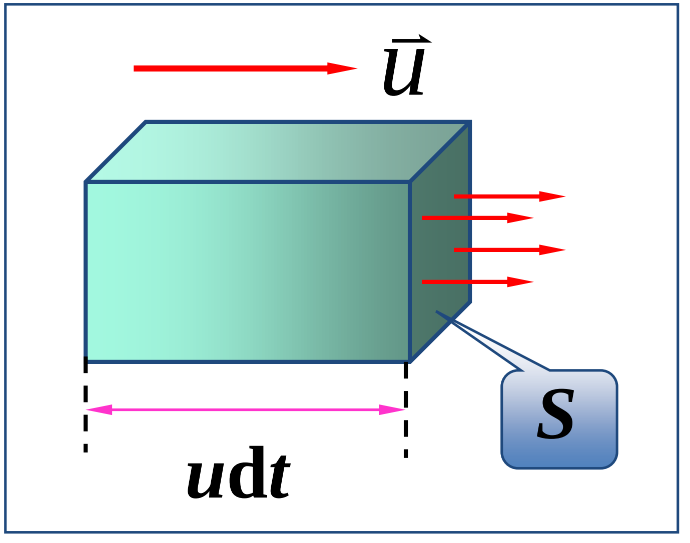
能流密度（ 波的强度 ）I:

通过垂直于波传播方向的单位面积的平均能流.

$$\overline{P} = \overline{w}uS$$

$$I = \frac{\overline{P}}{S} = \overline{w}u$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u}$$



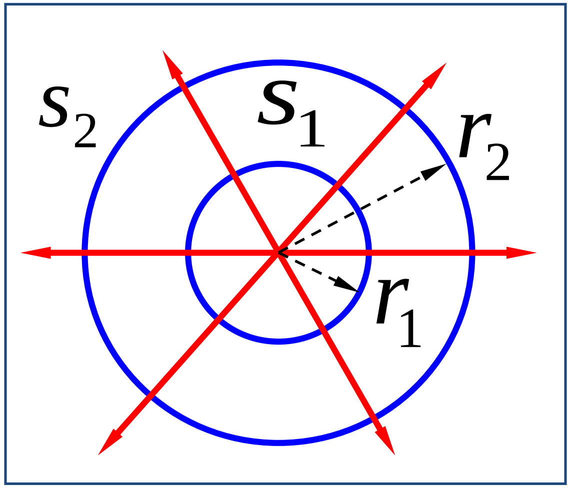
例 证明球面波的振幅与离开其波源的距离成反比，并求球面简谐波的波函数.

证 介质无吸收，通过两个球面的平均能流相等.
$$\overline{w}_1 u S_1 = \overline{w}_2 u S_2$$

即
$$\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2 u 4\pi r_1^2 = \frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2 u 4\pi r_2^2$$

故
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$y = \frac{A_0 r_0}{r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{u}\right)$$

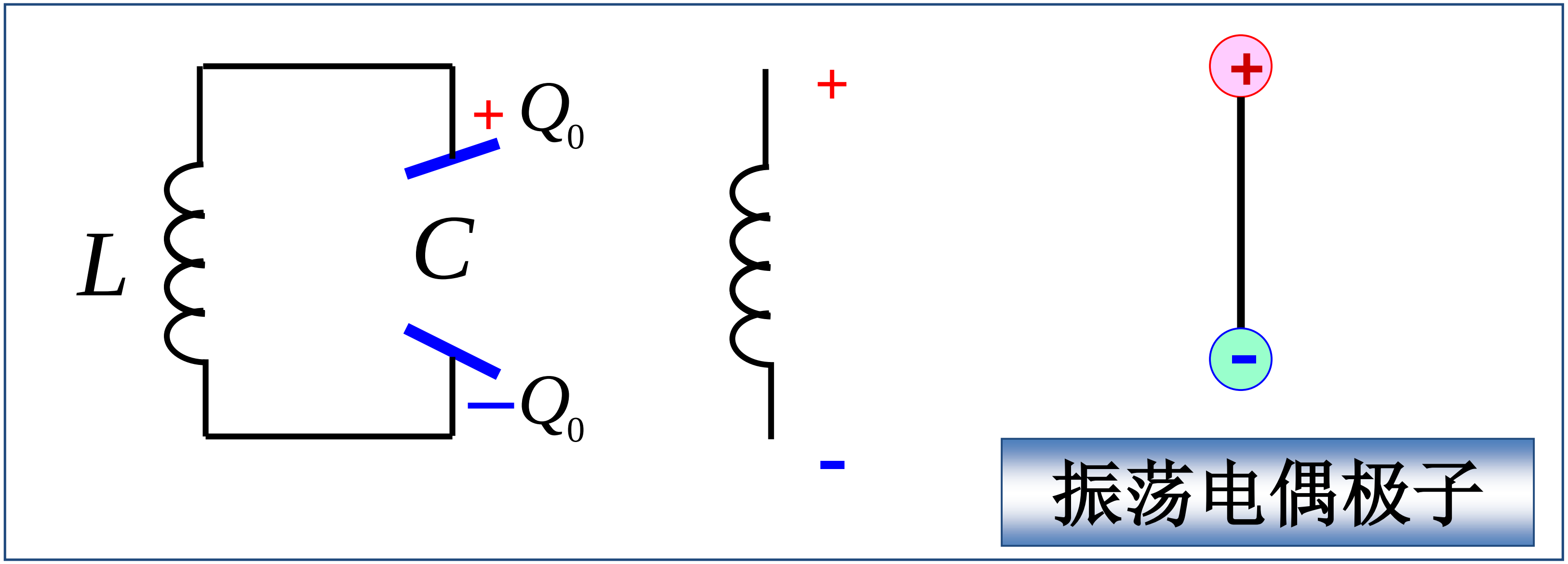


一 电磁波的产生与传播

变化的电磁场在空间以一定的速度传播就形成电磁波.

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$



真空中麦克斯韦方程组

$$\nabla\cdot\vec{E}=0 \qquad (1)$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \qquad (3)$$

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (4)$$

对方程2两边取旋度，并应用方程1、4，有

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{B})=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2 t}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2 t}=0}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=0 \qquad (1)$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \qquad (3)$$

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (4)$$

对方程4两边取旋度，并应用2、3，有

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{B})=\nabla(\nabla\cdot\vec{B})-\nabla^2\vec{B}=-\nabla^2\vec{B}$$

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{E})=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial^2 t}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial^2 t}=0}$$

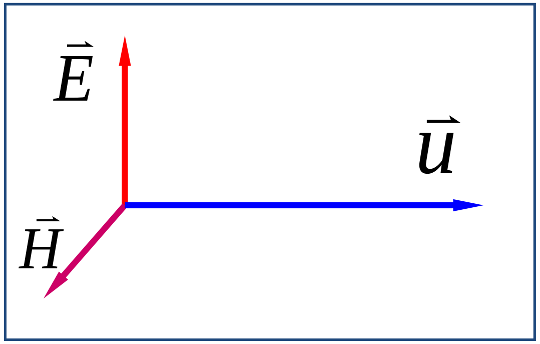
真空中电磁波的波动方程：

$$\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2 t}=0$$

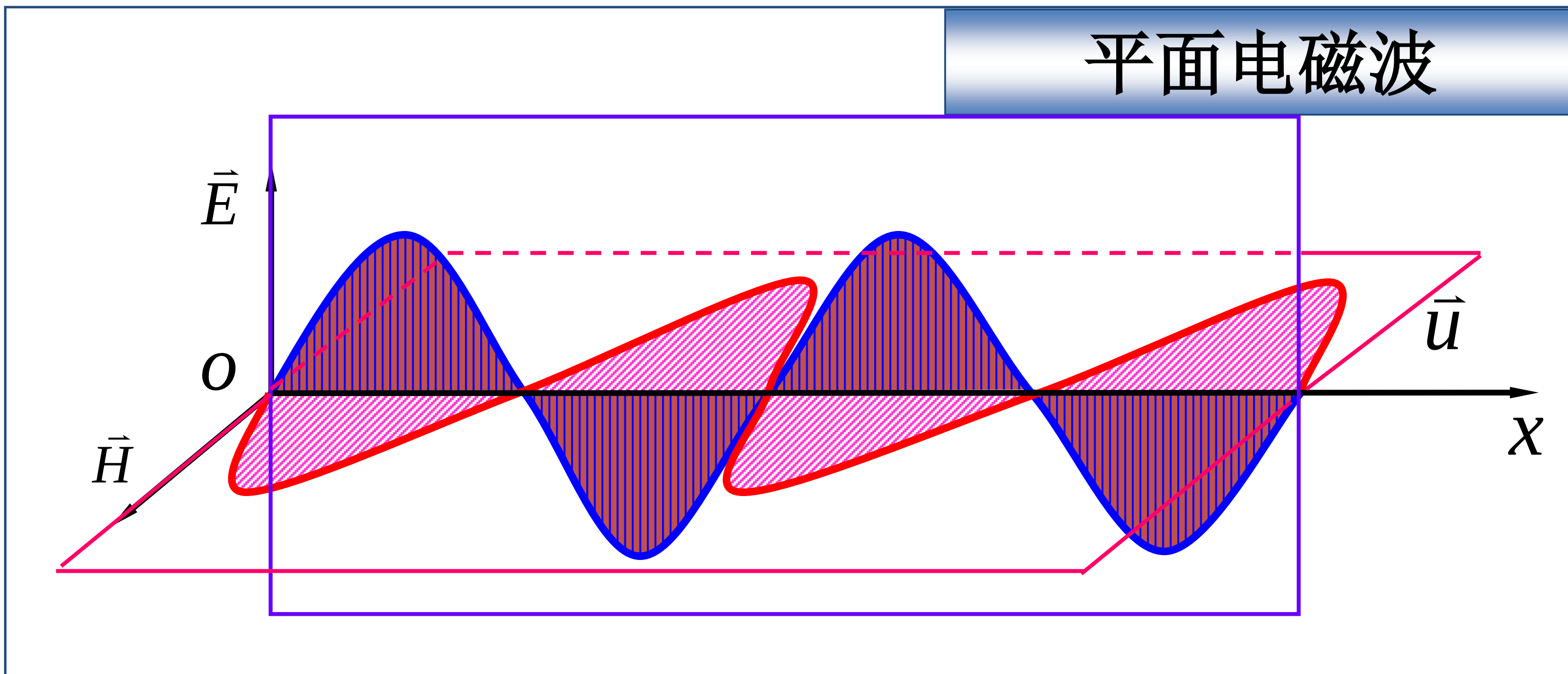
$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

$$\nabla^2\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial^2 t}=0$$

满足波动方程的量是场矢量。



$$
\begin{cases}
E = E_0 \cos\omega\left(t - \dfrac{x}{u}\right) \\
H = H_0 \cos\omega\left(t - \dfrac{x}{u}\right)
\end{cases}
$$

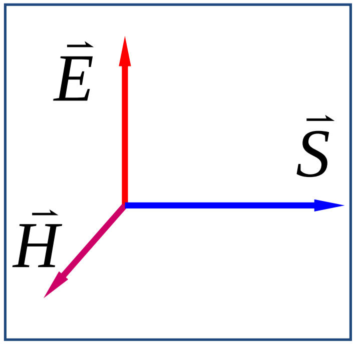


二 平面电磁波的特性

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\begin{cases} H = H_0 \cos\omega(t - \frac{x}{u}) = H_0 \cos(\omega t - kx) \\ E = E_0 \cos\omega(t - \frac{x}{u}) = E_0 \cos(\omega t - kx) \end{cases}$$

(1) 电磁波是横波， $\vec{E} \perp \vec{u}$　　$\vec{H} \perp \vec{u}$



(2) $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 同相位

(3) $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 数值成比例

$$\sqrt{\mu}H=\sqrt{\varepsilon}E$$

(4) 电磁波传播速度为

$$u=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$$

真空中波速等于光速

$$u=c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=2.998\times10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

三 电磁波的能量

辐射能 以电磁波的形式传播出去的能量.

电磁波的**能流密度** $S = wu$

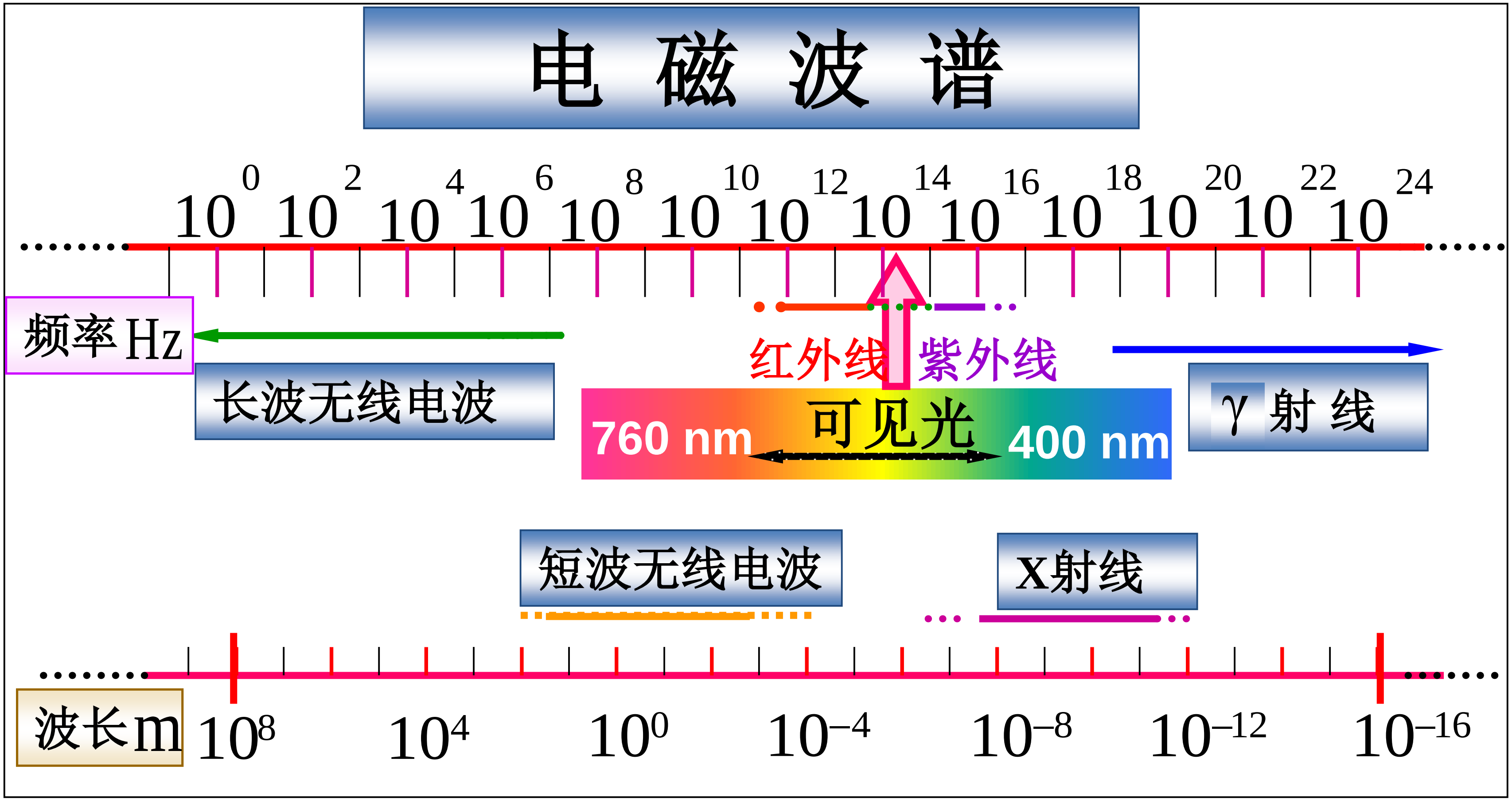
- 电磁场**能量密度** $w = w_{\mathrm{e}} + w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$

$$S = \frac{u}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2) = EH$$

又 $u = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ $\quad \sqrt{\mu}H = \sqrt{\varepsilon}E$

- 电磁波的**能流密度(坡印廷)矢量** $\boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}}$

四 电磁波谱


电 磁 波 谱
10^{0} 10^{2} 10^{4} 10^{6} 10^{8} 10^{10} 10^{12} 10^{14} 10^{16} 10^{18} 10^{20} 10^{22} 10^{24}
频率Hz
长波无线电波
红外线
紫外线
760 nm
可见光
400 nm
γ 射线
短波无线电波
X射线
波长m
10^{8} 10^{4} 10^{0} 10^{-4} 10^{-8} 10^{-12} 10^{-16}

无线电波	$3\times10^{4}\ \mathrm{m}\sim0.1\,\mathrm{cm}$
红 外 线	$6\times10^{5}\ \mathrm{nm}\sim760\ \mathrm{nm}$
可 见 光	$760\mathrm{nm}\sim400\mathrm{nm}$
紫 外 光	$400\mathrm{nm}\sim5\ \mathrm{nm}$
x 射 线	$5\ \mathrm{nm}\sim0.04\ \mathrm{nm}$
γ 射 线	$<0.04\mathrm{nm}$

物理学习

自我学习 目标确立 时间管理

系统学习 知识建构 问题解决

作业要求

文件名

班号-序号-A，B，C

I-01-A（左上角：作业本，试卷，etc.）

物理
院系
学号
名字