

第1章 电路的基本概念和电压、电流的约束关系

知 识 要 点

1.1 电路和电路模型

1.1.1 电路的概念

1. 电路及其组成

简单地讲，电路是电流通过的路径。实际电路通常由各种电路实体部件（如电源、电阻器、电感线圈、电容器、变压器、仪表、二极管、三极管等）组成。每一种电路实体部件具有各自不同的电磁特性和功能，按照人们的需要，把相关电路实体部件按一定方式进行组合，就构成了一个个电路。如果某个电路元器件数很多且电路结构较为复杂时，通常又把这些电路称为电网络。

手电筒电路、单个照明灯电路是实际应用中的较为简单的电路，而电动机电路、雷达导航设备电路、计算机电路，电视机电路是较为复杂的电路，但不管简单还是复杂，电路的基本组成部分都离不开三个基本环节：电源、负载和中间环节。

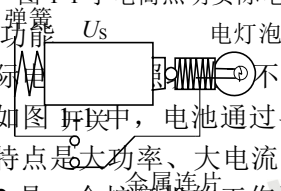
电源是向电路提供电能的装置。它可以将其他形式的能量，如化学能、热能、机械能、原子能等转换为电能。在电路中，电源是激励，是激发和产生电流的因素。负载是取用电能的装置，其作用是把电能转换为其他形式的能（如：机械能、热能、光能等）。通常在生产与生活中经常用到的电灯、电动机、电炉、扬声器等用电设备，都是电路中的负载。中间环节在电路中起着传递电能、分配电能和控制整个电路的作用。最简单的中间环节即开关和联接导线；一个实用电路的中间环节通常还有一些保护和检测装置。复杂的中间环节可以是由许多电路元件组成的网络系统。

图 1-1 所示的手电筒照明电路中，电池作电源，灯作负载，导线和开关作为中间环节将灯和电池连接起来。

图 1-1 手电筒照明实际电路

2. 电路的种类及功能

工程应用中的实际电路不同可概括为两大类：一是完成能量的传输、分配和转换的电路。如图 1-1 所示，电池通过导线将电能传递给灯，灯将电能转化为光能和热能。这类电路的特点是功率大、大电流；二是实现对电信号的传递，变换、储存和处理的电路，如图 1-2 是一个扩音机的工作过程。话筒将声音的振动信号转换为电信号即相应的电压和电流，经过放大处理后，通过电路传递给扬声器，再由扬声器还原为声音。这类电路特点是小功率、小电流。



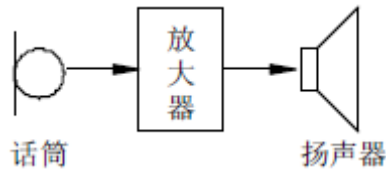


图 1-2 扩音机电路

1.1.2 电路模型

实际电路的电磁过程是相当复杂的，难以进行有效地分析计算。在电路理论中，为了方便于实际电路的分析和计算，我们通常在工程实际允许的条件下对实际电路进行模型化处理，即忽略次要因素，抓住足以反映其主要功能的主要电磁特性，抽象出实际电路器件的“电路模型”。

例如电阻器、灯泡、电炉等，这些电气设备接受电能并将电能转换成光能或热能，光能和热能显然不可能再回到电路中，因此我们把这种能量转换过程不可逆的电磁特性称之为耗能。这些电气设备除了具有耗能的电特性，当然还有其它一些电磁特性，但在研究和分析问题时，即使忽略其他这些电磁特性，也不会影响整个电路的分析和计算。因此，我们就可以用一个只具有耗能电特性的“电阻元件”作为它们的电路模型。

我们将实际电路器件理想化而得到的只具有某种单一电磁性质的元件，称为理想电路元件，简称为电路元件。每一种电路元件体现某种基本现象，具有某种确定的电磁性质和精确的数学定义。常用的有表示将电能转换为热能的电阻元件、表示电场性质的电容元件、表示磁场性质的电感元件及电压源元件和电流源元件等，其电路符号如图 1-3 所示。本章后面将分别讲解这些常用的电路元件。

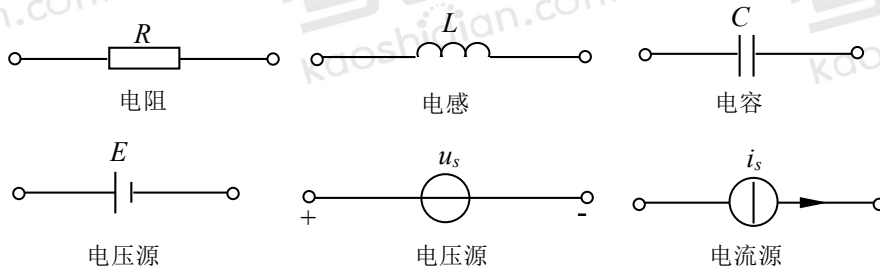


图 1-3 理想电路元件的符号

我们把由理想电路元件相互连接组成的电路称为电路模型。例如图 1-1 所示，电池对外提供电压的同时，内部也有电阻消耗能量，所以电池用其电动势 E 和内阻 R_0 的串联表示；灯除了具有消耗电能的性质（电阻性）外，通电时还会产生磁场，具有电感性。但电感微弱，可忽略不计，于是可认为灯是一电阻元件，用 R 表示。图 1-4 是图 1-1 的电路模型。

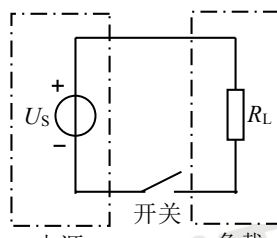


图 1-4 手电筒电路的的电路模型

1.2 电流、电压及其参考方向

电路中的变量是电流和电压。无论是电能的传输和转换，还是信号的传递和处理，都是这两个量变化的结果，因此，弄清电流与电压及其参考方向，对进一步掌握电路的分析与计算是十分重要的。

1.2.1 电流及其参考方向

1. 电流

电荷的定向移动形成电流。电流的大小用电流强度来衡量，电流强度亦简称为电流。其定义为：单位时间内通过导体横截面的电荷量，用公式表示为：

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1-1)$$

其中 i 表示随时间变化的电流， dq 表示在 dt 时间内通过导体横截面的电量。

在国际制单位中，电流的单位为安培，简称安（A）。实际应用中，大电流用千安培（KA）表示，小电流用毫安培（mA）表示或者用微安培（ μA ）表示。它们的换算关系是：

$$1KA = 10^3 A = 10^6 mA = 10^9 \mu A$$

在外电场的作用下，正电荷将沿着电场方向运动，而负电荷将逆着电场方向运动（金属导体内是自由电子在电场力的作用下定向移动形成电流），习惯上规定：正电荷运动的方向为电流的正方向。

电流有交流和直流之分，大小和方向都随时间变化的电流称为交流电流。方向不随时间变化的电流称为直流电流；大小和方向都不随时间变化的电流称为稳恒直流。

2. 电流的参考方向

简单电路中，电流从电源正极流出，经过负载，回到电源负极；在分析复杂电路时，一般难于判断出电流的实际方向，而列方程、进行定量计算时需要对电流有一个约定的方向；对于交流电流，电流的方向随时间改变，无法用一个固定的方向表示，因此引入电流的“参考方向”。

参考方向可以任意设定，如用一个箭头表示某电流的假定正方向，就称之为该电流

的参考方向。当电流的实际方向与参考方向一致时，电流的数值就为正值（即 $i > 0$ ），如图 1-5a 所示；当电流的实际方向与参考方向相反时，电流的数值就为负值（即 $i < 0$ ），如图 1-5b 所示。需要注意的是，未规定电流的参考方向时，电流的正负没有任何意义，如图 1-5c 所示。

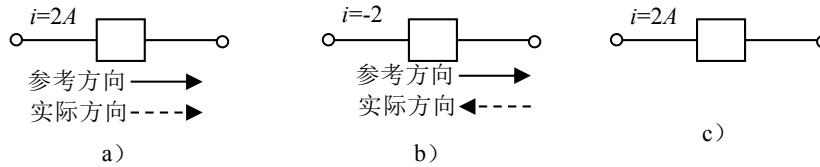


图 1-5 电流及其参考方向

1.2.2 电压及其参考方向

1. 电压

如图 1-6 所示的闭合电路，在电场力的作用下，正电荷要从电源正极 a 经过导线和负载流向负极 b（实际上是带负电的电子由负极 b 经负载流向正极 a），形成电流，而电场力就对电荷做了功。

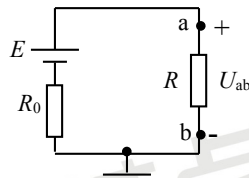


图 1-6 定义电压示意图

电场力把单位正电荷从 a 点经外电路（电源以外的电路）移送到 b 点所作的功，叫做 a、b 两点之间的电压，记作 U_{ab} 。因此，电压是衡量电场力做功本领大小的物理量。

若电场力将正电荷 dq 从 a 点经外电路移送到 b 点所作的功是 dW ，则 a、b 两点间的电压为：

$$u_{ab} = \frac{dW}{dq} \quad (1-2)$$

在国际制单位中，电压的单位为伏特，简称伏（V）。实际应用中，大电压用千伏（KV）表示，小电压用毫伏（mV）表示或者用微伏（ μV ）表示。它们的换算关系是：

$$1KV = 10^3 V = 10^6 mV = 10^9 \mu V$$

电压的方向规定为从高电位指向低电位，在电路图中可用箭头来表示。

2. 电压的参考方向

在比较复杂的电路中，往往不能事先知道电路中任意两点间的电压，为了分析和计算的方便，与电流的方向规定类似，在分析计算电路之前必须对电压标以极性（正、负

号), 或标以方向(箭头), 这种标法是假定的参考方向, 如图 1-7 所示。如果采用双下标记时, 电压的参考方向意味着从前一个下标指向后一个下标, 图 1-7 元件两端电压记作 u_{ab} ; 若电压参考方向选 b 点指向 a 点, 则应写成 u_{ba} , 两者仅差一个负号, 即 $u_{ab} = -u_{ba}$ 。

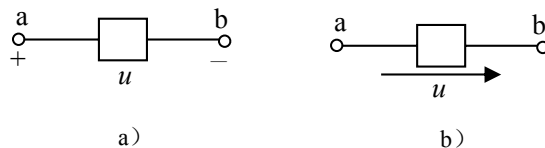


图 1-7 电压参考方向的表示方法

分析求解电路时, 先按选定的电压参考方向进行分析、计算, 再由计算结果中电压值的正负来判断电压的实际方向与任意选定的电压参考方向是否一致; 即电压值为正, 则实际方向与参考方向相同, 电压值为负, 则实际方向与参考方向相反。

1.2.3 电位的概念及其分析计算

为了分析问题方便, 常在电路中指定一点作为参考点, 假定该点的电位是零, 用符号“ \perp ”表示, 如图 1-6 所示。在生产实践中, 把地球做为零电位点, 凡是机壳接地的设备(接地符号是“ \perp ”), 机壳电位即为零电位。有些设备或装置, 机壳并不接地, 而是把许多元件的公共点做为零电位点, 用符号“ \perp ”表示。

电路中其它各点相对于参考点的电压即是各点的电位, 因此, 任意两点间的电压等于这两点的电位之差, 我们可以用电位的高低来衡量电路中某点电场能量的大小。

电路中各点电位的高低是相对的, 参考点不同, 各点电位的高低也不同, 但是电路中任意两点之间的电压与参考点的选择无关。电路中, 凡是比参考点电位高的各点电位是正电位, 比参考点电位低的各点电位是负电位。

【例 1-1】求图 1-8 中 a 点的电位。

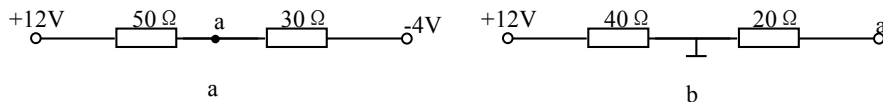


图 1-8 例 1-1 电

解 对于图 1-8a 有

$$U_a = -4 + \frac{30}{50 + 30} \times (12 + 4)V = 2V$$

对于图 1-8b, 因 20Ω 电阻中电流为零, 故

$$U_a = 0$$

【例 1-2】电路如图 1-9 所示, 求开关 S 断开和闭合时 A、B 两点的电位 U_A 、 U_B 。

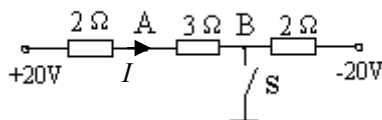


图 1-9 例 1-2 电路图

解 设电路中电流为 I ，如图所示。

开关 S 断开时：

$$I = \frac{20 - (-20)}{2 + 3 + 2} = \frac{40}{7} A$$

因为

$$20 - U_A = 2I$$

所以

$$U_A = 20 - 2I = 20 - 2 \times \frac{40}{7} = \frac{60}{7} V$$

同理

$$U_B = 20 - (2 + 3)I = 20 - 5 \times \frac{40}{7} = -\frac{60}{7} V$$

开关 S 闭合时：

$$I = \frac{20 - 0}{2 + 3} = 4 A$$

$$U_A = 3I = 3 \times 4 = 12 V$$

$$U_B = 0 V$$

1.3 电功率及电能的概念和计算

1.3.1 电功率

电流通过电路时传输或转换电能的速率，即单位时间内电场力所作的功，称为电功率，简称功率。数学描述为：

$$p = \frac{dw}{dq} \quad (1-3)$$

其中 p 表示功率。国际单位制中，功率的单位是瓦特 (W)，规定元件 1 秒钟内提供或消耗 1 焦耳能量时的功率为 1W。常用的功率单位还有千瓦 (kW)。 $1\text{kW}=1000\text{W}$

将式 (1-3) 等号右边分子、分母同乘以 dq 后，变为

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \times \frac{dq}{dt} = ui \quad (1-4)$$

可见，元件吸收或发出的功率等于元件上的电压乘以元件上的电流。

为了便于识别与计算，对同一元件或同一段电路，往往把它们的电流和电压参考方向选为一致，这种情况称为关联参考方向，如图 1-10a 所示。如果两者的参考方向相反则称为非关联参考方向，如图 1-10b 所示。



图 1-10 电压与电流的方向

有了参考方向与关联的概念，则电功率计算式 (1-4) 就可以表示为以下两种形式：

当 u 、 i 为关联参考方向时

$$p = ui \quad (\text{直流功率 } P = UI) \quad (1-5a)$$

当 u 、 i 为非关联参考方向时

$$p = -ui \quad (\text{直流功率 } P = -UI) \quad (1-5b)$$

无论关联与否，只要计算结果 $p > 0$ ，则该元件就是在吸收功率，即消耗功率，该元件是负载；若 $p < 0$ ，则该元件是在发出功率，即产生功率，该元件是电源。

根据能量守恒定律，对一个完整的电路，发出功率的总合应正好等于吸收功率的总合。

【例 1-3】 计算图 1-11 中各元件的功率，指出是吸收还是发出功率，并求整个电路的功率。已知电路为直流电路， $U_1=4\text{V}$ ， $U_2=-8\text{V}$ ， $U_3=6\text{V}$ ， $I=2\text{A}$ 。

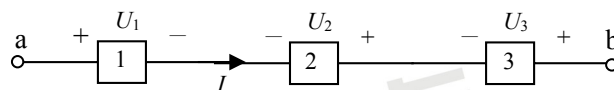


图 1-11 例 1-2 电路图

解 在图中，元件 1 电压与电流为关联参考方向，由式 (1-5a) 得

$$P_1 = U_1 I = 4 \times 2 = 8\text{W}$$

故元件 1 吸收功率。

元件 2 和元件 3 电压与电流为非关联参考方向，由式 (1-5b) 得

$$P_2 = -U_2 I = -(-8) \times 2 = 16W$$

$$P_3 = -U_3 I = -6 \times 2 = -12W$$

故元件 2 吸收功率，元件 3 发出功率。

整个电路功率为：

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 8 + 16 - 12 = 12W$$

本例中，元件 1 和元件 2 的电压与电流实际方向相同，二者吸收功率；元件 3 的电压与电流实际方向相反，发出功率。由此可见，当压与电流实际方向相同时，电路一定是吸收功率，反之则是发出功率。实际电路中，电阻元件的电压与电流的实际方向总是一致的，说明电阻总在消耗能量；而电源则不然，其功率可能正也可能为负，这说明它可能作为电源提供电能，也可能被充电，吸收功率。

1.3.2 电能

电路在一段时间内消耗或提供的能量称为电能。根据式 (1-4)，电路元件在 t_0 到 t 时间内消耗或提供的能量为

$$W = \int_{t_0}^t p dt \quad (1-6a)$$

直流时

$$W = P(t - t_0) \quad (1-6b)$$

在国际单位制中，电能的单位是焦耳 (J)。1J 等于 1W 的用电设备在 1s 内消耗的电能。通常电业部门用“度”作为单位测量用户消耗的电能，“度”是千瓦时 (KWh) 的简称。1 度 (或 1 千瓦时) 电等于功率为 1 千瓦的元件在 1 小时内消耗的电能。即

$$1 \text{ 度} = 1\text{KWh} = 10^3 \times 3600 = 3.6 \times 10^6 \text{J}$$

如果通过实际元件的电流过大，会由于温度升高使元件的绝缘材料损坏，甚至使导体熔化；如果电压过大，会使绝缘击穿，所以必须加以限制。

电气设备或元件长期正常运行的电流容许值称为额定电流，其长期正常运行的电压容许值称为额定电压；额定电压和额定电流的乘积为额定功率。通常电气设备或元件的额定值标在产品的铭牌上。如一白炽灯标有“220V、40W”，表示它的额定电压为 220V，额定功率为 40W。

1.4 电阻、电感和电容元件

电阻元件、电感元件、电容元件都是理想的电路元件，它们均不发出电能，称为无源元件。它们有线性与非线性之分，线性元件的参数为常数，与所施加的电压和电流无关。本节主要分析讨论线性电阻、电感、电容元件的特性。

1.4.1 电阻元件

电阻是一种最常见的、用于反映电流热效应的二端电路元件。电阻元件可分为线性

电阻和非线性电阻两类，如无特殊说明，本书所称电阻元件均指线性电阻元件。在实际交流电路中，像白炽灯、电阻炉、电烙铁等，均可看成是线性电阻元件。图 1-12a 是线性电阻的符号，在电压、电流关联参考方向下，其端钮伏安关系为：

$$u = Ri \quad (1-7a)$$

式中， R 为常数，用来表示电阻及其数值。

式 (1-7a) 表明，凡是服从欧姆定律的元件即是线性电阻元件。图 1-12b 为它的伏安特性曲线。若电压、电流在非关联参考方向下，伏安关系应写成：

$$u = -Ri \quad (1-7b)$$

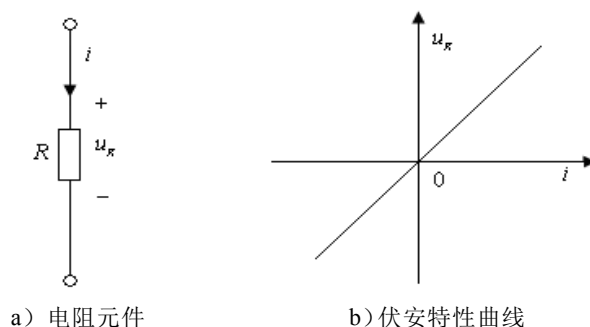


图 1-12 电阻元件及其伏安特性曲线

在国际单位制中，电阻的单位是欧姆 (Ω)，规定当电阻电压为 1V、电流为 1A 时的电阻值为 1Ω 。此外电阻的单位还有千欧 ($k\Omega$)、兆欧 ($M\Omega$)。电阻的倒数称为电导，用符号 G 来表示，即

$$G = \frac{1}{R} \quad (1-8)$$

电导的单位是西门子 (S)，或 1/欧姆 ($1/\Omega$)。

电阻是一种耗能元件。当电阻通过电流时会发生电能转换为热能的过程。而热能向周围扩散后，不可能再直接回到电源而转换为电能。电阻所吸收并消耗的电功率可由式 (1-5a) 和式 (1-7a) 计算得到：

$$p = ui = i^2 R = \frac{u^2}{R} \quad (1-9)$$

一般地，电路消耗或发出的电能可由以下公式计算：

$$W = \int_{t_0}^t uidt \quad (1-10)$$

在直流电路中：

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

$$W = UI(t - t_0)$$

1.4.2 电感元件

电感元件是实际的电感线圈即电路元件内部所含电感效应的抽象，它能够存储和释放磁场能量。空心电感线圈常可抽象为线性电感，用 1-13 表示所示的符号表示。

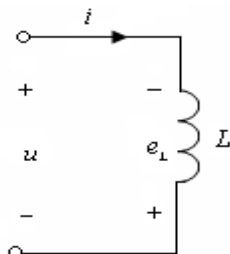


图 1-13 电感元件

其中

$$u = -e_L = L \frac{di}{dt} \quad (1-11)$$

式 (1-11) 表明，电感元件上任一瞬间的电压大小，与这一瞬间电流对时间的变化率成正比。如果电感元件中通过的是直流电流，因电流的大小不变，即 $di/dt=0$ ，那么电感上的电压就为零，所以电感元件对直流可视为短路。

在关联参考方向下，电感元件吸收的功率为：

$$p = ui = Li \frac{di}{dt} \quad (1-12)$$

则电感线圈在 $(0 \sim t)$ 时间内，线圈中的电流由 0 变化到 I 时，吸收的能量为：

$$W = \int_0^t p dt = \int_0^t Li di = \frac{1}{2} LI^2 \quad (1-13)$$

即电感元件在一段时间内储存的能量与其电流的平方成正比。当通过电感的电流增加时，电感元件就将电能转换为磁能并储存在磁场中；当通过电感的电流减小时，电感元件就将储存的磁能转换为电能释放给电源。所以，电感是一种储能元件，它以磁场能量的形式储能，同时电感元件也不会释放出多余它吸收或储存的能量，因此它也是一个无源的储能元件。

1.4.3 电容元件

电容器种类很多，但从结构上都可看成是由中间夹有绝缘材料的两块金属极板构成的。电容元件是实际的电容器即电路器件的电容效应的抽象，用于反映带电导体周围存在电场，能够储存和释放电场能量的理想化的电路元件。它的符号及规定的电压和电流参考方向，如图 1-14 所示。

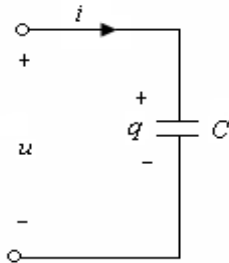


图 1-14 电容元件

当电容接上交流电压 u 时，电容器不断被充电、放电，极板上的电荷也随之变化，电路中出现了电荷的移动，形成电流 i 。若 u 、 i 为关联参考方向，则有

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad (1-14)$$

式 (1-14) 表明，电容器的电流与电压对时间的变化率成正比。如果电容器两端加直流电压，因电压的大小不变，即 $du/dt=0$ ，那么电容器的电流就为零，所以电容元件对直流可视为断路，因此电容具有“隔直通交”的作用。

在关联参考方向下，电容元件吸收的功率为：

$$p = ui = uC \frac{du}{dt} = Cu \frac{du}{dt} \quad (1-15)$$

则电容器在 $(0 \sim t)$ 时间内，其两端电压由 $0V$ 增大到 U 时，吸收的能量为：

$$W = \int_0^t p dt = \int_0^U C u du = \frac{1}{2} CU^2 \quad (1-16)$$

式 (1-16) 表明，对于同一个电容元件，当电场电压高时，它储存的能量就多；对于不同的电容元件，当充电电压一定时，容量大的储存的能量多。从这个意义上说，电容 C 也是电容元件储能本领大小的标志。

当电压的绝对值增大时，电容元件吸收能量，并转换为电场能量；电压减小时，电容元件释放点场能量。电容元件本身不消耗能量，同时也不会放出多余它吸收或储存的能量，因此电容元件也是一种无源的储能元件。

1.5 独立电源和受控电源

在组成电路的各种元件中，电源是提供电能或电信号的元件，常称为有源元件，如发电机、电池和集成运算放大器等。电源中，能够独立地向外电路提供电能的电源，称为独立电源；不能向外电路提供电能的电源称为非独立电源，又称为受控源。本节介绍独立电源，它包括电压源和电流源。

1.5.1 独立电源

一个电源可用两种不同的电路模型表示。用电压形式表示的称为电压源；用电流形式表示的，称为电流源。

1. 电压源

理想电压源是实际电源的一种抽象。它的端钮电压总能保持某一恒定值或时间函数值，而与通过它们的电流无关，也称为恒压源。图 1-15a 为理想电压源的一般电路符号，图 1-15b 是理想电池符号，专指理想直流电压源。理想电压源的伏安特性可写为：

$$u = u_s(t) \quad (1-16)$$

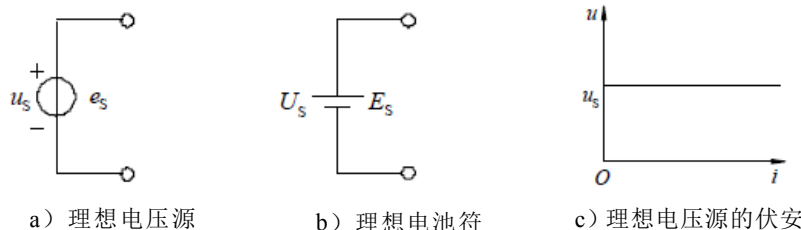


图 1-15 理想电压

理想电压源的电流是任意的，与电压源的负载（外电路）状态有关。图 1-15c 为理想电压源的伏安特性曲线。

实际的电源总是有内部消耗的，只是内部消耗通常都很小，因此可以用一个理想的电压源元件与一个阻值较小的电阻（内阻）串联组合来等效，如图 1-16a 虚线部分所示。

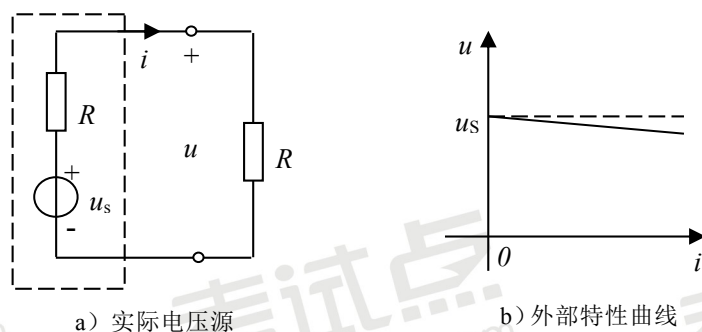


图 1-16 实际电压源模型及其外部特性曲线

电压源两端接上负载 R_L 后，负载上就有电流 i 和电压 u ，分别称为输出电流和输出电压。在图 1-16a 中，电压源的外特性方程为：

$$u = u_s - iR_0 \quad (1-17)$$

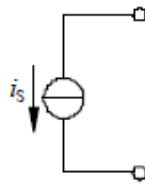
由此可画出电压源的外部特性曲线，如图 1-15b 的实线部分所示，它是一条具有一定斜率的直线段，因内阻很小，所以外特性曲线较平坦。

电压源不接外电路时，电流总等于零值，这种情况称为“电压源处于开路”。当 $u_s(t) = 0$ 时，电压源的伏安特性曲线为 $u-i$ 平面上的电流轴，输出电压等于零，这种情况称为“电压源处于短路”，实际中是不允许发生的。

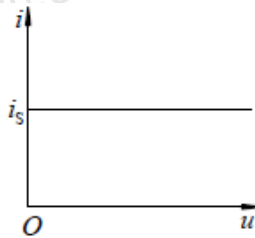
2. 电流源

理想电流源也是实际电源的一种抽象。它提供的电流总能保持恒定值或时间函数值，而与它两端所加的电压无关，也称为恒流源。图 1-17a 为理想电流源的一般电路符号。

$$i = i_s(t) \quad (1-18)$$



a) 理想电流源符号

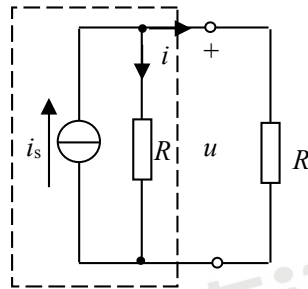


b) 理想电流源的伏安特性

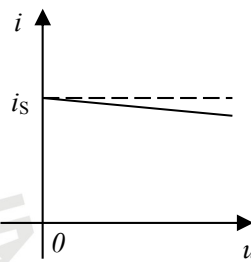
图 1-17 理想电流源

理想电流源两端所加电压是任意的，与电流源的负载（外电路）状态有关。图 1-17b 为理想电流源的伏安特性曲线。

实际的电源总是有内部消耗的，只是内部消耗通常都很小，因此可以用一个理想的电流源元件与一个阻值很大的电阻（内阻）并联组合来等效，如图 1-18a 虚线部分所示。



a) 实际电流源



b) 外部特性曲线

图 1-18 实际电流源模型及其外部特性

电压流两端接上负载 R_L 后，负载上就有电流 i 和电压 u ，分别称为输出电流和输出电压。在图 1-18a 中，电压源的外特性方程为：

$$i = i_s - \frac{u}{R_0} \quad (1-19)$$

由此可画出电流源的外部特性曲线，如图 1-18b 的实线部分所示，它是一条具有一定斜率的直线段，因内阻很大，所以外特性曲线较平坦。

电流源两端短路时，端电压等于零值， $i(t)=i_s(t)$ ，即电流源的电流为短路电流。当 $i_s(t)=0$ 时，电流源的伏安特性曲线为 $u-i$ 平面上的电压轴，相当于“电流源处于开路”，实际中“电流源开路”是没有意义的，也是不允许的。

一个实际电源在电路分析中，可以用电压源与电阻串联电路或电流源与电阻并联电路的模型表示，采用哪一种计算模型，依计算繁简程度而定。

【例 1-4】 计算图 1-19 中各电源的功率。

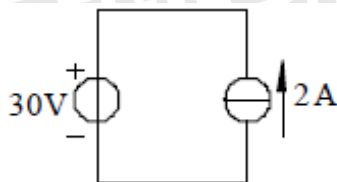


图 1-19 例 1-3 图

解 对 30V 的电压源，电压与电流实际方向关联，则

$$P_{U_s} = 30 \times 2 = 60W \quad (\text{恒压源吸收功率})$$

对 2A 的电流源，电压与电流实际方向非关联，则

$$P_{I_s} = -(30 \times 2) = -60W \quad (\text{恒流源释放功率})$$

1.5.2 受控电源

上一节中提到的电源如发电机和电池，因能独立地为电路提供能量，所以被称为独立电源。而有些电路元件，如晶体管、运算放大器、集成电路等，虽不能独立地为电路提供能量，但在其它信号控制下仍然可以提供一定的电压或电流，这类元件可以用受控电源模型来模拟。受控电源的输出电压或电流，与控制它们的电压或电流之间有正比关系时，称为线性受控源。受控电源是一个二端口元件，由一对输入端钮施加控制量，称为输入端口；一对输出端钮对外提供电压或电流，称为输出端口。

按照受控变量的不同，受控电源可分为四类：即电压控制的电压源（VCVS）、电压控制的电流源（VCCS）和电流控制的电压源（CCVS）、电流控制的电流源（CCCS）。

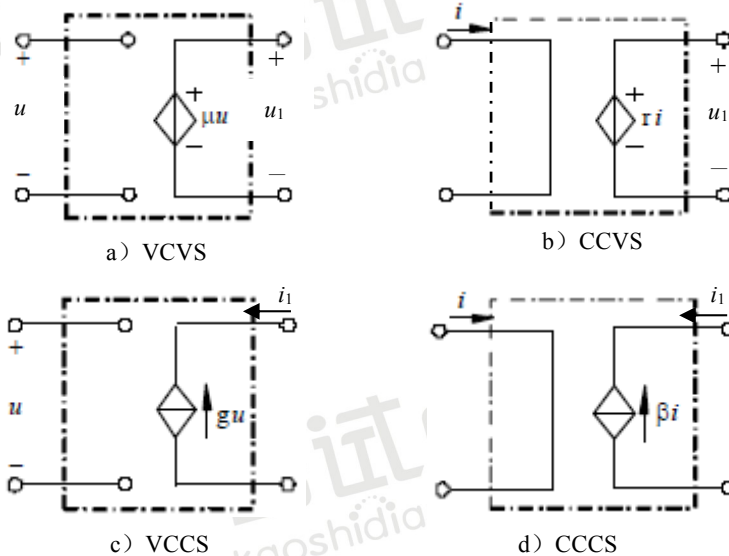


图 1-20 理想受控电源模型

为区别于独立电源，用菱形符号表示其电源部分，以 u 、 i 表示控制电压、控制电流，则四种电源的电路符号如图 1-20 所示。四种受控源的端钮伏安关系，即控制关系为：

$$\text{VCVS: } u_1 = \mu u$$

$$\text{CCVS: } u_1 = r i$$

$$\text{VCCS: } i_1 = g u$$

$$\text{CCCS: } i_1 = \beta i$$

(1-20)

式中 μ 、 r 、 g 、 β 分别表示有关的控制系数，且均为常数，其中 μ 、 β 是没有量纲的纯数， r 具有电阻量纲， g 具有电导量纲。

受控电压源输出的电压及受控电流源输出的电流，在控制系数、控制电压和控制电流不变的情况下，都是恒定的或是一定的时间函数。

注意：判断电路中受控电源的类型时，应看它的符号形式，而不应以它的控制量作为判断依据。图 1-21 所示电路中，由符号形式可知，电路中的受控电源为电流控制电压源，大小为 $10I$ ，其单位为伏特而非安培。

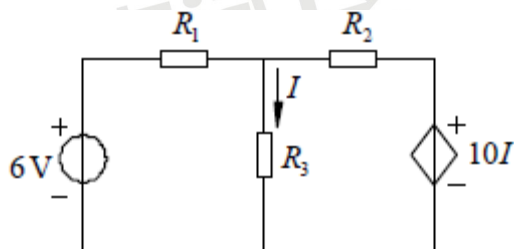


图 1-21 含有受控源的电路

【例 1-5】图 1-22 电路中 $I = 5A$ ，求各个元件的功率并判断电路中的功率是否平衡。

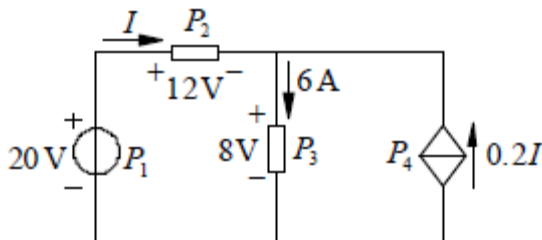


图 1-22 例 1-4 电路

解 $P_1 = -20 \times 5 = -100W$ 发出功率

$P_2 = 12 \times 5 = 60W$ 消耗功率

$P_3 = 8 \times 6 = 48W$ 消耗功率

$P_4 = -8 \times 0.2I = 8 \times 0.2 \times 5 = -8W$ 发出功率

$P_1 + P_4 + P_2 + P_3 = 0$ 电路中功率平衡

1.6 基尔霍夫基本定律

在电路分析计算中，其依据来源于两种电路规律，一种是各类理想电路元件的伏安特性，这一点至取决于元件本身的电磁性质，即各元件的伏安关系，与电路联接状况无关；另一种是与电路的结构及联接状况有关的定律，而与组成电路的元件性质无关。基尔霍夫定律就是表达电压、电流在结构方面的规律和关系的。

1.6.1 常用电路术语

基尔霍夫定律是与电路结构有关的定律，在研究基尔霍夫定律之前，先介绍几个有

关的常用电路术语。

(1)支路：任意两个节点之间无分叉的分支电路称为支路。如图 1-23 中的 bafe 支路，be 支路，bcde 支路。

(2)节点：电路中，三条或三条以上支路的汇交点称为节点。如图 1-23 中的 b 点，e 点。

(3)回路：电路中由若干条支路构成的任一闭合路径称为回路。如图 1-23 中 abefa 回路，bcdeb 回路，abcdefa 回路。

(4)网孔：不包围任何支路的单孔回路称网孔。如图 1-23 中 abefa 回路和 bcdeb 回路都是网孔，而 abcdefa 回路不是网孔。网孔一定是回路，而回路不一定是网孔。

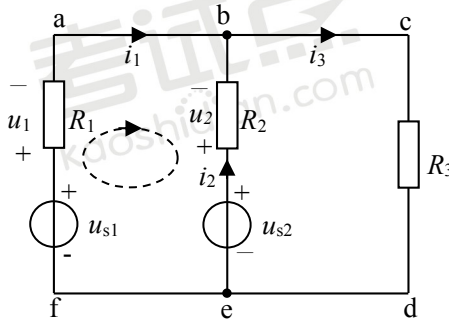


图 1-23 电路举

1.6.2 基尔霍夫电流定律

基尔霍夫电流定律 (KCL) 是用来反映电路中任意节点上各支路电流之间关系的。其内容为：对于任何电路中的任意节点，在任意时刻，流过该节点的电流之和恒等于零。其数学表达式为：

$$\sum i = 0 \quad (1-21)$$

如果选定电流流出节点为正，流入节点为负，如图 1-23 的 b 节点，有

$$-i_1 - i_2 + i_3 = 0$$

将上式变换得

$$i_1 + i_2 = i_3$$

所以，基尔霍夫电流定律还可以表述为：对于电路中的任意节点，在任意时刻，流入该节点的电流总和等于从该节点流出的电流总和。即

$$\sum i_l = \sum i_o \quad (1-22)$$

KCL 不仅适用于电路中的任一节点，也可推广应用于广义节点，即包围部分电路的

任一闭合面。可以证明流入或流出任一闭合面电流的代数和为 0。

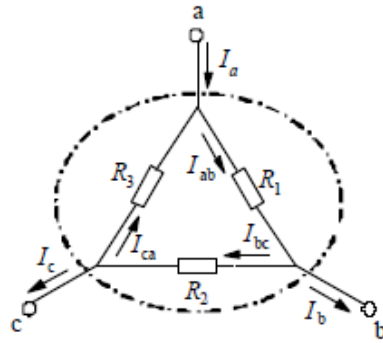


图 1-24 广义节点

图 1-24 中，对于虚线所包围的闭合面，可以证明有如下关系：

$$I_a - I_b + I_c = 0$$

基尔霍夫电流定律是电路中联接到任一节点的各支路电流必须遵守的约束，而与各支路上的元件性质无关。这一定律对于任何电路都普遍适用。

1.6.3 基尔霍夫电压定律

基尔霍夫电压定律 (KVL) 是反映电路中各支路电压之间关系的定律。可表述为：对于任何电路中任一回路，在任一时刻，沿着一定的循行方向（顺时针方向或逆时针方向）绕行一周，各段电压的代数和恒为零。其数学表达式为

$$\sum u = 0 \quad (1-23)$$

如图 1-23 所示闭合回路中，沿 abefa 顺序绕行一周，则有

$$-u_{s1} + u_1 - u_2 + u_{s2} = 0$$

式中， u_{s1} 之前之所以加负号，是因为按规定的循行方向，由电源负极到正极，属于电位升； u_2 的参考方向与 i_2 相同，与循行方向相反，所以也是电位升。 u_1 和 u_{s2} 与循行方向相同，是电位降。当然，各电压本身还存在数值的正负问题，这是需要注意的。

由于 $u_1 = R_1 i_1$ 和 $u_2 = R_2 i_2$ ，代入上式有

$$-u_{s1} + R_1 i_1 - R_2 i_2 + u_{s2} = 0$$

或

$$R_1 i_1 - R_2 i_2 = u_{s1} - u_{s2}$$

这时，基尔霍夫电压定律可表述为：对于电路中任一回路，在任一时刻，沿着一定的循行方向（顺时针方向或逆时针方向）绕行一周，电阻元件上电压降之和恒等于电源电压升之和。其表达式为：

$$\sum Ri = \sum u_s \quad (1-24)$$

按式 (1-24) 列回路电压平衡方程式时, 当绕行方向与电流方向一致时, 则该电阻上的电压取 “+”, 否则取 “-”; 当从电源负极循行到正极时, 该电源参数取 “+”, 否则取 “-”。

注意应用 KVL 时, 首先要标出电路各部分的电流、电压或电动势的参考方向。列电压方程时, 一般约定电阻的电流方向和电压方向一致。

KVL 不仅适用于闭合电路, 也可推广到开口电路。图 1-25 中, 有

$$U = 2I + 4$$

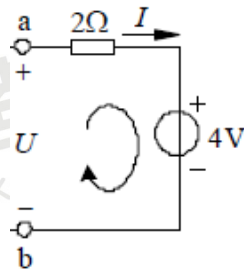


图 1-25 开口电路

【例 1-6】在图 1-26 中 $I_1=3\text{mA}$, $I_2=1\text{mA}$ 。试确定电路元件 3 中的电流 I_3 和其两端电压 U_{ab} , 并说明它是电源还是负载。

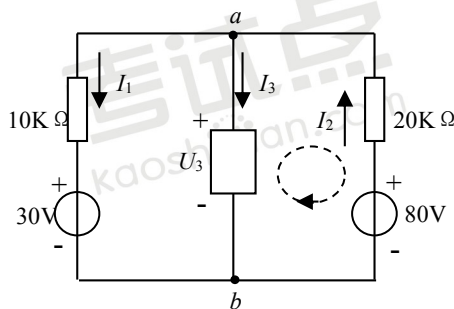


图 1-26 例 1-5 图

解 根据 KCL, 对于节点 a 有

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

代入数值得

$$(3-1) + I_3 = 0$$

$$I_3 = -2\text{mA}$$

根据 KVL 和图 1-26 右侧网孔所示绕行方向，可列写回路的电压平衡方程式为

$$-U_{ab} - 20I_2 + 80 = 0$$

代入 $I_2=1\text{mA}$ 数值，得

$$U_{ab} = 60\text{V}$$

显然，元件 3 两端电压和流过它的电流实际方向相反，是产生功率的元件，即使电源。

第二章 直流电路的分析

本章学习目标

- (1) 了解电路的基本物理量的意义、单位和符号，电流与电压正方向的确定方法；
- (2) 了解电路的基本定律的意义及其应用、电路的工作状态以及负载额定值的意义；
- (3) 了解电源的等效变换的条件，掌握电路的等效变换方法。
- (4) 掌握电路的分析的基本原理及电路参数的检测方法。

2.1 电路的基本概念

2.1.1 电路与电路基本物理量

1. 电路图

(1) 电路

电路就是电流所流过的路径，它为了实现某种功能由一些电气设备或元件构成的。就其功能而言，可以分为两大类：一是实现能量的转换、传送与分配

(如电力系统电路等); 二是实现信号的传送和处理 (如广播电视系统),

(2) 电路模型

由于电能的传输和转换, 或是信号的传递和处理, 都是通过电流、电压和电动势来实现的, 因此下面介绍电路的基本物理量。如图 1-1 所示

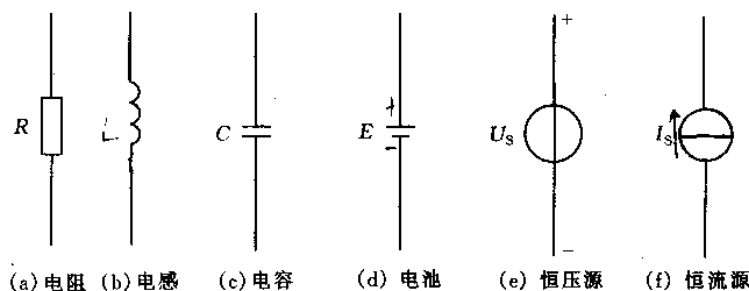


图 1-1 理想电路元件及其图形符号

2. 电流及参考方向

电流是一种物理现象, 是带电粒子有规则的定向运动形成的, 通常将正电荷移动的方向规定为电流正方向。电流的大小用电流强度来衡量, 其数值等于单位时间内通过导体某一横截面的电荷量。根据定义有

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1-1)$$

式中, i 为电流, 其单位为安培 (A); dq 为通过导体截面的电荷量, 电荷量的单位为库仑 (C); dt 为时间 (s)。

上式表明, 在一般情况下, 电流是随时间变化的。如果电流不随时间而变化, 即 $dq/dt = \text{常数}$, 则这种电流就称为恒定电流 (简称直流)。直流时, 不

随时间变化的物理量用大写字母表示，式 (1-1)可写成

$$I = \frac{Q}{t} \quad (1-2)$$

电流的方向是客观存在的，但在电路分析中，一些较为复杂的电路，有时某段电流的实际方向难以判断，甚至有时电流的实际方向还在随时间不断改变，于是要在电路中标出电流的实际方向较为困难。为了解决这一问题，在电路分析时，常采用电流的“参考方向”这一概念。电流的参考方向可以任意选定，在电路图中用箭头表示。当然，所选的参考方向不一定是电流的实际方向。当参考方向与电流的实际方向一致时，电流为正值($i>0$)；当参考方向与电流的实际方向相反时，电流为负值($i<0$)。这样，在选定的参考方向下，根据电流的正负，就可以确定电流的实际方向。在分析电路时，先假定电流的参考方向，并以此去分析计算，最后用求得答案的正负值来确定电流的实际方向。

3. 电压及参考方向

(1) 定义：单位正电荷在电场力作用下，由 a 运动到 b 电场力所做的功，称为电路中 a 到 b 间的电压，即

$$u_{ab} = \frac{dw_{ab}}{dq} \quad (1-3)$$

式中， u_{ab} 为 a 到 b 间的电压，电压的单位为伏特 (V)； dw_{ab} 为 dq 的正电荷从 a 运到 b 所做的功，功的单位为焦耳 (J)。

在直流时，式 (1-3)可写成

$$U_{ab} = \frac{W_{ab}}{Q} \quad (1-4)$$

(2) 单位：1 千伏特 (KV) =1000 伏 (V)

1 伏特 (KV) =1000 毫伏 (mV)

1 毫伏 (mV) =1000 微伏 (μV)

(3) 实际方向：高电位指向低电位

(4) 参考方向：任意选定某一方向作为电压的正方向，也称参考方向。

(5) 电压参考方向的表示方法

在电路分析时，也需选取电压的参考方向，当电压的参考方向与实际方向一致时，电压为正 ($u>0$)；相反时，电压为负 ($u<0$)。电压的参考方向可用箭头表示，也可用正 (+)、负 (-)极性表示

4. 电位

在电路中任选参考点 0，该电路中某点。到参考点 0 的电压就称为 a 点的电位。电位的单位为伏特 (V)，用 V 表示。电路参考点本身的电位 $V_0=0$ ，参考点也称为零电位点。根据定义，电位实际上就是电压，即

$$V_a=U_{a0} \quad (1-5)$$

可见，电位也可为正值或负值，某点的电位高于参考点，则为正，反之则为负。任选参考点 0，则 a、b 两点的电位分别为 $V_a=U_{a0}$ 、 $V_b=U_{b0}$ 。按照做

功的定义，电场力把单位正电荷从 a 点移到 b 点所做的功，等于把单位正电荷从 a 点移到 0 点，再移到 b 点所做的功的和，即

$$U_{ab}=U_{a0}+U_{0b}=U_a-U_{b0}=V_a-V_b$$

或
$$U_{ab}=V_a-V_b \quad (1-6)$$

式 (1-6)表明，电路中 a、b 两点间的电压等于 a、b 两点的电位差，因而电压也称为电位差。

注意！同一点的电位值是随着参考点的不同而变化的，而任意两点之间的电压却与参考点的选取无关。

举例：例 1-1

总结：

电压、电流的参考方向是事先选定的一个方向，根据电压、电流数值的正、负，可确定电压、电流的实际方向。引入参考方向后，电压、电流可以用代数数量表示。电路或元件的伏安关系是电路分析与研究的重点。

复习：

1、简述电流及电压参考方向的含义

2、电压与电位有何区别？

2. 1. 2 电路基本元件及其伏安特性

电路中的元件，如不另加说明，都是指理想元件。分析研究电路的一项基本内容就是分析电路或元件的电压、电流及其它它们之间的关系。电压与电流

的关系称为伏安关系或伏安特性，在直角平面上画出的曲线称为伏它特性曲线。下面讨论电路基本元件及其伏安特性。

1. 电阻元件及其伏安特性

电阻元件的伏安特性，如图 1-2 所示，为过原点的一条直线，它表示电压与电流成正比关系，这类电阻元件称为线性电阻元件，其两端的电压与电流服从欧姆定律关系，即

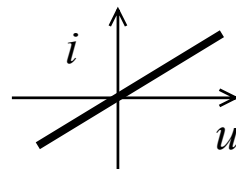


图 1-2 电阻元件的伏安

特性曲线

$$u = Ri \text{ 或 } i = \frac{u}{R} \quad (1-7)$$

在直流电路中，欧姆定律可表示为

$$I = \frac{U}{R} \text{ 或 } U = RI \quad (1-8)$$

式中电压 U 的单位是 V，电流 I 的单位是 A，电阻 R 的单位是 Ω 。常用的电阻单位还有行千欧 ($k\Omega$) 和兆欧 ($M\Omega$) 他们之间的关系为

$$1M\Omega = 10^3 k\Omega = 10^6 \Omega$$

值得注意的是，导体的电阻不随其端电压的大小变化，是客观存在的。当温度一定时，导体的电阻与导体的长度 l 成正比，与导体的横截面积 S 成反比，还与导体的材料性质（电阻率 ρ ）有关，即

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (1-9)$$

式中, R 的单位是 Ω , ρ 的单位是 Ωm , l 的单位是 m , S 的单位是 m^2 。若令 $G=1/R$, 则 G 称为电阻元件的电导, 电导的单位是西[门子] (S)。

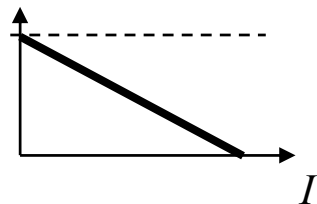
在 (1-8) 式中, 当电压与电流的参考方向一致时, 电压为正值。反之, 则电压为负值。

2. 电压源

电源是电能的来源, 也是电路的主要元件之一。电池、发电机等都是实际的电源。在电路分析时, 常用等效电路来代替实际的部件。一个实际的电源的外特性, 即电源端电压与输出电流之间的关系 $[U=f(I)]$, 可以用两种不同的电路模型来表示。一种是电压源; 一种是电流源。

(1) 理想的电压源——恒压源

一个电源没有内阻, 其端电压与负载电流的变化无关, 为常数, 则这个电源称为理想的电压源, 用 U_s 表示, 它是一条与 I 轴平行的直线。通常用的稳压电源、发电机可视为理想的电压源。



(2) 电压源

实际的电源都不会是理想的, 总是有一定的内阻, 因此, 在电路分析时, 对电源可以用一个理想的电压源与内阻相串联的电路模

型——电压源来表示, 如图 1-3 所示。直流电

压源的外特性为

图 1-3 电压源外特

性曲线

$$U = U_s - R_0 I \quad (1-10)$$

图中斜线与纵座标轴的交点，为负载开路时，电源的端电压（电压源的最高端电压），即 $I=0$ ， $U=U_0=U_s$ 。而与横座标轴的交点则是电源短路时的最大电流 I_s ，即 $U=0$ ， $I_s=U_s/R_0$ 。

3. 电流源

(1) 理想电流源——恒流源

当一个电源的内阻为无穷大，其输出电流与负载的变化无关，为常数，则这个电源称为理想电流源，用 I_s 表示。其外特性曲线是一条与纵轴 U 平行的直线。常用的光电池与一些电子器件构成的稳流器，可以认为是理想的电流源。

(2) 电流源

理想电流源实际上是不存在。对于一个实际的电源，也可以用一个理想的电流源与内阻并联的电路模型——电流源来替代，如图 1-4 所示，由式 (1-10) 得直流电流源的外特性为

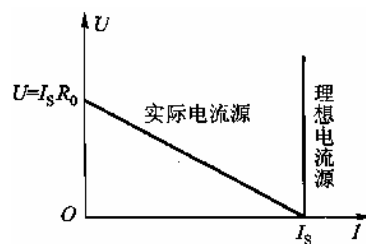


图 1-4 电流源

外特性曲线

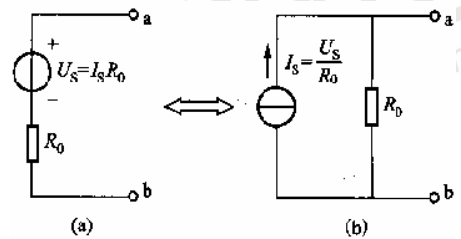
$$I = \frac{U_s}{R_0} - \frac{U}{R_0} = I_s - \frac{U}{R_0} \quad (1-11)$$

的曲线，图中斜线与纵轴的交点表示负载开路时， $I=0$ ， $U=U_0=R_0I_s=U_s$ ；斜线

与横轴的交点则是电流源短路时， $U=0$ ， $I=I_s$ 。

4. 电压源与电流源的等效变换

如果电压源和电流源的外特性相同，则在相同电阻 R 上产生相等的电压 U 与电流 I 。如图 1-5 所示。



在图 1-5 (a) 的电压源模型中

图 1-5 实际电压源与实际电流源等效变换

源等效变换

$$U_s = R_0 I + U \quad (1-12)$$

在图 1-5 (b) 的电流源模型中

$$I_s = I + \frac{U}{R_0} \quad (1-13)$$

$$R_0 I_s = R_0 I + U$$

比较以上两式，得

$$U_s = R_0 I_s \text{ 或 } I_s = \frac{U_s}{R_0} \quad (1-14)$$

式 (1-14) 就是实际的电压源与电流源之间等效变换公式。

在等效变换时还需注意：

1) 电压源是电动势为 E 的理想电压源与内阻 R_0 相串联，电流源是电流为 I_s 的理想电流源与内阻 R_0 相并联，是同一电源的两种不同电路模型。

2) 变换时两种电路模型的极性必须一致，即电流源流出电流的一端与电压源的正极性端相对应。

3) 等效变换仅对外电路适用，其电源内部是不等效的。

4) 理想电压源的短路电流 I_s 为无穷大，理想电流源的开路电压 U_0 为无穷大，因而理想电压源和理想电流源不能进行这种等效变换。

5) 扩展内阻 R_0 的内涵，即当有电动势为 E 的理想电压源与某电阻 R 串联的有源支

路，都可以变换成电流为 I_s 的理想电流源与电阻 R 并联的有源支路，反之亦然。其相互变换的关系是

$$I_s = \frac{E}{R}$$

式 (1-15) 中电阻 R 可以是电源的内阻，也可以是与电压源串联或与电流源并联的任意电阻。

举例：例 1-2

2. 1. 3 电路的三种状态

(1) 额定工作状态

在图 1-6 所示的电路中, 如果开关闭合, 电源则向负载 R_L 提供电流, 负载 R_L 处于额定工作状态, 这时电路有

如下特征:

① 电路中的电流为:

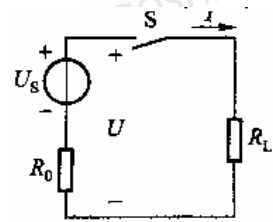


图 1-6 电路的

有载与空载

$$I = \frac{U_s}{R_0 + R_L} \quad (1-15)$$

式中, 当 U_s 与 R_0 一定时, I 的值取决于 R_L 的大小。

② 电源的端电压等于负载两端的电压 (忽略线路上的压降), 为:

$$U_1 = U_s - R_0 I = U_2 \quad (1-16)$$

③ 电源输出的功率则等于负载所消耗的功率 (不计线路上的损失), 为:

$$P_1 = U_1 I = (U_s - R_0 I) I = U_2 I = P_2 \quad (1-17)$$

(2) 空载状态

图 1-6 所示的电路, 为开关断开或连接导线折断时的开路状态, 也称为空载状态。电路在空载时, 外电路的电阻可视为无穷大。因此电路具有

下列特征:

- ① 电路中的电流为零, 即

$$I=0 \quad (1-18)$$

- ② 电源的端电压为开路电压 U_0 , 并且有

$$U_1=U_0=U_s-R_0I=U_s \quad (1-19)$$

- ③ 电源对外电路不输出电流, 因此有

$$P_1=U_1I=0, \quad P_2=U_2I=0 \quad (1-20)$$

(3) 短路状态

如图 1-6 所示的电路中, 电源的两输出端线, 因绝缘损坏或操作不当, 导致两端线相接触, 电源被直接短路, 这就叫短路状态。

当电源被短路时, 外电路的电阻可视为零, 这时电路具有如下特征:

- ① 电源中的电流最大, 但对外电路的输出电流为零, 即

$$I_s = \frac{U_s}{R_0}, \quad I=0 \quad (1-21)$$

式中 I_s 称为短路电流。因为一般电源的内阻 R_0 很小, 所以 I_s 很大。

- ② 电源和负载的端电压均为零, 即

$$U_1=U_s-R_0I=0, \quad U_2=0 \quad (1-22)$$

上式表明, 电源的恒定电压, 全部降落在内阻上, 两者的大小相等, 方向相反, 因此无输出电压。

③ 电源输出的功率全部消耗在内阻上，因此，电源的输出功率和负载所消耗的功率均为零，即

$$P_1 = U_1 I = 0$$

$$P_2 = U_2 I = 0 \quad (1-23)$$

$$P_{U_s} = \frac{U_s^2}{R_0} = R_0 I_s^2$$

举例：例 1-3

总结：

1、简单电路的分析可以采用电阻串、并联等效变换的方法来化简。实际电压源与实际电流源可以互相等效变换。

2、无源二端线性网络可以等效为一个电阻。有源二端线性网络可以等效为一个电压源与电阻串联的电路或一个电流源与电阻并联的电路，且后两者之间可以互相等效变换。等效是电路分析与研究中很重要而又很实用的概念，等效是指对外电路伏安关系的等效。

复习：

- 1、电源在等效变换时需注意哪几点？
- 2、电路的三种状态各有什么特点？

2. 2 直流电路的基本分析方法

电路分析是指在已知电路结构和元件参数的条件下，确定各部分电压与电流的之间的关系。实际电路的结构和功能多种多样，如果对某些复杂电路直接进行分析计算，步骤将很繁琐，计算量很大。因此，对于复杂电路的分析，必须根据电路的结构和特点去寻找分析和计算的简便方法。本节主要介绍电路的等效变换、支路电流法、结点电压法、叠加定理、戴维南定理、非线性电阻电路图解法等分析电路的基本方法。这些方法既可用于分析直流电路，也适用于分析线性交流电路。

2. 2. 1 电路的等效电阻

1. 二端网络

二端网络是指具有两个输出端的电路，如果电路中含有电源就叫有源二端网络，不含电源则叫无源二端网络。二端网络的特性可用其端口上的电压 U 和电流 I 之间的关系来反映，图 1-7 中的端口电流 I 与端口电压 U 的参考方向

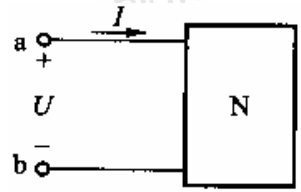


图 1-7 二端网络

对二端网络来说是关联参考方向。

如果一个二端网络的端口电压与电流关系和另一个二端网络的端口电压与电流关系相同，则这两个二端网络对同一负载（或外电路）而言是等效的，即互为等效网络。

2. 电阻的串联

如图 1-8 所示，为几个电阻依次连接，当中无分支电路的串联电路。串联电路的特点：

(1) 流过各电阻中的电流相等，即

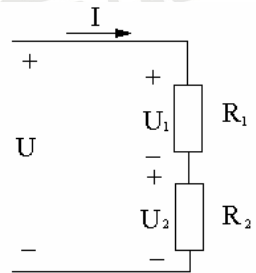


图 1-8 电阻串

联及其等效

$$I=I_1=I_2$$

(1-24)

(2) 电路的总电压等于各电阻两端的电压之和，即

$$U=U_1+U_2$$

(1-25)

由此可得，电路取用的总功率等于各电阻取用的功率之和，即

$$IU=IU_1+IU_2$$

(1-26)

(3) 电路的总电阻等于各电阻之和，即

$$R=R_1+R_2$$

(1-27)

(4) 电路中每个电阻的端电压与电阻值成正比，即

$$U_1 = \frac{R_1}{R} U$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R} U$$

(1-28)

(5) 串联电阻电路消耗的总功率 P 等于各串联电阻消耗的功率之和, 即

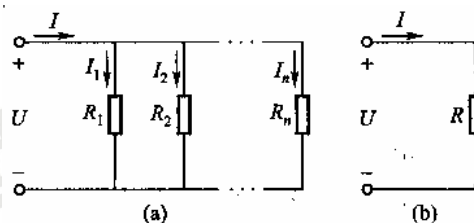
$$P = \sum P_i = P_1 + P_2 + \cdots + P_n \quad (1-29)$$

串联电路的实际应用主要有:

- ① 常用电阻的串联来增大阻值, 以达到限流的目的;
- ② 常用几个电阻的串联构成分压器, 以达到同一电源能供给不同电压的需要;
- ③ 在电工测量中, 应用串联电阻来扩大电压表的量程。

3. 电阻的并联

如图 1-9 所示, 为几个电阻的首尾分别连接在电路中相同的两点之间的并联电路。



并联电路有如下特点:

- (1) 各并联电阻的端电压相等, 且等于电路两端的电压, 即

图 1-9 电阻并联及其等效

效

$$U = U_1 = U_2 \quad (1-30)$$

- (2) 并联电路中的总电流等于各电阻中流过的电流之和, 即

$$I = I_1 + I_2 \quad (1-31)$$

(3) 并联电路的总电阻的倒数等于各并联电阻的倒数之和, 即

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

即
$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (1-32)$$

(4) 并联电路中, 流过各电阻的电流与其电阻值成反比, 阻值越大的电阻分到的电流越小, 各支路的分流关系为

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \quad (1-33)$$

可见, 在电路中, 通过并联电阻能达到分流的目的。

(5) 并联电阻电路消耗的总功率等于各电阻上消耗的功率之和, 即

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2} + \cdots + \frac{U^2}{R_n} \quad (1-34)$$

可见, 各并联电阻消耗的功率与其电阻值成反比。

并联电路的实际应用有:

(1) 工作电压相同的负载都是采用并联接法。对于供电线路中的负载, 一般都是并联接法, 负载并联时各负载自成一个支路, 如果供电电压一定, 各负载工作时相互不影响, 某个支路电阻值的改变, 只会使本支路和供电线路的电流变化, 而不影响其他支路。例如工厂中的各种电动机、电炉、电烙铁与各种照明灯都是采用并联接法, 人们可以根据不同的需要起动或停止各支路的负载。

(2) 利用电阻的并联来降低电阻值，例如将两个 1000Ω 的电阻并联使用，其电阻值则为 500Ω 。

(3) 在电工测量中，常用并联电阻的方法来扩大电流表量程。

4. 电阻的混联

在实际的电路中，经常有电阻串联和并联相结合的连接方式，这就称为电阻的混联。对于能用串、并联方法逐步化简的电路，仍称为简单电路。有些电阻电路既不是串联，也不是并联，无法用串、并联的公式等效化简，只有寻找其他的方法求解，如电阻的星形联接与三角形联接的求解。

举例：例 1-4

2. 2. 2 基尔霍夫定律

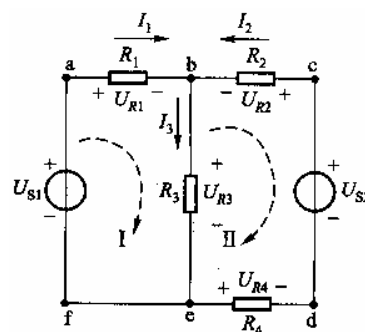
用串并联的方法能够最终化为单一回路的简单电路，可以用欧姆定律来求解。用串并联的方法，不能将电路最终化为单一回路的复杂电路，其求解规律，反映在基尔霍夫定律中。基尔霍夫定律是电路的基本定律之一，它包含有两条定律，分别称为基尔霍夫电流定律(KCL)和基尔霍夫电压定律(KVL)。

1. 电路结构的基本名词

在基尔霍夫定律中，常要用到如下几个电路名词：

支路：在电路中通过同一电流的分支电路叫做支路。如图 1-10 的电路中，有三条支路，分别是 I_1 、 I_2 和 I_L 流过的支路。

节点：有三条或三条以上支路的连接点叫做节点。如图 1-10 的电路中，有 b、e 两个节点。回路：闭合的电路叫做回路。回路可由一条或多条支路组成，但是只含一个闭合回路的电路叫网孔。如图



1-10 的电路中，有 abcdef、abef 和 bcde 三个回路，两个网孔，即 abef 和 bcde。

图 1-10 电路名词定义示意图

2. 基尔霍夫电流定律 (KCL)

根据电流连续性原理，在电路中任一时刻，流入节点的电流之和等于流出

该节点的电流之和，节点上电流的代数和恒等于零，即

$$\sum I_i = \sum I_o \text{ 或 } \sum I = 0 \quad (1-35)$$

这一关系叫节点电流方程，是基尔霍夫电流定律，也称为基尔霍夫第一定律。

该定律的应用可以由节点扩展到任一假设的闭合面。在应用 KCL 时，必须先假定各支路电流的参考方向，再列电流方程求解，根据计算结果，确定电流的实际方向。如果指定流入节点的电流为正（或负），则流出节点的电流为负（或正）。

3. 基尔霍夫电压定律 (KVL)

根据电位的单值性原理，在电路中任一瞬时，沿回路方向绕行一周，闭合

回路内各段电压的代数和恒等于零，即回路中电动势的代数和恒等于电阻上电压降的代数和，其数学式为

$$\sum U = 0 \text{ 或 } \sum U_s = \sum RI \quad (1-36)$$

这一关系叫回路电压方程，是基尔霍夫电压定律，也称为基尔霍夫第二定律。

该定律的应用可以由闭合回路扩展到任一不闭合的电路上，但必须将开口处的电压列入方程中。在应用 KVL 时，必须先假定闭合回路中各电路元件的电压参考方向和回路的绕行方向，当两者的假定方向一致时，电压取“+”号；反之则电压取“-”号。

举例：例 1-6

总结：

欧姆定律和基尔霍夫定律是电路分析的最基本定律。它们分别体现了元件和电路结构对电压、电流的约束关系。

复习：

- 1、什么是串联分压？什么是并联分流？举例说明。
- 2、简述基尔霍夫定律的内容

2. 2. 3 支路电流法

支路电流法是利用基尔霍夫两个定律列出电路的电流和电压方程，求解

复杂电路中各支路电流的基本方法。支路法的解题步骤为：

(1) 先标出电路中各支路电流、电压的参考方向和回路的绕行方向。

(2) 如果电路中有 n 个节点, 根据 KCL 列出 $n-1$ 个独立的节点电流方程。

(3) 如果电路中有 m 个回路, 根据 KVL 列出 $m - (n-1)$ 个独立回路电压方程。通常选电路中的网孔来列回路电压方程。

(4) 代入已知数, 解联立方程组, 求出各支路电流。根据需要还可以求出电路中各元件的电压及功率。

2. 2. 4 叠加原理

在线性电路中, 如果有多个电源供电 (或作用), 任一支路的电流 (或电压) 等于各电源单独供电时在该支路中产生电流的代数和。这就是叠加原理。

它是分析线性电路的一个重要定理。它的应用可以由线性电路扩展到产生的原因和结果满足线性关系的系统中, 但不能用叠加原理计算功率, 因为功率是电流 (或电压) 的二次函数 ($P=RI^2$), 不是线性关系。

在应用叠加定理时, 应注意以下几点:

1) 在考虑某一电源单独作用时, 要假设其他独立电源为零值。电压源用短路替代, 电动势为零; 电流源开路, 电流为零。电源有内阻的都保留在原处, 其他元件的联接方式不变。

2) 在考虑某一电源单独作用时, 可将其参考方向选择为与原电路中对应响应的参考方向相同, 且在叠加时用响应的代数值代入。也可以原电路中电压和电流的参考方向为准, 分电压和分电流的参考方向与其一致时取正号, 不

一致时取负号。

3) 叠加定理只能用于计算线性电路的电压和电流, 不能计算功率等与电压或电流之间不是线性关系的量。

4) 受控源不是独立电源, 必须全部保留在各自的支路中。

举例: 例 1-7

2. 2. 5 戴维南定理和诺顿定理

1. 戴维南定理

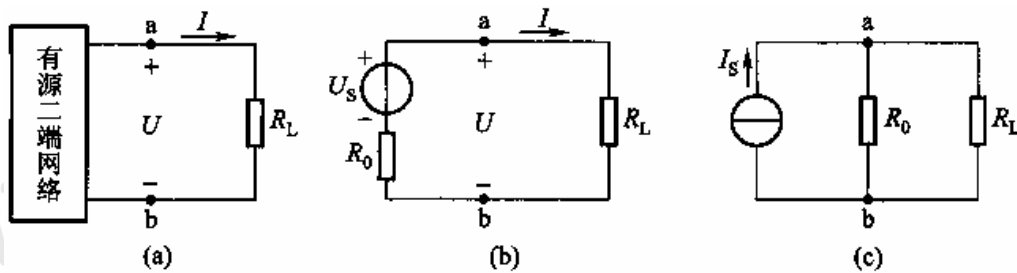


图 1-11 有源二端网络的等效电路

在图 1-11 的电路中, 在电路分析计算中, 有时只需计算电路中某一支路的电流, 如果用前面介绍的方法, 计算比较复杂, 为了简化计算, 可采用戴维南定理进行计算。戴维南定理表述如下: 任何一个线性有源二端网络, 对于外电路, 可以用一个理想电压源和内阻串联组合的电路模型来等效。该电压源的电压等于有源二端网络的开路电压; 内阻等于将有源二端网络变成相应的无源二端网络的等效电阻。此电路模型称为戴维南等效电路, 二端网络

即具有两个端钮与外电路联接的网络。二端网络的内部含有电源时称为有源二端网络，否则称为无源二端网络。所谓相应的无源二端网络的等效电阻，

就是原有源二端网络所有的理想电源（理想电压源或理想电流源）均除去时网络的二端电阻。除去理想电压源，即 $E=0$ ，理想电压源所在处短路；除去理想电流源，即 $I_s=0$ ，理想电流源所在处开路。戴维南定理把有源二端网络用电压源来等效代替，故戴维南定理又称为等效电压源定理。

解题步骤：（1）断开支路求有源二端网络的开路电压 U_0

（2）将有源二端网络变为无源二端网络求等效电阻 R_{ab} 。

（3）根据戴维南定理画出等效电压源电路。

（4）把断开的支路拿回来，求未知电流。

2. 诺顿定理

由于电压源与电流源可以等效变换，因此有源二端网络也可用电流源来等效代替。诺顿定理叙述如下：任一线性有源二端网络，对其外部电路来说，

可用一个理想电流源和内阻相并联的有源电路来等效代替。其中理想电流源的电流 I_s 等于网络的短路电流，内阻 R_0 等于相应的无源二端网络的等效电阻。

诺顿定理又称为等效电流源定理，它和戴维南定理一起合称为等效电源定理。

举例：例 1-8

总结：

1、支路电流法是分析电路的基本方法。如果电路结构复杂，因电路方程

增加使得支路电流法不太实用。

2、叠加定理适用于线性电路，是分析线性电路的基本定理。注意，叠加定理只适用于线性电路中的电压和电流。

3、戴维南定理和诺顿定理是电路分析中很常用的定理，运用它们往往可以简化复杂的电路。

复习：

- 1、支路电流法有什么特点？
- 2、简述叠加定理的解题方法
- 3、简述应用戴维南定理的解题步骤

2.2.6 最大功率传输定理

在测量、电子信息系统中，经常会遇到接在电源输出端或接在有源二端网络上的负载如何获得最大功率的问题。根据戴维南定理，有源二端网络可以简化为电

源与电阻的串联电路来等效，因此，在研究负载如何获得最大功率的问题时，

根据图 1-12 电路中的负载 R_L 获得的功率为

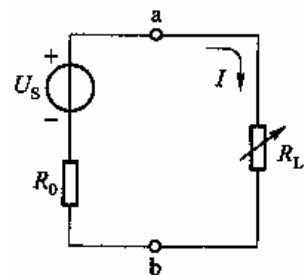


图 1-12 负载获得最大功

率的条件

$$P_L = I^2 R_L = \left(\frac{U_s}{R_0 + R_L} \right)^2 R_L$$

令 $\frac{dP_L}{dR_L} = 0$, 可得

$$R_L = R_0 \quad (1-37)$$

式 (1-37) 称为最大功率功率传输条件, 这时负载获得的功率最大, 为

$$P_{L\max} = \frac{U_s^2}{4R_0} \quad (1-38)$$

负载获得最大功率的条件称为最大功率传输定理, 工程上将电路满足最大功率传输条件 ($R_L = R_0$) 称为阻抗匹配。在信号传输过程中, 如果负载电阻与信号源内阻相差较大, 常在负载与信号源之间接入阻抗变换器, 如变压器、射极输出器等, 以实现阻抗匹配, 使负载从信号源获得最大功率。

应该指出, 在阻抗匹配时, 尽管负载获得的功率达到了最大, 但电源内阻

R_0 上消耗的功率为

$$P_0 = I^2 R_0 = I^2 R_L = P_{L\max} \quad (1-39)$$

可见, 电路的传输效率只有 50%, 这在电力系统是不允许的, 在电力系统中负载电阻必须远远大于电源内阻, 尽可能减少电源内阻上的功率消耗, 只有在小功率信号传送的电子电路中, 注重如何将微弱信号尽可能放大, 而不在意信号源效率的高低, 此时阻抗匹配才有意义。

举例: 例 1-9

2. 2. 7 节点电压法

节点电压法是以电路中各个节点对参考点(零电位点)的电压为未知量(即

节点电压), 应用 KCL 列出与节点电压数相等的电流方程, 联立后求解各节点电压的电路分析方法。电路中其它支路的电流或电压, 可以利用已求得的节点电压求取。

在电路中, 任意选取某节点作为参考点, 其余节点与参考节点间的节点电压的参考方向均是从其余节点指向参考节点。

实际应用节点电压法分析电路时, 应先选定参考节点, 然后根据公式直接列出电路的节点电压方程, 进行求解。

节点电压法适用于节点数少, 支路数多的电路。对于只有两个节点, 多条支路的电路, 用节点电压法求解更为方便。如图 1-13 所示的电路 (该形式的电路也称为单节偶电路) 有两个节点, 选节点 b 为参考节点, 只有一个节点电压为 U_{ab} , 可直接列出节点电压方程为

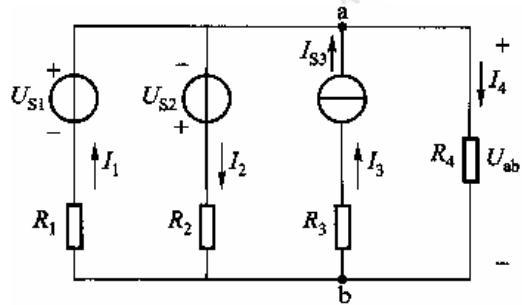


图 1-13 单节偶电路

或写成

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) U_{ab} = I_{S1} - I_{S2} + I_{S3}$$

$$U_{ab} = \frac{I_{S1} - I_{S2} + I_{S3}}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_4} = \frac{\sum I_s}{\sum 1/R} \quad (1-40)$$

式 (1-40) 也称为弥尔曼定理。

2. 2. 8 含受控源电路简介

前面所介绍的电压源和电流源，它们的电压和电流都不受外电路的控制而独立存在，称为独立电源，简称独立源。在电子线路中还会遇到另一类电源，它们的电压或电流要受到电路中其他支路或元件上电压或电流的控制，这种电源称为受控源。受控源是许多实际电路元件的电路模型，如半导体晶体管的集电极电流要受到基极电流的控制等。受控源反映了控制量与被控制量之间的关系。

根据控制量是电压还是电流，受控量是电压源还是电流源，受控源分为四种类型，即电压控制电压源（VCVS）、电流控制电压源（CCVS）、电压控制电流源（VCCS）、电流控制电流源（CCCS）。

这四种受控源的电路模型为菱形符号，以便与独立电源的圆形符号相区别，其参考方向的表示方法与独立源相同。图中 u_1 、 i_1 是控制量，它们可以是电路中某两点之间的电压和某条支路的电流； u_2 、 i_2 是受控量，它们是受控源上的电压和电流。在电路图中，控制量所在支路与受控量所在支路可以分开画，只要在控制支路中标明控制量即可。

四种受控制源中，对 VCVS， $u_2 = \mu u_1$ ， μ 为无量纲系数；

对 CCVS， $u_2 = \gamma i_1$ ， γ 单位为欧；

对 VCCS， $i_2 = g u_1$ ， g 单位为导纳；

对 CCCS， $i_2 = a i_1$ ， a 为无量纲系数。

对含有受控源的线性电路，前面介绍的几种电路分析方法都可以应用，但受控源的特性与独立源是有区别的，在分析计算时必须注意。

总结：

- 1、节点电压法适用于节点数少、支路数多的电路，其中弥尔曼定理经常用到。
- 2、受控源的电压和电流不是独立的，它们受到电路中另一支路的电压或电流控制。对于含有受控源的有源二端网络，在计算其等效电源的内阻 R_0 时，受控源不能去除。电路分析的基本方法也适用于含受控源的电路。

本章小结

1. 电压、电流方向及伏安关系

电压、电流的参考方向是事先选定的一个方向，根据电压、电流数值的正、负，可确定电压、电流的实际方向。引入参考方向后，电压、电流可以用代数量表示。电路或元件的伏安关系是电路分析与研究的重点。

2. 欧姆定律和基尔霍夫定律

欧姆定律和基尔霍夫定律是电路分析的最基本定律。它们分别体现了元件和电路结构对电压、电流的约束关系。

3. 功率与功率平衡

当元件上的电压与电流取关联参考方向时，其功率为 $P=UI$ ，当 $P<0$ 时，该元件输出(释放或产生)功率，当 $P>0$ 时，该元件输入(吸收或消耗)功率。一

个电路中所有元件功率的代数和等于零， $\sum P = 0$ 。

4. 电路的分析方法

简单电路的分析可以采用电阻串、并联等效变换的方法来化简。实际电压源与实际电流源可以互相等效变换。

支路电流法是分析电路的基本方法。如果电路结构复杂，因电路方程增加使得支路电流法不太实用。

戴维南定理和诺顿定理是电路分析中很常用的定理，运用它们往往可以简化复杂的电路。

节点电压法适用于节点数少、支路数多的电路，其中弥尔曼定理经常用到。

叠加定理适用于线性电路，是分析线性电路的基本定理。注意，叠加定理只适用于线性电路中的电压和电流。

5. 二端网络与等效变换

无源二端线性网络可以等效为一个电阻。

有源二端线性网络可以等效为一个电压源与电阻串联的电路或一个电流源与电阻并联的电路，且后两者之间可以互相等效变换。

等效是电路分析与研究中很重要而又很实用的概念，等效是指对外电路伏安关系的等效。

6. 受控源的电压和电流不是独立的，它们受到电路中另一支路的电压或电流控制。对于含有受控源的有源二端网络，在计算其等效电源的内阻 R_0 时，

受控源不能去除。电路分析的基本方法也适用于含受控源的电路。

第三章 正弦电流电路

本章学习目标

- (1) 掌握正弦交流电的三要素及其相量表示方法。
- (2) 掌握电阻、电感、电容组成的交流电路的特点。
- (3) 掌握串并联谐振电路的特点。
- (4) 了解三相交流电路的组成及电路特点。

本章是在第一章的基础上介绍正弦交流电路的。主要内容有：交流电的概念、交流电的表示方法、交流电路的主要性质及常见的物理现象，电压、电流、电功率的计算等。

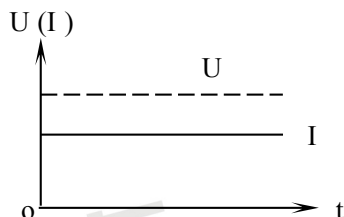
分析与计算正弦交流电路。主要是确定不同参数和不同结构的各种正弦交流电路中电压与电流之间的关系和功率。

3.1 正弦量与正弦电路

3.1.1 正弦量的时域表示法

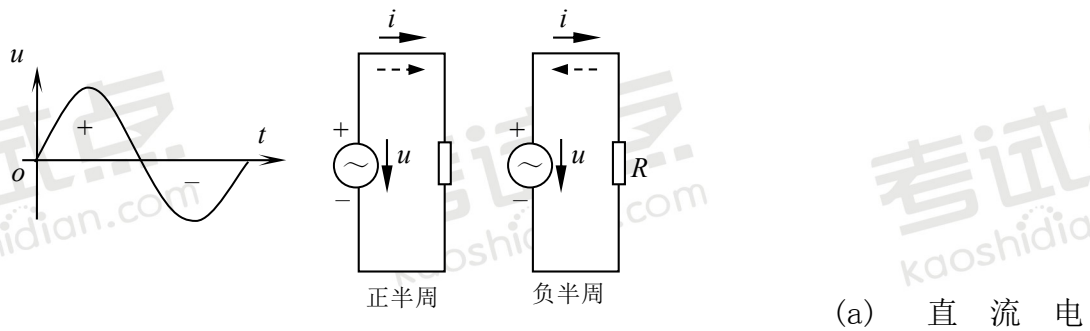
1. 正弦量

在第一章中所分析的电路中，电路各个



251

部分的电压和电流都不随时间而变化，如图 2-2 (a) 所示，称之为直流电压（或电流）。如图 2-2 (b) 所示，为正弦交流电及其电路，本是在第一章的基础上介绍正弦交流电路的。



(b) 正弦交流电

图 2-2 直流和正弦交流电压（电流）随时间变化的波形图

分析与计算正弦交流电路。主要是确定不同参数和不同结构的各种正弦交流电路中电压与电流之间的关系和功率。

在正弦交流电路中，电压和电流是按正弦规律变化的，其波形如图 2-2 (b) 所示。由于正弦电压和电流的方向是周期性变化的，在电路图上所标的方向是指它们的正方向，即代表正半周时的方向。在负半周时，由于所标的正方向与实际方向相反，则其值为负。图中的虚线箭标代表电流的实际方向；“+”、“-”代表电压的实际方向。

正弦电压和电流等物理量，常统称为正弦量。

以正弦电流为例，解析式

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) \quad (2-1)$$

式中， i 为正弦交流电流随时间变化的瞬时值； I_m 为电流的最大值； ω 为正弦交流电流的角频率； ψ 为正弦交流电的初相角。如图 2-3 所示，式 (2-1) 表达了每一瞬时正弦电流在时间域上的函数取值，因此，称为瞬时值函数式，简称瞬式或时域表达式。

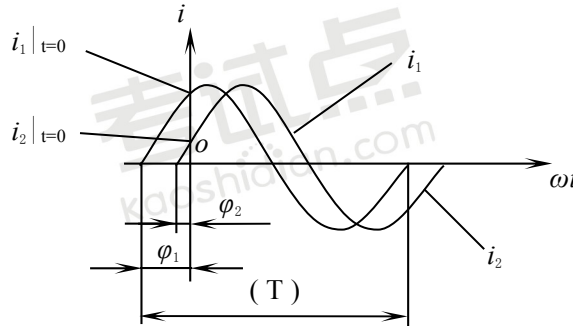


图 2-3 正弦交流电量的相位与初相

这种按正弦规律变化的波形（或函数）可由振幅、周期（或频率）、初相位三个参数确定。这三个参数称为正弦量的三要素。

2. 正弦量的三要素

设正弦电流为

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

(1) 频率、周期和角步骤

周期是指交流电重复一次所需的时间，用字母 T 表示，单位为秒（s）。

频率是交流电每秒钟重复变化的次数，用 f 表示。

周期和频率的关系是

$$f = 1/T \quad \text{或} \quad T = 1/f \quad (2-2)$$

f 的单位是赫兹 (Hz)，频率反映了交流电变化的快慢。

交流电每完成一次变化，在时间上为一个周期，在正弦函数的角度上则为

2π 弧度 (rad)，单位时间内变化的角度称为角频率。用 ω 表示，单位为弧度

/秒 (rad/s)，则角频率、周期、频率的关系为：

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (2-3)$$

试计算 50Hz 工频的角频率与周期

(2) 幅值与有效值

正弦量在任一瞬间的值称为瞬时值，用小写字母表示，如用 i 、 u 、 e 分别表示瞬时电流、电压、电动势等。瞬时值中最大的称为幅值或最大值，用带下标 m 的大写字母表示，如用 I_m 、 U_m 、 E_m 等来表示电流、电压、电动势的最大值。

在正弦交流电中，一般用有效值来描述各量的大小。有效值是通过电流的热效应来规定的，若周期性电流 i 在一个周期内流过电阻 R 所产生的热量与另一个恒定的直流电流 I 流过相同的电阻 R 在相同的时间里产生的热量相等，即这个直流电流 I 和周期电流 i 热效应是等效的，因此将这个直流电流的数值定义为该周期电流的有效值。有效值用大写字母表示，经数学推导有效值与最

大值之间的关系为：

正弦电流的有效值为

$$I = I_m / \sqrt{2} \quad (2-5)$$

正弦电压的有效值为

$$U = U_m / \sqrt{2} \quad (2-6)$$

正弦电动势的有效值为

$$E = E_m / \sqrt{2} \quad (2-7)$$

(3) 初相位

① 初相位

式(2-1)中的 $\omega t + \psi$ 称为交流电的相位角,简称相位。当 $t=0$ 时的相位叫初相位,简称初相,用 ψ 表示。初相决定交流电的起始状态。如图2-2中 i 的初相为 ψ ,其初始值不为零。当 $\psi=0$ 时,初始值为零。

② 同频率正弦量的相位差

两个同频率正弦量的相位之差叫相位差。也用字母 φ 表示。

如 $u = U_m \sin(\omega t + \psi_1)$, $i = I_m \sin(\omega t + \psi_2)$, 则两者的相位差为

$$\varphi = (\omega t + \psi_1) - (\omega t + \psi_2) = \psi_1 - \psi_2 \quad (2-8)$$

可见,两个同频率正弦量的相位差等于它们的初相之差。相位差的大小反映了两个同频率正弦量到达正幅值或负幅值的时间差。

- I 若 $\psi_1 - \psi_2 > 0$, 称 u 超前于 i ; 或 i 滞后于 u 如图2-3所示。
- II 若 $\psi_1 - \psi_2 = 0$, 说明 u 与 i 同时到达正幅值, 称为 u 与 i 同相位。如图2-4所示。
- III 若 $\psi_1 - \psi_2 = \pi$, 说明 u 、 i 到达正幅值时 e 恰为负幅值, 称 u 、 i 与 e 反相。如图2-4所示。

举例: 例2-1、例2-2

2. 1. 2 正弦量的相量表示

1. 复数概述

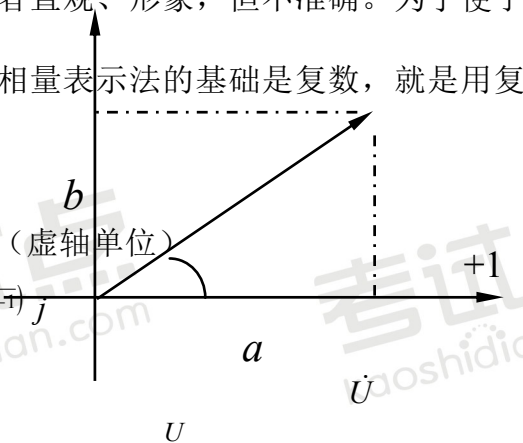
正弦交流电可用三角函数式和波形图表示, 见式(2-1)和图(2-2), 前者是基本的表示方法, 但运算繁琐; 后者直观、形象, 但不准确。为了便于分析计算正弦电路, 常用相量法表示。相量表示法的基础是复数, 就是用复数来表示正弦量。

(1) 复数的表示方法

将复数 \dot{U} 放到复平面上, 可如下表示:

$$\dot{U} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\psi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{b}{a}$$



(实轴单位)

$$\dot{U} = a + jb = U \cos \psi + jU \sin \psi$$

(2) 复数的表示形式基本运算

0

图 2-4 复数的向量表示

$$\dot{U} = a + jb$$

$$= U(\cos \psi + j \sin \psi) \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \dot{U} = a + jb \\ = U(\cos \psi + j \sin \psi) \end{matrix}} \right\} \text{代数式一加减运算}$$

$$= U e^{j\psi} \quad \text{指数式一乘除运算}$$

$$\Rightarrow U \angle \psi \quad \text{极坐标形式}$$

(2-9)

$$\dot{U}_1 \pm \dot{U}_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

$$\dot{U}_1 \cdot \dot{U}_2 = U_1 \cdot U_2 e^{j(\psi_1 + \psi_2)} = U_1 \cdot U_2 \angle \psi_1 + \psi_2$$

$$\dot{U}_1 / \dot{U}_2 = U_1 / U_2 e^{j(\psi_1 - \psi_2)} = U_1 \cdot U_2 \angle \psi_1 - \psi_2$$

2. 正弦量的相量表示法

一个正弦量具有三要素，但在交流电路中，当外加正弦交流电源的频率一定时，在电路各部分产生的正弦电流和电压的频率，也都与电源的频率相同，所以在分析过程中可以把角频率这一要素当作为已知量，于是只留下正弦量的大小和初相位才需要进行计算。用复数的模表示正弦量的大小，用复数的辐角表示正弦量的初相角，来分析计算正弦交流电，就显得非常合适。这种用于表示正弦交流电的复数，称为相量。例如要将正弦电压 $u = 60 \sin(\omega t + 45^\circ)$ V 表示成相量，即 $\dot{U}_m = U_m \angle 45^\circ = 60(\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = 60e^{j45^\circ}$ V

相量在复平面上的图 2-7 称为相量图。该图为 $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$ 的最大值相量图示法。令正弦相量绕 0 点以角速度 ω 逆时针旋转，则任一时刻在纵轴上的投影，为该正弦量的瞬时值 $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$ 。

注意：① 相量不能表示非正弦量；

② 只有同频率的正弦量才能画在同一相量图上进行比较和计算；

③ 两相量相加减时，既可在相量图中用矢量的图解法求解，也可用相量的复数表达式运算。

举例：例 2-4、2-5。

总结：正弦量的时域表示法与相量表示法：

正弦电压与正弦电流的时域表达式一般采用正弦函数形式，幅值(或有效

值)、频率(或周期或角频率)和初相为正弦量的三要素。

同频率的正弦电压或电流可用相量形式表示，用相量计算替代三角运算可大大简化运算过程。

复习

1. 什么是正弦交流电的三要素？
2. 两个正弦量同相和反相是什么意思？
3. 已知 $u = 60\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) V$, $i = 2\sqrt{2} \sin(\omega t + 60^\circ) A$, 试画出它们的相量图, 并写出它们相量复数形式和极坐标形式。

3. 2 正弦交流电路分析

3. 2. 1 电阻、电感、电容及其交流伏安特性

电阻、电容、电感是实际中使用最广泛的三种负载元件，电阻是耗能元件，电容、电感是储能元件。

在直流电路中，电感元件可视为短路，电容元件则可视为开路。而在交流电路中，由于电压、电流随时间变化，在电感元件中因磁场不断变化，产生感生电动势；在电容极板间的电压不断变化，引起电荷在与电容极板相连的导线中移动形成电流。下面讨论电阻、电感与电容在交流电路中各自的电特性。

1. 电阻元件

(1) 电阻元件上电压与电流关系

图2-5(a)是一个线性电阻元件的交流电路。电压和电流的正方向如图所示，两者关系由欧姆定律确定，即 $u = iR$ 。

为了分析问题的方便，我们选择电流经过零值并将向正值增加的瞬间作为计时起点($t=0$)，即设 $i = I_m \sin \omega t$ 为参考正弦量，则

$$u = iR = I_m R \sin \omega t = U_m \sin \omega t \quad (2-8)$$

式(2-8) u 也是一个同频率的正弦量。可看出，在电阻元件的交流电路中，

电流和电压是同相的(相位差 $\varphi = 0^\circ$)，表示二者的正弦波形如图2-5(b)所示。

在式(2-8)中

$$U_m = I_m R \quad \text{或} \quad \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = R \quad (2-9)$$

由此可知，在电阻元件电路中，电压的幅值(或有效值)之比值就是电阻 R 。

如用相量表示电压与电流的关系，则为

$$\dot{U} = U e^{j0} \quad \text{或} \quad \dot{I} = I e^{j0}; \quad \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} = R; \quad \dot{U} = \dot{I} R \quad (2-10)$$

此即欧姆定律的相量表示式，电压和电流的向量如图 2-5(c)所示。

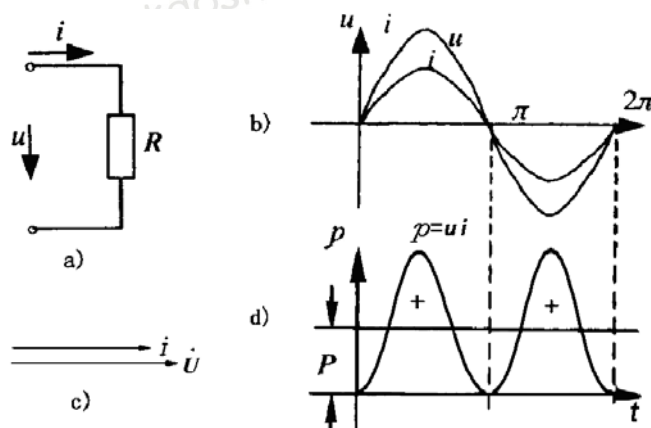


图2-5 电阻元件交流电路

(a)电路图；(b)电流、电压正弦波图形；(c)电压与电流的向量图；(d)功率波图形

(2) 电阻元件的功率

知道了电压和电流的变化规律和相互关系后，便可找出电路中的功率。

在任意瞬间，电压瞬时值 u 与电流瞬时值 i 的乘积称为瞬时功率，用小写字

母 p 表示，即

$$p = p_R = ui = U_m I_m \sin 2\omega t = U_m I_m \frac{(1 - \cos 2\omega t)}{2} \quad (2-11)$$

$$= \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot (1 - \cos 2\omega t) = UI(1 - \cos 2\omega t)$$

由于在电阻元件的交流电路中 u 与 i 同相，它们同时为正，同时为负，所以瞬时功率总是正值，即 $p \geq 0$ 。瞬时功率为正，这表明外电路从电源取用能量。

电阻元件从电源取用能量后转换成了热能，这是一种不可逆的能量转换过程。我们通常这样计算电能： $W = P \cdot t$ ， P 是一个周期内电路消耗电能的平均功率，即瞬时功率的平均值，称为平均功率。在电阻元件电路中，平均功率为

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad (2-12)$$

2. 电感元件

(1) 电感元件上电流与电压关系

假设线圈只有电感 L ，而电阻 R 可以忽略不计，我们称之为纯电感，今后我们所说的电感如无特殊说明就是指纯电感。当电感线圈中通过交流电流 i 时，其中产生自感电动势 e_L ，设电流 i 、电动势 e_L 和电压 u 的正方向如图 2-6 (a) 所示。前面我们根据克希荷夫电压定律得出

$$u = -e_L = L \frac{di}{dt} \quad (2-13)$$

设有电流 $i = I_m \sin \omega t$ 流过电感 L ，则代入式 (2-13) 得电感上的电压 u 为：

$$u = \omega L I_m \sin(\omega t + 90^\circ) = U_m \sin(\omega t + 90^\circ)$$

即 u 和 i 也是一个同频率的正弦量。表示电压 u 和电流 i 的正弦波形如

图 2-6(b)所示。

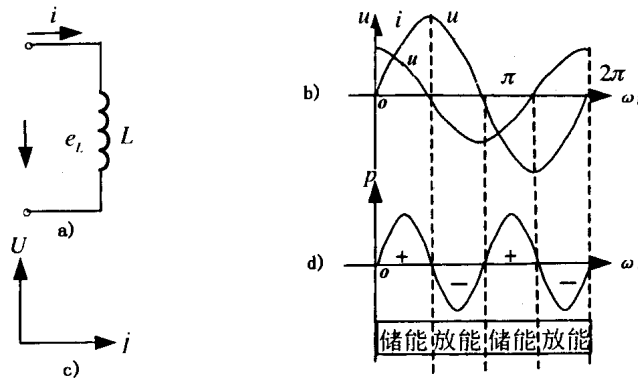


图 2-6 电感元件交流电路

(a)电路图；(b)电流、电压正弦波图形；(c)电流、电压向量图；(d)功率波图形

比较以上 u, i 两式可知，在电感元件电路中，电流在相位上比电压滞后 90° ，且电压的与电流的有效值符合下式。

$$U_m = I_m \omega L \text{ 或 } \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \omega L \quad (2-14)$$

即在电感元件电路中，电压的幅值(或有效值)与电流的幅值(或有效值)之比为 ωL 。显然它的单位也为欧姆。电压 U 一定时， ωL 愈大，则电流 I 愈小。可见它具有对电流起阻碍作用的物理性质，所以称为感抗。用 X_L 表示为

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \quad (2-15)$$

感抗 X_L 与电感 L 、频率 f 成正比，因此电感线圈对高频电流的阻碍作用

很大，而对直流则可视作短路。还应该注意，感抗只是电压与电流的幅值或有效值之比，而不是它们的瞬时值之比。

如用相量表示电压与电流的关系，令 $\dot{U} = Ue^{j90^\circ}$, $\dot{I} = Ie^{j0^\circ}$ 则：

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} e^{(90^\circ - 0^\circ)} = \frac{U}{I} e^{j90^\circ} = jX_L = j\omega L \quad \text{或} \quad \dot{U} = j\omega L \cdot \dot{I} \quad (2-16)$$

相量式(2-16)也表示了电压与电流的有效值关系以及相位关系，即：电压与电流的有效值符合欧姆定理 ($U=IX_L$)，相位上电压超前电流 90° 。因电流相量 \dot{i} 乘上 j 后即向前旋转 90° ，所以称 jX_L 为复感抗。电压和电流的相量图如图 2-6(c)所示。

(2) 电感元件的功率与储能

知道了电压 u 和电 i 的变化规律和相互关系后，便可找出瞬时功率的变化规律，即

$$p = u \cdot i = U_m \sin(\omega t + 90^\circ) \cdot I_m \sin \omega t = UI \sin 2\omega t \quad (2-17)$$

可见， p 是一个幅值为 UI ，以 2ω 角频率随时间而变化的交变量，如图 2-6(d)所示。当 u 和 i 正负相同时， p 为正值，电感处于受电状态，它从电源取用电能；当 u 和 i 正负相反时， p 为负值，电感处于供电状态，它把电能归还电源。电感元件电路的平均功率为零，即电感元件的交流电路中没有能量消耗，只有电源与电感元件间的能量互换。这种能量互换的规模我们用无功功率 Q 来衡量，我们规定无功功率等于瞬时功率 p_L 的幅值，即

$$Q = UI = I^2 X_L = U^2 / X_L \quad (2-18)$$

无功功率的单位是乏(var)或千乏(kvar)。

举例：例 2-6

3. 电容元件

(1) 交流电路中电容元件上电流与电压关系

线性电容元件与正弦电源联接的电路，如图 2-7 所示。

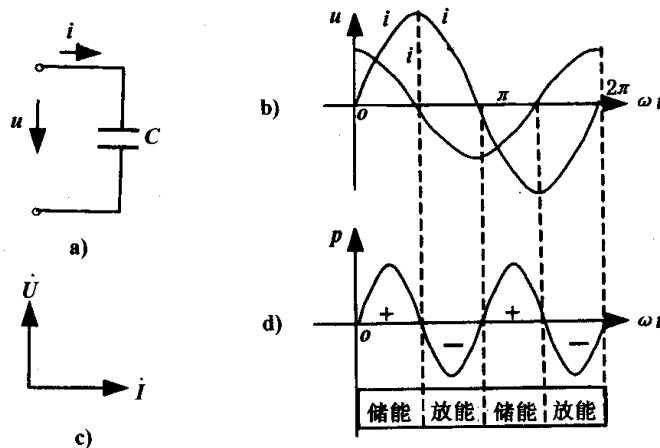


图 2-7 电容元件交流电路图

(a)电容元件电路；(b)电流、电压正弦波图形；(c)电压与电流的正弦波形；(d)

功率波图形

电容充放电电流 $i = \frac{dq}{dt} = \frac{dC \cdot u}{dt}$ ，故有： $i = C \frac{du}{dt}$ ，若在电容器两端加一

正弦电压 $u = U_m \sin \omega t$ ，则代入 $i = C \frac{du}{dt}$ 中有

$$i = \omega C U_m \sin(\omega t + 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + 90^\circ) \quad (2-19)$$

即 u 和 i 也是一个同频率的正弦量。表示电压 u 和电流 i 的正弦波形如图

(2-7b)所示。

比较以上 u, i 两式可知，在电容元件电路中，电压在相位上比电流滞后 90°

。（即电压与电流的相位差为 -90° ，在今后中，为了便于说明电路的性质，

我们规定：当电流比电压滞后时，其相位差 φ 为正值；当电流比电压超前时，

其相位差 φ 为负值。）且电压的与电流的有效值符合下式。

$$I_m = U_m \omega C \quad (2-20)$$

$$\text{或} \quad \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C} \quad (2-21)$$

可见在电容元件电路中，电压的幅值(或有效值)与电流的幅值(或有效值)

之比值为 $\frac{1}{\omega C}$ ，它的单位也为欧姆。当电压 U 一定时， $\frac{1}{\omega C}$ 愈大，则电流 I

愈小。可见它对电流具有起阻碍作用的物理性质，所以称为容抗。用 X_C 表示，

即

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (2-22)$$

容抗 X_C 与电容 C 、频率 f 成反比。因此，电容对低频电流的阻碍作用很

大。对直流($f=0$)而言， $X_C \rightarrow \infty$ ，可视作开路。同样应该注意，容抗只是电压

与电流的幅值或有效值之比，而不是它们的瞬时值之比。

如用相量表示电压与电流的关系，则 $\dot{U} = U e^{j0}$ ， $\dot{I} = I e^{j90^\circ}$ ，故有：

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} e^{j(0^\circ - 90^\circ)} = \frac{U}{I} e^{-j90^\circ} = j X_C = j \frac{1}{\omega C}$$

$$\text{或 } \dot{U} = -jIX_C = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I} \quad (2-23)$$

相量式(2-23)也表示了电压与电流的有效值关系和相位关系, 即: 电压与电流的有效值符合欧姆定理 ($U=IX_C$), 相位上电压滞后于电流 90° 。因电流相量 \dot{i} 乘上 $-j$ 后即向后旋转 90° , 所以称 $-jX_C$ 为复容抗。

(2) 交流电路中电容元件上的功率

根据电压 u 和电流 i 的变化规律和相互关系, 便可找出瞬时功率的变化规律, 即

$$p = ui = UI\sin 2\omega t \quad (2-24)$$

由上式可见, p 是一个幅值为 UI , 并以 2ω 角频率随时间而变化的交变量, 如图(2-7d)所示。当 u 和 i 正负相同时, P 为正值, 电容处于充电状态, 它从电源取用电能; 当 u 和 i 正负相反时, P 为负值, 电容处于放电状态, 它把电能归还电源。

电容元件电路的平均功率也为零, 即电容元件的交流电路中没有能量消耗, 只有电源与电容元件间的能量互换。这种能量互换的规模我们用无功功率 Q 来衡量, 我们规定无功功率等于瞬时功率 P_c 的幅值。

为了同电感元件电路的无功功率相比较, 我们设电流 $\dot{i} = I_m \sin \omega t$ 为参考正弦量, 则得到电容元件的无功功率为

$$Q = -UI = -I^2 X_C \quad (2-25)$$

即电容元件电路的无功功率取负值。

3. 2. 2 阻抗的概念与正弦交流电路分析

在实际的电路中，除白炽灯照明电路为纯电阻电路外，其他电路几乎都包含了电感或电容的复杂混合电路。

1. RLC 串联交流电路的阻抗与相量形式的欧姆定理

电阻、电感与电容元件串联的交流电路如图(2-8a)所示，注意在电路中的各元件通过同一电流 i 。

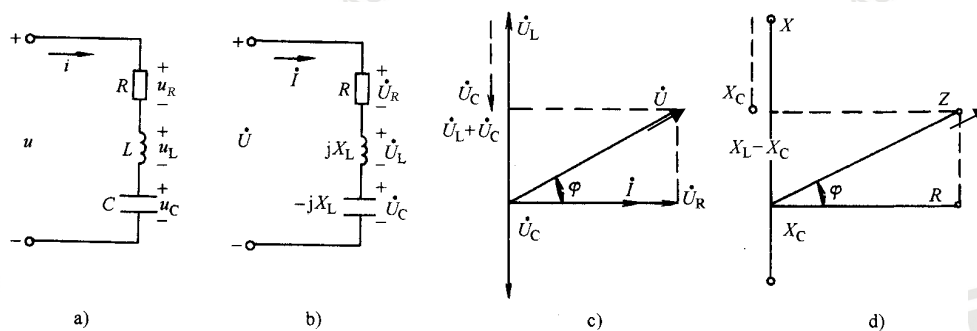


图 2-8 R 、 L 、 C 串联的交流电路

(a)电路图；(b)相量模型图；(c)电压相量三角形；(d)阻抗三角形

根据克希荷夫电压定律可列出

$$u = u_R + u_L + u_C = iR + L \frac{di}{dt} + C \int i dt \quad (2-26)$$

设电流 $i = I_m \sin \omega t$ ，代入上式得：

$$u = u_R + u_L + u_C = I_m R \sin \omega t + \omega L I_m \sin(\omega t + 90^\circ) + \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t - 90^\circ)$$

如图(2-8b)所示,上式各正弦量用有效值相量表示后,则有:

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = iR + jX_L i + (-jX_C)i \quad (2-27)$$

该式称为相量形式的基尔霍夫定理。

$$\text{上式(2-27)又可写成: } \dot{U} = [R + j(X_L - X_C)]i \quad (2-28)$$

$$\text{令: } X = X_L - X_C, Z = R + j(X_L - X_C) = R + jX \quad (2-29)$$

$$\text{则: } \dot{U} = i \cdot Z \quad \text{或} \quad \frac{\dot{U}}{i} = Z \quad (2-30)$$

上述两式中, X 称为电抗, 表示电路中电感和电容对交流电流的阻碍作用的大小, 单位为欧姆 (Ω); Z 称为复阻抗, 它描述了 RLC 串联交流电路对电流的阻碍以及使电流相对电压发生的相移。习惯上称上式(2-30)为正弦交流电路的相量式欧姆定理。在阻抗的联接中我们将详细介绍复阻抗 Z 及相量式欧姆定理的应用。

2. 电流电压关系与电压三角形、阻抗与阻抗三角形

因为电路中各元件上电流相同, 故以电流 i 为参考相量, 作出电路的电流与电压相量图如图(2-8c)所示。在相量图上, 各元件电压 u_R, u_L, u_C 的相量 $\dot{U}_R, \dot{U}_L, \dot{U}_C$ 相加即可得出电源电压 u 的相量 \dot{U} , 由于电压相量 \dot{U} 、 \dot{U}_R 及 $(\dot{U}_L + \dot{U}_C)$ 组成了一个直角三角形, 故我们称这个三角形为电压三角形。

利用电压三角形, 便可求出电源电压的有效值, 即

$$U = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (2-31)$$

由上式可见, 这种电路中电压与电流的有效值(或幅值)之比为 $\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, 它就是复阻抗 Z 的模, 它的单位也是欧姆, 具有对电流起阻

碍作用的性质，我们称它为电路的阻抗，用 $|Z|$ 表示，即

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (2-32)$$

有了阻抗 $|Z|$ ，则式 (2-31) 可写为：

$$U = I \cdot |Z| \quad (2-33)$$

即 RLC 串联电路中的电流与电压的有效值符合欧姆定理。

另外据式 (2-32)， $|Z|$ 、 R 、 $(X_L - X_C)$ 三者之间的关系也可用一个阻抗三角形来表示，阻抗三角形是一个直角三角形如图 (2-8d) 所示。阻抗三角形和电压三角形是相似三角形，故电源电压 u 与电流 i 之间的相位差 φ 即可以从电压三角形得出，也可以从阻抗三角形：

$$\varphi = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} \quad (2-34)$$

我们可以看出，上式中的电压与电流的相位差 φ 也是复阻抗 Z 的复角，又称为阻抗的阻抗角。故复阻抗 Z 可表示为：

$$Z = |Z| \angle \varphi \quad \text{或} \quad Z = |Z| e^{j\varphi} \quad (2-35)$$

而且，从前面的分析可知，复阻抗 Z 的模表示了电路对交流电流阻碍作用的大小，复角 φ 表示了电路使交流电流相对于电压的相移，故前面我们说：

复阻抗 Z 描述了交流电路对电流的阻碍以及三角形它使电流相对电压发生的相移。

3. 电路的性质

阻抗 $|Z|$ 、电阻 R 、感抗 X_L ，及容抗 X_C 不仅表示电压 u 及其分量 u_R 、 u_L

及 u_C 与电流 i 之间的大小关系，而且也表示了它们之间的相位关系。随着电路参数的不同，电压 u 与电流 i 之间的相位差 φ 也就不同，因此， φ 角的大小是由电路(负载)的参数决定的。我们一般根据 φ 角的大小来确定电路的性质。

① 如果 $X_L > X_C$ ，则在相位上电流 i 比电压 u 滞后， $\varphi > 0$ ，这种电路是电感性的，简称为感性电路；

② 如果 $X_L < X_C$ ，则在相位上电流 i 比电压 u 超前， $\varphi < 0$ ，这种电路是电容性的，简称为容性电路；

③ 当 $X_L = X_C$ ，即 $\varphi = 0$ 时，则电流 i 与电压 u 同相，这种电路是电阻性的，我们称之为谐振电路，谐振电路后面我们将详细介绍。

4. 阻抗的联接

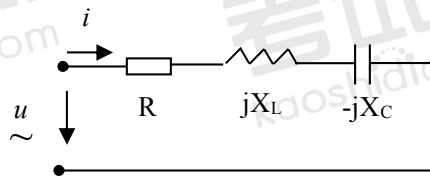
实际的交流电路往往不只是 RLC 串联电路，它可能是同时包含电阻、电感和电容的复杂的混联电路，在这些交流电路中用复阻抗来表示电路各部分对电流与电压的作用，我们就可以用相量法象分析直流电路一样来分析正弦交流电路。

(1) 阻抗的串联

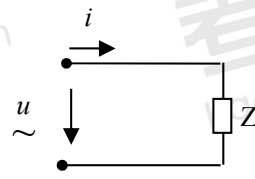
由前 2.3 节可知：如果 R、L、C 串联，则如下图 2-9 示，其电路等效复阻抗：

$$Z = R + jX_L + (-jX_C)。$$

即 R、L、C 串联电路的等效复阻抗为各元件的复阻抗之和。



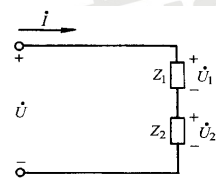
(a) RLC 串联电路的复阻抗形式



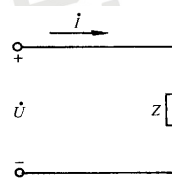
(b) 等效电路

图 2-9 RLC 串联电路的复阻抗

如下图 2-10a 所示两复阻抗串联电路。



(a) 阻抗的串联电路



(b) 等效电路

图 2-10 阻抗的串联

则由基尔霍夫电压定律可得

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = iZ_1 + iZ_2 = i(Z_1 + Z_2) = iZ \quad (2-36)$$

式中, Z 称为串联电路的等效阻抗。可见:

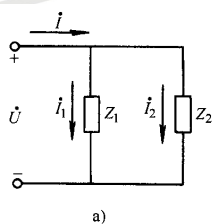
$$Z = Z_1 + Z_2 \quad (2-37)$$

即串联电路的等效复阻抗等于各串联复阻抗之和。图 2-10a 等效简化为图 2-10b。

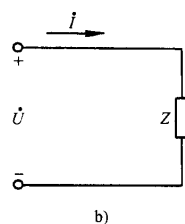
注意, 式(2-37)是复数运算, 一般情况下 $|Z| \neq |Z_1| + |Z_2|$

(2) 阻抗的并联

图 2-11a 是两阻抗并联电路。由基尔霍夫电流定律可得:



a)



b)

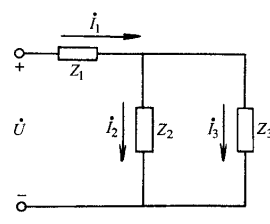


图 2-11 阻抗的并联

a) 阻抗并联电路 b) 等效电路

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z_1} + \frac{\dot{U}}{Z_2} = \dot{U} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) = \frac{\dot{U}}{Z} \quad (2-38)$$

式中 Z 称为并联电路的等效阻抗

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad (2-39)$$

即并联电路的等效阻抗的倒数等于各并联阻抗倒数的和。图 2-11a 等效简化为图 2-11b。

总结：

1. 电阻、电感、电容元件的交流伏安特性是元件对交流电压和电流的约束关系。当交流电压和电流为正弦量时，这种约束关系可用相量形式表示，由此引出了感抗 X_L 和容抗 X_C 电感、电容是储能元件，电感具有“阻交通直”的特性，电容具有“隔直通交”的特性。
2. 一个无源网络的阻抗 Z 等于端口电压相量 U 与输入电流相量 I 之比，阻抗 Z 在正弦交流电路的分析中有着非常重要的作用。

复习

1. 简述电阻、电感和电容元件上的电流与电压数值及相位关系，并作出它们的电压与电流相量图。
2. 简述电阻、电感和电容元件上的各种功率大小及计算方法。
3. RLC 串联交流电路的电压与电流的大小关系和相位关系如何？

4. 什么是复阻抗、阻抗、阻抗角?什么是相量式欧姆定理?

3. 2. 3 正弦交流电路的功率

1. 功率

RLC 串联电路的瞬时功率来为:

$$p=ui=U_m \sin(\omega t + \phi) I_m \sin \omega t$$

由数学关系可得到 $p=UI \cos \phi - UI \cos(2\omega t + \phi)$ 。故电路的平均功率为

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \phi - UI \cos(2\omega t + \phi)] dt = UI \cos \phi$$

由于 RLC 电路中只有电阻元件 R 上要消耗能量, L 和 C 上有功功率为 0, 于是:

$$P=UI \cos \phi = U_R I = I^2 R \quad (2-40)$$

而电感元件与电容元件要储放能量, 即它们与电源之间要进行能量互换,

相应的无功功率可根据电感元件电路与电容元件电路中无功功率得到,

$$Q=UI \sin \phi \quad (2-41)$$

另外, 在交流电路中, 把电压与电流有效值的乘积称为视在功率 S, 单位

为伏安 (VA), 即:

$$S=UI=I^2 |Z| \quad (2-42)$$

式(2-36)、(2-37)、(2-38) 是计算正弦交流电路中功率的一般公式。而

且由以上三式可见, 有功功率、无功功率与视在功率间有一定的关系, 即

$$S=\sqrt{P^2+Q^2} \quad (2-43)$$

2. 功率因数

由式(2-36)和(2-37)可知, R 、 C 、 L 混合电路中负载取用的功率不仅与发电机的输出电压及输出电流的有效值的乘积有关, 而且还与电路(负载)的参数有关。电路所具有的参数不同, 电压与电流之间的相位差 ϕ 也就不同, 在同样的电压 U 和电流 I 下, 电路的有功功率和无功功率也就不同。

因此, 电工学中将 $P=U_R I=I^2 R=UI \cos \phi$ 中的 $\cos \phi$ 称为功率因数。

只有在电阻负载(例如白炽灯、电阻炉等)的情况下, 电压与电流才同相其功率因数为 1。对其它负载来说, 其功率因数均介于 0 与 1 之间, 这时电路中发生能量互换, 出现无功功率 $Q=UI \sin \phi$ 。无功功率的出现, 使电能不能充分利用, 其中有一部分能量即在电源与负载之间进行能量互换, 同时增加了线路的功率损耗。所以对用电设备来说, 提高功率因数一方面可以使电源设备的容量得到充分利用, 同时也能使电能得到大量节约。

功率因数不高, 根本原因就是由于电感性负载的存在。例如工程施工中常用的异步电动机, 在额定负载时功率因数约为 0.7 到 0.9 左右, 如果在轻载时其功率因数就更低。电感性负载的功率因数之所以小于 1, 是由于负载本身需要一定的无功功率。从技术经济的观点出发, 合理的联接电容可解决这个矛盾, 以达到提高功率因数的实际意义。

按照供电规则, 高压供电的工业企业平均功率因数不低于 0.90。提高功率因数常用的方法就是与电感性负载并联静电电容器(设置在用户或变电所中), 其电路图和相量图如图 2-15 所示。

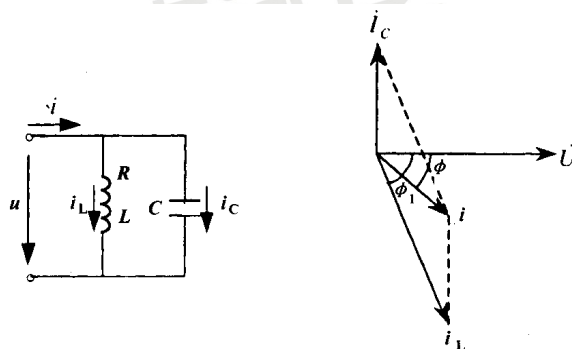


图 2-12 并联电感和电容提高电路的功率因数

举例：例 2-10

总结：电路分析的一般方法也适用于对正弦交流电路的分析，只是表达形式都是相量。正弦交流电路的功率包括有功功率、无功功率、瞬时功率和视在功率，提高功率因数对电力系统有很大的实用意义。RLC 串联正弦交流电路的阻抗、电压、功率都有三角形关系。

复习：

1. 如何计算 RLC 串联交流电路的各种功率？什么是功率因数？提高功率因数有何意义？

2. 什么是电路的性质？试画出容性 RLC 串联电路的电流与电压相量图。

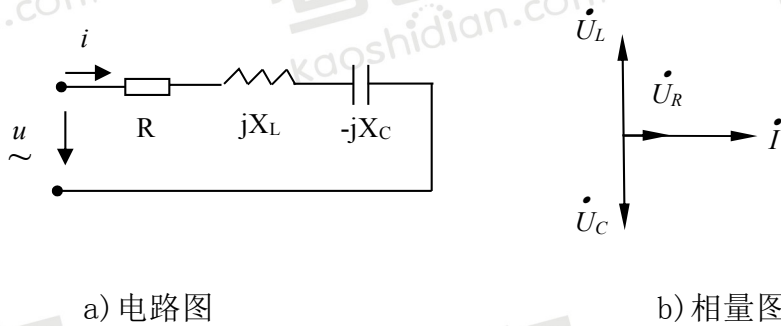
3. 2. 4 阻抗的联接与电路的谐振

在含有 LC 储能元件的正弦交流电路中，我们把电流与电压同相位（即电路呈纯电阻性质）的现象称为电路谐振。

1. RLC 串联谐振的条件与谐振频率

如(图 2-13)所示 RLC 串联电路中，当 $X_L = X_C$ 时， $Z = R + jX_L + (-jX_C) = R$ ，

电路呈纯电阻性，此时，电流 i 与电压 u 同相，我们称电路发生了串联谐振。



a) 电路图

b) 相量图

图 2-13 串联谐振电路

(1) 谐振的条件: $X_L = X_C$

故有: $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$, 所以:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{或} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (2-44)$$

(2) 谐振的频率: $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

(3) RLC 串联谐振的特点

RLC 串联电路发生谐振时，具有下列三个基本特点：

① 电路电压与电流同相，电路呈电阻性，如图 2-13 (b)。

② 电路的阻抗模最小，电流达到最大值。

因 $|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + (2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC})^2}$, $I = \frac{U}{|Z|}$ 故 $|Z|$ 、 I 随变 f 变化的

曲线见图 2-14 和图 2-15。当 $f=f_0$ 时， $Z=R$ 最小， $I=I_0 = U / |Z| = U / R$ 最大。

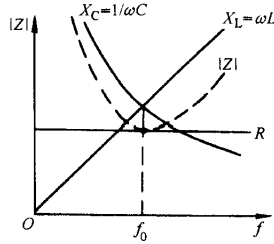


图 2-14 $|Z|$ 随 f 变化的曲线

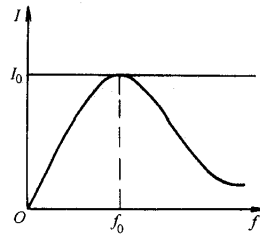


图 2-15 I 随 f 变化的曲线

③ $U_L = U_C$ 且 $\dot{U}_L = -\dot{U}_C$ ，即电感、电容电压大小相等、方向相反，相互抵消，对整个电路不起作用。此时， $\dot{U} = \dot{I}_R R$ ，见图 2-13b)。

注意，此时 U_L 、 U_C 本身并不为零。

若 X_C 、 $X_L \gg R$ ，则 $U_L = U_C = X_L I_0 \gg U$ ，即电感、电容元件两端的电压远远高于电路电压，有时甚至高出很数百倍，因此串联谐振又称为电压谐振。

用电路的品质因数 Q 表示 U_L 、 U_C 与 U 的比值

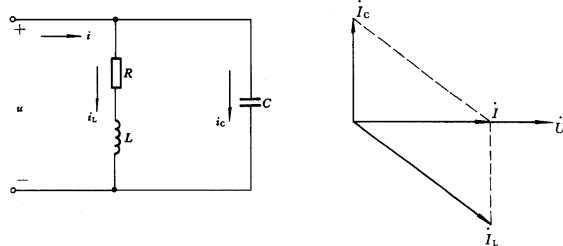
$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} \quad (2-45)$$

串联谐振往往用于无线电信号的接收、选频等电路中。

举例：例 2-11

2. 电感与电容并联谐振

把一个电感线圈和一个电容器并联起来组成一个电路，当该电路的复阻抗为纯电阻性时，我们称该电路发生了并联谐振。这是一种常见的、应用非常广泛的谐振电路，如图 2-16 示。



(a) 谐振电路

(b) 相量图

图 2-16 电感线圈与电容并联谐振电路

(1) 并联谐振的条件

因为电路谐振时电路的复阻抗为纯电阻性，即

$$Z = \frac{(R + j\omega L) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{(R + j\omega L) + \frac{1}{j\omega C}} = |Z| \angle 0^\circ, \text{ 故对该式推导可以得出以下结论:}$$

当电源电压和电路中的电流同相时，并联谐振。其谐振条件为：

$$I_1 \sin \varphi_1 = I_C \quad (2-46)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = \left[\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \right] \dot{U}$$

由电路可得：

若要使得电压与电流同相位，上式必须满足虚部为 0 的条件，由此得：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

(2-47)

(2) 并联谐振电路的特点

① 电路两端电压与电流同相位，电路呈电阻性；

② 电路的并联阻抗最大，即等于电阻值。因此当电压一定时，电路中的电流达到最小值；

③ 电感电流与电容电流大小相等，相位相反，互为补偿，电路总电流等于电阻支路电流；

④ 各并联支路的电流为

$$I_L = \frac{\dot{U}}{j\omega_0 L} = \frac{R}{j\omega_0 L} \dot{I}$$

$$I_C = \dot{U} j\omega_0 C = j\omega_0 CR \dot{I}$$

谐振时 $I_L = I_C$ ，但它们比并联总电流可以大许多倍，因此，并联谐振也称为电流谐振。谐振时支路电流与总电流之比也称为谐振电路的品质因数，用 Q 表示。

在实际应用中，我们常利用并联谐振阻抗高的特点选择信号或消除干扰。

如在正弦自激振荡电路中，利用 LC 并联电路的谐振特性作为选频网络。

总结：

正弦交流电路中，当电路元件的参数满足一定条件时，电路会出现谐振。谐振电路谐振时呈现许多特点，使得它在电子通讯线路中得到大量应用，信号的选频特性与频带宽度是一对矛盾，实际电路中应根据具体要求折中确定；然而在电力系统中又要极力避免电路谐振带来的危害。

复习：

1. 复阻抗串并混联的计算(等效化简)与电阻电路的等效计算方法是否不一样？
2. 什么是电路谐振？简述串、并联谐振的谐振条件，谐振频率、谐振特点及应用

3.3 三相交流电路

工业及民用交流电的产生、输送、分配几乎全部采用三相制。

3.3.1 三相交流电源

1. 对称三相交流电源的产生

三相交流电动势是由三相交流发电机产生的。图 2-17 是三相交流发电机的原理示意图。三组完全相同的线圈 U_1-U_2 ， V_1-V_2 ， W_1-W_2 (定子电枢绕组) 放置在彼此间隔 120° 的发电机定子铁心凹槽里固定不动。转子铁心上绕有励磁绕组，通入直流电后产生磁场，该磁场磁感应强度在定子与转子之间的气隙中按正弦规律分布。当转子由原动机带动，并以角速度 ω 匀速顺时针旋转时，

每个定子绕组(称相)依次切割磁力线产生频率相同、幅值相同的正弦电动势 e_U 、 e_V 、 e_W ，但相位角依次相差 120° ，以U相为参考表示为

$$\left. \begin{aligned} e_U &= E_m \sin \omega t \\ e_V &= E_m \sin (\omega t - 120^\circ) \\ e_W &= E_m \sin (\omega t - 240^\circ) = E_m \sin (\omega t + 120^\circ) \end{aligned} \right\} \quad (2-48)$$

用相量表示：

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_U &= \dot{E} \angle 0^\circ = E \\ \dot{E}_V &= \dot{E} \angle -120^\circ = E \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \dot{E}_W &= \dot{E} \angle 120^\circ = E \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2-49)$$

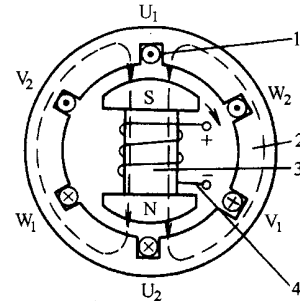
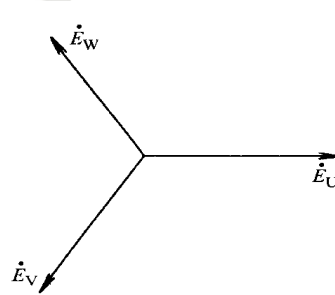
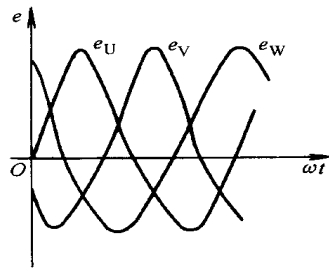


图 2-17 三相交流发电机的原理示意图

1-定子绕组 2-定子铁心
3-磁极(转子) 4-励磁绕组



a) 波形图

b) 相量图

图 2-18 三相电动势的正弦波形图及相量图

波形图和相量图如图 2-18 所示，三相交流电达到最大值的先后顺序称为

相序，图中的相序为 U—V—W。

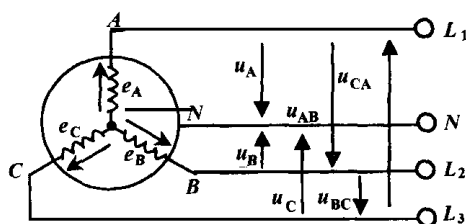
三相电动势的幅值相等，频率相同，彼此间的相位差也相等，这种电动势称为对称电动势。显然他们的瞬时值之和或相量之和均为 0。

$$\left. \begin{aligned} e_U + e_V + e_W &= 0 \\ \dot{E}_U + \dot{E}_V + \dot{E}_W &= 0 \end{aligned} \right\}$$

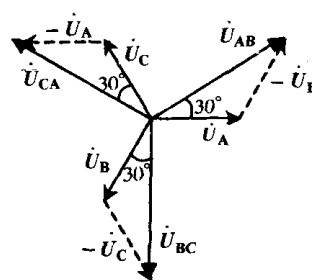
(2-50)

2. 三相电源的联接

通常用到的发电机三相绕组的接法通常如图 (2-19a) 所示，即将三个末端联在一起，这一连接点称为中点或零点，用 N 表示。这种联接方法称为星形连接。从中点引出的导线称为中线，从始端 A、B、C 引出的三根导线 L₁、L₂、L₃ 称为相线或端线，俗称火线。



a) 发电机三相绕组的接法；



b) 发电机三相电压相量图

图 2-19 发电机的星形连接及其电压相量图

在图 (2-19a) 中, 每相始端与末端间的电压, 亦即火线与中线间的电压, 称为相电压, 其有效值用 U_A 、 U_B 、 U_C 或一般地用 U_P 表示。而任意两始端间的电压, 亦即两火线间的电压, 称为线电压, 其有效值用 U_{AB} 、 U_{BC} 、 U_{CA} 或一般地用 U_l 表示。

各项电动势的正方向, 如前所述, 选定为自绕组的末端指向始端, 相电压的正方向选定为自末端指向始端(中点); 线电压的正方向, 例如 U_{AB} 是指 A 端指向 B 端, 即端线 L_1 与 L_2 之间的电压。

当发电机的绕组联成星形时, 相电压和线电压显然是不相等的。现在来确定它们之间的关系, 在图 (2-19b) 中, A、B 两点间的电压的瞬时值等于 A 相电压和 B 相电压之差, 即

$$U_{AB} = U_A - U_B$$

同理得到

$$U_{BC} = U_B - U_C$$

$$U_{CA} = U_C - U_A$$

由于发电机绕组上的内阻抗电压降低与相电压比较是很小的, 可以忽略不计。于是相电压和对应的电动势基本上相等, 因此可以认为相电压同电动势一样, 也是对称的, 故由相电压而得出的线电压也是对称的, 在相位上比相应的相电压超前 30° 。

至于线电压和相电压在大小上的关系也很容易从相量图上得出

$$U_l = U_p \cos 30^\circ = \sqrt{3} U_p$$

由此得

$$U_l = \sqrt{3} U_p \quad (2-51)$$

发电机(或变压器)的绕组在联成星形时,可引出四根导线(三相四线制),这样就有可能给予负载两种电压。通常在低压配电系统中相电压为 220V,线电压为 380V。

发电机(或变压器)的绕组在联成星形时,不一定都引出中线。

3.3.2 三相负载的联接方法

日常使用的各种电器根据其特点可分为单相负载和三相负载两大类。照明灯、电扇、电烙铁和单相电动机等都属于单相负载。三相交流电动机、三相电炉等三相用电器属于三相负载。另外分别接在各相电路上的三组单相用电器也可以组成三相负载。三相负载的阻抗相同(数值相等,性质一样)则称为三相对称负载,反之称为不对称负载。三相负载有 Y 形和 Δ 形两种联接方法,各有其特点,适用于不同的场合,应注意不要搞错,否则会酿成事故。

1. 三相对称负载的 Y 形联接

该电路的基本联接方法如图 2-29a) 所示,三相交流电源(变压器输出或交流发电机输出)有三根火线接头 A、B、C,一根中性线接头 N。火线与中性线

之间的相电压为 220V。对于三相对称负载，只需接三根火线，中性线悬空得到图 2-29b)。

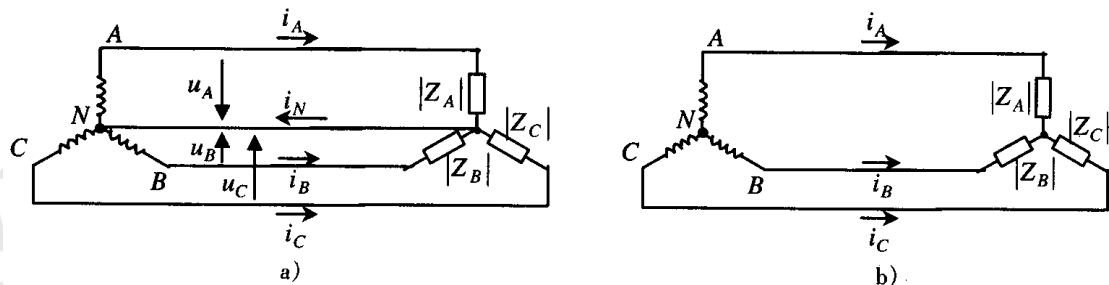


图 2-29 对称负载的 Y 联接

该电路具有如下特点：

1) 由于三相负载对称，在三相对称电压的作用下负载中的三相电流也是对称的，而三相对称电流的和为零(矢量和)，所以不需接中线，三相电流依靠端线和负载互成回路。由于电路是对称的，故电路的计算可以简化为单相电路的计算。

2) 各相负载承受的电压为电源的相电压，大小为 220V。

3) 各相负载的线电流 I_L 与相电流 I_P 相等，即： $I_L = I_P = U_P / Z_P$ ，式中 Z_P 为每相负载阻抗。

4) 各相支路中电压与电流的相位差相等，大小为 $\varphi_P = \cos^{-1} R / Z$ 。

5) 各相负载取用的功率相等，电路的总功率为 $P = 3U_P I_P \cos \varphi_P$ 。

举例：例 2-12

2. 三相不对称负载的 Y 形联接

工程实际使用中遇到的问题是许多单相负载分成容量大致相等的三相，分别接到三相电源上，这样构成的三相负载通常是不对称的。对于这种电路，需要使用三相四线制，如图（2-29a）所示。该电路具有如下特点：

由于三相负载不对称，三相电流也不对称，其三相电流的和不为零，必须引一根中线供电流不对称部分流过，即必须用三相四线制。

由于中性线的作用，电路构成了相互独立的回路。不论负载有无变动，各相负载承受的电源相电压不变，从而保证了各相负载的正常工作。

如果没有中线，或者中线断开了，虽然电源的线电压不变，但各相负载承受的电压不再对称。有的相电压增高了，有的相电压降低了。这样不但使负载不能正常工作，有时还会造成事故。

一般情况下，中线电流小于端线电流，通常取中线的横截面积小于端线的横截面积。

通过分析得到，三相不对称负载的各相支路的计算需要分别进行。

举例：例 2-13

总结：

三相交流电路中，三相负载有星形和三角形两种联结方法。对于对称三相电路，线电压与相电压、线电流与相电流及三相电路的功率有简单的计算关

系。在三相四线制系统中，普遍存在的是大量不对称三相负载，应特别注意中性线的作用与意义。

复习：

1、什么是三相负载、单相负载和单相负载的三相联接？

2、为什么中性线中不接开关，也不接入熔断器

3、三相负载的三角形联接

当用电设备的额定电压为 380V 时，负载电路应按△形联接。△联接的电路如图 2-33 所示。

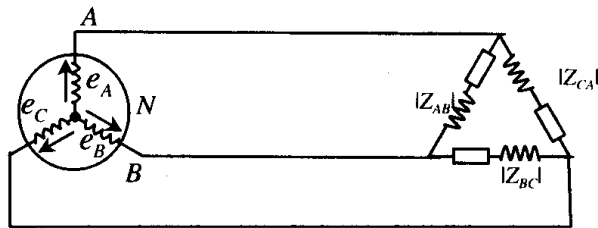


图 2-33 三相负载的三角形联接

该电路的特点是：

1) △形联接没有零线，只能配接三相三线制电源，无论负载平衡与否各相负载承受的电压均为线电压 380V；

2) 各相负载与电源之间独自构成回路，互不干扰；

3) 各相负载的相电流为： $I_p = U_p / |Z| = U_l / |Z|$ ；

4) 在△形联接的各端点上均有三条支路，所以线电流 I_l 不等于相电流 I_p ，

当三相负载对称时，三个相电流和三个线电流都对称，两者之间的关系为：

$$I_L = \sqrt{3} I_P$$

5) 设每相负载阻抗角为 φ_P ，如果负载对称，则电路取用的总有功功率为：

$$P = 3U_P I_P \cos \varphi_P = 3U_P I_P / \sqrt{3} \cos \varphi_P = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi_P \quad (2-52)$$

式(2-52)对于对称星形负载也是适应的，读者可自行推导，或参看其他书籍。

当负载不对称时：

$$P = P_A + P_B + P_C \quad (2-53)$$

3. 3. 3 三相电路的功率

1. 有功功率

三相负载总的有功功率等于各相有功功率之和

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

若负载对称，则

$$P = 3P_P = 3U_P I_P \cos \varphi_P \quad (2-54)$$

$$U_L = \sqrt{3} U_P$$

$$I_L = I_P$$

$$\text{所以 } P = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi_P$$

(1) 当对称负载作星形联接时：

(2-55)

(2) 当对称负载作三角形联接时:

$$U_L = U_P$$

$$I_L = \sqrt{3}I_P$$

$$\text{所以 } P = \sqrt{3}U_L I_L \cos \varphi_P \quad (2-56)$$

(2-57)

2. 无功功率□

$$Q = 3U_P I_P \sin \varphi_P = \sqrt{3}U_L I_L \sin \varphi_P$$

3. 视在功率

$$S = 3U_P I_P = \sqrt{3}U_L I_L \quad (2-58)$$

*三相电路同样具有无功功率和视在功率, 其对称负载的无功功率和视在

功率不管是星形还是确形联接均可用以下两式计算, 式中的 φ 为第相阻抗的阻抗角。

$$Q = \sqrt{3}U_L I_L \sin \varphi \quad (2-59)$$

$$S = \sqrt{3}U_L I_L \quad (2-60)$$

三相电源的视在功率一般称为电源的容量。

总结:

1、△形联接没有零线，只能配接三相三线制电源，无论负载平衡与否各相负载承受的电压均为线电压 380V；

2、各相负载与电源之间独自构成回路，互不干扰；

3)各相负载的相电流为： $I_p = U_p / |Z| = U_1 / |Z|$ ；

3、在△形联接的各端点上均有三条支路，所以线电流 I_1 不等于相电流 I_p ，

当三相负载对称时，三个相电流和三个线电流都对称，两者之间的关系为：

$$I_1 = \sqrt{3} I_p$$

4、设每相负载阻抗角为 φ_p ，如果负载对称，则电路取用的总有功功率为：

$$P = 3U_p I_p \cos \varphi_p = 3U_p I_p / \sqrt{3} \cos \varphi_p = \sqrt{3} U_1 I_1 \cos \varphi_p$$

复习：

1、简述三相负载的三角形联接线电流与相电流的关系

2、简述三相电路功率的计算方法

3. 4 输配电与安全用电简介

3. 4. 1 输配电简介

电能工业生产、城市建设、日常生活等许多方面有着极为重要的地位，

这是因为电能具有易于产生、传输、分配、控制、测量等许多优点。从电能的产生到应用包含着一系列变换和传输过程。

发电厂把自然界蕴藏的各种形式非电能（如燃料的化学能、水的势能、

原子能、太阳能等），通过不同类型的发电机转换成电能。火力发电厂一般建

在燃料产地或交通运输方便的地方，而水力发电厂通常建在江河、峡谷、水库等水力资源丰富之地。各种发电厂中的发电机几乎都是三相同步发电机。

国产三相同步发电机的电压等级有 400V/30V、3.15kV、6.3kV、10.5kV、13.8kV、15.75kV 和 18.0kV 等多种。在本章 2.3.1 节中已经介绍过三相对称电压的产生。发电厂的三相定子绕组通常接成 Y 形，并将电源的中性点 N 接地，只引出三根相线 U、V、W 到三相升压变压器。当电能输送到低压变电所时，再从大地引出中性线 N'，大地作为良好的导体，在远距离送电时，可节省 1/4 的线材。

由于大中型发电厂距离用电地区有几十千米到上千千米，在远距离输电时，由于输电导线存在电阻，会有部分电能转化为热能而损失掉，同时导线电阻上的电压降还会使负载的端电压降低。

根据焦耳定律，输电线上发热损耗的功率为 $P=IR_0$ ，在输电线电阻 R_0 一定时，减小输电电流 I 能有效地减少电能在线路上的损耗。如果既要保证输电功率 $P=UI$ 保持不变，又要降低线路损耗，则必须提高输电电压 U 。

发电机的机端电压不符合远距离输电的要求，必须通过升压变压器把电压升高到所需要的数值。送电距离越远，要求输电线上的电压越高。我国规定输电线的额定电压(输电线末端电压)为 35kV、110kV、220kV、330kV、500kV 等。

在用电地区，考虑到操作人员的安全以及用电设备的绝缘性能，又必须

通过降压变压器将电压降低。把电压升高或降低并进行电能分配的场所叫变电所，它是发电厂和电力用户之间不可缺少的中间环节。

这种通过各种电压的线路将发电厂、变电所、电力用户连接起来的整体叫做电力系统，它包括发电、输电、变电、配电和用电部分，其中处于发电厂和用户之间起输电、变电和配电作用的环节称为电力网。图 2-39 为从发电厂到电力用户的交流输配电线路示意图。

为提高各发电厂的设备利用率，合理调配各发电厂的负载，现在常常将同一地区的各个发电厂联合起来组成一个大的电网，以提高供电的可靠性和经济性。

在工业企业内一般都设有中央变电所，中央变电所接收二次高压变电所送来的 10kV 电力，然后分配到各车间，经车间变电所(或配电室)将电能分配给各用电设备。高压配电线的额定电压有 3kV、6kV 和 10kV 三种。低压配电线的额定电压是 380V/220V。一般用电设备的额定电压为 220V 或 380V，大功率电动机的额定电压是 3000V 或 6000V。

3. 4. 2 安全用电常识

电能在经济建设和人民生活中起着不可缺少的作用，但如果不注意用电安全，就可能酿成人身触电、设备烧坏、引发火灾等严重电气事故，因此，用电安全极为重要，本小节将介绍一些安全用电方面的基本知识。

1. 电流对人体的危害

如人体不慎触及带电体，就会产生触电事故，使人体受到伤害。电流对人体的伤害主要分为电伤和电击两种。

电伤是指电流的热效应、化学效应、机械效应等对人体表面所造成的创伤，如电弧烧伤、灼伤、电弧强光刺激等。电击是指电流通过人体对人体及内部器官造成伤害的触电事故，它又分为直接电击和间接电击两种。

人体直接接触正常的带电体所造成的触电伤害称为直接电击，如站在地上的人接触到电源的相线或电气设备带电体，或者站在绝缘体上的人同时接触到电源的相线和零线，这属于单相触电；如果人体同时接触带电的任意两相线，这属于两相触电，人体处于线电压之下危险性更大。

人体接触正常时不带电，而故障时带电的意外带电体所发生的触电伤害称为间接电击，如电机等电气设备的外壳本来是不带电的，由于绕组绝缘损坏等原因，而使其外壳带电，人体意外接触这样的带电外壳，就会发生触电伤害，大多数触电事故属于这一类。为了防止这类触电事故，对电气设备常采用保护接地和保护接零(接中性线)保护装置。

电击对人体的伤害程度与通过人体电流的大小和频率、通电时间、通电途径以及人的生理状况等因素有关。频率为 50~60Hz 的工频交流电对人最危险，通过人体的工频电流为 10mA 时，人有麻痹感觉，但能自行摆脱；为 20mA 时，出现灼伤，人肌肉痉挛收缩，几乎不能摆脱。通常用触电电流和触电时间的乘积来综合反映触电的危害程度，人体的最大安全电流为 $30\text{mA}\cdot\text{s}$ ，人体

的致命电流为 $50\text{mA}\cdot\text{s}$ ，此时人的呼吸器官麻痹，心室颤动，有伤亡的危险，达 $100\text{mA}\cdot\text{s}$ 时，呼吸器官和心脏均麻痹，足以致人死命。

人体电阻主要是皮肤电阻，如人体皮肤处于干燥、洁净、无损伤的状态下，人体电阻在 $10\text{k}\Omega\sim 100\text{k}\Omega$ 之间，但如皮肤有伤口或处于潮湿、脏污状态时，人体电阻可急剧降至 $1\text{k}\Omega$ 左右。按照对人体有致命危险的工频电流 50mA 和人体最小电阻 $1\text{k}\Omega$ 来计算，可知 50V 是人体安全电压的极限值。我国规定的安全电压等级有 42V 、 36V 、 24V 、 12V 等。

触电致死的主要原因是触电电流引起心室颤动，造成心脏停跳，因此电流从手到脚、从一手到另一手时，电流流经人体中枢神经和心脏的程度最大，触电后果也最严重。

2. 安全用电预防措施

为了人身安全，防止触电事故的发生，及电力系统、电气设备的正常工作，应该从技术上、制度上加强安全用电。

从技术措施的角度，应该做到：

- ① 对于电力系统和电气设备应配有良好的专用接地系统，有可靠的保护接地、保护接零措施；单相电气设备和民用电器的使用切不可忽视必要的外壳接地措施。
- ② 对电源配备安全保护装置，如漏电保护器、自动断路器等。
- ③ 使用固定式电气设备时，应注意电气隔离、绝缘操作，并确保电气设

备在额定状态下工作。

④ 使用移动式电气设备时，应根据具体工作场所的特点，采用相应等级的安全电压，如 36V、24V、12V 等。移动式电器使用的电源线应该是带有接零(地)芯线的橡套软线。

⑤ 注意特殊环境场所的用电安全，如在高压带电体附近时，千万不要过分靠近，以免发生人与高压带电体间的放电而被电弧烧伤；在矿井等潮湿环境下要采用安全电压供电；对易燃易爆等危险场所，应采用密闭和防爆型电器；特别场所，要采取防静电火灾的措施等。

从制度措施的角度，应该做到：

① 加强安全用电教育，克服麻痹思想，预防为主，使所有人懂得安全用电的重大意义。

② 建立和健全电气操作制度。在进行电气设备的安装与维修时，必须严格遵守各种安全操作规程和规定，不得玩忽职守。操作时，首先要检查所用工具的绝缘性能是否完好，并要严格遵守停电操作的规定，切实做好防止突然送电的各项安全措施。如锁上刀闸，并挂上“有人工作，禁止合闸！”的警告牌等。不准约定时间送电。

③ 确保电气设备的设计和安装质量，这一点对系统的安全运行关系极大。必须严格按照国家标准中有关电气安全的规定，精心设计和施工，严格执行审批手续和竣工验收制度，以确保工程质量。

④ 建立和健全电气设备的定期安全检查和维护保养制度。如检查电气设备和导线的绝缘,检查接地和接零情况,不可靠的电气器件及时更换等,把事故隐患消灭在萌芽之中。

3. 电气事故的紧急处理

电气事故包括电气失火、人身触电和设备烧毁。

如发生了电气失火事故,首先应切断电源,然后救火。不能马上切断电源时,只能用砂土压灭或用四氯化碳、二氧化碳灭火器扑救。切不可用水直接扑灭带电火源。

人身触电事故的发生是突然的,急救刻不容缓。人体触电时间愈长,生命就愈危险。因此,一旦发现有人触电,应立即拉掉开关、拔掉插头;没有办法很快切断电源时,应立即用带绝缘柄的钳子、刀斧等刃具切断电源线;当导线搭在或压在受害人身上时,可用干燥的木棒、竹竿或其他带绝缘柄的工具迅速挑开电线。操作时必须防止救护人自己和在场人员触电。

触电者脱离电源后应立即请医生、或送医院、或就地进行紧急救护。如果触电者还没有失去知觉,可先抬到温暖的地方去休息,并急请医生诊治。

如果触电者失去知觉、呼吸停止但心脏微有跳动,应立刻采用人工呼吸法救治;如果虽有呼吸但心脏停止跳动,应立刻用人工心脏挤压法救治;如果触电者呼吸、心跳均已停止但四肢尚未变冷(称为触电假死),则应同时进行人工呼吸和人工胸外心脏挤压。现代医学证明:呼吸停止、心脏停跳的触电者,在

一分钟之内抢救，苏醒率超过 95%，而在六分钟后抢救，其苏醒率在 1% 以下。这就说明，救护严重触电者，应该首先坚持现场抢救、连续抢救、分秒必争。

第 4 章 电路的频率特性

教学提示：电路中传输的电信号往往不是单一频率的正弦量。如无线电通信、广播、电视等所传输的语言、音乐、图像信号，都是由很多频率的正弦分量所组成，并且把它们调制到很高的频率上（载波）以便通过天线把电波发射出去，接收机则把收到的电波进行解调，恢复那些有用的频率分量。

本章的任务就是讨论在不同频率信号激励下电路的传输特性。

教学要求：研究线性网络的频率特性是电路分析的重要内容。学习本章要认真理解网络函数和频率特性的概念，了解典型网络的选频特性，牢固掌握串联谐振电路及并联谐振电路的特点及分析方法。

4.1 电路的频率响应

分析电路的频率响应应先掌握该电路在正弦稳态下的网络函数，电路的任何一个网络函数的幅频特性曲线和相频特性曲线都可称为在指定输入和输出下的频率响应。

4.1.1 网络函数

电路（网络）本身的性能是由电路的结构和参数决定的。在正弦稳态下，

表征电路或系统的重要性能之一是网络函数 (network function), 用 $H(j\omega)$ 表示, 其定义为

$$H(j\omega) = \frac{\text{输出相量}}{\text{输入相量}} \quad (9.1)$$

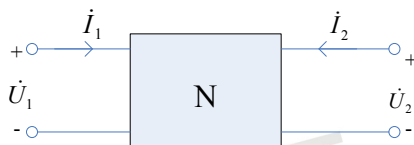


图 9.1 一般线性网络

如图 9.1 所示网络, 最常用的网络函数之一为电压转移函数 (传递函数)

即

$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \quad (9.2)$$

$H(j\omega)$ 通常为一复数, 可写为

$$H(j\omega) = H(\omega) \angle \phi(\omega) \quad (9.3)$$

式中, $H(\omega) = |H(j\omega)|$ 称为电路的幅频特性 (amplitude-frequency characteristic), $\phi(\omega)$ 称为相频特性 (phase-frequency characteristic), 二者合称为网络的频率特性 (频率响应)。

4.1.2 一阶 RC 电路分析

对于一阶 RC 电路如图 9.2(a) 所示。其网络函数 (电压转移函数)

$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

从而有

$$H(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} \angle -\arctan(\omega RC) = H(\omega) \angle \varphi(\omega)$$

式中，幅频特性

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} \quad (9.4)$$

相频特性

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC) \quad (9.5)$$

由此可知，当 $\omega=0$ 时，得：

$$H(\omega) = 1, \quad \varphi(\omega) = 0$$

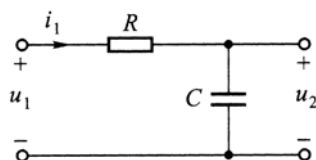
当 $\omega = \frac{1}{RC}$ 时，得：

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi(\omega) = -45^\circ$$

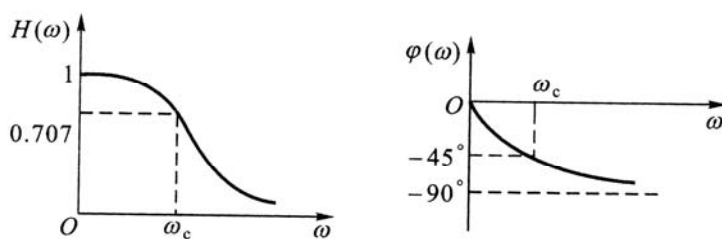
当 $\omega \rightarrow \infty$ 时，得：

$$H(\omega) = 0, \quad \varphi(\omega) = -90^\circ$$

该 RC 电路的频率特性可大致画为图 9.2 (b) 和图 9.2 (c)。由幅频特性



(a) 一阶 RC 电路



(b) 幅频特性 (c) 相频特性

图 9.2 RC 网络及其幅相特性

可知, 该网络对于低频信号有较大输出, 但对于高频分量却阻止通过, 故称该网络函数为低通函数。为了衡量电路对信号的通过能力, 通常定义网络函数的模 $|H(j\omega)|$ 下降到最大值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时所对应的频率为截止频率 (cut-off

frequency), 记为 ω_c 。对于上述低通电路, 其截止频率

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

$0 \sim \omega_c$ 这一频率范围称为电路的通频带 (简称通带); 而 $\omega_c \sim \infty$ 这一频率范围称为阻带。

下面具体说明网络函数的作用。在图 9.2 (a) 电路中, 设 $R=1k\Omega$, $C=1\mu F$, 输入信号

$$u_s(t) = [1 + 10\sin(\omega t) + 10\sin(2\omega t) + 10\sin(3\omega t)]V$$

其中 $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$ 。根据叠加原理, 响应 $u_c(t)$ 应为 $u_s(t)$ 的四个分量分别作用的结果。

应用相量法, 设激励相量为 \dot{U}_s , 响应相量为 \dot{U}_c , 则 RC 电路的网络函数为

$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_c}{\dot{U}_s} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

对于不同频率, $H(j\omega)$ 值分别为:

$$H(0) = 1$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega CR} = \frac{1}{1+j1} = 0.707\angle -45^\circ$$

$$H(j2\omega) = \frac{1}{1+j2\omega CR} = \frac{1}{1+j2} = 0.447\angle -63.4^\circ$$

$$H(j3\omega) = \frac{1}{1+j3\omega CR} = \frac{1}{1+j3} = 0.316\angle -71.6^\circ$$

考虑到输入相量（对应不同频率）：

$$\dot{U}_s(0) = 10\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_s(\omega) = 10\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_s(2\omega) = 10\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_s(3\omega) = 10\angle 0^\circ \text{ V}$$

所以对应各频率的响应相量分别为：

$$\dot{U}_c(0) = H(0)\dot{U}_s(0) = 10\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_c(\omega) = H(j\omega)\dot{U}_s(\omega) = 7.07\angle (-45^\circ) \text{ V}$$

$$\dot{U}_c(2\omega) = H(j2\omega)\dot{U}_s(2\omega) = 4.47\angle (-63.4^\circ) \text{ V}$$

$$\dot{U}_c(3\omega) = H(j3\omega)\dot{U}_s(3\omega) = 3.16\angle (-71.6^\circ) \text{ V}$$

最后得电路响应

$$u_c(t) = [10 + 7.07\sin(\omega t - 45^\circ) + 4.47\sin(2\omega t - 63.4^\circ) + 3.16\sin(3\omega t - 71.6^\circ)] \text{ V}$$

由上可见，电路的网络函数是联系输入和输出的纽带，它对输入信号加工后，使各频率分量的幅度和相位发生不同程度的变化。由于网络的低通特

性，虽然输入信号的分量幅度相同，但输出信号频率较高的分量幅度大大

被抑制（衰减）了。具体的波形变化如图 9.3 所示。

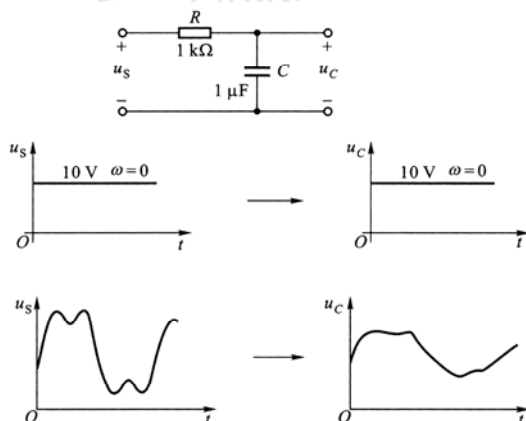


图 9.3 RC 电路对多频信号的响应

下面再介绍一种全通函数。如图 9.4 (a) 所示，其网络函数为

$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} - \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega CR} = H(\omega) \angle \varphi(\omega)$$

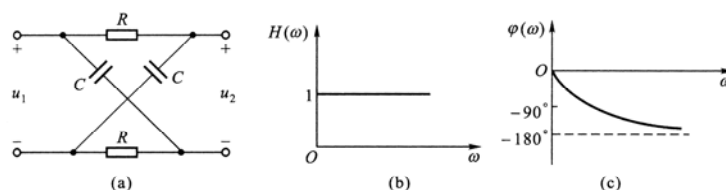


图 9.4 RC 全通网络的幅相特性

式中

$$H(\omega) = 1$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$

由此可以画出该电路的幅频和相频特性，如图 9.4 (b), (c) 所示。由于

其输出与输入幅度相等且不随频率改变，故称之为全通网络。当 ω 从零渐增时，其相频特性将从 0° 变为 -180° 。就是说，这种网络可实现各种相位变化（只要适当选取 R 、 C 的值即可），因而称之为相移网络。

在工程实际中，分析网络的频率特性常用计算机方法进行。

在电子、通信、自动控制等系统的分析和设计中，常常由于工作频率范围很宽而不便画出幅频特性曲线，可以将频率特性的纵、横坐标采用对数刻度。这样做的优点是特性曲线可以用折线近似，而且可以在很宽的频率范围内较完整地画出曲线。这种用对数坐标画出的幅频和相频特性称为波特图

（Bode 图）。

工程上，幅频特性取对数后以分贝（dB）作单位，并称为增益，用 G 表示，即

$$G = 20 \lg H(\omega) \text{ dB}$$

由上可得 RC 低通网络的波特图，如图 9.5 所示。

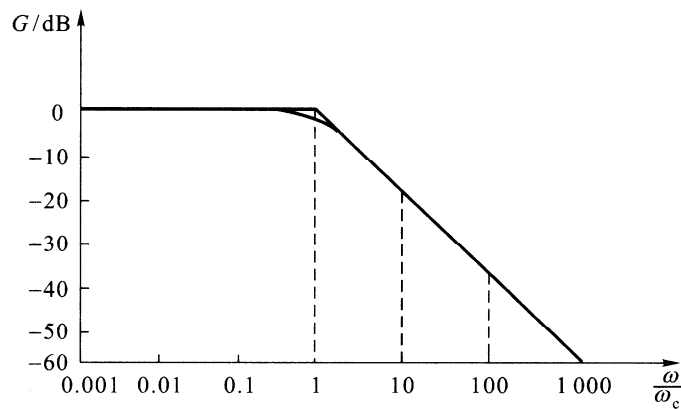
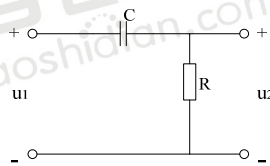


图 4.5 RC 低通网络的波特图

由图可见，在截止频率处特性的折线与实际情况仅有 3dB 的误差。这样做，不仅可以在很宽的频率范围内用折线画出幅频特性，而且简便直观。

思考与练习

4.1-1 试求题 9.1-1 图所示 RC 电路的 H_u 。绘出电路的频率响应曲线。说明该电路具有高通性质。计算截止频率 ω_c 与电路参数的关系。



题 4.1-1 图

4.1-2 试根据电抗与频率的关系来说明图 9.2 (a) 所示电路是低通电路，图 9.6 是高通电路。

4.2 RLC 串联谐振电路

谐振 (resonance) 是人们在机械、电子、建筑等领域经常遇到的一种物理现象。含有电感、电容和电阻元件的单口网络，在某一工作频率上，出现端口电压和电流波形相位相同的情况时，称电路发生谐振。能发生谐振的电路，称为谐振电路 (resonant circuit) 谐振电路在电子和通信工程中得到广泛应用。本节讨论 RLC 串联谐振电路谐振时的特性。

1. 串联谐振

含有电感和电容的电路，对于正弦信号所呈现阻抗一般为复数。**RLC 串**

联电路中，若调整电路参数后使得阻抗为纯电阻性，则称电路发生了串联谐振（series resonance）（共振）。如图 9-6 所示 RLC 串联电路。

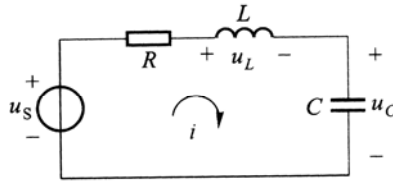


图 9.6 串联谐振电路

其总阻抗

$$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + jX$$

电路中的电流

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{Z} = \frac{\dot{U}_s}{R + jX} = I(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

随着频率的变化，电流的幅值 $I(\omega)$ 和相位将不断变化。当阻抗的虚部 $X=0$ 时，则电路呈纯电阻性。电压 \dot{U}_s 和电流 \dot{I} 同相。电路发生谐振。

由谐振条件 $X=0$ ，即

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

令此时的角频率为 ω_0 ，解上式得

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

(9.6)

ω_0 称为谐振角频率，对应的谐振频率

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

(9.7)

当电源频率一定时，可调节电路中的电感 L 或电容 C 的数值，使电路谐振。例如在无线电接收机中，就是用调节电容达到谐振的办法来选择所要接收的信号。由于 RLC 串联电路阻抗的模

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

故电流有效值（为频率的函数）

$$I(\omega) = \frac{U_s}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{U_s}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

由上可知，当电路发生谐振时，电抗 $X=0$ ，因而阻抗为极小值，且为电阻性。所以在电压 U_s 为定值的条件下电流为极大值，并且电流与电源电压同相。这时的阻抗和电流分别为

$$Z_0 = R \text{ 和 } I = I_0 = \frac{U_s}{R}$$

Z_0 称为谐振阻抗， I_0 为谐振时的电流。在偏离谐振频率时， I 将逐步变小。

有关各量的变化如图 9.7 所示。

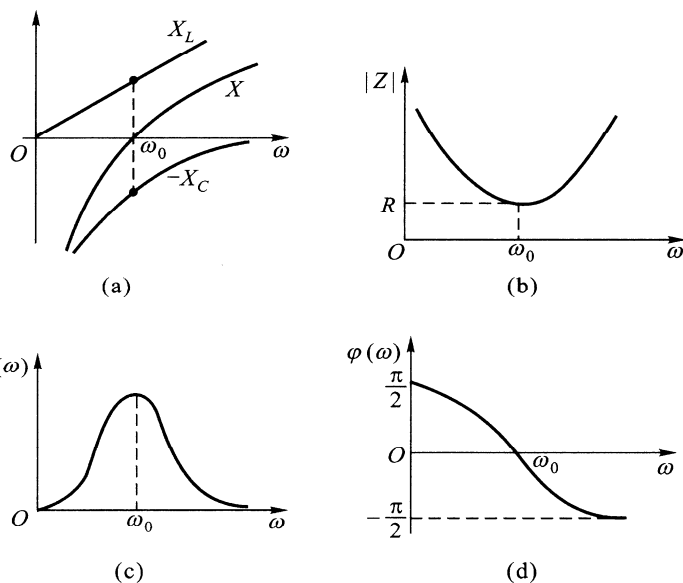


图 9.7 RLC 串联电路的频率特性

电路谐振时，电路的感抗和容抗在量值上相等，即

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

谐振时，电路中感抗或容抗吸收的无功功率与电阻吸收的有功功率之比称为电路的品质因数（quality factor），用字母 Q_0 表示，即

$$Q_0 = \frac{\text{无功功率}}{\text{有功功率}} = \frac{I_0^2 \omega_0 L}{I_0^2 R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

(9.8)

谐振时，电感和电容两端的电压分别为：

$$\dot{U}_L = j\omega_0 L \dot{I}_0 = j \frac{\omega_0 L}{R} \dot{U}_s = jQ_0 \dot{U}_s \quad (9.9)$$

$$\dot{U}_C = -j \frac{1}{\omega_0 C} \dot{I}_0 = -j \frac{1}{\omega_0 CR} \dot{U}_S = -j Q_0 \dot{U}_S \quad (9.10)$$

上述结果表明，电感两端电压与电容两端电压有效值大小相等，且等于电源电压有效值的 Q_0 倍。即

$$U_L = U_C = Q_0 U_S \quad (9.11)$$

在无线电技术中使用的 RLC 串联电路的品质因数 Q_0 的值通常在几十以上，因而在谐振时电感或电容上的电压可达电源电压的几十倍以上，这种特性是 RLC 串联电路所特有的，因而串联谐振又称为电压谐振。在电讯技术中，当输入信号微弱时，可利用电压谐振来获得一个较高的输出电压，而在电力工程中，过高的电压会使电容器和电感线圈的绝缘被击穿而造成损害，因而常常要避免谐振或接近谐振的情况发生。

[例 9.1] 在图 9.6 所示的 RLC 串联电路中假设信号源电压 $U_S = 1\text{mV}$ ，频率

$f = 2\text{MHz}$ ，回路的电感量 $L = 30\mu\text{H}$ ， $Q_0 = 40$ 。若用调节电容 C 的办法使电路对信号频率谐振，试求谐振时的电容量 C ，回路电流 I_0 和电容电压 U_C 。

[解]： 谐振时，电容 C 为

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{(2\pi \times 2 \times 10^6)^2 \times 30 \times 10^{-6}} \text{F} = 212\text{pF}$$

回路中的电阻

$$R = \frac{\omega_0 L}{Q_0} = \frac{2\pi \times 2 \times 10^6 \times 30 \times 10^{-6}}{40} \Omega = 9.43\Omega$$

所以回路电流（谐振时的电流）

$$I_0 = \frac{U_s}{R} = \frac{1 \times 10^{-3}}{9.43} \text{ A} = 0.106 \text{ mA}$$

电容上的电压

$$U_C = Q_0 U_s = 40 \times 1 \text{ mV} = 40 \text{ mV}$$

[例 9.2] 在图 9.8 中，若 $R=1\Omega$ ， $L=2\mu\text{H}$ ， $C=50\text{pF}$ ， $\dot{U}_s = 25\angle 0^\circ \text{ mV}$ ，试求电路的谐振频率，品质因数和电容两端的电压。

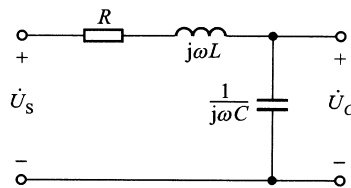


图 9.8 例 9.2 电路图

[解]: 谐振频率 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2 \times 10^{-6} \times 50 \times 10^{-12}}} \text{ Hz} = 15.9 \text{ MHz}$

$$\text{品质因数 } Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{2 \times 10^{-6}}{50 \times 10^{-12}}} = 200$$

$$\text{电容上电压 } U_C = Q_0 U_s = 200 \times 25 \text{ mV} = 5 \text{ V}$$

2. 频率特性

在研究频率特性之前，我们以收音机的输入回路为例先介绍选择性

（selectivity）的概念。

收音机输入回路的模型如图 9.9 所示。各个不同频率的广播电台所发射的无线电波，都会在接收线圈中产生感应电压，并产生一定的电流。如果调节

电容 C ，使回路与频率为 f_1 的 \dot{U}_1 发生谐振，那么回路对 \dot{U}_1 所呈现的阻抗就最小，电流也就最大。因而，能在电感两端得到一个频率为 f_1 的较高电压。对于别的电台，如频率为 f_2 的 \dot{U}_2 ，频率为 f_3 的 \dot{U}_3 因未发生谐振，电路对它们呈现的阻抗较大，相应的电流就较小。结果收听到的就是频率为 f_1 的电台广播的语音信号。所以谐振回路具有对频率的选择能力。通常，电路从输入的全部信号中选出所需信号的能力称为电路的选择性。

为了说明电路选择性的好坏，必须研究谐振回路中电流（或电压）的大小和频率的关系，即频率特性。

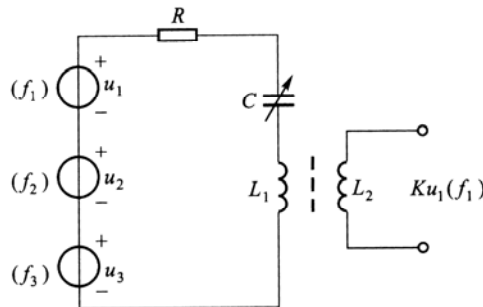


图 9.9 收音机的输入回路

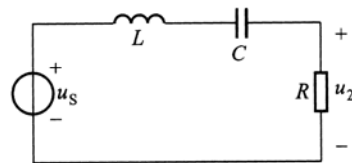


图 9.10 串联谐振电路

在图 9.10 中，若取电阻 R 上的电压为 u_2 ，则网络函数

$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_s} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)}$$

因 $Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$ ，代入上式可改写为，

$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_s} = \frac{1}{1 + jQ_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (9.12)$$

其幅频特性

$$H(\omega) = \frac{U_2(\omega)}{U_s} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (9.13)$$

因为 $U_2(\omega) = RI(\omega)$, $I_0 = \frac{U_s}{R}$, 代入上式又可得到

$$\frac{I(\omega)}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (9.14)$$

由上可见, 当 $\omega=0$ 或 $\omega=\infty$ 时, $H(\omega)=0$; 当 $\omega = \omega_0$ 时, 电路谐振, $H(\omega)=1$,

达最大值, 说明 RLC 串联电路具有带通滤波特性。式(9.13) 不仅与频率有关, 而且与 Q_0 的大小有关。图 9.11 为不同 Q_0 值的频率特性。

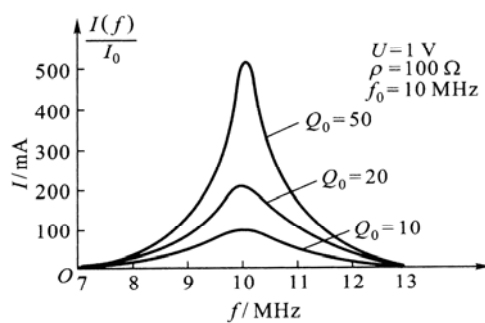


图 9.11 电流谐振曲线

式(9.14)也可改写为

$$\frac{I(f)}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2}} \quad (9.15)$$

下面介绍谐振电路通频带(band-width)的概念。

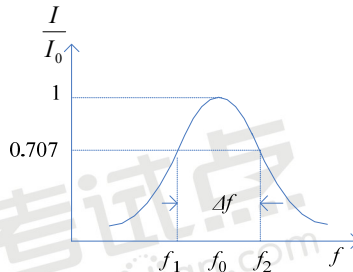


图 4.12 通频带示意图

在广播和通讯中，所传输的信号往往不是一个频率，而是占有一定的频率范围，这个范围称为信号的频带。如广播电台为保证不失真地传输音乐节目，其频带宽度可达 9kHz，这就希望电路的谐振曲线不要太尖锐，否则就会把一部分需要传输的信号抑制掉，降低广播的质量。当电路外加电压的幅值保持不变时，电路中电流不小于谐振电流值的 $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ 倍的频率范围，称

为谐振电路的通频带，用 Δf 表示，如图 9.12 所示，其通频带的宽度为

$$\Delta f = f_2 - f_1$$

或用角频率表示

$$\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$$

式中， f_1 （或 ω_1 ）称为电路的下边界频率（或下边界角频率）， f_2 （或 ω_2 ）

称为上边界频率（或上边界角频率）。

根据通频带的定义，由式(9.14)在通频带的边界频率上应满足

$$\frac{I(\omega)}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

可解得

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} = -\frac{1}{Q_0} \quad \frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} = \frac{1}{Q_0}$$

将以上二式相加和相减，得：

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} + \frac{\omega_0(\omega_2 - \omega_1)}{\omega_1 \omega_2} = \frac{2}{Q_0} \quad (9.16)$$

$$\frac{\omega_2 + \omega_1}{\omega_0} = \frac{\omega_0(\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1 \omega_2} \quad (9.17)$$

由式(9.16)可知， $\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$ ，代入式(9.17)，得

$$\frac{2(\omega_2 - \omega_1)}{\omega_0} = \frac{2}{Q_0}$$

所以得通频带

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{R}{L} \quad (9.18)$$

或者

$$\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q_0} \quad (9.19)$$

由上可知，谐振电路的通频带与品质因数成反比。品质因数越高，电路的通频带越窄，选择信号的能力越强；若品质因数越小，则通频带越宽，选

择信号的能力越差。工程上，若信号占的频带窄，则应用高 Q_0 值电路；若信号占有的频带宽，就必须用小 Q_0 值的电路，以便增加通频带，有利于选择有用的信号。

思考与练习

9.2-1 若 RLC 串联电路的输出电压取自电容，则该电路具有带通、高通、低通三种性质中的哪一种？

9.2-2 RLC 串联电路中 $R=10\Omega$, $L=0.2\text{mH}$, $C=5\text{nF}$, 计算：(1) ω_0 ; (2) Q ; (3) BW ; (4) 电流为其谐振时电流的 80% 时的频率值。

(10^6rad/s ; $5\times 10^4\text{rad/s}$; $1.019\times 10^6\text{rad/s}$; $0.981\times 10^6\text{rad/s}$)

4.3 GLC 并联谐振电路

1. 并联谐振

串联谐振电路适用于信号源内阻比较小的情况，如果信号源内阻很大，串联回路的品质因数 Q 将很低，使谐振特性显著变坏，在这种情况下应采用并联谐振电路。

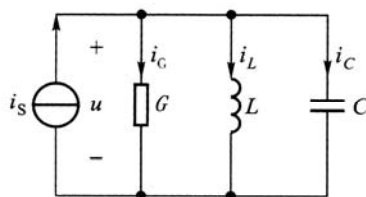


图 9.13 GLC 并联电路

图 9.13 是最简单的 GLC 并联电路，利用与串联谐振电路的对偶性。其总

导纳

$$Y = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G + jB$$

其总电流

$$\dot{I}_s = Y\dot{U} = \left[G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \right] \dot{U}$$

由此可知, 要使 **GLC** 并联电路发生谐振, 即电流 \dot{I}_s 与电压 \dot{U} 同相, 必须满足导纳 B 的虚部为零。即

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

由上式可以求得谐振角频率

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

或谐振频率

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

GLC 并联电路的谐振状态称为并联谐振 (**parallel resonance**)。其谐振

频率只与电路参数 L 、 C 有关。当电路谐振时, 电纳为零, 即 $\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L}$, 这

时导纳为极小值, 且为纯电导性 (因而阻抗为极大值, 且为纯电阻性)。所

以在电压一定的条件下, 电流也是极小值, 并且总电流 \dot{I}_s 与电压 \dot{U} 同相。谐振时的导纳为 $Y = G$

即谐振阻抗最大为

$$Z_0 = \frac{1}{G}$$

谐振时电压

$$\dot{U} = \dot{U}_0 = \frac{\dot{I}_s}{G} \quad (9.20)$$

谐振时，电抗（感抗或容抗）吸收的无功功率为 $\frac{U_0^2}{\omega_0 L}$ （或 $\omega_0 C U_0^2$ ）电阻

吸收的有功功率为 $U_0^2 G$ ，所以电路的品质因数

$$Q_0 = \frac{\text{无功功率}}{\text{有功功率}} = \frac{\frac{U_0^2}{\omega_0 L}}{U_0^2 G} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 L G}$$

(9.21)

当电路发生并联谐振时，由于 $\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L}$ ，并且 $I_0 = U_0 G$ ，所以电感支路

和电容支路的电流分别为：

$$\dot{I}_C = j\omega_0 C \dot{U}_0 = j \frac{\omega_0 C}{G} \dot{I}_s = jQ_0 \dot{I}_s$$

$$\dot{I}_L = j \frac{1}{\omega_0 L} \dot{U}_0 = -j \frac{1}{\omega_0 L G} \dot{I}_s = -jQ_0 \dot{I}_s \quad (9.22)$$

即电感支路的电流与电容支路的电流数值相等，且等于总电流 \dot{I}_s 的 Q_0 倍，

但相位相反。这种情况是并联谐振所特有的现象，所以并联谐振又称为电流谐振。

图 9.14 为 GLC 并联谐振电路中各电流随频率变化的变化曲线。

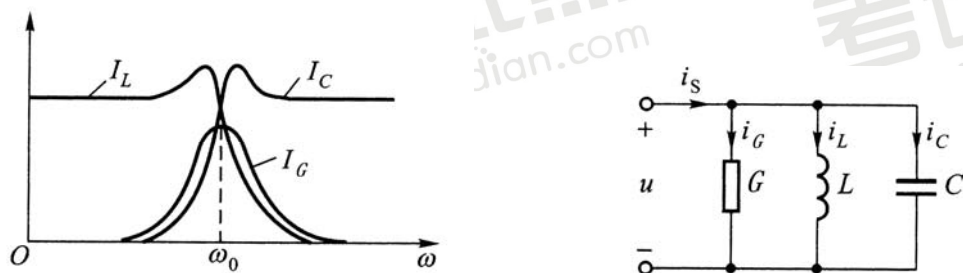


图 9.14 并联谐振电路中各电流随频率变化的情形 图

9.15 例 9.4 电路图

[例 9.4] 在图 9.15 所示的 GLC 并联电路中，若 $G=0.2\text{mS}$ ， $L=100\mu\text{H}$ ， $C=400\text{pF}$ ，电流源 $I_s=2\text{mA}$ 。当电源角频率为多少时，电路发生谐振？求谐振时各支路电流和电路两端的电压。

[解]： 为使电路谐振，电源的角频率应为

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{100 \times 10^{-6} \times 400 \times 10^{-12}}} = 5 \times 10^6 \text{ rad/s}$$

这时谐振导纳 $Y_0 = G = 0.2 \text{ mS}$

$$\text{所以电路两端的电压 } U_0 = \frac{I_s}{G} = \frac{2 \times 10^{-3}}{0.2 \times 10^{-3}} = 10 \text{ V}$$

流过电阻 G 的电流 $I_G = U_0 G = I_s = 2 \text{ mA}$

$$\text{电路的品质因数 } Q_0 = \frac{1}{\omega_0 L G} = \frac{1}{5 \times 10^6 \times 100 \times 10^{-6} \times 0.2 \times 10^{-3}} = 10$$

所以电感和电容支路的电流分别为：

$$\dot{I}_C = j\omega_0 C \dot{U}_0 = jQ_0 \dot{I}_s = j10 \times 2 = j20 \text{ mA}$$

$$\dot{I}_L = j \frac{1}{\omega_0 L} \dot{U}_0 = -j Q_0 \dot{I}_S = -j 10 \times 2 = -j 20 \text{ mA}$$

[例 9.5] 在图 9.16(a) 所示电路中, 已知 $u_S=100\text{V}$, $R_S=100\text{K}\Omega$,

$R=100\text{K}\Omega$, $L=100\mu\text{H}$, $C=100\text{pF}$, 电路谐振, 求电压 U 和 I_C 。

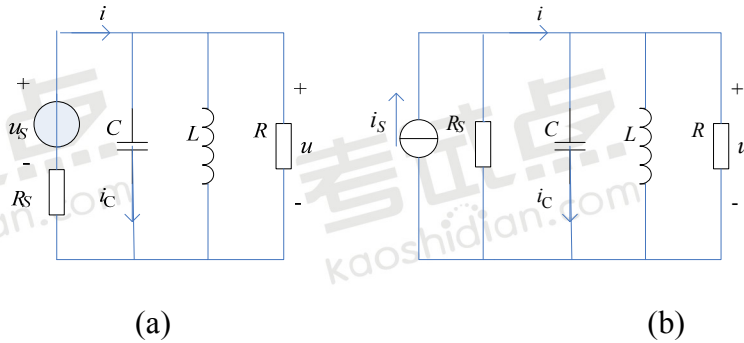


图 9.16 例 9.5 电路图

[解]: 首先作出图 9.17(a)的等效电路, 如图 9.17(b)所示。由电路参数,

$$\text{得 } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{100 \times 10^{-6} \times 100 \times 10^{-12}}} \text{ rad/s} = 10^7 \text{ rad/s}$$

$$\omega_0 L = 10^7 \times 100 \times 10^{-6} \Omega = 1\text{K}\Omega$$

$$\text{谐振阻抗 } Z_0 = R = 100\text{K}\Omega$$

考虑电源内阻 R_S 的影响后, 等效的谐振阻抗

$$R' = \frac{RR_S}{R + R_S} = 50\text{K}\Omega$$

$$\text{由于 } I_S = \frac{U_S}{R_S} = \frac{100}{100} = 1\text{mA}$$

故谐振时

$$\text{电压 } U_0 = R' I_S = 1 \times 50 = 50\text{V}$$

电容支路的电流 $I_C = \omega_0 C U_0 = 10^7 \times 100 \times 10^{-12} \times 50 = 0.05 \text{ A} = 50 \text{ mA}$

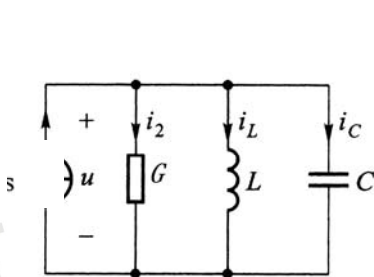
或者，考虑电源内阻后的等效品质因数为 $Q'_0 = \frac{R'}{\omega_0 L} = \frac{50}{1} = 50$

也可以求得 $I_C = Q'_0 I_s = 50 \times 1 = 50 \text{ mA}$

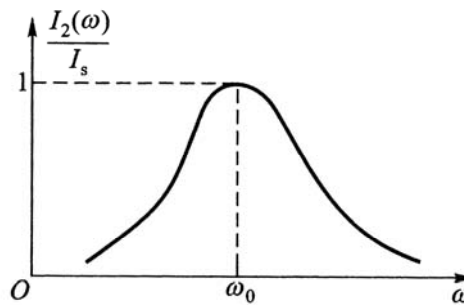
2. 频率特性

对于图 9.17(a) 所示的 GLC 并联电路，若以 G 中的电流 i_2, i_1 为输出，则

$$\text{网络函数 } H(j\omega) = \frac{i_2}{i_s} = \frac{G}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega C}{G} - \frac{1}{\omega LG}\right)}$$



(a) GLC 并联电路



(b) GLC

并联电路幅频特性

图 9.17 GLC 并联电路及其幅频特性

考虑到 $Q_0 = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 LG}$ ，则上式改写为

$$H(j\omega) = \frac{i_2}{i_s} = \frac{1}{1 + jQ_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (9.23)$$

与串联谐振电路相似，其幅频特性为

$$H(\omega) = \frac{I_2(\omega)}{I_s} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (9.24)$$

特性曲线示于图 9.18(b)。考虑到 $U(\omega)G = I_2(\omega)$ ，谐振时 $I_s = U_0 G$ ，代入式(9.24)又可得到

$$\frac{U(\omega)}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (9.25)$$

上式表明，在某频率 ω 处的电压 $U(\omega)$ 与谐振时的电压 U_0 之比和式 (9.24) 一样具有带通特性。这给分析并联谐振电路的电流、电压特性带来方便。并联谐振电路的通频带与串联谐振电路的表达形式相同，不再赘述。

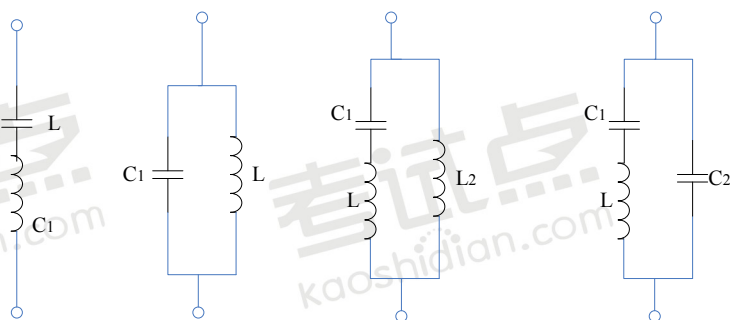
思考与练习

9.3-1 对题 9.3-1 图所示 4 个电路：

(1) 当 $\omega = \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}$ 时，哪些电路相当于短路，哪些电路相当于开路？

(2) 有人认为在另一频率 ω_2 时，(c) (d) 两电路相当于开路。是否可能？

如有可能， ω_2 是大于还是小于 ω_1 ？



(a) (b) (c) (d)
题 9.3-1 图

4.4 应用

我国 1970 年 4 月 24 日发射的“东方红一号”人造卫星向地球发回的电子音

乐信号由 1,6,5,3,2,1,7,6,5 共 9 个音节所对应的频率如下：

5	216.63Hz
6	293.66Hz
7	329.63Hz
1	349.23Hz
2	392.00Hz
3	440.00Hz
5	523.25Hz
6	587.33Hz
1	698.46Hz

这些信号是被调制到 20.009MHz 的载波频率 f_a 上向地球发射的，即 $y(t) = y_1(t)\cos(2\pi f_a t)$ ， $y_1(t)$ 为音乐信号。在接收机中只要把谐振回路的谐振频率 f_0 调到 f_a 上，就可以把电子音乐信号选择出来，其他 f_b 和 f_c 等信号群都被抑制。其原理如图 9.18 所示。

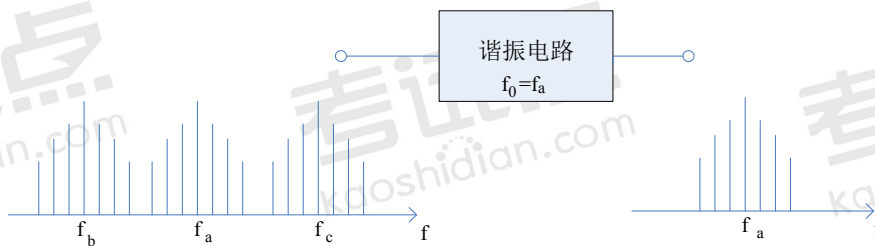


图 9.18 谐振电路的选频原理图

4.5 小结

1. 一阶 RC 低通和高通电路的网络函数形式分别为

$$H(j\omega) = \frac{a}{j\omega + a}$$

和

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + a}$$

2. 在 RLC 串联谐振电路中, 谐振时因谐振阻抗最小 ($Z_0 = R$) 从而回路电流最大。

$$\text{谐振条件} \quad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

$$\text{品质因数} \quad Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$L、C \text{ 上电压} \quad U_L = U_C = Q_0 U_s$$

$$\text{通频带} \quad \Delta f = \frac{f_0}{Q_0}$$

与以上对偶, 在 GLC 并联谐振电路中, 谐振时因谐振阻抗最大, 从而谐振电压最大。

$$\text{谐振条件} \quad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

$$\text{品质因数} \quad Q_0 = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 LG} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$L、C \text{ 上电压} \quad I_L = I_C = Q_0 I_s$$

通频带 $\Delta f = \frac{f_0}{Q_0}$

5. 分析网络特别是滤波器的频率特性时，一种快速的方法是使用 MATLAB 通用软件通过计算机求解。

第 5 章 非正弦周期电流电路和信号的频谱

一、教学基本要求

- 1、了解周期函数分解为傅里叶级数的方法和信号频谱的概念。
- 2、理解周期量的有效值、平均值的概念，掌握周期量有效值的计算方法。
- 3、掌握非正弦周期电流电路的谐波分析法和平均功率的计算，了解滤波器的概念。

二、教学重点与难点

教学重点：

- 1、非正弦周期电流电路的电流、电压的有效值、平均值；
- 2、非正弦周期电流电路的平均功率
- 3、非正弦周期电流电路的计算方法
叠加定理、戴维宁定理和诺顿定理。

教学难点：

- 1、叠加定理在非正弦周期电流电路中的应用
- 2、非正弦周期电流电路功率的计算

三、本章与其它章节的联系：

本章主要讨论非正弦周期电流、电压信号的作用下，线性电路的稳态分析和计算方法。非正弦周期信号可以分解为直流量和一系列不同频率正弦量之和，每一信号单独作用下的响应，与直流电路及交流电路的求解方法相同，再应用叠加定理求解，是前面内容的综合。

四、学时安排

总学时：4

教 学 内 容	学 时
1. 非正弦周期信号及周期函数分解为傅立叶级数	2
2. 有效值、平均值和平均功率，非正弦周期电流电路的计算	2

五、教学内容

§ 5.1 非正弦周期信号

生产实际中不完全是正弦电路，经常会遇到非正弦周期电流电路。在电子技术、自动控制、计算机和无线电技术等方面，电压和电流往往都是周期

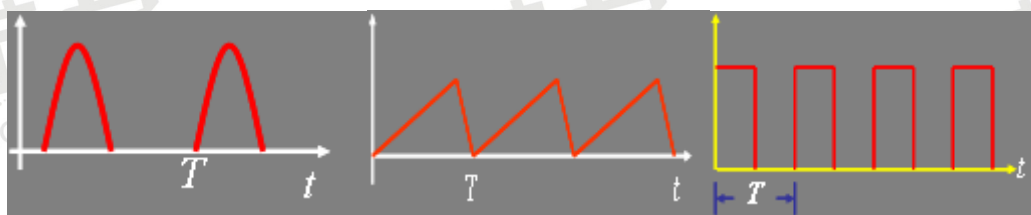
性的非正弦波形。

非正弦周期交流信号的特点：

1) 不是正弦波

2) 按周期规律变化，满足： $f(t) = f(t + kT)$ ($k=0, 1, 2 \dots$)

式中 T 为周期。图 12.1 为一些典型的 非正弦周期信号。



(a) 半波整流波形

(b) 锯齿波

(c) 方波

图 12.1

本章主要讨论非正弦周期电流、电压信号的作用下，线性电路的稳态分析和计算方法。采用谐波分析法，实质上就是通过应用数学中傅里叶级数展开方法，将非正弦周期信号分解为一系列不同频率的正弦量之和，再根据线性电路的叠加定理，分别计算在各个正弦量单独作用下电路中产生的同频率正弦电流分量和电压分量，最后，把所得分量按时域形式叠加得到电路在非正弦周期激励下的稳态电流和电压。

§ 5.2 周期函数分解为付里叶级数

电工技术中所遇到的非正弦周期电流、电压信号多能满足展开成傅里叶

级数的条件，因而能分解成如下傅里叶级数形式：

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t]$$

也可表示成：

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \phi_k)$$

以上两种表示式中系数之间关系为：

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 \\ A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ a_k &= A_k \cos \phi_k \quad b_k = -A_k \sin \phi_k \\ \phi_k &= \arctan \frac{-b_k}{a_k} \end{aligned}$$

上述系数可按下列公式计算：

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos k\omega_1 t d(\omega_1 t) \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin k\omega_1 t d(\omega_1 t) \end{aligned} \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

求出 a_0 、 a_k 、 b_k 便可得到原函数 $f(t)$ 的展开式。

注意：非正弦周期电流、电压信号分解成傅里叶级数的关键在于求出系数 a_0 、

a_k 、 b_k ，可以利用函数的某种对称性判断它包含哪些谐波分量及不包含哪些

谐波分量，可使系数的确定简化，给计算和分析将带来很大的方便。如以下

几种周期函数值得注意：

(1) 偶函数

波形对称于纵轴，如图 12.2 所示，

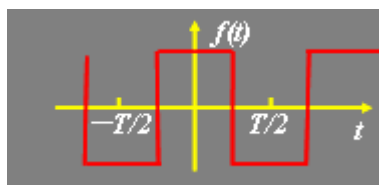


图 12.2

满足: $f(t) = f(-t)$, 则 $b_1 = 0$

(2) 奇函数

波形对称与原点如图 12.3 所示，

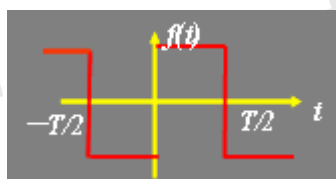


图 12.3

满足: $f(t) = -f(-t)$, 则 $a_1 = 0$

(3) 奇谐波函数

波形镜对称如图 12.4 所示，

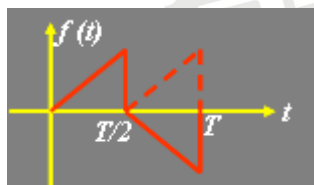


图 12.4

满足:

$$f(t) = -f(t + \frac{T}{2}) \text{ 则 } a_0 = a_{2k} = b_{2k} = 0$$

(4) 若函数是偶函数又是镜对称时, 则只含有奇次的余弦项, 即

$$a_0 = a_{2k} = b_k = 0$$

(5) 若函数是奇函数又是镜对称时, 则只含有奇次的正弦项, 即

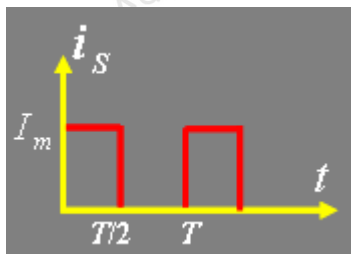
$$a_0 = a_k = b_{2k} = 0$$

实际中所遇到的周期函数可能较复杂, 不易看出对称性, 但是如果将波

形作一定的平移, 或视为几个典型波形的合成, 则也能使计算各次谐波的系

数简化。

例 12-1 把图示周期性方波电流分解成傅里叶级数。



例 12 — 1 图

解：周期性方波电流在一个周期内的函数表示式为：

$$i_s(t) = \begin{cases} I_m & 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

各次谐波分量的系数为：

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i_s(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m dt = \frac{I_m}{2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i_s(\omega t) \sin k\omega t d(\omega t) = \frac{I_m}{\pi} \left(-\frac{1}{k} \cos k\omega t \right) \Big|_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & k \text{ 为偶数} \\ \frac{2I_m}{k\pi} & k \text{ 为奇数} \end{cases}$$

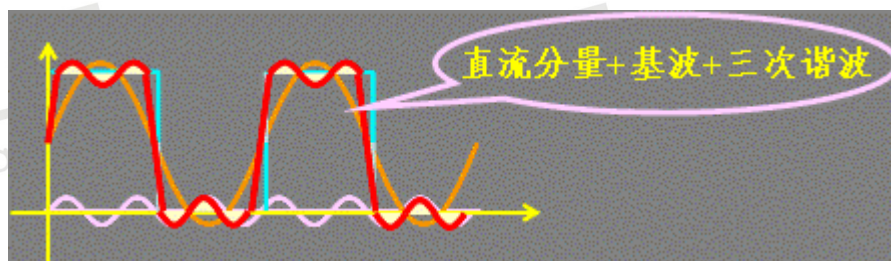
$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} i_s(\omega t) \cos k\omega t d(\omega t) = \frac{2I_m}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \sin k\omega t \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$A_k = \sqrt{b_k^2 + a_k^2} = b_k = \frac{2I_m}{k\pi} \quad (k \text{ 为奇数}) \quad \varphi_k = \arctan \frac{a_k}{b_k} = 0$$

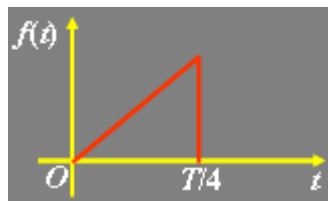
因此， i_s 的傅里叶级数展开式为：

$$i_s = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

即，周期性方波可以看成是直流分量与一次谐波、三次谐波、五次谐波等的叠加，如下图所示。

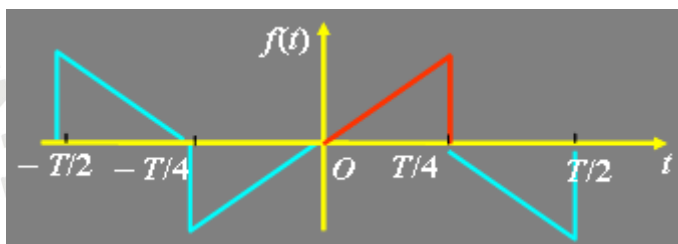


例 12-2 给定函数 $f(t)$ 的部分波形如图所示。为使 $f(t)$ 的傅里叶级数中只包含如下的分量：(1) 正弦分量；(2) 余弦分量；(3) 正弦偶次分量；(4) 余弦奇次分量。试画出 $f(t)$ 的波形。

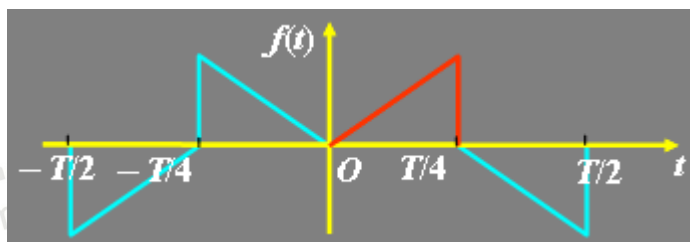


例 12 — 2 图

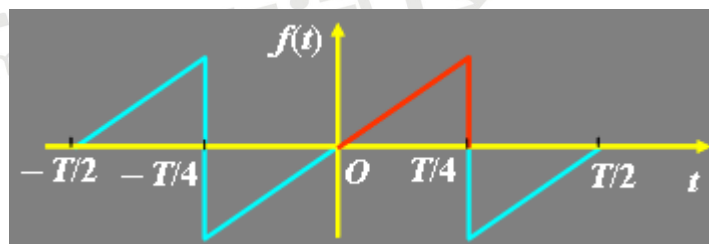
解：(1) $f(t)$ 的傅里叶级数中只包含正弦分量，说明 $f(t)$ 为奇函数，对原点对称，可用下图波形表示。



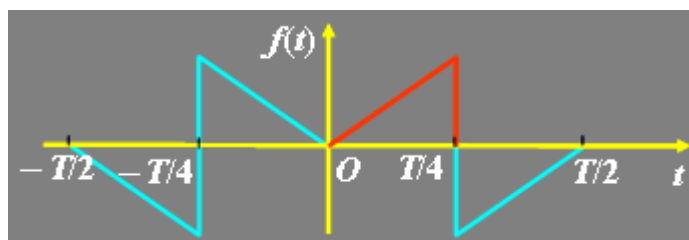
(2) $f(t)$ 的傅里叶级数中只包含余弦分量，说明 $f(t)$ 为偶函数，对坐标纵轴对称，可用下图波形表示。



(3) $f(t)$ 的傅里叶级数中只包含正弦偶次分量，可用下图波形表示。



(4) $f(t)$ 的傅里叶级数中只包含余弦奇次分量，可用下图波形表示。



§ 5.3 有效值、平均值和平均功率

1. 三角函数的性质

(1) 正弦、余弦函数在一个周期内的积分为 0，即：

$$\int_0^{2\pi} \sin katd(at) = 0 \quad \int_0^{2\pi} \cos katd(at) = 0$$

(2) \sin^2 、 \cos^2 在一个周期内的积分为 π ，即：

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 kat d(at) = \pi \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 kat d(at) = \pi$$

(3) 三角函数的正交性如下式所示：

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos kat \cdot \sin pat d(at) &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos kat \cdot \cos pat d(at) &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin kat \cdot \sin pat d(at) &= 0 \quad (k \neq p) \end{aligned}$$

2. 非正弦周期函数的有效值

设非正弦周期电流可以分解为傅里叶级数：

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(kat + \varphi_k)$$

代入有效值的定义式中有：

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(at) d(at)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(kat + \varphi_k) \right]^2 d(at)}$$

利用上述三角函数的性质，上式中 i 的展开式平方后将含有下列各

项：

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 d(at) = I_0^2$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_{km}^2 \cos^2(kat + \varphi_k) d(at) = I_{km}^2$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T 2I_0 \cos(kat + \varphi_k) d(at) = 0$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T 2I_{km} \cos(kat + \varphi_k) I_{pm} \cos(pat + \varphi_p) d(at) = 0 \quad k \neq p$$

这样可以求得 i 的有效值为：

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_k^2}{2}} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 \dots}$$

由此得到结论：周期函数的有效值为直流分量及各次谐波分量有效值平方和的方根。此结论可以推广用于其他非正弦周期量。

3. 非正弦周期函数的平均值

设非正弦周期电流可以分解为傅里叶级数：

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t + \phi_k)$$

则其平均值定义为：

$$I_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt$$

即：非正弦周期电流的平均值等于此电流绝对值的平均值。按上式可求

得正弦电流的平均值为：

$$I_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T I_m \cos(k\omega t) |i(t)| dt = 0.637 I_m = 0.898 I$$

注意：

(1) 测量非正弦周期电流或电压的有效值要用电磁系或电动系仪表，测量非正弦周期量的平均值要用磁电系仪表。

(2) 非正弦周期量的有效值和平均值没有固定的比例关系，它们随着波形不同而不同。

4. 非正弦周期交流电路的平均功率

设任意一端口电路的非正弦周期电流和电压可以分解为傅里叶级数：

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cos(k\omega t + \varphi_{uk}) \quad i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t + \varphi_{ik})$$

则一端口的平均功率为：

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i dt$$

代入电压、电流表示式并利用三角函数的性质，得：

$$\begin{aligned} P &= U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + \dots \\ &= P_0 + P_1 + P_2 + \dots \end{aligned}$$

式中 $\varphi_k = \varphi_{uk} - \varphi_{ik}$

由此得出结论：

非正弦周期电流电路的平均功率 = 直流分量的功率 + 各次谐波的平均功率。

§ 5.4 非正弦周期交流电路的计算

根据以上讨论可得非正弦周期电流电路的计算步骤如下：

(1) 把给定电源的非正弦周期电流或电压作傅里叶级数分解，将非正弦周期量展开成若干频率的谐波信号；

(2) 利用直流和正弦交流电路的计算方法，对直流和各次谐波激励分别计算其响应；

(3) 将以上计算结果转换为瞬时值迭加。

注意：

(1) 交流各次谐波电路计算可应用相量法，

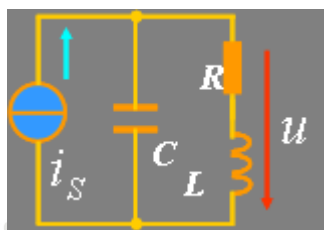
(2) 对不同的频率，感抗与容抗是不同的。对直流 C 相当于开路、 L 相当于短路。对 k 次谐波有：

$$X_L = k\omega L \quad X_C = \frac{1}{k\omega C}$$

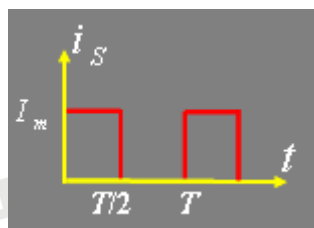
例 12-3 电路如图 (a) 所示，电流源为图 (b) 所示的方波信号。

求输出电压 u_0 。

已知： $R=20\Omega$ 、 $L=1mH$ 、 $C=1000pF$ $I_m=157\mu A$ 、 $T=6.28\mu s$



例 12-3 图 (a)



(b)

解：计算步骤如下：

(1) 由例 12-1 知方波信号的展开式为：

$$i_s = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

代入已知数据 $I_m = 157 \mu A$, $T = 6.28 \mu s$

$$I_0 = \frac{I_m}{2} = \frac{157}{2} = 78.5 \mu A$$

得直流分量

$$I_{1m} = \frac{2I_m}{\pi} = \frac{2 \times 157}{3.14} = 100 \mu A$$

基波最大值

$$I_{3m} = \frac{1}{3} I_{1m} = 33.3 \mu A$$

三次谐波最大值

$$I_{5m} = \frac{1}{5} I_{1m} = 20 \mu A$$

五次谐波最大值

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{6.28 \times 10^{-6}} = 10^6 \text{ rad/s}$$

角频率为：

因此，电流源各频率的谐波分量表示式为：

$$I_{s0} = 78.5 \mu A \quad i_{s1} = 100 \sin 10^6 t \mu A$$

$$i_{s3} = \frac{100}{3} \sin 3 \cdot 10^6 t \mu A \quad i_{s5} = \frac{100}{5} \sin 5 \cdot 10^6 t \mu A$$

(2) 对各次频率的谐波分量单独计算

(a) 直流分量 I_{s0} 单独作用时： $I_{s0} = 78.5 \mu A$

把电容断路，电感短路，电路如图 (c) 所示，

计算得：



(c)

$$U_0 = RI_{S0} = 20 \times 78.5 \times 10^{-4} = 1.57 \text{ mV}$$

(b) 基波单独作用时， $i_a = 100 \sin 10^6 t$ ，电路如图 (a) 所示。计算得容抗和感抗为：

$$\frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{10^6 \times 1000 \times 10^{-12}} = 1 \text{ k}\Omega \quad \omega_1 L = 10^6 \times 10^{-3} = 1 \text{ k}\Omega$$

所以阻抗为：

$$Z(\omega_1) = \frac{(R + jX_L) \cdot (-jX_C)}{R + j(X_L - X_C)} \approx \frac{X_L X_C}{R} = \frac{L}{RC} = 50 \text{ k}\Omega$$

因此

$$U_1 = I_1 \cdot Z(\omega_1) = \frac{100 \times 10^{-4}}{\sqrt{2}} \cdot 50 = \frac{5000}{\sqrt{2}} \text{ mV}$$

(c) 三次谐波单独作用时， $i_3 = \frac{100}{3} \sin 3 \cdot 10^6 t$ ，计算得容抗和感抗为：

$$\frac{1}{3\omega_1 C} = \frac{1}{3 \times 10^6 \times 1000 \times 10^{-12}} = 0.33 \text{ k}\Omega \quad 3\omega_1 L = 3 \times 10^6 \times 10^{-3} = 3 \text{ k}\Omega$$

阻抗为：

$$Z(3\omega_1) = \frac{(R + jX_{L3})(-jX_{C3})}{R + j(X_{L3} - X_{C3})} = 374.5 \angle -89.19^\circ \Omega$$

则：

$$\dot{U}_3 = \dot{I}_{s3} \cdot Z(3\omega_1) = 33.3 \times \frac{10^{-6}}{\sqrt{2}} \times 374.5 \angle -89.19^\circ$$

(d) 五次谐波单独作用时， $\dot{I}_{s5} = \frac{100}{5} \sin 5 \cdot 10^4 t \mu A$ ，计算得容抗和感抗为：

$$\frac{1}{5\omega_1 C} = \frac{1}{5 \times 10^4 \times 1000 \times 10^{-12}} = 0.2 K\Omega \quad 5\omega_1 L = 5 \times 10^4 \times 10^{-3} = 5k\Omega$$

阻抗为：

$$Z(5\omega_1) = \frac{(R + jX_L)(-jX_C)}{R + j(5X_L - X_C)} = 208.3 \angle -89.53^\circ \Omega$$

则：

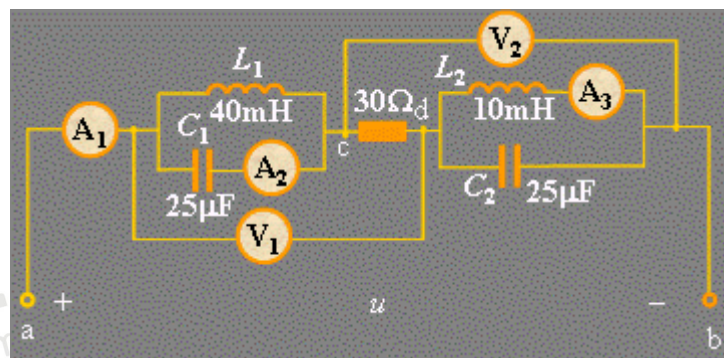
$$\dot{U}_5 = \dot{I}_{s5} \cdot Z(5\omega_1) = \frac{20 \times 10^{-6}}{\sqrt{2}} \cdot 208.3 \angle -89.53^\circ = \frac{4.166}{\sqrt{2}} \angle -89.53^\circ mV$$

(3) 把各次谐波分量计算结果的瞬时值迭加：

$$\begin{aligned} u &= U_0 + u_1 + u_3 + u_5 \\ &\approx 1.57 + 5000 \sin \omega t \\ &\quad + 12.47 \sin(3\omega t - 89.2^\circ) \\ &\quad + 4.166 \sin(5\omega t - 89.53^\circ) mV \end{aligned}$$

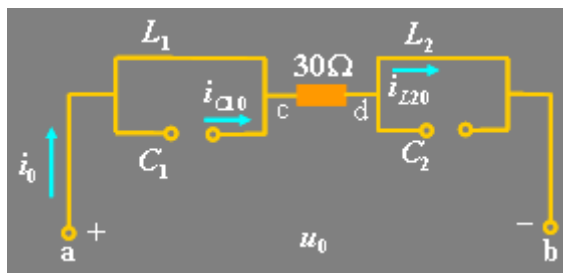
例 12-4 图 (a) 所示电路中各表读数 (有效值) 及电路吸收的功率。

已知: $u = 30 + 120\cos 1000t + 60\cos(2000t + \frac{\pi}{4}) \text{ V}$



例 12 — 4 图 (a)

解: (1) 当直流分量 $u_0 = 30\text{V}$ 作用于电路时, L_1 、 L_2 短路, C_1 、 C_2 开路, 电路如图 (b) 所示。



(b)

所以

$$I_{A1} = I_{A3} = \frac{30}{30} = 1\text{A}, \quad I_{A2} = 0, \quad U_{V1} = U_{V2} = 30\text{V}$$

(2) 基波作用于电路, $u_1 = 120\cos 1000t \text{ V}$

$$\omega L_1 = 1000 \times 40 \times 10^{-3} = 40\Omega \quad \omega L_2 = 1000 \times 10 \times 10^{-3} = 10\Omega$$

$$\frac{I}{\omega C_1} = \frac{I}{\omega C_2} = \frac{1}{1000 \times 25 \times 10^{-6}} = 40\Omega$$

L_1 、 C_1 对基波发生并联谐振。所以 $I_{10} = 0$ ，基波电压加于 L_1 、 C_1 并联电路两端，故

$$\dot{U}_{10} = 120\angle 0^\circ \text{ V}, \quad \dot{U}_{20} = 0,$$

$$\dot{I}_{10} = \dot{I}_{20} = 0, \quad \dot{I}_{20} = j\omega C_1 \dot{U}_1 = \frac{120\angle 0^\circ}{-j40} = 3\angle 90^\circ \text{ A}$$

(3) 二次谐波 $u_2 = 60\cos(2000t + \pi/4) \text{ V}$ 作用于电路，有

$$2\omega L_1 = 2000 \times 40 \times 10^{-3} = 80\Omega, \quad 2\omega L_2 = 2000 \times 10 \times 10^{-3} = 20\Omega$$

$$\frac{1}{2\omega C_1} = \frac{1}{2\omega C_2} = \frac{1}{2000 \times 25 \times 10^{-6}} = 20\Omega$$

L_2 、 C_2 对二次谐波发生并联谐振。所以 $I_{22} = I_{12} = 0$ ，电压加于 L_2 、 C_2 并联电路两端，故

$$\dot{U}_{12} = 0, \quad \dot{U}_{22} = \dot{U}_2 = 60\angle 45^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_{12} = \frac{\dot{U}_1}{j2\omega L_2} = \frac{60\angle 45^\circ}{j20} = 3\angle -45^\circ \text{ A}$$

所以电流表 $A1 = 1 \text{ A}$

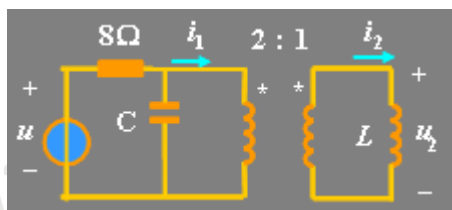
$$A2 = 3/\sqrt{2} = 2.12 \text{ A}$$

$$A3 = \sqrt{1^2 + (3/\sqrt{2})^2} = 2.35 \text{ A}$$

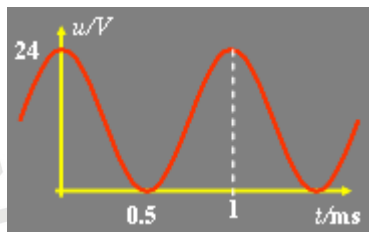
$$\text{电压表 } V1 = \sqrt{30^2 + (120/\sqrt{2})^2} = 90 \text{ V}$$

$$V2 = \sqrt{3^2 + (60/\sqrt{2})^2} = 52.0 \text{ V}$$

例 12-5 图 (a) 所示电路中, 已知电源 $u(t)$ 是周期函数, 波形如图 (b) 所示, $L=1/2 \pi \text{ mH}$, $C=125/\pi \mu\text{F}$ 。求: 理想变压器原边电流 $i_1(t)$ 及输出电压 u_2 的有效值。



例 12-5 图 (a)



(b)

解: 由图 (b) 知 $\omega = 2\pi/T = 2\pi \times 10^3 \text{ rad/s}$

$$u(t) = 12 + 12\cos(\omega t)$$

当直流分量 $u_0 = 12\text{V}$ 作用于电路时, 电容开路、电感短路, 有:

$$i_{10} = 12/8 = 1.5\text{A}$$

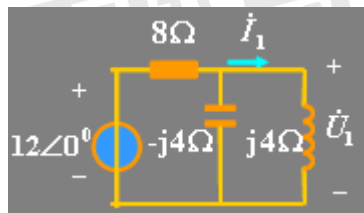
$$u_{20} = 0$$

当 $u_1 = 12\cos(\omega t)$ 作用于电路时, 有:

$$X_C = \frac{-1}{\omega C} = \frac{-1}{2\pi \times 10^3 \times 125 \times 10^{-6}} = -4\Omega$$

$$X_L = \omega L = 2\pi \times 10^3 \times \frac{1}{2\pi} \times 10^{-3} = 1\Omega$$

图 (a) 的原边等效电路如图 (c) 所示。



(c)

电容和电感发生并联谐振，电源电流为零，因此：

$$\dot{U}_1 = \dot{U} = 12\angle 0^\circ \text{V}$$

$$\dot{i}_1 = \frac{\dot{U}}{j4} = \frac{12}{j4} = -j3 \text{A}$$

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{n} \dot{U}_1 = 6\angle 0^\circ \text{V}$$

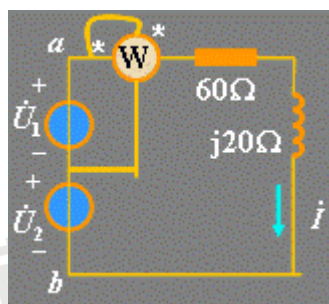
则

$$i_1 = 1.5 + 3\cos(\omega t - 90^\circ) \text{A}$$

$$U_2 = \frac{6}{\sqrt{2}} = 4.24 \text{V}$$

例 12-6 求图示电路中 a、b 两端电压有效值 U_{ab} 、电流 i 及功率表的读数。已知：

$$u_1 = 220\sqrt{2}\cos\omega t \text{V} \quad u_2 = 220\sqrt{2}\cos\omega t + 100\sqrt{2}\cos(3\omega t + 30^\circ) \text{V}$$



例 12 — 6 图

解：电压有效值 $U_{ab} = \sqrt{440^2 + 100^2} = 451.22 \text{V}$

一次谐波作用时: $\dot{U}_{\omega(1)} = 440\angle 0^\circ \text{ V}$

$$\dot{I}_{(1)} = \frac{440}{60 + j20} = \frac{22}{3 + j} = 6.96\angle -18.4^\circ \text{ A}$$

三次谐波作用时: $\dot{U}_{\omega(3)} = 100\angle 30^\circ \text{ V}$

$$\dot{I}_{(3)} = \frac{100\angle 30^\circ}{60 + j60} = \frac{5\angle 30^\circ}{3 + j3} = 1.18\angle -15^\circ \text{ A}$$

所以 $i = 6.96\sqrt{2}\cos(\omega t - 18.4^\circ) + 1.18\sqrt{2}\cos(\omega t - 15^\circ) \text{ A}$

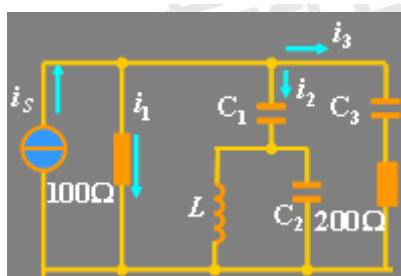
功率表读数为 $P = 220 \times 6.96 \cos 18.4 = 1452.92 \text{ W}$

注意: 同频率的电压电流构成有功功率。

例 12-7 已知图 (a) 电路中 $i_s = 5 + 20\cos 1000t + 10\cos 3000t \text{ A}$, $L=0.1\text{H}$,

$C_3=1\mu\text{F}$, 电容 C_1 中只有基波电流, 电容 C_3 中只有三次谐波电流, 求 C_1 、 C_2

和各支路电流。



例 12-7 图

解: C_1 中只有基波电流, 说明 L 和 C_2 对三次谐波发生并联谐振。所以:

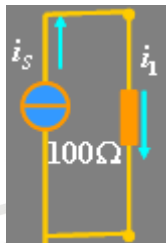
$$C_2 = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{9 \times 10^3} \text{ F}$$

C_3 中只有三次谐波电流, 说明 L 、 C_1 、 C_2 对一次谐波发生串联谐振。所

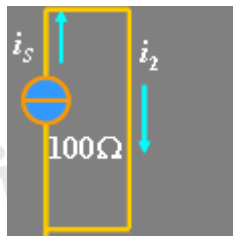
以：

$$\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{-L/C_2}{j(\omega L - 1/j\omega C_2)} = 0 \quad C_1 = \frac{8}{9 \times 10^3} \text{ F}$$

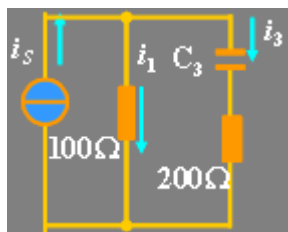
3 个谐波分量单独作用时的电路如图 (b)、(c)、(d) 所示。



(b) 直流作用



(c) 一次谐波作用



(d) 三次谐波作用

由图可计算得：

$$I_{x3} = \frac{100 \times 10}{100 + 200 - j10^3/3} = \frac{30}{9 - j10} = 2.23 \angle 48^\circ$$

$$I_{x2} = I_s - I_{x3} = 10 - \frac{30}{9 - j10} = 8.67 \angle -11^\circ$$

$$i_1(t) = 5 + 8.67 \cos(3000t - 11^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 20 \cos 1000t \text{ A}$$

$$i_3(t) = 2.23 \cos(3000t + 48^\circ) \text{ A}$$

第 6 章 电路暂态过程的时域分析

6.1 电路暂态过程及其初始条件

对含有直流、交流电源的动态电路，若电路已经接通了相当长的时间，电路中各元件的工作状态已趋于稳定，则称电路达到了稳定状态，简称为稳态。在直流电路中，电容相当于开路，电感相当于短路，电路方程简化为代数方程组。在正弦电路中，我们利用相量的概念将问题归结为复数形式的代数方程组。如果电路发生某些变动，例如电路参数的改变、电路结构的变动、电源的改变等，这些统称为换路，电路的原有状态就会被破坏，电路中的电容器可能出现充电与放电现象，电感线圈可能出现磁化与去磁现象。储能元件上的电场或磁场能量所发生的变化一般都不可能瞬间完成，而必须经历一定的过程才能达到新的稳态。这种介于两种稳态之间的变化过程叫做过渡过程，简称为瞬态或暂态。电路的过渡过程的特性广泛地应用于通讯、计算机、自动控制等许多工程实际中。同时，在电路的过渡过程中由于储能元件状态发生变化而使电路中可能会出现过电压、过电流等特殊现象，在设计电气设备时必须予以考虑，以确保其安全运行。因此，研究动态电路的过渡过程具有十分重要的理论意义和现实意义。

电路的瞬态过程是一个时变过程，在分析动态电路的瞬态过程时，必须严格界定时间的概念。通常我们将零时刻作为换路的计时起点，即 $t=0$ ，相应的，用 $t=0_-$ 表示换路前的最终时刻，用 $t=0_+$ 表示换路后的最初时刻。 $t=0_-$ 时刻的电路变量一般可由换路前的稳态电路确定。本章的任务就是研究电路变量从 $t=0_-$ 时刻到 $t=0_+$ 时刻其量值所发生的变化，继而求出 $t>0$ 后的变动规律。电路发生换路后，电路变量从 $t=0_-$ 到 $t \rightarrow \infty$ 的整个时间段内的变化规律称为电路的动态响应。如果电路中发生多次换路，可将第二次换路时刻计为 $t=t_0$ ，将第三次换路时刻计为 $t=t_1$ ，等等，依此类推。

分析动态电路过渡过程的方法之一是根据网络的 KCL、KVL 和元件的 VCR 建立描述电路的微分方程，对于线性时不变电路，建立的方程是以时间为自变量的线性常微分方程，求解此常微分方程，即可得到所求电路变量在过渡过程中的变化规律，这种方法称为经典法。因为它是在时间域中进行分析的，所以又称为时域分析法。

现以图 9.1 所示电路为例说明时域分析法的求解过程。图中开关 S 在 $t=0$ 时刻闭合，换路前电路处于稳态，即电容电压为常数。

按图示电压电流参考方向，根据 KVL 列出回路的电压方程为

$$u_R + u_C = u_S$$

由元件的 VCR，有

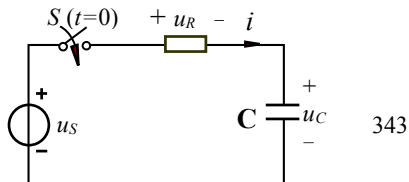


图 9.1 一阶动态电路

$$u_R = Ri$$

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

代入电压方程，得

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u_s \quad (9-1)$$

对线性时不变电路，上式是一个以电容电压 u_C 为未知量的一阶线性非齐次常微分方程。我们把用一阶微分方程描述的电路称为一阶电路。方程 (9-1) 的通解 u_C 等于该方程的任一特解 u_{Cp} 和与该方程相对应的齐次微分方程的通解 u_{Ch} 之和，即

$$u_C = u_{Cp} + u_{Ch}$$

式中特解 u_{Cp} 的函数形式取决于电源 u_s ，通解 u_{Ch} 的函数形式取决于电路参数。式 (9-1) 所对应的齐次微分方程的特征方程为

$$RCp + 1 = 0$$

由此求得方程的特征根 $p = -\frac{1}{RC}$ ，因此该齐次微分方程的通解为

$$u_{Ch} = Ae^{pt}$$

即电路换路后的电容电压为

$$u_C = u_{Cp} + Ae^{pt} \quad (9-2)$$

根据电路的激励及初始条件即可求得式中的待定系数 A ，从而确定一阶电路的过渡过程的性态。

从以上示例可见，时域分析的方法就是数学中的一阶微分方程的经典求解方法，关键是如何利用我们所学过的电路知识确定初始条件、特解、特征根等。

6.2 电路变量的初始值

用经典法求解常微分方程时，必须给定初始条件才能确定通解中的待定系数。假设电路在 $t=0$ 时换路，若描述电路动态过程的微分方程为 n 阶，则其初始条件就是指所求电路变量（电压或电流）及其 $(n-1)$ 阶导数在 $t=0_+$ 时刻的值，这就是电路变量的初始值。电路变量在 $t=0_-$ 时刻的值一般都是给定的，或者可由换路前的稳态电路求得，而在换路的瞬间即从 $t=0_-$ 到 $t=0_+$ ，有些变量是连续变化的，有些变量则会发生跃变。

对线性电容，在任意时刻 t ，它的电荷 q 、电压 u_C 与电流 i_C 在关联参考方向下的关系为

$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^t i_C(\xi) d\xi$$

$$u_C(t) = u_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\xi) d\xi$$

设 $t=0$ 时刻换路，令 $t_0 = 0_-$ ， $t = 0_+$ ，则有

$$q(0_+) = q(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} i_C(\xi) d\xi \quad (9-3a)$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i_C(\xi) d\xi \quad (9-3b)$$

从上面二式可以看出, 如果换路瞬间电容电流 $i_C(t)$ 为有限值, 则式中积分项将为零, 于是有

$$q(0_+) = q(0_-) \quad (9-4a)$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \quad (9-4b)$$

这一结果说明, 如果换路瞬间流经电容的电流为有限值, 则电容上的电荷和电压在换路前后保持不变, 即电容的电荷和电压在换路瞬间不发生跃变。

对线性电感可做类似的分析。在任意时刻 t , 它的磁链 ψ_L 、电压 u_L 与电流 i_L 在关联参考方向下的关系为

$$\psi_L(t) = \psi_L(t_0) + \int_{t_0}^t u_L(\xi) d\xi$$

$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(\xi) d\xi$$

令 $t_0 = 0_-$, $t = 0_+$, 则有

$$\psi_L(0_+) = \psi_L(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} u_L(\xi) d\xi \quad (9-5a)$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u_L(\xi) d\xi \quad (9-5b)$$

从上面二式可以看出, 如果换路瞬间电感电压 $u_L(t)$ 为有限值, 则式中积分项将为零, 于是有

$$\psi_L(0_+) = \psi_L(0_-) \quad (9-6a)$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) \quad (9-6b)$$

这一结果说明, 如果换路瞬间电感电压为有限值, 则电感中的磁链和电感电流在换路瞬间不发生跃变。

换路瞬间电容电压和电感电流不能跃变是因为储能元件上的能量一般不能跃变。电容中储存的电场能量 $W_C = \frac{1}{2} Cu_C^2$ 、电感中储存的磁场能量 $W_L = \frac{1}{2} Li_L^2$, 如果 u_C 和 i_L 跃变, 则意味着电容中的电场能量和电感中的磁场能量发生跃变, 而能量的跃变又意味着功率为无限大 ($p = \frac{dW}{dt}$), 在一般情况下这是不可能的。只有某些特定的条件下, 如含有 C-E 回路或 L-J 割集¹的电路, u_C 和 i_L 才可能跃变。

由于电容电压 u_C 和电感电流 i_L 换路后的初始值与它们换路前的储能状态密切相关, 因此称 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 为独立初始值, 一般情况下, 若换路后不出现 C-E 回路或 L-J 割集则二者的值可由(9-4)、(9-6)式求出。而其它电压和电流(如电阻的电压或电流、电容电流、电感电压等)的初始值称为非独立初始值。非独立初始值由独立初始值 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 结合电路中的电源并运用 KCL、KVL 等进一步确定。

¹C-E 回路是指由纯电容或由电容与电压源构成的回路, L-J 割集是指由纯电感或由电感与电流源构成的割集。有关割集的概念参见第十二章。

例 6-1 在图 9.2(a)所示的电路中, 已知 $R = 40\Omega$, $R_1 = R_2 = 10\Omega$, $U_s = 50\text{ V}$, $t = 0$ 时开关闭合。求 $u_C(0_+)$ 、 $i_L(0_+)$ 、 $i_C(0_+)$ 、 $u_L(0_+)$ 和 $i_C(0_+)$ 。

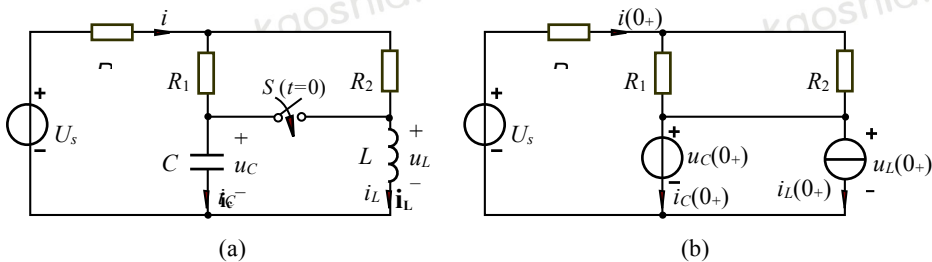


图 9.2 例 9-1 图

解 换路前电路为稳定的直流电路, 电容相当于开路, 电感相当于短路, 故有

$$u_C(0_-) = \frac{R_2}{R + R_2} U_s = \frac{10}{40 + 10} \times 50 = 10\text{ V}$$

$$i_L(0_-) = \frac{U_s}{R + R_2} = \frac{50}{40 + 10} = 1\text{ A}$$

换路后 u_C 和 i_L 都不会跃变, 所以

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 10\text{ V}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\text{ A}$$

根据替代定理, 把电容用电压为 $u_C(0_+)$ 的电压源等效代替, 把电感用电流为 $i_L(0_+)$ 的电流源等效代替, 得到 $t = 0_+$ 时的等效电路如图 9.2(b)所示, 进而可求得

$$i(0_+) = \frac{U_s - u_C(0_+)}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{50 - 10}{40 + 5} = \frac{8}{9}\text{ A}$$

$$u_L(0_+) = u_C(0_+) = 10\text{ V}$$

$$i_C(0_+) = i(0_+) - i_L(0_+) = -\frac{1}{9}\text{ A}$$

例 6-2 图 9.3(a)所示的电路中已知 $R = 10\Omega$, $R_1 = 2\Omega$, $U_s = 10\text{ V}$, $C = 0.5\text{ F}$, $L = 3\text{ H}$, $t = 0$ 时

将开关打开。求 $u_C(0_+)$ 、 $i_L(0_+)$ 、 $i_C(0_+)$ 、 $u_L(0_+)$ 、 $\frac{du_C}{dt}(0_+)$ 和 $\frac{di_L}{dt}(0_+)$ 。

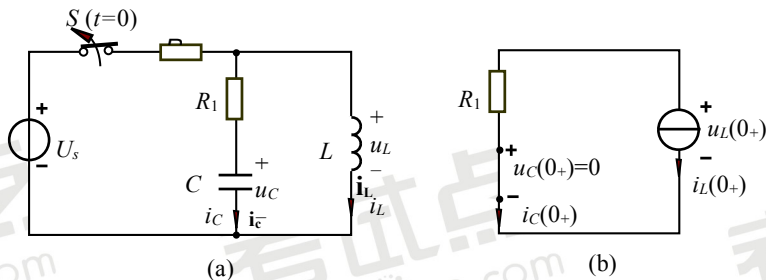


图 9.3 例 9-2 图

解 换路前电路为稳定的直流电路, 电容相当于开路, 电感相当于短路, 故有

$$u_C(0_-) = 0\text{ V}$$

$$i_L(0_-) = \frac{U_s}{R} = 1 \text{ A}$$

$$i_C(0_-) = 0$$

$$u_L(0_-) = 0$$

换路后 u_C 和 i_L 都不会跃变。画出 $t = 0_+$ 时的等效电路如图 9.3(b) 所示, 注意: 零初始条件下的电容在换路瞬间相当于短路, 零初始条件下的电感在换路瞬间相当于开路, 这与直流稳态时恰好相反!

由此等效电路得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0 \text{ V}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1 \text{ A}$$

$$i_C(0_+) = -i_L(0_+) = 1 \text{ A}, \text{ 由 } i_C = C \frac{du_C}{dt} \text{ 得 } \frac{du_C}{dt}(0_+) = \frac{i_C(0_+)}{C} = 2 \text{ V/s}$$

$$u_L(0_+) = -R_1 i_L(0_+) = -2 \text{ V},$$

$$\text{而 } u_L = L \frac{di_L}{dt}, \text{ 故 } \frac{di_L}{dt}(0_+) = \frac{u_L(0_+)}{L} = -\frac{2}{3} \text{ A/s}$$

从以上例题可以看出, 非独立初始条件在换路瞬间一般都可能发生跃变, 因此, 不能把(9-4)、(9-6)的关系式随意应用于 u_C 和 i_L 以外的电压和电流初始值的计算中。

6.3 一阶电路的零输入响应

激励在换路后的电路中任一元件、任一支路、任一回路等引起的电路变量的变化均称为电路的响应, 而产生响应的源即激励只有两种, 一种是外加电源, 另一种则是储能元件的初始储能。对于线性电路, 动态响应是二者激励的叠加。这一节我们研究电路在外施激励为零的条件下一阶电路的动态响应, 此响应是由储能元件的初始储能激励的, 称为零输入响应。此过渡过程即为能量的释放过程。

6.3.1 RC 电路的零输入响应

在图 9.4 所示电路中, 设开关闭合前电容已充电到 $u_C = U_0$, 现以开关动作时刻作为计时起点, 令 $t = 0$, 开关闭合后, 即 $t \geq 0_+$ 时, 根据 KVL 可得

$$-u_R + u_C = 0$$

将 $u_R = Ri$ 及 $i = -C \frac{du_C}{dt}$ 代入上式, 有

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

此式为一阶齐次微分方程, 相应的特征方程为

$$RCp + 1 = 0$$

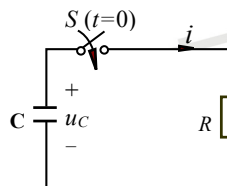


图 9.4 RC 电路的零输入响应

特征根为

$$p = -\frac{1}{RC}$$

故微分方程的通解为

$$u_C = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

换路瞬间电容电流为有限值, 所以 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$, 以此代入上式, 可得积分常数

$$A = u_C(0_+) = U_0$$

因此得到 $t \geq 0$ 时电容电压的表达式为

$$u_C = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (9-8)$$

电阻上的电压电流分别为

$$u_R = u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\frac{U_0}{R}$$

u_C 、 u_R 和 i 随时间的变化曲线如图 9.5 所示。

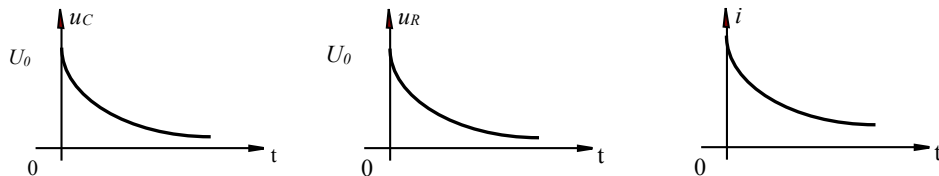


图 9.5 u_C 、 u_R 和 i 随时间变化的曲线

从上述分析可见, RC 电路的零输入响应 u_C 、 u_R 、 i 都是按照同样的指数规律衰减的。若记 $\tau = RC$, u_C 可进一步表示为

$$u_C = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (9-9)$$

当 R 的单位为欧姆, C 的单位为法拉时, τ 的单位为秒, 称 τ 为电路的时间常数。表 9-1 列出了电容电压在 $t=0$, $t=\tau$, $t=2\tau$, ... 时刻的值。

表 9-1

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	...	∞
$u_C(t)$	U_0	$0.368 U_0$	$0.135 U_0$	$0.05 U_0$	$0.018 U_0$	$0.0067 U_0$...	0

在理论上要经过无限长时间 u_C 才能衰减到零值, 但换路后经过 $3\tau \sim 5\tau$ 时间, 响应已衰减到初始值的 5%~0.67%, 一般在工程上即认为过渡过程结束。

从表 9-1 可见, 时间常数 τ 就是响应从初始值衰减到初值的 36.8% 所需的时间。事实上, 在过渡过程中从任意时刻开始算起, 经过一个时间常数 τ 后响应都会衰减 63.2%。例如在 $t = t_0$ 时, 响应为

$$u_C(t_0) = U_0 e^{-\frac{t_0}{\tau}}$$

经过一个时间常数 τ ，即在 $t = t_0 + \tau$ 时，响应变化为

$$u_C(t_0 + \tau) = U_0 e^{-\frac{t_0 + \tau}{\tau}} = e^{-1} \cdot U_0 e^{-\frac{t_0}{\tau}} = 0.368 u_C(t_0)$$

即经过一个时间常数 τ 后，响应衰减了 63.2%，也即衰减到原值的 36.8%。可以证明，响应曲线上任一点的次切距都等于时间常数 τ ，如图 9.6(a) 所示。工程上可用示波器观测 u_C 等曲线，并利用作图法测出时间常数 τ 。

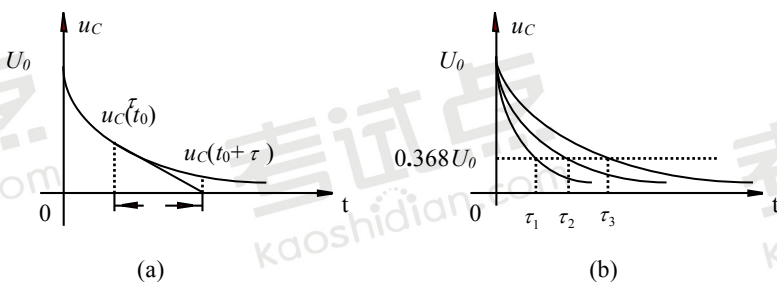


图 9.6 时间常数的物理意义

时间常数 τ 的大小决定了一阶电路过渡过程的进展速度，而 $p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$ 正是电路特征方程的特征根，它仅取决于电路的结构和电路参数，而与电路的初始值无关。因此说电路响应的性状是电路所固有的，所以又称零输入响应为电路的固有响应。

τ 越小，响应衰减的越快，过渡过程的时间越短。由 $\tau = RC$ 知， R 、 C 值越小， τ 越小。这在物理概念上是很容易理解的。当 U_0 一定时， C 越小，电容储存的初始能量就越少，同样条件下放电的时间也就越短； R 越小，放电电流越大，同样条件下能量消耗的越快。所以改变电路参数 R 或 C 即可控制过渡过程的快慢。图 9.6(b) 给出了不同 τ 值下的电容电压随时间的变化曲线。

在放电过程中，电容不断放出能量，电阻则不断地消耗能量，最后储存在电容中的电场能量全部被电阻吸收转换成热能，即

$$W_R = \int_0^{\infty} i^2(t) R dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right)^2 R dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{1}{2} C U_0^2 = W_C$$

例 6-3 一组 $80\mu\text{F}$ 的电容器从 3.5KV 的高压电网上切除，等效电路如图 9.7 所示。切除后，电容器经自身漏电阻 R_C 放电，现测得 $R_C = 40\text{M}\Omega$ ，试求电容器电压下降到 1KV 所需的时间。

解 设 $t = 0$ 时电容器从电网上切除，故有

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 3500\text{V}$$

$t \geq 0$ 时电容电压的表达式为

$$u_C = u_C(0_+) e^{-\frac{t}{R_C C}} = 3500 e^{-\frac{t}{R_C C}}$$

设 $t = t_1$ 时电容电压下降到 1000V ，则有

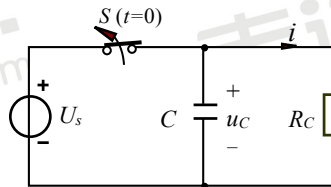


图 9.7 例 9-3 图

$$1000 = 3500e^{-\frac{t_1}{40 \times 10^6 \times 80 \times 10^{-6}}} = 3500e^{-\frac{t_1}{3200}}$$

解之得

$$t_1 = -3200 \ln \frac{1}{3.5} \approx 4008s \approx 1.12h$$

由上面的计算结果可知，电容器与电网断开 1.12 小时后还保持高达 1000V 的电压！因此在检修具有大电容的电力设备之前，必须采取措施使设备充分地放电，以保证工作人员的人身安全。

6.3.2 RL 电路的零输入响应

图 9.8 所示电路中，电源为直流电压源，设开关动作前电路处于稳态，则电感中电流 $I_0 = \frac{U_S}{R_S} = i(0_-)$ 。在 $t=0$ 时刻将开关打开，电感线圈将通过电阻 R 释放磁场能量。由 KVL，有

$$u_L + u_R = 0$$

将 $u_R = Ri$ 及 $u_L = L \frac{di}{dt}$ 代入上式，有

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad (9-10)$$

上式为一阶齐次微分方程，其相应的特征方程为

$$Lp + R = 0$$

特征根为

$$p = -\frac{R}{L}$$

故微分方程(9-10)式的通解为

$$i = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

因为换路瞬间电感电压为有限值，所以 $i(0_+) = i(0_-) = I_0$ ，以此代入上式可得

$$A = i(0_+) = I_0$$

因此得到 $t \geq 0$ 时电感电流为

$$i = i(0_+)e^{-\frac{R}{L}t} = I_0e^{-\frac{R}{L}t} \quad (9-11)$$

令 $\tau = \frac{L}{R}$ ，则电路的响应分别为

$$i = I_0e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_R = Ri = RI_0e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -RI_0e^{-\frac{t}{\tau}}$$

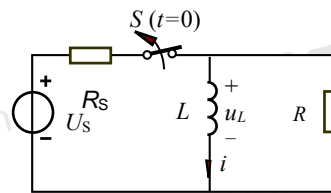


图 9.8 RL 电路的零输入响应

图 9.9 分别为 i 、 u_L 、 u_R 随时间变化的曲线。式中 $\tau = \frac{L}{R}$ ，当 R 的单位为欧姆， L 的单位为亨利时， τ 的单位为秒，称 τ 为 RL 电路的时间常数，它具有如同 RC 电路中 $\tau = RC$ 一样的物理意义。在整个过渡过程中，储存在电感中的磁场能量 $W_L = \frac{1}{2} LI_0^2$ 全部被电阻吸收转换成热能。

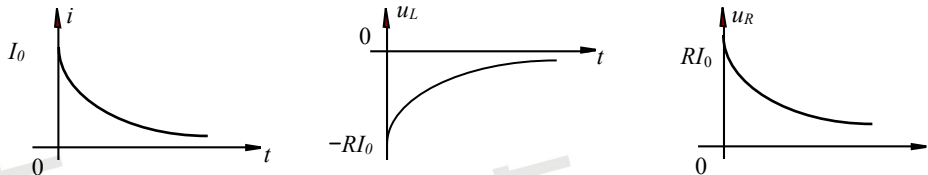


图 9.9 i 、 u_L 、 u_R 随时间变化的曲线

将 RC 电路和 RL 电路的零输入响应式(9-8)与式(9-11)进行对照，可以看到他们之间存在的对应关系。若令 $f(t)$ 表示零输入响应 u_C 或 i_L ， $f(0_+)$ 表示变量的初始值 $u_C(0_+)$ 或 $i_L(0_+)$ ， τ 为时间常数 RC 或 L/R ，则有零输入响应的通解表达式

$$f(t) = f(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0 \quad (9-12)$$

可见，一阶电路的零输入响应是与初始值成线性关系的。此外，公式(9-12)不仅适用于本节所示电路 u_C 、 i_L 的零输入响应的计算，而且适用于任何一阶电路任意变量的零输入响应的计算。

例 9-4 图 9.10 所示电路中 $U_s = 30 \text{ V}$ ， $R = 4 \Omega$ ，电压表内阻 $R_V = 5 \text{ K} \Omega$ ， $L = 0.4 \text{ H}$ 。求 $t > 0$ 时的电感电流 i_L 及电压表两端的电压 u_V 。

解 开关打开前电路为直流稳态，忽略电压表中的分流有

$$i_L(0_-) = \frac{U_s}{R} = 7.5 \text{ A}$$

换路后电感通过电阻 R 及电压表释放能量，有

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 7.5 \text{ A}$$

$$\tau = \frac{L}{R + R_V} \approx 8 \times 10^{-5} \text{ s}$$

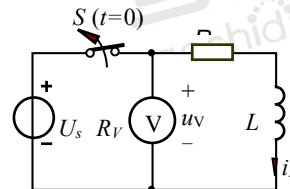


图 9.10 例 9-4 图

由公式(9-12)，可写出 $t > 0$ 时的电感电流 i_L 及电压表两端的电压 u_V 分别为

$$i_L = i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 7.5e^{-1.25 \times 10^4 t} \text{ A}$$

$$u_V = -R_V i_L = -3.75 \times 10^4 e^{-1.25 \times 10^4 t} \text{ V}$$

由上式可得

$$|u_V(0_+)| = 3.75 \times 10^4 \text{ V}$$

可见，换路瞬间电压表和负载要承受很高的电压，有可能会损坏电压表。此外，在打开开关的瞬间，这样高的电压会在开关两端造成空气击穿，引起强烈的电弧。因此，在切断大电感负载时必须采取必要的措施，避免高电压的出现。

6.4 一阶电路的零状态响应

若换路前电路中的储能元件的初始状态为零, 则称电路处于零初始状态, 电路在零初始状态下的响应叫做零状态响应。此时储能元件的初始储能为零, 响应单纯由外加电源激励, 因此该过渡过程即为能量的建立过程。

6.4.1 RC 电路在直流电源激励下的零状态响应

图 9.11 所示的电路中, 开关动作前电路处于稳态, 换路后 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$, 为零初始状态。根据 KVL 及元件 VCR 可得

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s \quad (9-13)$$

此式为一阶非齐次微分方程, 其一般解由非齐次微分方程的特解 u_{Cp} 和相应的齐次微分方程的通解 u_{Ch} 构成。

由上一节的分析已知

$$u_{Ch} = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

是一个随时间衰减的指数函数, 其变化规律与激励无关, 当 $t \rightarrow \infty$ 时 $u_{Ch} \rightarrow 0$, 因此又称之为响应的瞬态分量。

特解 u_{Cp} 是电源强制建立起来的, 当 $t \rightarrow \infty$ 时过渡过程结束, 电路达到新的稳态, 因此 u_{Cp} 就是换路后电路新的稳定状态的解, 所以又称之为响应的稳态分量。稳态分量与输入函数密切相关, 二者具有相同的变化规律。对于图示直流激励的电路则有

$$u_{Cp} = U_s$$

因此

$$u_C = u_{Cp} + u_{Ch} = U_s + Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

代入初始值 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$, 有

$$A = -U_s$$

故电路的零状态响应为

$$u_C = U_s - U_s e^{-\frac{t}{RC}} = U_s (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

记 $\tau = RC$, 则

$$u_C = U_s (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (9-14)$$

电路电流为

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

电容电压与电流的波形如图 9.12 所示。

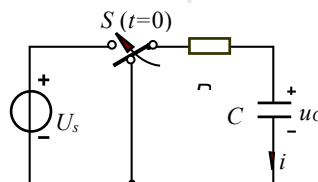


图 9.11 RC 电路的零状态响应

电容电压 u_C 由零逐渐充电至 U_s ，而充电电流在换路瞬间由零跃变到 $\frac{U_s}{R}$ ， $t > 0$ 后再逐渐衰减到零。在此过程中，电容不断充电，最终储存的电场能为

$$W_C = \frac{1}{2} C U_s^2$$

而电阻则不断地消耗能量，

$$W_R = \int_0^\infty i^2(t) R dt = \int_0^\infty \left(\frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right)^2 R dt = \frac{U_s^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{1}{2} C U_s^2 = W_C$$

可见，不论电容 C 和电阻 R 的数值为多少，充电过程中电源提供的能量只有一半转变为电场能量储存在电容中，故其充电效率只有 50%。

由上一节的讨论我们可以相应地推出 RL 电路在直流电源激励下的零状态响应，这里不再赘述。

分析式(9-14)可见， U_s 是电容充电结束后的电压值，即 $u_C(\infty) = U_s$ ，仿照公式(9-12)，可以写出一阶电路的零状态响应为

$$f(t) = f(\infty) [1 - e^{-\frac{t}{\tau}}], \quad t > 0 \quad (9-15)$$

式中 $f(\infty)$ 为响应 $f(t)$ 的稳态值，显然，一阶电路的零状态响应与激励成线性关系。同样，公式(9-15)适用于任意变量的一阶零状态响应的计算。

6.4.2 RL 电路在正弦电源激励下电路的零状态响应

图 9.13 所示电路中，外施激励为正弦电压 $u_s = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \phi_u)$ ，其中 ϕ_u 为接通电路时电源电压的初相角，它决定于电路的接通时刻，所以又称为接入相位角或合闸角。接通后电路的方程为

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \phi_u) \quad (9-16)$$

与前面类似的分析可知，该方程的解为特解与相应齐次微分方程的通解之和，即

$$i_L = i_{Lp} + i_{Lh}$$

其中

$$i_{Lh} = A e^{-\frac{R}{L}t}$$

为相应的齐次微分方程的通解， i_{Lp} 为非齐次微分方程的特解，是电路在换路后达到稳态时的稳态解。由正弦稳态电路的相量法可求得 $t \rightarrow \infty$ 时电感电流的相量解为

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{R + j\omega L} = \frac{U \angle \phi_u}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \angle \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}} \stackrel{\text{def}}{=} I \angle \phi_u - \theta$$

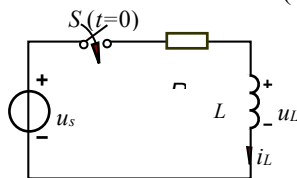


图 9.13 正弦激励下的 RL 电路

式中 $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$, $\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$, 因此得到稳态后电感电流的时域表达式即 i_{Lp} 为

$$i = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \phi_u - \theta) = i_{Lp}$$

于是微分方程(9-16)的解为

$$i_L = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \phi_u - \theta) + A e^{-\frac{R}{L}t}$$

代入初始值 $i(0_+) = i(0_-) = 0$, 求得待定系数为

$$A = -\sqrt{2} I \cos(\phi_u - \theta)$$

从而得 $t > 0$ 时的电感电流为

$$i_L = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \phi_u - \theta) - \sqrt{2} I \cos(\phi_u - \theta) e^{-\frac{R}{L}t} \quad (9-17)$$

由 $u_L = L \frac{di}{dt}$ 可进一步求得电感上的电压 (略)。

从电流表达式(9-17)可看出, 外施激励为正弦电压时瞬态分量不仅与电路参数 R 、 L 有关, 而且与电源电压的初相角有关。当开关闭合时, 若有 $\phi_u = \theta \pm \frac{\pi}{2}$, 则

$$A = -\sqrt{2} I \cos(\phi_u - \theta) = 0$$

$$i_L = \sqrt{2} I \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} I \sin \omega t$$

即瞬态分量为零, 此时电路中将不发生过渡过程而直接进入稳定状态。

若开关闭合时 $\phi_u = \theta$, 则

$$A = -\sqrt{2} I \cos(\phi_u - \theta) = -\sqrt{2} I$$

所以

$$i_L = \sqrt{2} I \cos \omega t - \sqrt{2} I e^{-\frac{R}{L}t}$$

此时如果电路的时间常数比电源电压的周期大的多, 即 $\tau \gg T$, 则电流的瞬态分量将衰减的很慢, 如图 9.14 所示。这种情况下, 在换路约半个周期时电流将达到最大值, 其绝对值接近稳态电流幅值的两倍, 这种现象称为过电流现象。在工程实际中, 电路状态发生变化时, 电路设备可能会因为过电流而损坏, 这在电路设计时必须加以注意。

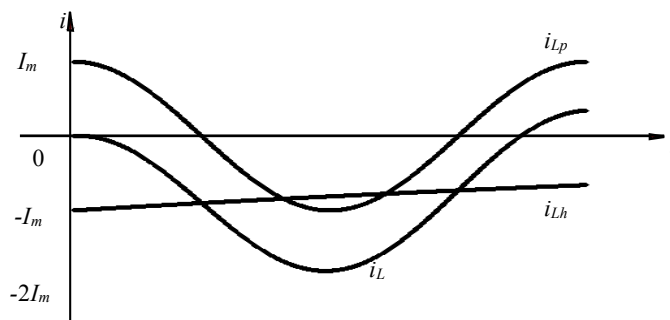


图 9.14 RL 串联电路在正弦电源激励下的零状态响应

6.

非零初始状态的一阶电路在电源激励下的响应叫作全响应。全响应时电路中储能元件的初始储能不为零，响应由外加电源和初始条件共同作用而产生。显然，零输入响应和零状态响应都是全响应的特例。

现以 RC 串联电路接通直流电源的电路响应为例来介绍全响应的分析方法。图 9.15 所示电路中，开关动作前电容已充电至 U_0 ，即 $u_C(0_-) = U_0$ ，开关闭合后，根据 KVL 及元件 VCR 可得

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s \quad (9-18)$$

此方程与上一节讨论的方程形式相同，唯一不同的只是电容的初始值不一样，因而只是确定方程解的积分常数的初始条件改变而已。

由上一节的分析已知

$$u_C = u_{Cp} + u_{Ch} = U_s + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中 $\tau = RC$ 为电路的时间常数。

代入初始值 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$ ，有

$$A = U_0 - U_s$$

故电容电压为

$$u_C = U_s + (U_0 - U_s) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (9-19)$$

分析上式可见，响应的第一项是由外加电源强制建立起来的，我们称之为响应的强制分量，第二项是由电路本身的结构和参数决定的，称之为响应的固有分量，所以全响应可表示为

$$\text{全响应} = (\text{强制分量}) + (\text{固有分量})$$

一般情况下电路的时间常数都是正的，因此固有分量将随着时间的推移而最终消失，电路达到新的稳态，此时又称固有分量为瞬态分量（或自由分量），强制分量为稳态分量，所以全响应又可表示为

$$\text{全响应} = (\text{稳态分量}) + (\text{瞬态分量})$$

如果把求得的电容电压改写成

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U_s (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

则可以发现，上式第一项正是由初始值单独激励下的零输入响应，而第二项则是外加电源单独激励时的零状态响应，这正是线性电路叠加性质的体现。所以全响应又可表示为

$$\text{全响应} = (\text{零输入响应}) + (\text{零状态响应})$$

上面第一、二种分解方式说明了电路过渡过程的物理实质，第三种分解方式则说明了初始状态和激励与响应之间的因果关系，只是不同的分解方法而已，电路的实际响应仍是全响应，是由初始值、特解和时间常数三个要

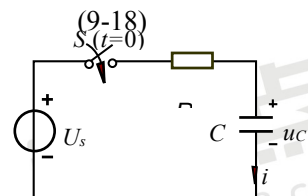


图 9.15 一阶电路的全响应

素决定的。

在直流电源激励下，设响应的初始值为 $f(0_+)$ ，特解为稳态解 $f(\infty)$ ，时间常数为 τ ，则全响应 $f(t)$ 可写为

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (9-20)$$

只要求出 $f(0_+)$ 、 $f(\infty)$ 和 τ 这三个要素，就可根据(9-20)式直接写出直流电源激励下一阶电路的全响应以及零输入响应和零状态响应，这种方法称为三要素法。显然，公式(9-12)和(9-15)都是公式(9-20)的特例。

既然全响应是由激励和初始值共同作用而产生，因此其响应的性态与激励和初始值的关系就不再具有简单的线性关系，这一点与零输入响应和零状态响应不同。

在正弦电源激励下， $f(0_+)$ 与 τ 的含义同上，只有特解不同。正弦电源激励时特解 $f_p(t)$ 是时间的正弦函数，则全响应 $f(t)$ 可写为

$$f(t) = f_p(t) + [f(0_+) - f_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (9-21)$$

其中 $f_p(0_+) = f_p(t)|_{t=0_+}$ 是稳态响应的初始值。

一阶电路在其它函数形式的电源 $g(t)$ 激励下的响应可由类似的方法求出。特解 $f_p(t)$ 与激励具有相似的函数形式，如表 9-2 所示。

表 9-2

$g(t)$ 的形式	Kt	Kt^2	$Ke^{-bt} (b \neq \frac{1}{\tau})$	$Ke^{-bt} (b = \frac{1}{\tau})$
$f_p(t)$ 的形式	$A + Bt$	$A + Bt + Ct^2$	Ae^{-bt}	Ate^{-bt}

需要指出，对某一具体电路而言，所有响应的时间常数都是相同的。当电路变量的初始值、特解和时间常数都比较容易确定时，可直接应用三要素法求过渡过程的响应。而电容电压 u_C 和电感 i_L 电流的初始值较其它非独立初始值容易确定，因此也可应用戴维宁定理或诺顿定理把储能元件以外的一端网络进行等效变换，利用公式(9-20)求解 u_C 和 i_L ，再由等效变换的原电路求解其它电压和电流的响应。实际应用时，要视电路的具体情况选择不同的方法。

例 9-5 图 9.16(a)所示电路中，已知 $i_s = 10A$ ， $R = 2\Omega$ ， $C = 0.5 \mu F$ ， $g_m = 0.125 A/V$ ， $u_C(0_-) = 2V$ ，若 $t = 0$ 时开关闭合，求 u_C 、 i_C 和 i_1 。

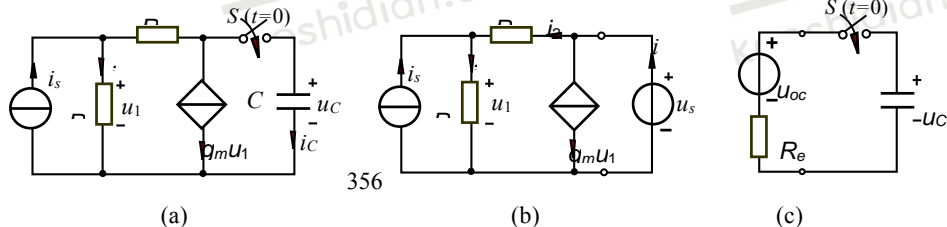


图 9.16 例 9-5 图

解 先将电容以外的电路化简。把电容去掉，在端口加电压源 u_s ，如图 9.16(b)所示，

根据 KCL 得

$$\begin{cases} i_2 = i - g_m u_1 \\ i_1 = i_s + i_2 \end{cases}$$

于是

$$i_1 = i_s + i - g_m u_1$$

由 KVL 得

$$\begin{cases} u_s = R i_2 + u_1 \\ u_1 = R i_1 \end{cases}$$

解之，有

$$u_1 = \frac{R i_s + R i}{1 + R g_m}$$

所以

$$u_s = \frac{1 - R g_m}{1 + R g_m} R i_s + \frac{2R}{1 + R g_m} i = 12 + 3.2 i$$

根据戴维宁定理可知其等效电压源电压及等效电阻分别为

$$u_{oc} = 12 \text{ V}, R_{eq} = 3.2 \Omega$$

等效电路如图 9.16(c)所示，由此等效电路可求得电容电压的稳态值为 $u_C(\infty) = 12 \text{ V}$ ，电路的时间常数 $\tau = R_{eq} C = 3.2 \times 0.5 \times 10^{-6} = 1.6 \times 10^{-6}$ ，已知初始值 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2 \text{ V}$ ，按照三要素法可得电容电压为

$$u_C = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} = 12 - 10 e^{-6.25 \times 10^5 t} \text{ V}$$

再由 $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ ，求得电容电流为

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = 3.125 e^{-6.25 \times 10^5 t} \text{ A}$$

由图 9.16(a)知 $i = -i_C$ ，所以

$$u_1 = \frac{R i_s - R i_C}{1 + R g_m}$$

$$i_1 = \frac{u_1}{R} = \frac{i_s - i_C}{1 + R g_m} = \frac{10 - 3.125 e^{-6.25 \times 10^5 t}}{1 + 2 \times 0.125} = 8 - 2.5 e^{-6.25 \times 10^5 t} \text{ A}$$

例 9-6 图 9.17 所示电路原已处于稳态， $t=0$ 时开关闭合。已知 $u_{s2} = 8 \text{ V}$ ， $L=1.2\text{H}$ ， $R_1=R_2=R_3=2\Omega$ ，求电压源 u_{s1} 分别为以下两种激励时的电感电流 i_L 。

- (1) $u_{s1} = 40 \text{ V}$;
 (2) $u_{s1} = 10\sqrt{2} \cos(10t - 30^\circ) \text{ V}$ 。

解 换路前电路为直流稳态电路, 所以

$$i_L(0_-) = \frac{u_{s2}}{R_2 + R_3} = 2 \text{ A}$$

换路后电感电压为有限值, 所以电感电流的初始值为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2 \text{ A}$$

换路后电感两端的等效电阻为

$$R_{eq} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 3\Omega$$

所以时间常数为

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = 0.4 \text{ s}$$

(1) 当 $u_{s1} = 40 \text{ V}$ 时, 电感电流的稳态值可求得为

$$i_L(\infty) = \frac{1}{R_3} \cdot \frac{\frac{u_{s1}}{R_1} + \frac{u_{s2}}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 8 \text{ A}$$

由三要素法可得电感电流为

$$i_L = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 8 - 6e^{-2.5t} \text{ A}$$

(2) $u_{s1} = 10\sqrt{2} \cos(10t - 30^\circ) \text{ V}$ 时, 电感电流的稳态值可由叠加原理求得:

当直流电压源 u_{s2} 单独作用时, 稳态解为

$$i_L^{(1)} = \frac{R_1}{R_1 + R_3} \cdot \frac{u_{s2}}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} = 1.33 \text{ A}$$

当正弦电压源 u_{s1} 单独作用时, 稳态解可用相量法求得为

$$\dot{I}_L^{(2)} = \frac{\dot{U}_{s1}}{R_1 + \frac{R_2(R_3 + j\omega L)}{R_2 + R_3 + j\omega L}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 + j\omega L} \approx 0.4 \angle 106^\circ$$

即

$$i_L^{(2)}(t) = 0.4\sqrt{2} \cos(10t - 106^\circ) \text{ A}$$

两电源共同作用产生的稳态解为

$$i_{Lp}(t) = i_L^{(1)} + i_L^{(2)} = 1.33 + 0.4\sqrt{2} \cos(10t - 106^\circ) \text{ A}$$

$t = 0_+$ 时的初始值

$$i_{Lp}(0_+) = 1.33 + 0.4\sqrt{2} \cos(10t - 106^\circ) \big|_{t=0} = 1.18 \text{ A}$$

由三要素法可得电感电流为

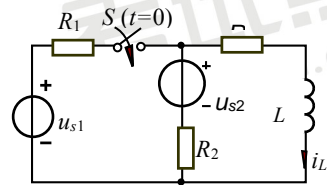


图 9.17 例 9-6 图

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_{Lp}(t) + [i_L(0_+) - i_{Lp}(0_+)] e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 1.33 + 0.4\sqrt{2} \cos(10t - 106^\circ) + 0.82 e^{-2.5t} \text{ A} \end{aligned}$$

6.6 一阶电路的阶跃响应

电路的激励除了直流激励和正弦激励之外,常见的还有另外两种奇异函数,即阶跃函数和冲激函数。本节和下一节将分别讨论这两种函数的定义、性质及作用于动态电路时引起的响应。

单位阶跃函数用 $\varepsilon(t)$ 表示,它定义为

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0_- \\ 1 & t \geq 0_+ \end{cases} \quad (9-22)$$

波形如图 9.18(a) 所示。可见它在 $(0_-, 0_+)$ 时域内发生了跃变。

若单位阶跃函数的阶跃点不在 $t=0$ 处,而在 $t=t_0$ 处,如图 9.18(b) 所示,则称它为延迟的单位阶跃函数,用 $\varepsilon(t-t_0)$ 表示为

$$\varepsilon(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t \leq t_{0-} \\ 1 & t \geq t_{0+} \end{cases} \quad (9-23)$$



图 9.18 单位阶跃函数和延迟单位阶跃函数

阶跃函数可以作为开关的数学模型,所以有时也称为开关函数。如把电路在 $t=t_0$ 时刻与一个电流为 2A 的直流电流源接通,则此外施电流就可写作 $2\varepsilon(t-t_0)$ A。

单位阶跃函数还可用来“起始”任意一个函数 $f(t)$ 。例如对于线性函数 $f(t)=Kt$ (K 为常数), $f(t)$, $f(t)\varepsilon(t)$, $f(t)\varepsilon(t-t_0)$, $f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)$ 则分别具有不同的含义,如图 9.19 所示。

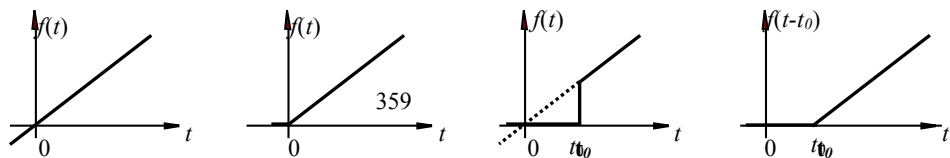


图 9.19 单位阶跃函数的起始作用

电路对于单位阶跃函数激励的零状态响应称为单位阶跃响应, 记为 $s(t)$ 。若已知电路的 $s(t)$, 则该电路在恒定激励 $u_s(t) = U_0 \varepsilon(t)$ [或 $i_s(t) = I_0 \varepsilon(t)$] 下的零状态响应即为 $U_0 s(t)$ [或 $I_0 s(t)$]。

实际应用中常利用阶跃函数和延迟阶跃函数对分段函数进行分解, 再利用齐性定理和叠加原理进行求解。

例 9-7 设 RL 串联电路由图 9.20(a) 所示波形的电压源 $u_s(t)$ 激励, 试求零状态响应 $i(t)$ 。

解 根据阶跃函数的定义, 我们把输入电压表示成如下形式,

$$u_s(t) = U_1 \varepsilon(t - t_0) + (U_2 - U_1) \varepsilon(t - t_1) - U_2 \varepsilon(t - t_2)$$

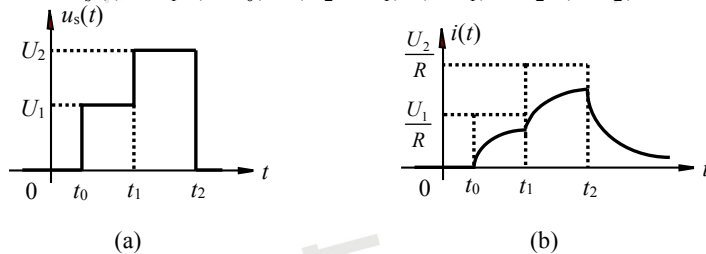


图 9.20 例 9-7 图

电路的时间常数 $\tau = \frac{L}{R}$, $U_1 \varepsilon(t - t_0)$ 单独作用于电路时产生的零状态响应 $i^{(1)}$ 为

$$i^{(1)} = \frac{U_1}{R} (1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}) \varepsilon(t - t_0)$$

$(U_2 - U_1) \varepsilon(t - t_1)$ 单独作用于电路产生的零状态响应 $i^{(2)}$ 为

$$i^{(2)} = \frac{U_2 - U_1}{R} (1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}) \varepsilon(t - t_1)$$

$-U_2 \varepsilon(t - t_2)$ 单独作用于电路产生的零状态响应 $i^{(3)}$ 为

$$i^{(3)} = -\frac{U_2}{R} (1 - e^{-\frac{t-t_2}{\tau}}) \varepsilon(t - t_2)$$

由叠加原理即可得到所要求的响应为

$$i = i^{(1)} + i^{(2)} + i^{(3)} = \frac{U_1}{R} (1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}) \varepsilon(t - t_0)$$

$$+ \frac{U_2 - U_1}{R} (1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}) \varepsilon(t-t_1) - \frac{U_2}{R} (1 - e^{-\frac{t-t_2}{\tau}}) \varepsilon(t-t_2)$$

波形如图 9.20 (b) 所示。

6.7 一阶电路的冲激响应

6.7.1 冲激函数的定义及性质

单位冲激函数用 $\delta(t)$ 表示，它定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0_- \\ \infty & t \geq 0_+ \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (9-24)$$

单位冲激函数可以看作是单位脉冲函数的极限情况。图 9.21 (a) 为一个单位矩形脉冲函数 $p(t)$ 的波形。它的高为 $1/\Delta$ ，宽为 Δ ，当脉冲宽度 $\Delta \rightarrow 0$ 时，可以得到一个宽度趋于零，幅度趋于无限大，而面积始终保持为 1 的脉冲，这就是单位冲激函数 $\delta(t)$ ，记作

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} p(t)$$

单位冲激函数的波形如图 9.21 (b) 所示，箭头旁注明“1”。图 9.21 (c) 表示强度为 K 的冲激函数。类似的，可以把发生在 $t = t_0$ 时刻的单位冲激函数写为 $\delta(t - t_0)$ ，用 $K\delta(t - t_0)$ 表示强度为 K，发生在 $t = t_0$ 时刻的冲激函数。

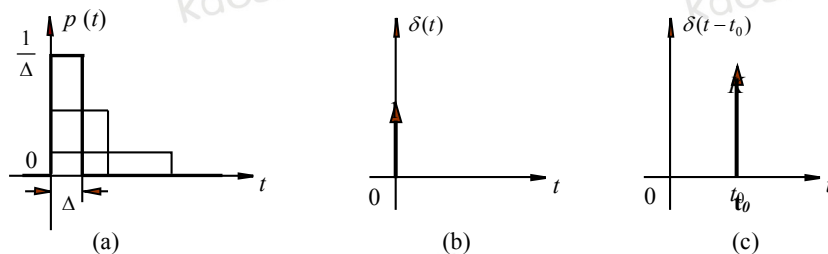


图 9.21 冲激函数

冲激函数具有如下性质：

- (1) 单位冲激函数 $\delta(t)$ 对时间的积分等于单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ ，即

$$\int_{-\infty}^t \delta(\xi) d\xi = \varepsilon(t) \quad (9-25)$$

反之，阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 对时间的一阶导数等于冲激函数 $\delta(t)$ ，即

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \delta(t) \quad (9-26)$$

(2) 单位冲激函数具有“筛分性质”

对于任意一个在 $t=0$ 和 $t=t_0$ 时连续的函数 $f(t)$ ，都有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \quad (9-27)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \quad (9-28)$$

可见冲激函数有把一个函数在某一时刻“筛”出来的本领，所以称单位冲激函数具有“筛分性质”。

6.7.2 冲激响应

当把一个单位冲激电流 $\delta_i(t)$ （单位为安培）加到初始电压为零的电容 C 上时，电容电压 u_C 为

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} \delta_i(t)dt = \frac{1}{C}$$

可见

$$q(0_-) = Cu_C(0_-) = 0$$

$$q(0_+) = Cu_C(0_+) = 1$$

即单位冲激电流在 0_- 到 0_+ 的瞬时把 1 库仑的电荷转移到电容上，使得电容电压从零跃变

为 $\frac{1}{C}$ ，即电容由原来的零初始状态 $u_C(0_-) = 0$ 转变到非零初始状态 $u_C(0_+) = \frac{1}{C}$ 。

同理，当把一个单位冲激电压 $\delta_u(t)$ （单位为伏特）加到初始电流为零的电感 L 上时，电感电流为

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} \delta_u(t)dt = \frac{1}{L}$$

有

$$\psi(0_-) = Li_L(0_-) = 0$$

$$\psi(0_+) = Li_L(0_+) = 1$$

即单位冲激电压在 0_- 到 0_+ 的瞬时在电感中建立了 $\frac{1}{L}$ 安培的电流，使电感由原来的零初始状态 $i_L(0_-) = 0$ 转变到非零初始状态 $i_L(0_+) = \frac{1}{L}$ 。

$t > 0_+$ 后，冲激函数为零，但 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 不为零，所以电路的响应相当于换路瞬间由冲激函数建立起来的非零初始状态引起的零输入响应。因此，一阶电路冲激响应的求解关键在于计算在冲激函数作用下的储能元件的初始值 $u_C(0_+)$ 或 $i_L(0_+)$ 。

电路对于单位冲激函数激励的零状态响应称为单位冲激响应，记为 $h(t)$ 。下面就以图 9.22 所示电路为例讨论其响应。

根据 KCL 有

$$C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R} = \delta_i(t)$$

而 $u_C(0_-) = 0$ 。

为了求 $u_C(0_+)$ 的值，我们对上式两边从 0_- 到 0_+ 求积分，得

$$\int_{0_-}^{0_+} C \frac{du_C}{dt} dt + \int_{0_-}^{0_+} \frac{u_C}{R} dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt$$

若 u_C 为冲激函数，则 du_C/dt 将为冲激函数的一阶导数，这样 KCL 方程式将不能成立，因此 u_C 只能是有限值，于是第二积分项为零，从而可得

$$C[u_C(0_+) - u_C(0_-)] = 1$$

故

$$u_C(0_+) = \frac{1}{C} + u_C(0_-) = \frac{1}{C}$$

于是便可得到 $t > 0_+$ 时电路的单位冲激响应

$$u_C = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}$$

式中 $\tau = RC$ ，为给定电路的时间常数。

利用阶跃函数将该冲激响应写作

$$u_C = \frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

由此可进一步求出电容电流

$$\begin{aligned} i_C &= C \frac{du_C}{dt} = e^{-\frac{t}{RC}}\delta(t) - \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) \\ &= \delta(t) - \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) \end{aligned}$$

图 9.23 画出了 u_C 和 i_C 的变化曲线。其中电容电流在 $t=0$ 时有一冲激电流，正是该电流使电容电压在此瞬间由零跃变到 $1/C$ 。



图 9.23 u_C 和 i_C 的变化曲线

由于阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 和冲激函数 $\delta(t)$ 之间具有微分和积分的关系，可

以证明, 线性电路中单位阶跃响应 $s(t)$ 和单位冲激响应 $h(t)$ 之间也具有相似的关系:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} \quad (9-29)$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\xi) d\xi \quad (9-30)$$

有了以上关系, 就可以先求出电路的单位阶跃响应, 然后将其对时间求导, 便可得到所求的单位冲激响应。事实上, 阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 和冲激函数 $\delta(t)$ 之间具有的这种微分和积分的关系可以推广到线性电路中任一激励与响应中, 即, 当已知某一激励函数 $f(t)$ 的零状态响应 $r(t)$ 时, 若激励变为 $f(t)$ 的微分 (或积分) 函数时, 其响应也将是 $r(t)$ 的微分 (或积分) 函数。

例 6-8 求图 9.24 所示电路的冲激响应 i_L 。

解: 方法一

$t < 0$ 时, 由于 $\delta(t) = 0$, 故 $i_L(0_-) = 0$ 。

$t = 0$ 时, 由 KVL 有

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = \delta(t)$$

对上式两边从 0_- 到 0_+ 求积分, 得

$$\int_{0_-}^{0_+} L \frac{di_L}{dt} dt + \int_{0_-}^{0_+} Ri_L dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt$$

由于 i_L 为有限值, 有

$$L[i_L(0_+) - i_L(0_-)] = 1$$

故

$$i_L(0_+) = \frac{1}{L} + i_L(0_-) = \frac{1}{L}$$

所求响应为

$$i_L = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t)$$

方法二

先求 i_L 的单位阶跃响应, 再利用阶跃响应与冲激响应之间的微分关系求解。当激励为单位阶跃函数时, 因为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

$$i_L(\infty) = \frac{1}{R}$$

故 i_L 的单位阶跃响应为

$$s(t) = \frac{1}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \varepsilon(t)$$

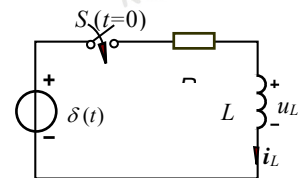


图 9.24 例 9-8 图

再由 $h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$ 便可求得单位冲激响应 i_L

$$\begin{aligned} i_L &= \frac{ds(t)}{dt} = \frac{1}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \delta(t) + \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t) \\ &= \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t) \end{aligned}$$

由以上分析可见, 电路的输入为冲激函数时, 电容电压和电感电流会发生跃变。此外, 前面讲过, 当换路后出现 C-E 回路或 L-J 割集时, 电路状态也可能发生跃变, 这种情况下, 一般可先利用 KCL、KVL 及电荷守恒或磁链守恒求出电容电压或电感电流的跃变值, 然后再进一步分析电路的动态过程。

例 6-9 已知 $U_s = 24\text{V}$, $R = 2\Omega$, $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $L_1 = 0.5\text{H}$, $L_2 = 2\text{H}$, $t = 0$ 时打开开关, 电路如图 9.25(a) 所示。求 $t > 0$ 时的 i_1 、 i_2 、 u_1 并画出波形。

解 换路前, 电感电流分别为

$$i_1(0_-) = \frac{U_s}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{24}{2 + 2} \times \frac{2}{3} = 4$$

A

$$i_2(0_-) = \frac{U_s}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{24}{2 + 2} \times \frac{1}{3} = 2 \text{ A}$$

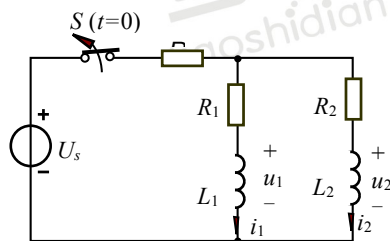


图 9.25(a) 例 9-9 图

换路后, 由 KCL 有

$$i_1(0_+) + i_2(0_+) = 0 \quad (1)$$

因为 $i_1(0_-) \neq i_2(0_-) \neq 0$, 可见在 $t = 0$ 时两电感电流均发生了跃变, 由磁链守恒原理可以得到换路前后两个电感构成的回路中的磁链平衡方程式为

$$L_1 i_1(0_-) - L_2 i_2(0_-) = L_1 i_1(0_+) - L_2 i_2(0_+) \quad (2)$$

联立方程 (1)、(2) 并代入数据, 可解得

$$i_1(0_+) = -0.8 \text{ A} \quad i_2(0_+) = 0.8 \text{ A}$$

换路后电路的时间常数为

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} = \frac{L_1 + L_2}{R_1 + R_2} = \frac{5}{18} \text{ s}$$

故电感电流分别为

$$i_1 = i_1(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} = -0.8 e^{-3.6t} \text{ A}, \quad t > 0$$

$$i_2 = i_2(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.8 e^{-3.6t} \text{ A}, \quad t > 0$$

写成整个时间轴上的表达式则分别为

$$\begin{aligned} i_1 &= 4 + [-4 - 0.8e^{-3.6t}] \varepsilon(t) \text{ A} \\ i_2 &= 2 + [-2 + 0.8e^{-3.6t}] \varepsilon(t) \text{ A} \end{aligned}$$

电感 L_1 上的电压为

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} = 0.5 \{ [-4 - 0.8e^{-9t}] \delta(t) + [(-0.8)(-3.6)e^{-3.6t}] \varepsilon(t) \} \\ &= 0.5 \{ -4.8\delta(t) + 2.88e^{-3.6t} \varepsilon(t) \} \\ &= -2.4\delta(t) + 1.44e^{-3.6t} \varepsilon(t) \text{ V} \end{aligned}$$

i_1 、 i_2 、 u_1 随时间变化的波形如图 9.25(b) 所示。从图中可以清楚地看出各电路变量在换路前、后及换路时刻的变化。

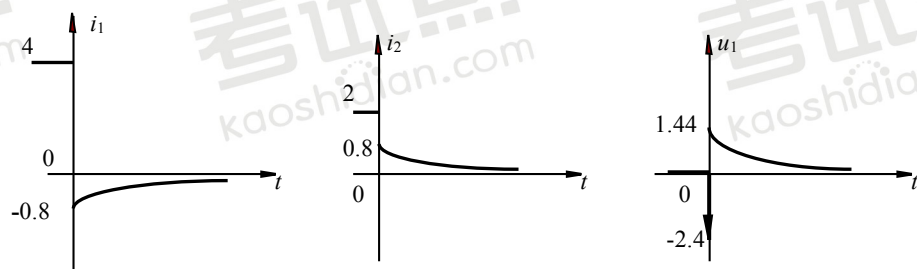


图 9.25(b) i_1 、 i_2 、 u_1 随时间变化的波形

6.8 二阶电路的动态过程

用二阶微分方程描述的电路称为二阶电路。与一阶电路类似，二阶电路的全响应也可以分解为零输入响应和零状态响应的叠加，其中零输入响应只含固有响应项，其函数形式取决于电路的结构与参数，即二阶微分方程的特征根。对不同的电路，特征根可能是实数、虚数或共轭复数，因此电路的动态过程将呈现不同的变化规律。

下面以 RLC 串联电路的零输入响应为例加以讨论。

图 9.26 所示电路中电容原已充电至 $u_C(0_-) = U_0$ ，开关在 $t = 0$ 时闭合(为简单起见，设电感电流的初始值为零)。

根据 KVL 及元件的 VCR 列出电路方程为

$$u_L + u_R - u_C = L \frac{di}{dt} + Ri - u_C = 0$$

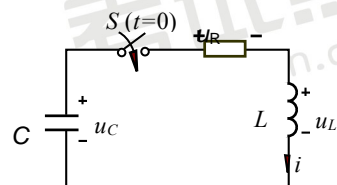


图 9.26 RLC 串联电路

将 $i = -C \frac{du_C}{dt}$ 代入式中求得 u_C 满足的微分方程为

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0 \quad (9-31)$$

上述微分方程的两个初始值可求得为

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$$

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = -\frac{1}{C} i(0_+) = -\frac{1}{C} i(0_-) = 0$$

此齐次微分方程的特征方程及特征根为

$$p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = 0$$

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

齐次微分方程的通解

$$u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad (9-32)$$

特征根 p_1 和 p_2 是由电路参数决定的, 可能出现下列三种情况:

- a) 两个不相等的负实数
- b) 一对实部为负的共轭复数
- c) 一对相等的负实数

下面分别加以讨论。

1. 特征根为不相等的负实数, 电路为非振荡放电过程

当 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, p_1 和 p_2 是两个不相等的负实数, 此时电容电压以指数规律衰减, 响应式(9-32)中待定系数 A_1 和 A_2 可由初始条件确定如下:

$$u_C(0_+) = A_1 + A_2 = U_0$$

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = A_1 p_1 + A_2 p_2 = 0$$

得

$$A_1 = \frac{p_2}{p_2 - p_1} U_0$$

$$A_2 = \frac{p_1}{p_2 - p_1} U_0$$

将 A_1 和 A_2 代入式(9-32)求得响应 u_C 为

$$u_C = \frac{U_0}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})$$

继而可求得电流和电感电压

$$i = -C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{L(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{U_0}{p_2 - p_1} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})$$

以上推导中利用了 $p_1 p_2 = \frac{1}{LC}$ 的关系。

图 9.27 画出了 u_C 、 i 、 u_L 随时间变化的曲线。从图中可以看出，在整个过程中电容一直释放所储存的电能，因此称为非振荡放电，又称为过阻尼放电。放电电流从零开始增大，至 $t = t_m$ 时达到最大，然后逐渐减小最后趋于零。

t_m 可由 $\frac{di}{dt} = 0$ 求得为

$$t_m = \frac{\ln(p_2 / p_1)}{p_1 - p_2}$$

$t = t_m$ 正是电感电压过零的时刻。 $t < t_m$ 时，电感吸收能量，建立磁场， $t > t_m$ 时，电感释放能量，磁场逐渐减弱最后趋于消失。

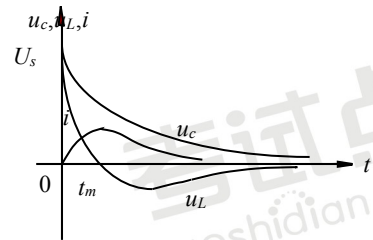


图 9.27 u_C 、 i 、 u_L 的变化曲线

2. 特征根是一对实部为负的共轭复数，电路为振荡放电过程

当 $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时，特征根 p_1 和 p_2 是一对共轭复数。令 $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$ ，其中

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2, \quad \text{由图 9.28 可知 } \omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \beta = \arctan \frac{\omega}{\alpha},$$

$\alpha = \omega_0 \cos \beta$ ， $\omega = \omega_0 \sin \beta$ ，根据欧拉方程 $e^{j\beta} = \cos \beta + j \sin \beta$ 可进一步求得

$$p_1 = -\omega_0 e^{-j\beta}, \quad p_2 = -\omega_0 e^{j\beta}$$

由前面的分析可得

$$\begin{aligned} u_C &= \frac{U_0}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \\ &= \frac{U_0}{-j2\omega} [-\omega_0 e^{j\beta} e^{(-\alpha + j\beta)t} + \omega_0 e^{-j\beta} e^{(-\alpha - j\beta)t}] \\ &= \frac{U_0 \omega_0}{\omega} e^{-\alpha t} \left[\frac{e^{j(\omega t + \beta)} - e^{-j(\omega t + \beta)}}{j2} \right] \\ &= \frac{U_0 \omega_0}{\omega} e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \beta) \end{aligned}$$

继而可求得电流和电感电压

$$i = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{U_0 \omega_0}{\omega} e^{-\alpha t} \sin(\omega t - \beta)$$

可见，在整个过渡过程中 u_C 、 i 、 u_L 周期性地改变方向，呈现衰减振荡的状态，即电容和电感周期性地交换能量，电阻则始终消耗能量，

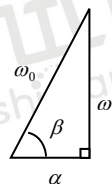


图 9.28

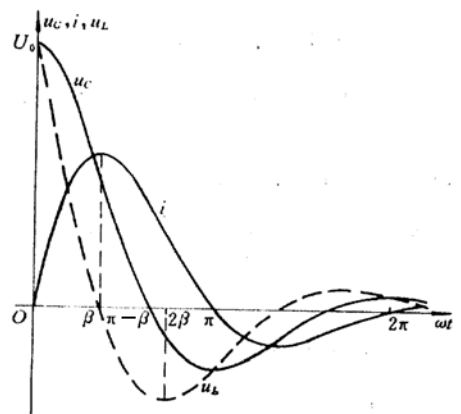


图 9.29 u_C 、 i 、 u_L 的波形

电容上原有的电能最终全部转化为热能消耗掉。 u_C 、 i 、 u_L 的波形如图 9.29 所示, 这种振荡称为衰减振荡或阻尼振荡。其

中 $\alpha = \frac{R}{2L}$ 称为衰减系数,

$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2}$ 为振荡角频率。

表 9-3 列出了换路后第一个 1/2 周期内元件之间能量转换、吸收的情况。

表 9-3

	$0 < \omega t < \beta$	$\beta < \omega t < \pi - \beta$	$\pi - \beta < \omega t < \pi$
电容	释放	释放	吸收
电感	吸收	释放	释放
电阻	消耗	消耗	消耗

特殊地, 当 $R=0$ 时, $\alpha = \frac{R}{2L} = 0$, $\omega = \omega_0$, 在这种情况下, 特征根 p_1 和 p_2 是一对纯虚数, 这时可求得 u_C 、 i 、 u_L 分别为

$$u_C = U_0 \cos \omega_0 t$$

$$i = \frac{U_0}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t = \frac{U_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \sin \omega_0 t$$

$$u_L = U_0 \cos \omega_0 t = u_C$$

由于回路中无电阻, 因此电压与电流均为不衰减的正弦量, 称为无阻尼自由振荡。电容上原有的能量在电容和电感之间相互转换, 而总能量不减少, 即为等幅振荡。

3. 特征根为一对相等的负实数, 电路为临界状态

当 $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 特征方程存在二重根, $p_1 = p_2 = -\frac{R}{2L} \stackrel{\text{def}}{=} -\alpha$, 此时微分方程的通解为

$$u_C = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t}$$

根据初始条件可求得

$$A_1 = U_0$$

$$A_2 = \alpha U_0$$

所以

$$u_C = U_0 (1 + \alpha t) e^{-\alpha t}$$

$$i = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{L} t e^{-\alpha t}$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U_0(1 - \alpha t)e^{-\alpha t}$$

可以看出特征根为一对相等的负实数时动态电路的响应与特征根为一对不相等的负实数时的响应类似, 即 u_C 、 i 、 u_L 具有非振荡的性质, 二者的波形相似。由于这种过渡过程刚好介于振荡与非振荡之间, 因此称之为临界状态。

以上讨论了 RLC 串联电路在 $u_C(0_-) = U_0$, $i_L(0_-) = 0$ 的特定初始条件下的零输入响应, 尽管电路响应的形式与初始条件无关, 但积分常数的确定却与初始条件有关。因此当初始条件改变时积分常数也需相应地改变。此外, 如果要求计算在外加电源作用下的零状态响应或全响应, 则既要计算强制分量, 又要计算自由分量, 其强制分量由外加激励决定, 自由分量与零输入响应的形式一样, 仍取决于电路的结构与参数。二阶电路的阶跃响应和冲激响应也可仿照一阶电路的方法作类似的分析。

例 6-10 在图 9.30 所示电路中, 已知 $U_s = 40 \text{ V}$, $R = R_s = 10 \Omega$, $L = 2 \text{ mH}$, $C = 20 \mu\text{F}$, 换路前电路处于稳态。求换路后的电容电压 u_C 。

解 换路前电路已达稳态, 电容相当于开路, 电感相当于短路, 所以

$$i_L(0_-) = \frac{U_s}{R + R_s} = \frac{40}{10 + 10} = 2 \text{ A}$$

$$u_C(0_-) = R i_L(0_-) = 20 \text{ V}$$

换路后的 RLC 串联电路中

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{10}{2 \times 2 \times 10^{-3}} = 2500$$

$$\omega_0 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{2 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-5}} = 2.5 \times 10^7$$

因为 $\alpha < \omega_0$, 由前面的分析可见换路后电路的二阶微分方程的特征根为一对共轭复数, 所以电路为衰减振荡型, 且

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{2.5 \times 10^7 - 2500^2} = 4330$$

电容电压的通解可以写为

$$u_C = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \theta) = Ae^{-2500t} \sin(4330t + \theta)$$

利用初始条件确定待定系数, 有

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) = 20 \\ \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = -\frac{1}{C} i_L(0_+) = -\frac{1}{C} i_L(0_-) = -10^5 \\ A \sin \theta = 20 \\ -2500A \sin \theta + 4330A \cos \theta = -10^5 \end{cases}$$

解之, 得

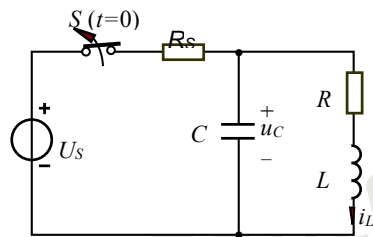


图 9.30 例 9-10 图

$$\begin{cases} A = 22.03 \\ \theta = 65.2^\circ \end{cases}$$

于是所求响应为

$$u_C = 22.03 e^{-2500t} \sin(4330t + 65.2^\circ) \text{ V}$$

例 6-11 图 9.31 所示电路中, $R = 20\Omega$, $L = 0.1 \text{ H}$, $C = 20\mu \text{ F}$ 。分别求电感电流的单位阶跃响应 $s(t)$ 和单位冲激响应 $h(t)$ 。

解 设 $u_s = \varepsilon(t) \text{ V}$, 由 KCL 和 KVL, 有

$$i = i_C + i_L = C \frac{du_C}{dt} + i_L$$

$$u_s = u_C + Ri$$

$$u_C = u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

整理上述方程可求得 i_L 满足的二阶微分方程为

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{RLC} u_s$$

即

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2500 \frac{di_L}{dt} + 5 \times 10^5 i_L = 2.5 \times 10^4$$

上述微分方程为二阶非齐次微分方程, 其一般解为特解 i_{Lp} 与相应的齐次微分方程的通解 i_{Lh} 的叠加,

$$i_L = i_{Lp} + i_{Lh}$$

其中

$$i_{Lp} = 0.05$$

相应的齐次微分方程的特征方程及其根为

$$p^2 + 2500p + 5 \times 10^5 = 0$$

$$p_1 \approx -219, p_2 \approx -2280$$

所以齐次方程的解为

$$i_{Lh} = A_1 e^{-219t} + A_2 e^{-2280t}$$

所求二阶非齐次微分方程的通解为

$$i_L = i_{Lp} + i_{Lh} = 0.05 + A_1 e^{-219t} + A_2 e^{-2280t}$$

零状态电路的初始条件为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{1}{L} u_L(0_+) = \frac{1}{L} u_C(0_+) = 0$$

代入通解表达式中可得

$$i_L(0_+) = 0.05 + A_1 + A_2 = 0$$

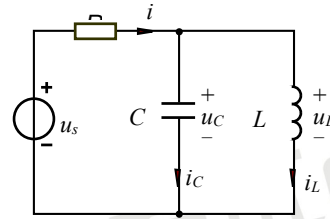


图 9.31 例 9-11 图

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0_+} = -219A_1 - 2280A_2 = 0$$

解得

$$A_1 \approx -0.055$$

$$A_2 \approx 0.005$$

最终求得电路的阶跃响应为

$$s(t) = i_L = (0.05 - 0.055e^{-219t} + 0.005e^{-2280t})\varepsilon(t) \text{ A}$$

单位冲激响应为

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = (12e^{-219t} - 11.4e^{-2280t})\varepsilon(t) \text{ A}$$

6.9 电路暂态过程的状态变量分析

当电路中含有多个动态元件时，电路方程将是高阶微分方程。在电路理论中常引用“状态变量”作为分析电路动态过程的独立变量，将一元高阶微分方程转化为状态变量的多元一阶微分方程组，利用数值计算分析电路的动态过程。

能完整、准确地描述动态电路时域性状的最少变量称为电路的状态变量。独立的电容电压（或电容电荷）和电感电流（或电感磁链）就是电路的状态变量。对状态变量列出的一阶微分方程称为状态方程。如果已知状态变量在换路时的初始值，并且已知换路时的激励，就能唯一地确定换路后电路的全部性状。这种利用状态变量分析动态电路的方法称为状态变量分析法，该方法在近代控制理论中得到了广泛的应用。

下面以图 9.32 所示电路为例来说明状态变量的分析方法。在时域分析中以电容电压 u_C 为变量的电路方程为

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{u_s}{LC}$$

用于确定积分常数的初始条件是 $u_C(0_+)$ 和 $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{0_+}$ 。

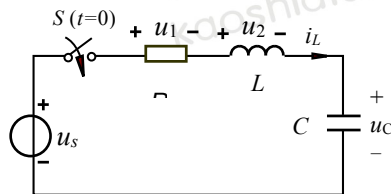


图 9.32 状态变量法分析示例

现在以电容电压 u_C 和电感电流 i_L 作为状态变量重列上述电路的方程，则有

$$C \frac{du_C}{dt} = i_L$$

$$L \frac{di_L}{dt} = u_s - Ri_L - u_C$$

将上述方程改写可得

$$\begin{aligned}\frac{du_C}{dt} &= \frac{1}{C}i_L \\ \frac{di_L}{dt} &= -\frac{1}{L}u_C - \frac{R}{L}i_L + \frac{1}{L}u_s\end{aligned}$$

写成矩阵形式，则有

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} [u_s]$$

这是一组以 u_C 和 i_L 为变量的一阶微分方程组，只需 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 即可确定积分常数，该方程即为描写图示电路动态过程的状态方程。把它推广到一般情况可以得到标准形式的状态方程为

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{V} \quad (9-33)$$

其中

$$\mathbf{X} = [u_{C1} \ u_{C2} \ \dots \ i_{L1} \ i_{L2} \ \dots]^T$$

称为状态变量列向量或状态向量， $\dot{\mathbf{X}}$ 表示状态变量的一阶导数，即

$$\dot{\mathbf{X}} = \left[\frac{du_{C1}}{dt} \ \frac{du_{C2}}{dt} \ \dots \ \frac{di_{L1}}{dt} \ \frac{di_{L2}}{dt} \ \dots \right]^T$$

而

$$\mathbf{V} = [u_{s1} \ u_{s2} \ \dots \ i_{s1} \ i_{s2} \ \dots]^T$$

称为输入列向量。设电路具有 n 个状态变量， m 个独立电源，则 $\dot{\mathbf{X}}$ 和 \mathbf{X} 均为 n 阶列向量， \mathbf{A} 为 $n \times n$ 方阵， \mathbf{V} 为 m 阶列向量， \mathbf{B} 为 $n \times m$ 矩阵。 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 均由电路的结构和参数决定。

实际应用中往往还要求解其它电压或电流，这时可用状态变量和激励结合电路的 KCL、KVL 和 VCR 进行线性描述。如上例中若以电阻电压 u_1 和电感电压 u_2 为未知量，一般称为输出变量，由电路图可求得

$$\begin{aligned}u_1 &= Ri_L \\ u_2 &= -u_C + Ri_L + u_s\end{aligned}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ -1 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u_s]$$

此式即为关于输出变量 u_1 、 u_2 的代数方程组，称为输出方程。

标准形式的输出方程为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{V} \quad (9-34)$$

其中

$$\mathbf{Y} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ i_1 \ i_2 \ \dots]^T$$

为输出变量列向量， \mathbf{C} 、 \mathbf{D} 为仅与电路的结构和参数有关的系数矩阵。

总结以上分析可得状态变量分析法的一般步骤为：

- (1) 选择一组独立的状态变量，通常取独立的电容电压和电感电流。

(2) 列写状态方程（直观法）：

- 对只含一个独立电容的节点或割集由 KCL 列相应的电流方程（应包含尽可能少的非状态变量）；
- 对只含一个独立电感的回路由 KVL 列写电压方程（应包含尽可能少的非状态变量）；

c) 消去 a)、b)所列的方程中出现的非状态变量：

对不含独立电容的节点或割集由 KCL 列方程；

对不含独立电感的回路由 KVL 列方程。

(3) 求解状态方程得到状态变量的解。

(4) 列输出方程并由步骤(3)中得到的状态变量求解输出变量。

例 6-12 用直观法列出图 9.33 所示电路标准形式的状态方程。

解 选 u_C 和 i_L 为状态变量，对节点②由 KCL 列方程：

$$C \frac{du_C}{dt} = i_L - i_2 \quad (1)$$

对回路 l 由 KVL 列方程有

$$L \frac{di_L}{dt} = -R_2 i_2 + u_3 \quad (2)$$

其中 i_2 、 u_3 为非状态变量。由图 9.33 中电阻 R_2 与电容 C 的并联电路可求得

$$i_2 = \frac{1}{R_2} u_C$$

对非状态变量 u_3 所在的节点①由 KCL 列方程（将电感支路等效为电流为 i_L 的电流源），有

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) u_3 = \frac{u_s}{R_1} - i_L$$

解之得

$$u_3 = -\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} i_L + \frac{R_3}{R_1 + R_3} u_s$$

将上述求得的非状态变量 i_2 、 u_3 代入方程式(1)、(2)，整理成矩阵形式，即可得到标准形式的状态方程

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1 R_3}{L(R_1 + R_3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{R_3}{L(R_1 + R_3)} \end{bmatrix} [u_s]$$

对于复杂电路，利用拓扑学中特有树的概念建立状态方程更为方便。对不含 C-E 回路和 L-J 割集的电路，将每个元件作为一条支路，其中所有电容支路、电压源支路及部分电阻支路选为树支（这种树支构成的树称之为特有树），所有电感支路、电流源支

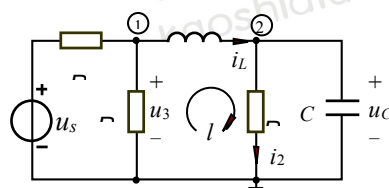


图 9.33 例 9-12 图

路及剩余电阻支路选作连支。列写状态方程时对单电容支路割集由 KCL 列电流方程，对单电感支路回路由 KVL 列电压方程。对于非状态变量，则利用相应的单电阻支路割集方程和单电阻连支回路方程将其消去。方程的求解通常用数值法，如欧拉法、龙格-库塔法等。

***例 6-13** 列出图 9.34(a)所示电路的状态方程和以节点电压为输出变量的输出方程。其中 $C_2 = 0.5 \text{ F}$, $C_3 = C_4 = 0.1 \text{ F}$, $L_7 = 2 \text{ H}$, $L_8 = 1 \text{ H}$, $G_5 = 1 \text{ S}$, $R_6 = 1 \Omega$ 。

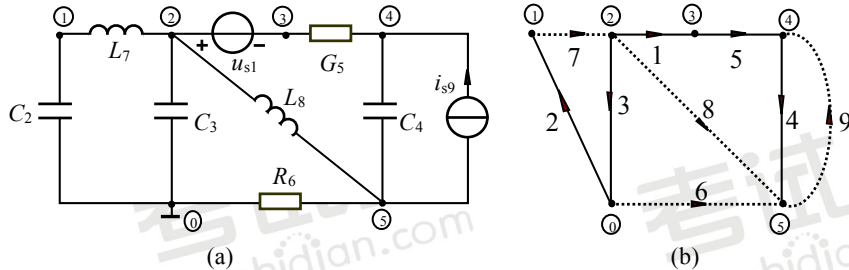


图 9.34 例 9-13 图

解 选择电容电压 u_2, u_3, u_4 和电感电流 i_7, i_8 为状态变量，画出特有树 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 并标出支路的编号和参考方向如图 9.34 (b) 所示。对由树支 2、3、4 构成的基本割集 $\{2, 7\}$ 、 $\{3, 6, 7\}$ 、 $\{4, 6, 8, 9\}$ 根据 KCL 分别列方程，有：

$$C_2 \frac{du_2}{dt} = i_7 \quad (1)$$

$$C_3 \frac{du_3}{dt} = i_6 + i_7 \quad (2)$$

$$C_4 \frac{du_4}{dt} = -i_6 - i_8 + i_{s9} \quad (3)$$

对由连支 7、8 构成的基本回路 $\{7, 3, 2\}$ 、 $\{8, 4, 5, 1\}$ 根据 KVL 列电压方程，分别为：

$$L_7 \frac{di_7}{dt} = -u_2 - u_3 \quad (4)$$

$$L_8 \frac{di_8}{dt} = u_4 + u_5 + u_{s1} \quad (5)$$

非状态变量 u_5 所在支路为树支，对该树支确定的基本割集 $\{5, 6, 8\}$ 由 KCL 列方程：

$$G_5 u_5 = -i_6 - i_8 \quad (6)$$

非状态变量 i_6 所在支路为连支，对该连支确定的基本回路 $\{6, 4, 5, 1, 3\}$ 由 KVL 列方程，

有

$$R_6 i_6 = -u_3 + u_4 + u_5 + u_{s1} \quad (7)$$

由(6)、(7)两式求出 u_5 和 i_6 后代入式(1)~(5)即可消去式中的非状态变量 u_5 和 i_6 ，代入数据并整理得

$$\frac{du_2}{dt} = 2 i_7$$

$$\frac{du_3}{dt} = -5u_3 + 5u_4 + 10i_7 - 5i_8 + 5u_{s1}$$

$$\frac{du_4}{dt} = 5u_3 - 5u_4 - 5i_8 - 5u_{s1} + 10i_{s9}$$

$$\frac{di_7}{dt} = -\frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3$$

$$\frac{di_8}{dt} = \frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{2}u_4 - \frac{1}{2}i_8 + \frac{1}{2}u_{s1}$$

令 $x_1 = u_2$, $x_2 = u_3$, $x_3 = u_4$, $x_4 = i_7$, $x_5 = i_8$, 则有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 10 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -5 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \\ -5 & 10 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s1} \\ i_{s9} \end{bmatrix}$$

节点电压分别为

$$u_{n1} = -u_2$$

$$u_{n2} = u_3$$

$$u_{n3} = u_3 - u_{s1}$$

$$u_{n4} = u_{n3} - u_5 = \frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{2}u_4 + \frac{1}{2}i_8 - \frac{1}{2}u_{s1}$$

$$u_{n5} = -R_6 i_6 = \frac{1}{2}u_3 - \frac{1}{2}u_4 + \frac{1}{2}i_8 - \frac{1}{2}u_{s1}$$

整理并写成矩阵形式的输出方程为

$$\begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n3} \\ u_{n4} \\ u_{n5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ i_7 \\ i_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s1} \\ i_{s9} \end{bmatrix}$$

或写为

$$\begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n3} \\ u_{n4} \\ u_{n5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} [u_{s1}]$$

第 7 章 电路的拉普拉斯变换分析

一、教学基本要求

- 1、了解拉普拉斯变换的定义，会用拉普拉斯变换基本性质求象函数。
- 2、掌握求拉普拉斯反变换的部分分式展开法，基尔霍夫定律的运算形式、运算阻抗和运算导纳、运算电路。
- 3、掌握应用拉普拉斯变换分析线性电路的方法和步骤。

二、教学重点与难点

教学重点：1. 拉普拉斯反变换部分分式展开；
2. 基尔霍夫定律的运算形式、运算阻抗和运算导纳、运算电路；
3. 应用拉普拉斯变换分析线性电路的方法和步骤。

教学难点：1. 拉普拉斯反变换的部分分式展开法；
2. 电路分析方法及定理在拉普拉斯变换中的应用。

三、本章与其它章节的联系：

是后续各章的基础，是前几章基于变换思想的延续。

四、学 时 安 排

总学时：6

教 学 内 容	学
1. 拉普拉斯变换的定义及基本性质	
2. 拉普拉斯反变换的部分分式展开	
3. 基尔霍夫定律的运算形式、运算阻抗和运算导纳、运算电路	
4. 应用拉普拉斯变换分析线性电路，习题	

五、教学内容

§7-1 拉普拉斯变换的定义

1. 拉普拉斯变换法

拉普拉斯变换法是一种数学积分变换，其核心是把时间函数 $f(t)$ 与复变函数 $F(s)$ 联系起来，把时域问题通过数学变换为复频域问题，把时间域的高阶微分方程变换为复频域的代数方程，在求出待求的复变函数后，再作相反的变换得到待求的时间函数。由于解复变函数的代数方程比解时域微分方程较有规律且有效，所以拉普拉斯变换在线性电路分析中得到广泛应用。

2. 拉普拉斯变换的定义

一个定义在 $[0, +\infty]$ 区间的函数 $f(t)$ ，它的拉普拉斯变换式 $F(s)$ 定义为

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

式中 $s = \sigma + j\omega$ 为复数，被称为复频率； $F(s)$ 为 $f(t)$ 的象函数， $f(t)$ 为 $F(s)$ 的原函数。

由 $F(s)$ 到 $f(t)$ 的变换称为拉普拉斯反变换，它定义为

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

式中 c 为正的有限常数。

注意：

(1) 定义中拉氏变换的积分从 $t=0^-$ 开始，即：

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^0 f(t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

它计及 $t=0^-$ 至 0^+ ， $f(t)$ 包含的冲激和电路动态变量的初始值，从而为电路的计算带来方便。

(2) 象函数 $F(s)$ 一般用大写字母表示，如 $I(s)$ ， $U(s)$ ，原函数 $f(t)$ 用小写字母表示，如 $i(t)$ ， $u(t)$ 。

(3) 象函数 $F(s)$ 存在的条件： $\int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt < \infty$

3. 典型函数的拉氏变换

(1) 单位阶跃函数的象函数

$$f(t) = u(t)$$

$$F(s) = L[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s}e^{-st} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

(2) 单位冲激函数的象函数

$$f(t) = \delta(t)$$

$$F(s) = L[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1$$

(3) 指数函数的象函数

$$f(t) = e^{at}$$

$$F(s) = L[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}e^{-st} dt = \frac{1}{s-a}$$

§ 7-2 拉普拉斯变换的性质

拉普拉斯变换的性质列于表 13.1 中。

表 7-1 拉氏变换的若干性质和定理

$$(L[f(t)] = F(s))$$

特性和定理	表 达 式	条 件 和 说 明
线性	$L[af(t) + bf(t)] = aL[f(t)] + bL[f(t)]$ $L^{-1}[aF(s) + bF(s)] = aL^{-1}[F(s)] + bL^{-1}[F(s)]$	a 、 b 为常数
位移特性	时域延迟 $L[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s)$	τ 为一非负实数

微分	频域延迟 $\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - [s^{n-1}f(0) + s^{n-2}f'(0) + \dots + f^{(n-1)}(0)]$	$\operatorname{Re}(s-a) > c$ 若所有初值为零, 则有 $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s)$ $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s)$
积分	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} F(s)$ $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \int_0^{\tau} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_1\right\} = \frac{1}{s^n} F(s)$	
初值定理	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$, 或 $f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ 存在
终值定理	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$, 或 $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	$sF(s)$ 所有奇点均在 s 平面左半部
卷积定理	$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s) \cdot F_2(s)$ $\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\} = f_1(t) * f_2(t)$	$\int_0^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$ 为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积

应用拉氏变换的性质, 同时借助于表 13.2 中所示的一些常用函数的拉普拉斯变式可以使一些函数的象函数求解简化。

表 13-2 拉氏变换简表

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
------------------------------	--------	------------------------------	--------

1	$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \infty & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$	$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$
$\frac{1}{s^n} (n=1,2,\dots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \delta(t)$	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a^3}(e^{-at}+at-1)$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)$
$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2}(1-\cos at)$	$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^3}(at-\sin at)$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{b-a}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{ae^{-at}-be^{-bt}}{a-b}$
$\frac{1}{(s+a)^k}$	$t^k e^{-at}$		

例 7-1

已知 $\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s}$ ，求函数 $f(t) = U_s(t)$ 的像函数。

解：

$$F(s) = \mathcal{L}[U_s(t)] = UL[g(t)] = \frac{U}{s}$$

例 7-2 已知 $\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s}$ ，求 $f(t) = ts(t) - ts(t-1)$ 的象函数。

解：根据积分性质和时域延迟性质

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[ts(t) - (t-1)s(t-1) - s(t-1)] = \frac{1}{s^2} - e^{-s} \frac{1}{s^2} - e^{-s} \frac{1}{s}$$

例 7-3 求函数 $f(t) = \sin(\omega t)$ 的像函数。

解：

$$\begin{aligned} F(s) &= L[\sin(\omega t)] = L\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right] \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

例 7-4 求函数 $f(t) = \cos(\omega t)$ 的像函数。

解：根据微分性质，因为

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{\omega} \frac{d\sin(\omega t)}{dt}, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= L[\cos \omega t] = L\left[\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt}(\sin \omega t)\right] \\ &= \frac{s}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - 0 \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

例 7-5 求函数 $f(t) = ts(t)$ 的像函数。

解：根据频域导数性质有：

$$L[ts(t)] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \left(\frac{1}{s^2}\right)$$

例 7-6 求函数 $f(t) = t^n s(t)$ 的像函数。

解：根据频域导数性质有：

$$F(s) = L[t^n s(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} (s) = \left(\frac{n!}{s^{n+1}}\right)$$

例 13-7 求函数 $f(t) = te^{-\alpha t}$ 的像函数。

解：根据频域导数性质有：

$$F(s) = L[te^{-\alpha t}] = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

§7-3 拉普拉斯反变换的部分分式展开

1. 拉普拉斯反变换法

用拉氏变换求解线性电路的时域响应时，需要把求得的响应的拉氏变换式反变换为时间函数。由象函数求原函数的方法有：

(1) 利用公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

(2) 对简单形式的 $F(s)$ 可以查拉氏变换表得原函数

(3) 把 $F(s)$ 分解为简单项的组合，也称部分分式展开法。

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s)$$

$$\text{则 } f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t)$$

2. 部分分式展开法

用部分分式法求拉氏反变换(海维赛德展开定理), 即将 $F(s)$ 展开成部分分式, 成为可在拉氏变换表中查到的 s 的简单函数, 然后通过反查拉氏变换表求取原函数 $f(t)$ 。

设 $F(s) = R_1(s) / R_2(s)$, $R_1(s)$ 的阶次不高于 $R_2(s)$ 的阶次, 否则, 用 $R_2(s)$ 除 $R_1(s)$, 以得到一个 s 的多项式与一个余式(真分式)之和。部分分式为真分式时, 需对为分母多项式作因式分解, 求出 $R_2(s)=0$ 的根。

设象函数的一般形式:

$$F(s) = \frac{R_1(s)}{R_2(s)} = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n} \quad (n \geq m)$$

即 $F(s)$ 为真分式。下面讨论 $R_2(s)=0$ 的根的情况。

(1) 若 $R_2(s)=0$ 有 n 个不同的单根 p_1, p_2, \dots, p_n 。利用部分分式可将 $F(s)$ 分解为:

$$F(s) = \frac{R_1(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \frac{a_1}{s-p_1} + \frac{a_2}{s-p_2} + \dots + \frac{a_n}{s-p_n}$$

待定常数的确定:

方法一: 按 $a_i = [(s-p_i)F(s)]_{s=p_i}$, $i=1, 2, 3, \dots, n$ 来确定。

方法二: 用求极限方法确定 a_i 的值

$$a_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{(s-p_i)R_1(s)}{R_2(s)} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{(s-p_i)R_1'(s) + R_1(s)}{R_2'(s)} = \frac{R_1(p_i)}{R_2'(p_i)}$$

得原函数的一般形式为:

$$f(t) = \frac{F_1(p_1)}{F'_1(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F'_1(p_2)} e^{p_2 t} + \cdots + \frac{F_1(p_n)}{F'_1(p_n)} e^{p_n t}$$

(2) 若 $F_1(s)=0$ 有共轭复根 $p_1 = \alpha + j\omega$ 和 $p_2 = \alpha - j\omega$, 可将 $F(s)$ 分解为:

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\cdots(s-p_n)} =$$

$$\frac{a_1}{s-p_1} + \frac{a_2}{s-p_2} + \frac{a_3}{s-p_3} + \cdots + \frac{a_n}{s-p_n}$$

$$\text{则 } a_1 = [(s-\alpha-j\omega)F(s)]_{s=\alpha+j\omega}, \quad a_2 = [(s-\alpha+j\omega)F(s)]_{s=\alpha-j\omega}$$

因为 $F(s)$ 为实系数多项式之比, 故 a_1 和 a_2 为共轭复数。设

$$a_1 = |K_1|e^{j\theta}, \quad a_2 = |K_1|e^{-j\theta}$$

$$f(t) = a_1 e^{(\alpha+j\omega)t} + a_2 e^{(\alpha-j\omega)t} = 2|K_1|e^{\alpha t} \cos(\omega t + \theta)$$

(3) $F_1(s)=0$ 的具有重根时, 因含有 $(s-p_1)^r$ 的因式。

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{(s-p_1)^r (s-p_{r+1}) \cdots (s-p_n)} =$$

$$\frac{b_r}{(s-p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(s-p_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{b_1}{s-p_1} + \frac{a_{r+1}}{s-p_{r+1}} + \frac{a_{r+2}}{s-p_{r+2}} + \cdots + \frac{a_n}{s-p_n}$$

$$\text{则 } b_r = [(s-p_1)^r F(s)]_{s=p_1};$$

$$b_{r-1} = \frac{d}{ds} [(s-p_1)^r F(s)]_{s=p_1}; \quad \cdots$$

$$b_1 = \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} [(s-p_1)^r F(s)]_{s=p_1}$$

总结上述得由 $F(s)$ 求 $f(t)$ 的步骤:

- (1) $n = m$ 时将 $F(s)$ 化成真分式和多项式之和;
- (2) 求真分式分母的根, 确定分解单元;
- (3) 将真分式展开成部分分式, 求各部分分式的系数;
- (4) 对每个部分分式和多项式逐项求拉氏反变换。

例 13-8 已知

$$F(s) = \frac{4s+5}{s^2+5s+6}$$

求原函数 $f(t)$

解法一: 设

$$F(s) = \frac{4s+5}{s^2+5s+6} = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+3}$$

其中

$$K_1 = \frac{4s+5}{s+3} \Big|_{s=-3} = -3 \quad K_2 = \frac{4s+5}{s+2} \Big|_{s=-2} = 7$$

所以 $f(t) = -3e^{-3t} \varepsilon(t) + 7e^{-2t} \varepsilon(t)$

解法二:

$$K_1 = \frac{F_1(p_1)}{F_1'(p_1)} = \frac{4s+5}{2s+5} \Big|_{s=-3} = -3$$

$$K_2 = \frac{N(p_2)}{D'(p_2)} = \frac{4s+5}{2s+5} \Big|_{s=-2} = 7$$

例 13-9 已知

$$F(s) = \frac{s}{s^2+2s+5}$$

求原函数 $f(t)$ 。

解： 因为 $s^2 + 2s + 5 = 0$ 的根为： $p_{1,2} = -1 \pm j2$

所以

$$K_1 = \frac{s}{s - (-1 - j2)} \Big|_{s=-1-j2} = 0.5 - j0.5 = 0.559 \angle 26.6^\circ$$

$$K_2 = \frac{s}{s - (-1 + j2)} \Big|_{s=-1+j2} = 0.559 \angle -26.6^\circ$$

$$f(t) = 2 \times 0.559 e^{-t} \cos(2t + 26.6^\circ) \varepsilon(t)$$

例 7-10 已知

$$F(s) = \frac{s^4 + 4s^2 + 1}{s^3(s^2 + 4)}$$

求原函数 $f(t)$

解：

$$F(s) = 1 + \frac{1}{s^3(s^2 + 4)} = 1 + F'(s)$$

$$F'(s) = \frac{k_{12}}{s} + \frac{k_{11}}{s^2} + \frac{k_1}{(s - j2)} + \frac{k_2}{(s + j2)}$$

$$k_{11} = [(s - 0)^2 F'(s)]_{s=0} = \frac{1}{4};$$

$$k_{12} = \frac{d}{ds} [(s - 0)^2 F'(s)]_{s=0} = 0;$$

$$k_1 = [(s - j2) F'(s)]_{s=j2} = \frac{1}{j16} = \frac{1}{16} e^{j\frac{\pi}{2}};$$

$$k_1 = [(s+j2)F'(s)]_{s=-j2} = \frac{1}{16}e^{-j2t}$$

则,
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \delta(t) + \frac{1}{8}\cos(2t + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{4}t$$

例 7-11 已知

$$F(s) = \frac{s^2 + 9s + 11}{s^2 + 5s + 6}$$

求原函数 $f(t)$ 。

解: 原式

$$= 1 + \frac{4s+5}{s^2+5s+6} = 1 + \frac{-3}{s+2} + \frac{7}{s+3}$$

所以
$$f(t) = \delta(t) + (7e^{-3t} - 3e^{-2t})$$

§7-4 运算电路

应用拉普拉斯变换求解线性电路的方法称为运算法。运算法的思想是: 首先找出电压、电流的像函数表示式, 而后找出 R 、 L 、 C 单个元件的电压电流关系的像函数表示式, 以及基尔霍夫定律的像函数表示式, 得到用像函数和运算阻抗表示的运算电路图, 列出复频域的代数方程, 最后求解出电路变量的象函数形式, 通过拉普拉斯反变换, 得到所求电路变量的时域形式。显然运算法与相量法的基本思想类似, 因此, 用相量法分析计算正弦稳态电路的那些方法和定理在形式上均可用于运算法。

1. 电路定律的运算形式

基尔霍夫定律的时域表示:

$$\sum i(t) = 0 \quad \sum u(t) = 0$$

把时间函数变换为对应的象函数：

$$u(t) \rightarrow U(s) \quad i(t) \rightarrow I(s)$$

得基尔霍夫定律的运算形式：

$$\sum I(s) = 0 \quad \sum U(s) = 0$$

2. 电路元件的运算形式

根据元件电压、电流的时域关系，可以推导出各元件电压电流关系的运算形式。

(1) 电阻 R 的运算形式

图 13.1 (a) 所示电阻元件的电压电流关系为： $u = Ri$ ，两边

取拉普拉斯变换，得电阻元件 VCR 的运算形式： $U(s) = RI(s)$

或 $I(s) = GU(s)$

根据上式得电阻 R 的运算电路如图 (b) 所示。



图 13.1 (a)

(b)

(2) 电感 L 的运算形式

图 13.2 (a) 所示电感元件的电压电流关系为：

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

图 13.2 (a)

两边取拉普拉斯变换并根据拉氏变换的微分性质，得电感元件 VCR 的运算形式：

$$U(s) = LsI(s) - Li(0_-)$$

或：

$$I(s) = \frac{U(s)}{sL} + \frac{i(0^-)}{s}$$

根据上式得电感 L 的运算电路如图 (b) 和图 (c) 所示。图中

$Li(0^-)$ 表示附加电压源的电压， $\frac{i(0^-)}{s}$ 表示附加电流源的电流。

式中 $Z(s) = sL$ ， $Y(s) = 1/sL$ 分别称为电感的运算阻抗和运算导纳。

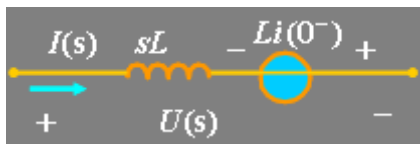


图 13.2 (b)

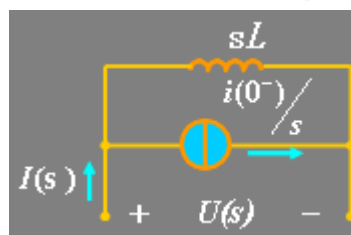


图 13.2 (c)

(3) 电容 C 的运算形式

图 13.3(a) 所示电容元件的电压电流关系为：



图 13.3 (a)

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

两边取拉普拉斯变换并根据拉氏变换的微分性质，得电容元件 VCR 的运算形式：

$$I(s) = sCU(s) - Cu(0^-)$$

或:

$$U(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u(0^-)}{s}$$

根据上式得电容 C 的运算电路如图(b)和图(c)所示。

图中 $Cu(0^-)$ 表示附加电流源的电流, $\frac{u(0^-)}{s}$ 表示附加电压源的电压。

式中 $Z(s) = 1/sC$ $Y(s) = sC$ 分别为电容的运算阻抗和运算导纳。

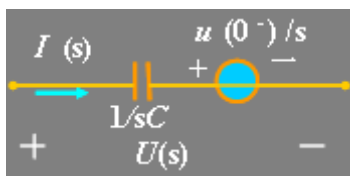


图 13.3 (b)

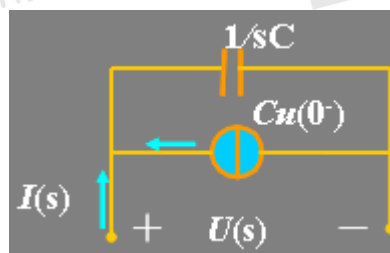
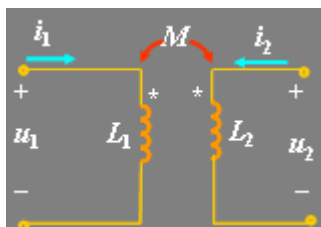


图 13.3 (c)

(4) 耦合电感的运算形式

图 13.4 (a) 所示耦合电感的电压电流关系为:



$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

图 13.4 (a)

两边取拉普拉斯变换, 得耦合电感 VCR 的运算形式:

$$\begin{cases} U_1(s) = sL_1 I_1(s) - L_1 i_1(0^-) + sMI_2(s) - Mi_2(0^-) \\ U_2(s) = sL_2 I_2(s) - L_2 i_2(0^-) + sMI_1(s) - Mi_1(0^-) \end{cases}$$

根据上式得耦合电感的运算电路如图 (b) 所示。

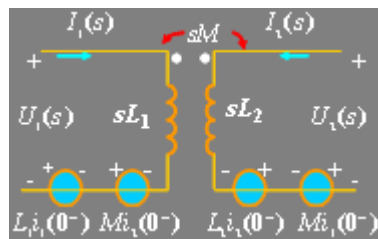


图 13.4 (b)

图中 $Mi_1(0^-)$ 和 $Mi_2(0^-)$ 都是附加电压源。式中

$$Z_M(s) = sM, Y_M(s) = 1/sM$$

分别称为互感运算阻抗和互感运算

导纳。

(5) 受控源的运算形式

图 13.5 (a) 所示 VCVS 的电压电流关系为:

$$u_1 = i_1 R \quad u_2 = \mu u_1$$

两边取拉普拉斯变换, 得运算形式为:

$$U_1(s) = I_1(s)R \quad U_2(s) = \mu U_1(s)$$

根据上式得 VCVS 的运算电路如图 (b) 所示。

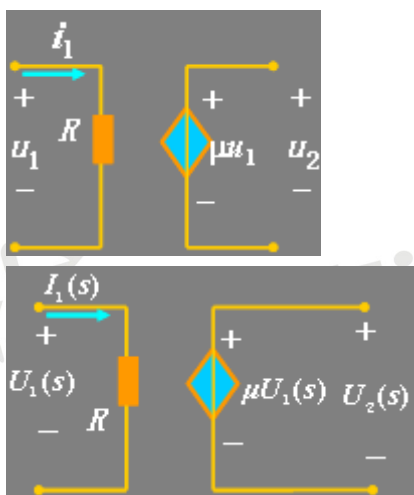


图 13.5 (a)

图 13.5 (b)

3. 运算电路模型

图 13.6 为 RLC 串联电路，设电容电压的初值为 $u_c(0^-)$ ，电感

电流的初值为 $i_L(0^-)$ ，其时域方程为：

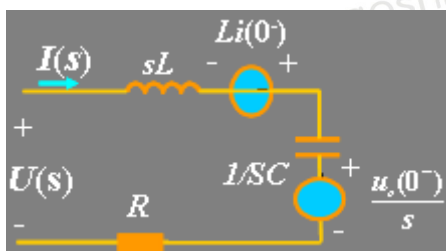


图 13.6 (a)

图 13.6 (b)

$$u = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt$$

取拉普拉斯变换，得运算方程

$$U(s) = I(s)R + sLI(s) - Li(0^-) + \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u_c(0^-)}{s}$$

或写为

$$(R + sL + \frac{1}{sC})I(s) = Z(s)I(s) = U(s) + Li(0^-) - \frac{u_c(0^-)}{s}$$

即：

$$U(s) = Z(s)I(s)$$

上式称运算形式的欧姆定律，式中

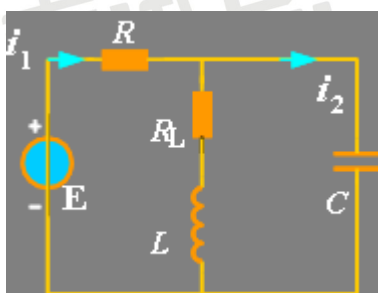
$$Z(s) = \frac{1}{Y(s)} = R + sL + \frac{1}{sC}$$

称运算阻抗。根据上式得图（b）所示的运算电路。因此，运算电路实际是：

- （1）电压、电流用象函数形式
- （2）元件用运算阻抗或运算导纳表示；
- （3）电容电压和电感电流初始值用附加电源表示。

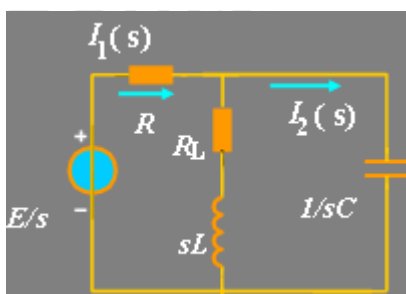
例 7-12 给出图（a）所示电路的运算电路模型。已知

$$u_C(0^-) = 0 \quad i_L(0^-) = 0$$



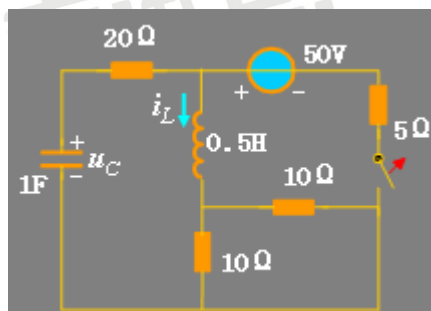
例 13-12 图（a）

解： 运算电路如图（b）所示。



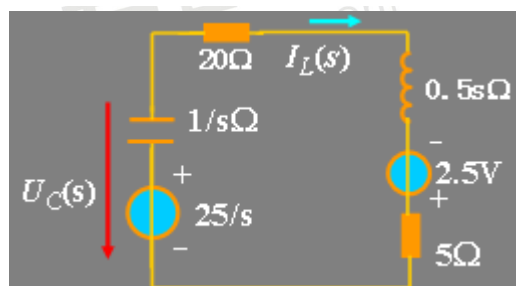
例 13-12 图（b）

例 7-13 给出图（a）所示电路的运算电路模型，已知 $t=0$ 时打开开关。



例 13-13 图 (a)

解：由图 (a) 可知： $u_C(0^-)=25\text{V}$ ， $i_L(0^-)=5\text{A}$ ，则运算电路模型如图 (b) 所示。



例 13-13 图 (b)

注意图中的附加电源。

§ 7-5 应用拉普拉斯变换法分析线性电路

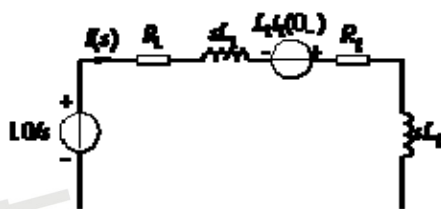
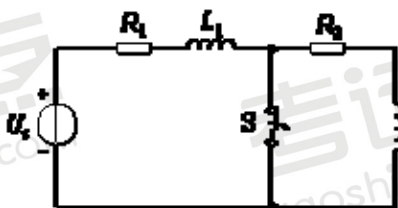
应用拉普拉斯变换法分析线性电路计算步骤为：

1. 由换路前的电路计算 $u_C(0^-)$ ， $i_L(0^-)$ 。
2. 画运算电路模型，注意运算阻抗的表示和附加电源的作用。
3. 应用电路分析方法求象函数。
4. 反变换求原函数。

注意：

- (1) 运算法直接求得全响应;
- (2) 用 0^- 初始条件, 跃变情况自动包含在响应中;

例 13-14 电路如图 (a) 所示, 开关 S 原来闭合, 求 S 在 0 时刻打开后电路中的电流及电感元件上的电压。其中, $R_1=2\Omega$, $R_2=2\Omega$, $L_1=0.3\text{H}$, $L_2=0.1\text{H}$, $U_s=10\text{V}$ 。



例 13-14 图 (a)

例 13-14 图 (b)

解: 图 (b) 是开关 S 打开后的运算电路图。 L_1 中的初始电流为 $U_s/R_1=5\text{A}$ 。则

$$I(s) = \frac{10/s + 5L_1}{R_1 + R_2 + sL_1 + sL_2} = \frac{2}{s} + \frac{1.75}{s + 12.5}$$

故

$$i(t) = (2 + 1.75e^{-12.5t}) \text{ A}$$

$$U_{L_1}(s) = 0.3sI(s) - 1.5 = -\frac{6.56}{s + 12.5} - 0.375$$

$$U_{L_2}(s) = 0.1sI(s) = -\frac{2.19}{s + 12.5} + 0.375$$

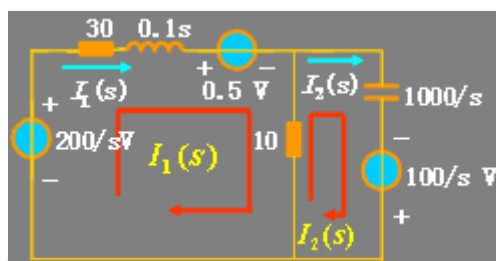
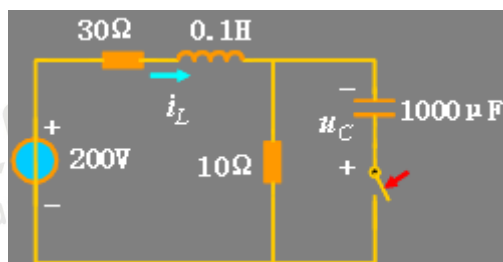
所以

$$u_L(t) = -6.56e^{-25t} - 0.375\delta(t) \text{ V}$$

$$u_C(t) = -2.19e^{-25t} + 0.375\delta(t) \text{ V}$$

例 7-15 电路如图 (a) 所示, $t=0$ 时刻开关 S 闭合, 用运算法求

S 闭合后电路中感元件上的电压及电流。已知 $u_C(0^-) = 100\text{V}$ 。



例 13-15 图 (a)

例 13-15 图

(b)
解:

- (1) 首先计算初值
由已知条件和图 (a) 得:

$$u_C(0^-) = 100\text{V} \quad i_L(0^-) = 5\text{A}$$

- (2) 画运算电路如图 (b) 所示。其中

$$sL = 0.1s \quad \frac{1}{sC} = \frac{1}{s \times 1000 \times 10^{-6}} = \frac{1000}{s}$$

- (3) 应用回路法, 回路电流方向如图示, 得回路方程:

$$I_1(s)(40 + 0.1s) - 10I_2(s) = \frac{200}{s} + 0.5$$

$$-10I_1(s) + (10 + \frac{1000}{s})I_2(s) = \frac{100}{s}$$

从中解得：

$$I_1(s) = \frac{5(s^2 + 700s + 40000)}{s(s + 200)^2}$$

(4) 反变换求原函数

$$s(s + 200)^2 = 0 \quad \text{有三个根：}$$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = p_3 = -200$$

令

$$I_1(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{s + 200} + \frac{K_{22}}{(s + 200)^2}$$

$$K_1 = F(s)s|_{s=0} = \frac{5(s^2 + 700s + 40000)}{s^2 + 400s + 200^2}|_{s=0} = 5$$

$$K_{22} = F(s)(s + 200)^2|_{s=-200} = 1500$$

$$K_{21} = \frac{d}{ds}(s + 200)^2 F(s)|_{s=-200} = 0$$

$$I_1(s) = \frac{5}{s} + \frac{0}{(s + 200)} + \frac{1500}{(s + 200)^2}$$

所以

$$i_1(t) = i_z(t) = (5 + 1500te^{-200t})A$$

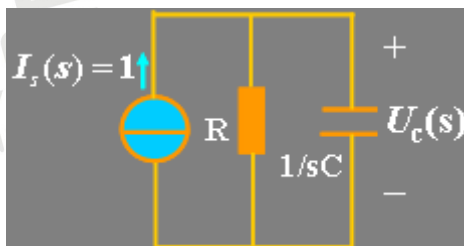
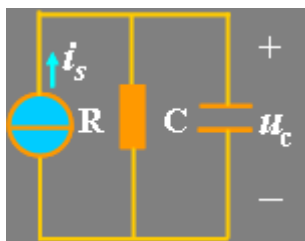
$$U_z(s) = I_1(s)sL - 0.5 = \frac{150}{s + 200} + \frac{-30000}{(s + 200)^2}$$

$$u_z(t) = 150e^{-200t} - 30000te^{-200t}V$$

注意：

$$U_z(s) \neq I_1(s)sL$$

例 7-16 电路如图 (a) 所示, 已知 $i_s = \delta(t)$, $u_c(0^-) = 0$, 用运算法求电路中电容元件上的电压及电流。



例 13-16 图 (a)

例 13-16 图 (b)

解: 由已知条件知: $u_c(0^-) = 0$, 运算电路如图 (b) 所示。有:

$$U_c(s) = \frac{R}{R + 1/sC} I_s(s) \frac{1}{sC} = \frac{R}{RC(s + 1/RC)}$$

$$I_c(s) = U_c(s) \frac{1}{sC} = \frac{R s C}{R s C + 1} = \frac{R s C + 1}{R s C + 1} - \frac{1}{R s C + 1}$$

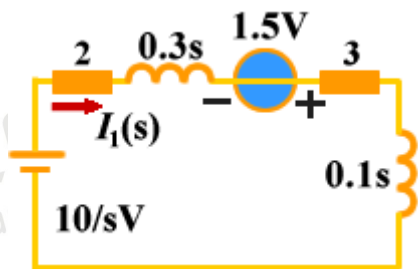
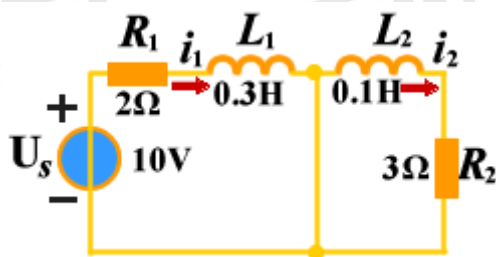
所以

$$u_c = \frac{1}{C} e^{-t/RC} (t \geq 0)$$

$$i_c = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-t/RC} (t \geq 0)$$

例 7-17 电路如图 (a) 所示, $t=0$ 时打开开关 k, 求电流 i_1, i_2 。

已知: $i_1(0^-) = 5A, i_2(0^-) = 0$



例 13-17 图 (a)

例 13-17

图 (b)

解：由图 (b) 所示的运算电路得：

$$I_1(s) = \frac{\frac{10}{s} + 1.5}{s + 0.4s} = \frac{2}{s} + \frac{1.75}{s + 12.5}$$

$$U_n(s) = 0.3sI_1(s) - 1.5 = -\frac{6.56}{s + 12.5} - 0.375$$

$$U_n(s) = 0.1sI(s) = 0.375 - \frac{2.19}{s + 12.5}$$

所以

$$i_1 = 2 + 1.75e^{-12.5t} = i_2$$

$$u_n(t) = -0.375\delta(t) - 6.56e^{-12.5t}$$

$$u_n(t) = +0.375\delta(t) - 2.19e^{-12.5t}$$

第8章 二端口网络

8.1 基本概念

8.1.1 二端口网络的端口条件和端口变量

1. 端口条件：在端口网络的任意端口上，由一端流入的电流必须等于由另一端流出的电流，这叫做双口网络的端口条件；
2. 端口变量：包括两个端口电压 u_1 , u_2 和两个端口电流 i_1 , i_2 。

8.1.2 二端口网络的方程和参数

二端口网络的对外电气性能可以用一些参数表示。即以这些参数组成的方程对外电路表示二端口网络的电气性能。在分析二端口的参数时，按正弦稳态情况考虑。

本章讨论的二端口是由线性电阻、电感、电容和线性受控源组成，不含任何独立电源。如图 16-1 所示为一线性二端口。

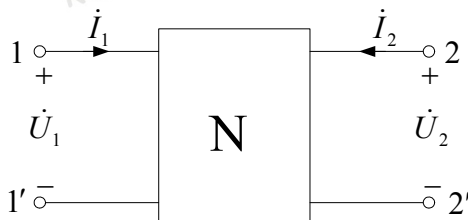


图16-1

1. Y 参数方程

用 \dot{U}_1, \dot{U}_2 表示 \dot{I}_1, \dot{I}_2

(1) 方程

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2 \end{cases}$$

(2) 参数的物理意义。分别把入口和出口短路

$$\begin{aligned}
 Y_{11} &= \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} & \text{----入口的驱动点导纳} \\
 Y_{21} &= \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} & \text{----出口与入口之间的转移导纳} \\
 Y_{12} &= \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} & \text{----入口与出口之间的转移导纳} \\
 Y_{22} &= \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} & \text{----出口的驱动点导纳}
 \end{aligned}$$

由于以上参数是在入口和出口分别短路情况下的参数，所以称为短路参数。对于线

性无源网络（指即不包含独立电源，也不包含受控源）， $Y_{11} = Y_{21}$ ，只有三

个独立参数，又称互易双口；当 $Y_{11} = Y_{22}$ 时，称为对称双口，只有两个独立参数。

2. Z 参数方程

用 \dot{I}_1, \dot{I}_2 表示 \dot{U}_1, \dot{U}_2

$$(1) \begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2 \end{cases}$$

(2) 参数的物理意义。分别把入口和出口开路，

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} & \text{----入口驱动点阻抗} \\ Z_{21} &= \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} & \text{----出口对入口的转移阻抗} \\ Z_{12} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} & \text{----入口对出口的转移阻抗} \\ Z_{22} &= \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} & \text{----出口驱动点阻抗} \end{aligned}$$

对于互易双口, $Z_{12} = Z_{21}$, 只有三个独立参数;

对于对称双口, $Z_{11} = Z_{22}$, 只有两个独立参数。

由于 Z 参数是把入口、出口分别开路时得到的, 所以又称为开路参数。

3. T 参数方程

用 \dot{I}_2, \dot{U}_2 表示 \dot{I}_1, \dot{U}_1

(1) 方程

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 - B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 - D\dot{I}_2 \end{cases}$$

(2) 参数的物理意义

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} & \text{----入口对出口的电压比值} \\ C &= \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} & \text{----入口对出口的转移导纳} \end{aligned}$$

2-2' 开路 2-2' 短路

$$B = \left. \frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad \text{----入口对出口的转移阻抗}$$

$$D = \left. \frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad \text{----入口对出口的电流比值}$$

对于互易双口, $AD-BC=1$, 只有三个独立参数;

对于对称双口, $A=D$, 只有两个独立参数。

4. H 参数方程

用 \dot{I}_1, \dot{U}_2 表示 \dot{I}_2, \dot{U}_1

(1) 方程

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11} \dot{I}_1 + H_{12} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21} \dot{I}_1 + H_{22} \dot{U}_2 \end{cases}$$

(2) 参数物理意义

2-2' 短路

$$H_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad \text{----入口驱动点阻抗}$$

$$H_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad \text{----出口对入口的电流比}$$

2-2' 开路

$$H_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} \quad \text{----入口对出口的电压比}$$

$$H_{22} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} \quad \text{----入口对出口的转移导纳}$$

对于互易双口, $H_{12} = -H_{21}$, 只有三个独立参数;

对于对称双口, $H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} = 1$, 只有两个独立参数。

8.1.3 二端口的等效电路

如果二端口网络是线性且含有受控源的, 由于这种网络一般来说是不可逆的, 它有四个独立参数, 因而它的等效电路不可能仅由 R、L、C 元件所组成的网络来表示, 因此它必然是不可逆的。下面给出的用 Z 参数和 Y 参数表示的含有受控源的二端口网络的等效电路。

1. 用 Z 参数, 它的基本方程是:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

或 ,

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{12}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 + (Z_{21} - Z_{12})\dot{I}_1 \end{cases}$$

根据方程组可以画出含有两个受控源的等效电路, 如图 16-2 (a) 所示, 也可画成含有两个受控源的等效电路, 如图 16-2 (b) 所示。

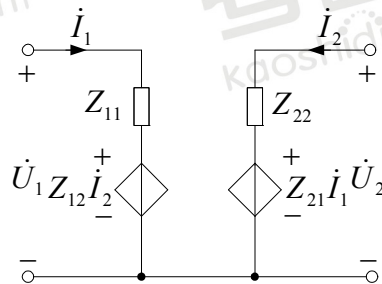


图16-2(a)

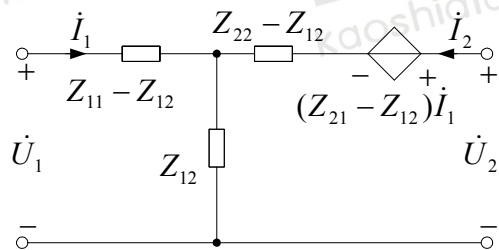


图16-2(b)

2. 用 Y 参数, 它的基本方程:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{12}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 + (Y_{21} - Y_{12})\dot{U}_1 \end{cases}$$

如图 16-3 (a) 是含有两个受控源的等效电路, 16-3 (b) 是含有单个

受控源的等效电路，当 $Z_{21} = Z_{12}$ 及 $Y_{12} = Y_{21}$ 时，如图 16-4 (a) (b) 就是 T 形和 Π 形等效电路。

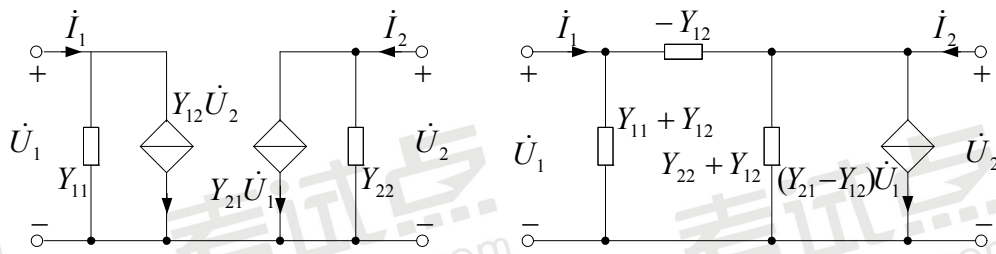


图16-3(a)

图16-3(b)

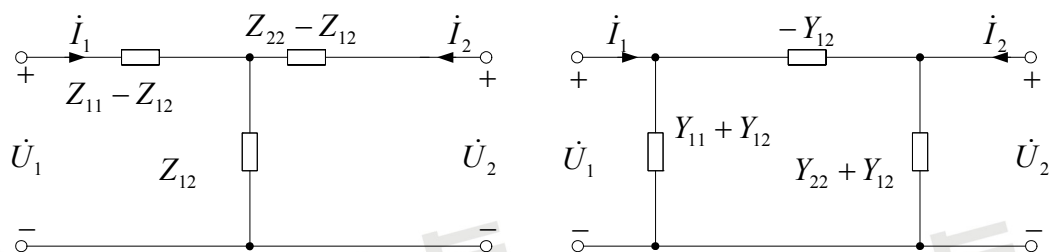


图16-4(a)

图16-4(b)

8.1.4 单端口等效电路

1. 从输入端口看等效输入阻抗，如图 16-5 所示。

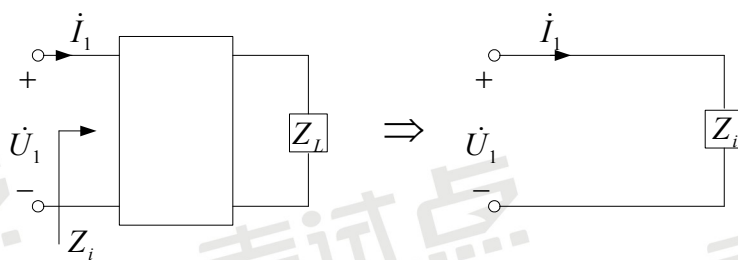


图16-5

$$Z_i = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D}$$

2. 从输入端口看戴维南等效电路, 如图 16-6 所示。

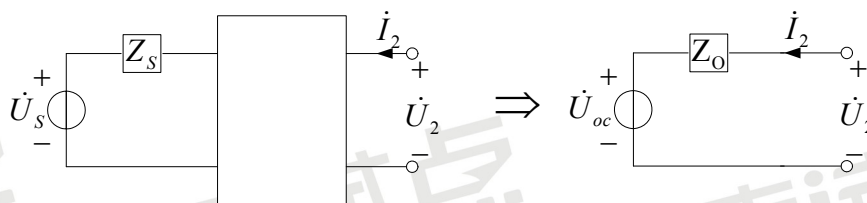


图16-6

$$U_{oc} = \frac{\dot{U}_s}{A + CZ_s}, \quad Z_0 = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_s=0} = \frac{DZ_s + B}{CZ_s + A}$$

8.1.5 二端口的转移函数

二端口的转移函数是用拉氏变换形式表示输出电压或电流与输入电压或电流之比。实际上是第十四章网络函数的一种, 是在二端口条件下的转移函数, 在此不作具体介绍。

8.1.6 二端口的联结

二端口有三种常见的联结方式, 即串联、并联、级联。如图 16-7 所示。

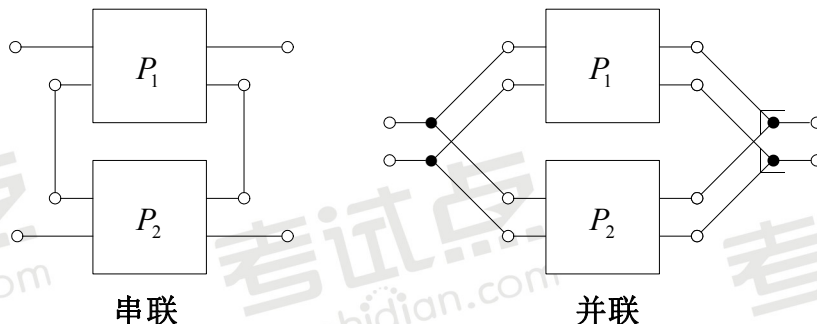
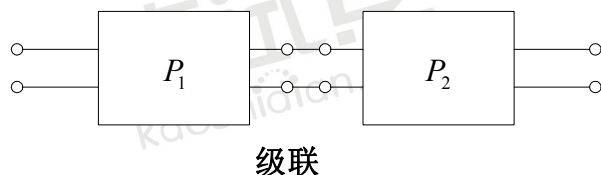


图16-7

在满足端口条件的情况下（在此不介绍端口条件的判别方法）：

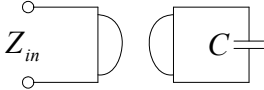
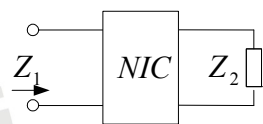
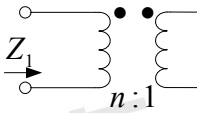
串联： $Z = Z_1 + Z_2$ ， 并联： $Y = Y_1 + Y_2$ ， 级联： $T = T_1 T_2$ 。

8.1.7 回转器和负阻抗变换器

回转器、负阻抗变换器、理想变压器均是二端口理想元件，现将三种元件进行对比，见表 16-1。

表 16-1 回转器、负阻抗变换器、理想变压器 三种元件的比较

名 称	回转器	负阻抗变换器	理想变压器
电路符号			
VAR 形式 1	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$
VAR 形式 2	$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -g \\ -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$	

参数	$Z = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix}$ 或 $Y = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix}$	$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix}$ 或 $T = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$T = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$
功率特性	$u_1 i_1 + u_2 i_2 = 0$; 不耗能	$u_1 i_1 + u_2 i_2 \neq 0$	$u_1 i_1 + u_2 i_2 = 0$
阻抗变换电路			
阻抗变换公式	$Z_{in} = sL_e = sCr^2$	$Z_1 = -\frac{1}{k}Z_2$ ① $Z_1 = -kZ_2$ ②	$Z_1 = n^2 Z_2$
阻抗变换说明	电容 → 电感 电感 → 电容	电阻 → 负电阻 正电感 → 负电感 正电容 → 负电容	阻抗性质不变
注		①为电流反向型 ②为电压反向型	

8.1.8 含二端口网络的电路分析

1. 列方程组：将端口变量列入方程组（例如结点方程或回路方程等），再补充二端口网络的给定参数方程；
2. 利用各种等效电路：例如 T 形和 Π 形等效电路，戴维南等效电路等。

8.2 本章重点和难点

8.2.1 本章重点

1. 二端口网络的方程和参数

学好了这一部分内容，二端口网络的转移函数、等效电路等的求解，就非常容易。

2. 二端口网络的联结

研究二端口网络的联结可以起到两个作用：一是简化电路的分析，二是便于设计和实现一个复杂的二端口。

16.2.2 本章难点

含有二端口网络的问题一般都涉及较多的概念和方法，可以是稳态问题也可是暂态问题，可以是直流问题也可是交流问题，可以是线性问题也可是

非线性问题，因此有一定的解题难度。

8.3 典型例题

例 8-1 求图 16-8 所示二端口网络的 Y 参数矩阵。

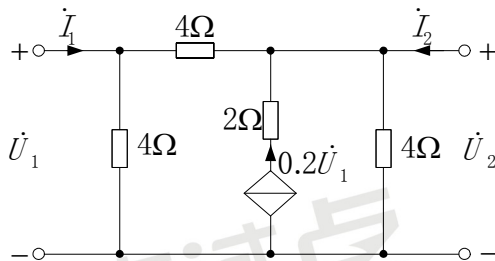


图16-8

解题指导：短路导纳参数方程与结点电压方程相似，因此用结点电压法可求出简单电路的 Y 参数矩阵。

应用结点电压法，则有：

$$\dot{I} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)\dot{U}_1 - \frac{1}{4}\dot{U}_2 = 0.5\dot{U}_1 - 0.25\dot{U}_2$$

$$\dot{I} = -0.2\dot{U}_1 - \frac{1}{4}\dot{U}_1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)\dot{U}_2 = -0.45\dot{U}_1 + 0.5\dot{U}_2$$

其 Y 参数矩阵为：

$$Y = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.25 \\ -0.45 & 0.5 \end{bmatrix} S$$

例 8-2 求图 16-9 所示二端口网络的 Z 参数矩阵。

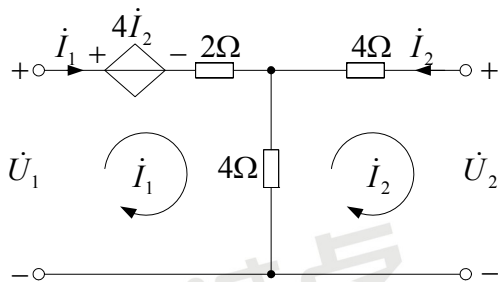


图16-9

解题指导：开路阻抗参数方程与回路电流方程相似，故采用回路电流法求 Z 参数矩阵较简单。

应用回路电流法，则有：

$$\dot{U}_1 = (2+4)\dot{I}_1 + 4\dot{I}_2 + 4\dot{I}_3 = 6\dot{I}_1 + 8\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = 4\dot{I}_1 + (4+4)\dot{I}_2 = 4\dot{I}_1 + 8\dot{I}_2$$

$$\text{故其 } Z \text{ 参数矩阵为: } Z = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \Omega$$

例 8-3 求如图 16-10 (a) 所示二端口的 Z 参数矩阵, 其中 $r = 1\Omega$ 。

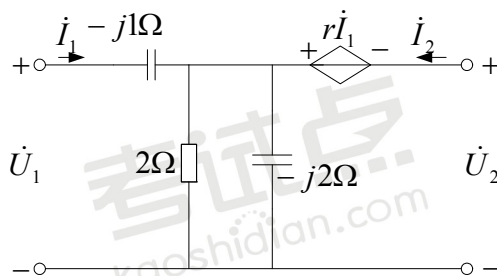


图16-10(a)

Z 参数方程为:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$Z_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} = -j1 + \frac{2 \times (-j2)}{2 - j2} = 1 - j2\Omega$$

$$Z_{21} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} = 1 - r - j1\Omega = -j1\Omega$$

$$(\dot{U}_2 = -r\dot{I}_1 + \frac{2 \times (-j2)}{2 - j2} \dot{I}_1 = (-r + 1 - j1)\dot{I}_1)$$

$$Z_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} = \frac{2 \times (-j2)}{2 - j2} = 1 - j1\Omega$$

$$(\dot{U}_1 = \frac{2 \times (-j2)}{2 - j2} \dot{I}_2)$$

$$Z_{22} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} = \frac{2 \times (-j2)}{2 - j2} = 1 - j1\Omega$$

另解：直接列写参数方程，端口用电压源替代（如图 16-10（b）所示），列出回路电流方程为：

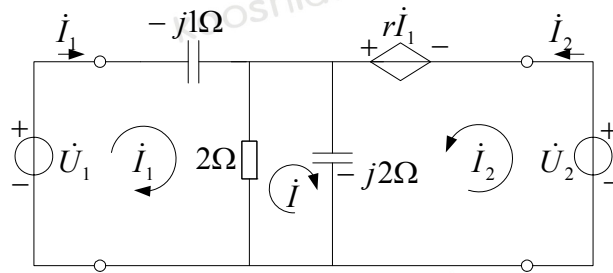


图16-10(b)

$$\begin{cases} (2-j1)\dot{I}_1 - 2\dot{I} = \dot{U}_1 & (1) \\ -j2\dot{I}_2 - j2\dot{I} = r\dot{I}_1 + \dot{U}_2 & (2) \\ (2-j2)\dot{I} - 2\dot{I}_2 - j2\dot{I}_2 = 0 & (3) \end{cases}$$

由（3）式得： $\dot{I} = \frac{1}{1-j1}\dot{I}_1 + \frac{j}{1-j1}\dot{I}_2$ ，分别代入（1）和（2），并

整理可得 Z 参数方程为：

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (1-j2)\dot{I}_1 + (1-j1)\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = -j1\dot{I}_1 + (1-j1)\dot{I}_2 \end{cases}$$

Z 参数矩阵为：

$$Z = \begin{bmatrix} 1-j2 & 1-j1 \\ -j1 & 1-j1 \end{bmatrix} \Omega$$

例 16-4 在复频域内求如图 16-11 所示双口网络的短路导纳矩阵 Y。

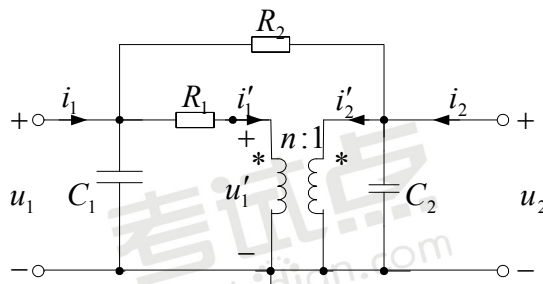


图16-11

这是一个含有理想变压器的二端口的 Y 参数的求解。

列结点电压方程:

$$\begin{cases} (sC_1 + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})U_1(s) - \frac{1}{R_2}U_2(s) - \frac{1}{R_1}U_1'(s) = I_1(s) \\ -\frac{1}{R_2}U_1(s) + (sC_2 + \frac{1}{R_2})U_2(s) = I_2(s) - I_2'(s) \\ -\frac{1}{R_1}U_1(s) + \frac{1}{R_1}U_1'(s) = -I_1'(s) \end{cases} \quad (1)$$

理想变压器特性方程的复频域形式为:

$$\begin{cases} U_1'(s) = nU_2(s) \\ I_1'(s) = -\frac{1}{n}I_2'(s) \end{cases} \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式, 消去 $U_1'(s)$, $I_1'(s)$, $I_2'(s)$ 得:

$$\begin{cases} (sC_1 + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})U_1(s) - (\frac{1}{R_2} + \frac{n}{R_1})U_2(s) = I_1(s) \\ (-\frac{1}{R_2} - \frac{n}{R_1})U_1(s) + (\frac{1}{R_2} + sC_2 + \frac{n^2}{R_1})U_2(s) = I_2(s) \end{cases}$$

所以:

$$Y = \begin{bmatrix} sC_1 + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -(\frac{1}{R_2} + \frac{n}{R_1}) \\ -(\frac{1}{R_2} + \frac{n}{R_1}) & \frac{1}{R_2} + \frac{n^2}{R_1} + sC_2 \end{bmatrix}$$

可见: $Y_{12}(s) = Y_{21}(s)$, 由于理想变压器是互易元件。

例 16-5 如图 16-12 所示, N 为一线性电阻网络, 已知当 $U_s = 8V$, $R = 3\Omega$

时, $I = 0.5A$, $I_1 = 2A$; $U_s = 18V$, $R = 4\Omega$ 时, $I = 1A$ 。求网络 N 的传输参数矩阵。

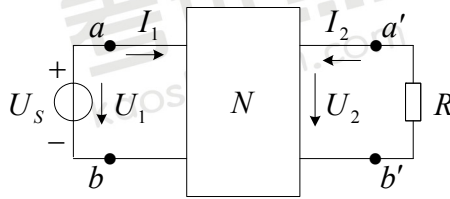


图16-12

解题指导：端口上的任一组电压、电流都要满足同一参数方程，两组测量对应列出两组方程，据此便可求出参数矩阵。

传输参数的一般形式为：

$$\begin{cases} U_1 = A\dot{U}_2 - BI_2 \\ I_1 = C\dot{U}_2 - DI_2 \end{cases} \quad \text{且 } U_2 = -RI_2 = RI$$

代入两组数据：

$$\begin{cases} U_1 = A(RI) + BI \\ I_1 = C(RI) + DI \end{cases}$$

$$\text{得到 } \begin{cases} 8 = 1.5A + 0.5B \\ 18 = 4A + B \end{cases} \quad \text{则 } \begin{cases} A = 2 \\ B = 10\Omega \end{cases}$$

由于此网络为线性电阻网络，于是有： $AD - BC = 1$ ，即 $2D - 10C = 1$

再根据方程： $1.5C + 0.5D = I_1 = 2A$

$$\text{联立求解得到： } C = \frac{7}{16}s, \quad D = \frac{43}{16}$$

$$\therefore T = \begin{bmatrix} 2 & 10\Omega \\ \frac{7}{16}s & \frac{43}{16} \end{bmatrix}$$