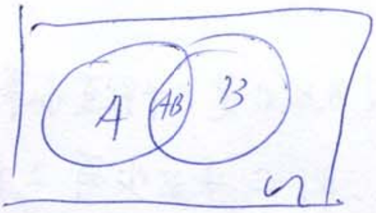
2. 见背面.　　　　ch 1.

3. 设 $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(AB)=\frac{1}{5}$, 求

① $P(A\bar{B})$ ② $P(A\cup\bar{B})$ ③ $P(\bar{A}\cup\bar{B})$ ④ $P(\bar{A}\bar{B})$



解: ① $\cancel{P(A)=P(A(B\cup\bar{B}))=}$

$P(A\bar{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$

② $P(A\cup\bar{B})=1-P(B-AB)=1-(P(B)-P(AB))=1-(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})=\frac{13}{15}$

③ $P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=\frac{4}{5}$

④ $P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=\frac{11}{30}$

4. 设A、B、C是3个随机事件，满足 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$, $P(AB)=P(BC)=0$, $P(AC)=\frac{1}{8}$. 求 $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$

解: $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)$　　$\because P(AB)=0$ 而 $ABC\subset AB$ $\therefore P(ABC)=0$

而 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$　　$\therefore$ 原式 $=\frac{3}{8}$

6. 一盒子中有10个相同的球分别标有号码 1, 2, …, 10, 从盒子中任意地不放回抽取3个球，求下列随机事件的概率：

①取出的球中最小号码是5. ②取出的球中最大号码是5.

解 ① $\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$ ② $\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}$

8. 将3个球随机地放入4个盒中，求下列随机事件的概率：　　i.e. 不超过

① 第1个盒子刚好有1个球. ② 第1、2两个盒子各有1球. ③盒中球的最大个数为2.

解: ① $\frac{C_3^1\cdot 3\cdot 3}{4^3}=(\frac{3}{4})^3=\frac{27}{64}$.　　② $\frac{C_3^1\cdot C_2^1\cdot 2}{4^3}=\frac{3}{16}$

③ $\cancel{\frac{C_3^2\cdot C_4^1\cdot C_3^1}{4^3}=\frac{9}{16}}+\frac{4\cdot 3\cdot 2}{16}?=\frac{15}{16}$　　③因为学生对此(问)的理解有歧义 max = 2 / max ≤ 2

$1-\frac{4}{4^3}$　　∴答案可能为 $\frac{15}{16}$ 或 $\frac{9}{16}$

2. 设A,B,C是3个随机事件，试用A、B、C表示下列事件.

① A,B,C中至少有2个发生；

解：$AB\cup AC\cup BC$ 或 $ABC\cup AB\bar{C}\cup \bar{A}BC\cup A\bar{B}C$

② A,B,C中刚好有1个发生；

解：$A\bar{B}\bar{C}\cup \bar{A}\bar{B}C\cup \bar{A}B\bar{C}$

③ A,B,C中刚好有两个发生；

解：$AB\bar{C}\cup \bar{A}BC\cup A\bar{B}C$

④ A,B,C中不多于1个发生；

解：$\overline{AB\cup AC\cup BC}$ 或 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup \bar{A}\bar{B}C\cup \bar{A}B\bar{C}$

⑤ A,B,C中不多于2个发生；

解：$\overline{ABC}$ 或 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup \bar{A}B\bar{C}\cup \bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup \bar{A}BC\cup A\bar{B}C$

11. 设有 $m\times n$ 个球，其中1个是黑球，1个是白球，其余都是红球，把这 $m\times n$ 个球任意地放入到 m 个盒子中，每个盒子放 n 个球，求黑球和白球刚好放在同一个盒子中的概率.

解：$$\frac{C_m^1 C_{mn-2}^{n-2}\cdot C_{mn-n}^{n}\cdots C_n^n}{C_{mn}^{n}\cdot C_{mn-n}^{n}\cdots C_n^n} = \frac{C_m^1 C_{mn-2}^{n-2}}{C_{mn}^{n}} = \frac{n-1}{mn-1}$$

13. 从6双不同的手套中取任意抽4只，求至少有2只配对的概率.

解：$$1-\frac{C_6^4\cdot 2^4}{C_{12}^4} = 1-\frac{16}{33} = \frac{17}{33}$$

4只中没有成对出现的概率.

①	②	③	④	⑤	⑥

16. 设 $P(A)=0.4$，$P(\bar{B})=0.3$，$P(\bar{A}B)=0.5$，求 $P(A|\bar{A}\cup B)$

解：$$P(A|\bar{A}\cup B)=\frac{P(A(\bar{A}\cup B))}{P(\bar{A}\cup B)} = \frac{P((A\bar{A})\cup(AB))}{P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}B)} = \frac{P(AB)}{1-0.4+1-0.3-0.5} = \frac{P(AB)}{0.8}$$

而 $P(B)=1-P(\bar{B})=0.7$

$\because AB$与$\bar{A}B$互不相容

$=P(B\Omega)=P(B(A\cup\bar{A}))=P((AB)\cup(\bar{A}B)) = P(AB)+P(\bar{A}B)=P(AB)+0.5$

$\therefore P(AB)=0.2$

$\Rightarrow P(A|\bar{A}\cup B)=\frac{1}{4}=0.25$

18. 设 $P(B)>0$，$P(A)>0$，$P(A|B)\geq P(A)$，证明：$P(B|A)\geq P(B)$.

证明：因为 $P(A)>0$，$P(B)>0$；所以 $P(A|B)$ 及 $P(B|A)$ 均有定义.

又因为 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\geq P(A)$，所以可知 $P(AB)\geq P(A)P(B)$

从而 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\geq P(B)$.

21. 有3个球，4个盒子，盒子的编号分别为1,2,3,4，将球逐个地放入盒子中，求至少有1个球的盒子的最小号码为3（即1,2号盒子是空的，3号盒子至少有1个球）的概率.

解：$$\frac{2^3-1}{4^3}=\frac{7}{64}.$$

23. 有两批相同产品各有12件和10件，在每批产品中有1件次品，任意地从第一批中抽取1件混入第二批中，然后再从第二批中抽取1件，求从第二批中抽出的1件是次品的概率.

解：设A表示"从第一批抽取1件混入第二批，再从第二批中抽出1件恰是次品"的事件.

B_0表示"……的……中的那件产品是正品"的事件

B_1 ……次……

由全概率公式

$P(A)=P(B_0)P(A|B_0)+P(B_1)P(A|B_1)$

$=\frac{11}{12}\times\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\times\frac{2}{11}=\frac{13}{132}$.

28. 有朋友自远方来访，他乘火车、轮船、汽车、飞机来的概率分别为0.3、0.2、0.1、0.4；如果他乘火车、轮船、汽车来迟到的概率分别为$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{12}$；而乘飞机来不会迟到.
求：①他不会迟到的概率；②若已知他迟到了，则他是乘火车来的概率.

解：设A表示"朋友到来不会迟到"这一事件

B_1, B_2, B_3, B_4分别表示"朋友乘火车、轮船、汽车、飞机来"这一事件

则

① $P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A|B_i)=0.3\times(1-\frac{1}{4})+0.2\times(1-\frac{1}{3})+0.1\times(1-\frac{1}{12})+0.4\times1$

$=\frac{9}{20}+\frac{8}{20}=\frac{17}{20}=0.85$ $\quad\therefore P(\bar{A})=\frac{3}{20}$

② $P(B_1|\bar{A})=\frac{P(B_1)P(\bar{A}|B_1)}{P(\bar{A})}=\frac{0.3\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{20}}=\frac{1}{2}=0.5$

29. 在炮击中，距目标250m、200m、150m处射击的概率分别为0.1，0.7，0.2，而在上述各处射击时命中目标的概率分别为0.05，0.1，0.2，求：
①目标被击中的概率；②若已知目标被击中，则击中目标的炮弹是由距目标250m射击的概率.

解：设A表示"目标被击中"这一事件，B_1、B_2、B_3表示"距目标250m、200m、150m处射击"这些事件.

① $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.1\times0.05+0.7\times0.1+0.2\times0.2=0.115$

② $P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{0.1\times0.05}{0.115}=\frac{1}{23}\approx0.0435$

36. 某仪器有3个灯泡，烧坏第1、第2、第3个灯泡的概率分别为0.1，0.2，0.3，各个灯泡是否被烧坏相互独立，当烧坏1，2，3个灯泡时，仪器发生故障的概率分别为0.25，0.6，0.9，求

① 仪器发生故障的概率

② 若已知仪器发生故障，则烧坏1个灯泡的概率

解：记A表示"仪器发生故障"的~~事件~~。

B_i 表示"烧坏了i个灯泡"这一事件 $(i=1,2,3)$

C_i 表示"烧坏了第i个灯泡"这一事件 $(i=1,2,3)$

则 $B_1 = C_1\bar{C_2}\bar{C_3} \cup \bar{C_1}C_2\bar{C_3} \cup \bar{C_1}\bar{C_2}C_3$；$B_2 = C_1C_2\bar{C_3} \cup C_1\bar{C_2}C_3 \cup \bar{C_1}C_2C_3$

$B_3 = C_1C_2C_3$

$\Rightarrow P(B_3) = 0.1\times0.2\times0.3 = 0.006$

$P(B_1) = 0.1\times0.8\times0.7 + 0.9\times0.2\times0.7 + 0.9\times0.8\times0.3 = 0.398$

$P(B_2) = 0.1\times0.2\times0.7 + 0.1\times0.8\times0.3 + 0.9\times0.2\times0.3 = 0.092$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A|B_i)$$

$$= 0.398\times0.25 + 0.092\times0.6 + 0.006\times0.9 = 0.1601$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{0.398\times0.25}{0.1601} = 0.6215.$$

ch2

1. 问A为何值时，$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\frac{x}{5}}, & 0\le x<2\\ A, & x\ge 2\end{cases}$ 是一个随机变量的分布函数？并求 $P(X=2)$

解：$F(+\infty)=1=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=A$

$$P(X=2)=P(X\le 2)-P(X<2)=F(2)-F(2-0)=A-\lim_{x\to 2-0}(1-e^{-\frac{x}{5}})$$
$$=1-(1-e^{-\frac{2}{5}})=e^{-\frac{2}{5}}$$

5. 设离散型随机变量X的分布律为 $P(X=k)=c\frac{2^k}{k!}$，$k=1,2,\ldots$ 求常数c.

解：$\sum\limits_{k=1}^{\infty}c\frac{2^k}{k!}=c[e^2-1]=1 \quad \therefore c=\frac{1}{e^2-1}$

7. 设盒子中有10个球，分别编有号码1, 2, …, 10；从中任取5个球，求：
① 取出的5个球中最大号码X的分布律；
② 取出的5个球中最小号码Y的分布律.

解：① $P(X=k)=\frac{C_{k-1}^4}{C_{10}^5}$，$k=5,6,\cdots,10$ 或

X	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{252}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{5}{84}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{70}{252}$	$\frac{126}{252}=\frac{1}{2}$

$\frac{15}{252}$ $\frac{35}{252}$ $\frac{5}{18}$

② $P(Y=k)=\frac{C_{10-k}^4}{C_{10}^5}$，$k=1,2,\cdots,6$ 或

Y	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{84}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{1}{252}$

11. 已知10个电子元件中有7个合格品，3个次品，每次随机地抽取1个测试，测试后不放回，直到把3个次品都找到为止，求需要测试的次数X的分布律.

解：$P(X=k)=C_{k-1}^2 / C_{10}^3=\frac{(k-1)(k-2)}{2\times 120}=\frac{(k-1)(k-2)}{240}$；$k=3,4,\cdots,10$

或 $P(X=k)=\frac{P_7^{10-k}\cdot 3\cdot P_{k-1}^{k-1}}{10!}=\frac{(k-1)(k-2)}{240}$

19. 某产品的次品率为0.001，从中有放回地取出800件，用泊松分布近似求取出的800件产品中次品数不超过2的概率.

解：设随机变量X表示取出的800件产品中的次品数，则$X \sim b(800, 0.001)$

$$\lambda = 800 \times 0.001 = 0.8$$

$$P(X \le 2) = \sum_{k=0}^{2} C_{800}^{k}\, 0.001^{k}\, 0.999^{800-k}$$

$$\approx \sum_{k=0}^{2} \frac{0.8^k}{k!} e^{-0.8} = 0.9526.$$

29. 设连续型随机变量X的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} Ae^{x}, & x<0 \\ B, & 0 \le x < 1 \\ 1-Ae^{-(x-1)}, & x \ge 1 \end{cases}$

求① 常数A, B的值；

② X的概率密度函数$f(x)$；

③ $P(X > \frac{1}{3})$

解：① $\left.\begin{array}{l} F(0-0) = A = F(0+0) = B \\ F(1-0) = B = F(1+0) = 1-A \end{array}\right\} \Rightarrow A = B = \frac{1}{2}$

② 在$f(x)$的连续点处，$F'(x) = f(x)$

$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & x<0 \\ \frac{1}{2}e^{-(x-1)} & x>1 \\ 0 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$

注：f在$x=0$与$x=1$处的值无什么特殊要求.

"几乎处处唯一"

③ $P(X>\frac{1}{3}) = 1 - P(X \le \frac{1}{3}) = 1 - F(\frac{1}{3}) = 1 - B = \frac{1}{2}$.

30. 设连续型随机变量X的概率密度函数为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty < x < +\infty$

求X的分布函数$F(x)$.

解：$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x}, & x \ge 0 \\ \frac{1}{2}e^{x}, & x<0 \end{cases}$

$\therefore$ 当$x<0$时，

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{t}dt = \frac{1}{2}e^{x}$$

当$x \ge 0$时，

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{t}dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-t}dt = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}e^{-t}\right)\Big|_{0}^{x} = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}.$$

35. 设随机变量X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，且已知$P(X\le -1.6)=0.036$，$P(X\le 5.9)=0.758$
求$P(X>0)$

解：$P(X\le -1.6)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{-1.6-\mu}{\sigma})=\Phi(\frac{-1.6-\mu}{\sigma})=0.036 \Rightarrow 1-\Phi(\frac{1.6+\mu}{\sigma})=0.036$.

$\Rightarrow \Phi(\frac{1.6+\mu}{\sigma})=0.964$

$\Downarrow$

$\frac{1.6+\mu}{\sigma}=1.8$

$P(X\le 5.9)=\Phi(\frac{5.9-\mu}{\sigma})=0.758 \Rightarrow \frac{5.9-\mu}{\sigma}\doteq 0.7$

$\therefore \mu=3.8$ ，$\sigma=3$

从而$P(X>0)=1-P(X\le 0)=1-\Phi(\frac{0-3.8}{3})=1-[1-\Phi(\frac{3.8}{3})]=\Phi(1.2667)$

$\doteq 0.89796$

37. 设测量到某一目标的距离时发生的误差X服从正态分布$N(20,40^2)$，(单位：m)：
① 测量误差的绝对值不超过30m的概率；
② 在3次独立测量中至少有1次误差的绝对值不超过30m的概率.

解：① $P(|X|\le 30)=P(-30\le X\le 30)=\Phi(\frac{30-20}{40})-\Phi(\frac{-30-20}{40})$

$=\Phi(0.25)-\Phi(-1.25)=\Phi(0.25)+\Phi(1.25)-1$

$\doteq 0.59871+0.89435-1=0.49306$

③ 设随机变量Y表示在3次独立测量中误差的绝对值不超过30m的次数

则$Y\sim b(3,p)$ 其中$p=0.49306 \Rightarrow 1-p=0.50694$

$\therefore P(Y\ge 1)=1-P(Y<1)=1-P(Y=0)=1-C_3^0p^0(1-p)^3=1-0.1303=\cancel{0.98013}$ 0.86972

41. 设随机变量X服从参数$\lambda=2$的指数分布$e(2)$，求$Y=2X+1$的概率密度$f_Y(y)$.

解：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X+1\le y)=P(X\le\frac{y-1}{2})=\int_{-\infty}^{\frac{y-1}{2}}f_X(x)dx$ $\frac{y-1}{2}>0\Rightarrow y>1$.

$\therefore$ 当$y\le 1$时，$F_Y(y)=0$

当$y\ge 1$时，$F_Y(y)=\int_0^{\frac{y-1}{2}}2e^{-2x}dx=1-e^{1-y}$

$y>1$.

指数分布：
$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}0 & y<1\\ e^{1-y} & y\ge 1\end{cases}$

43. 设随机变量X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，求$Y=e^X$的概率密度函数$f_Y(y)$.

解：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)$ $\therefore$ 当$y\le 0$时，$F_Y(y)=0$

当$y>0$时，$F_Y(y)=P(X\le \ln y)=\int_{-\infty}^{\ln y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \frac{1}{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & y>0.\end{cases}$$

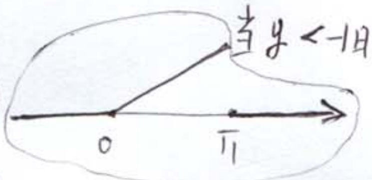
49. 设随机变量X的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\pi^2}, & 0\le x\le\pi\\ 0, & 其他\end{cases}$

求$Y=\sin X$的概率密度函数$f_Y(y)$.

解：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sin X\le y)$， $\therefore$当$y\ge 1$时，$F_Y(y)=1$

当$y<-1$时，$F_Y(y)=0$

由X的概率密度$f(x)$可知 X在$[0,\pi]$上非零，其他处均为0



$\therefore$当$y<0$时，$F_Y(y)=0$

当 $y\in[0,1)$时，

$F_Y(y)=P(0\le X\le \arcsin y \cup \pi-\arcsin y\le X\le\pi)$

$=P(0\le X\le\arcsin y)+P(\pi-\arcsin y\le X\le\pi)$

$=\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}dx=\frac{2\arcsin y}{\pi}$

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\ge 1或\ y<0时\\ \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 当y\in[0,1)时\end{cases}$$

ch3

1. 设二维随机向量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\arctan\frac{y}{2}+\frac{\pi}{2}\right),\quad -\infty<x,y<+\infty$$

求常数A,B.

解: $\begin{cases} F(+\infty,+\infty)=1=A(B+\frac{\pi}{2})(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=A\pi(B+\frac{\pi}{2}) \\ F(-\infty,y)=0=A(B-\frac{\pi}{2})(\arctan\frac{y}{2}+\frac{\pi}{2}),\quad \forall y\in\mathbb{R} \\ \Rightarrow F(-\infty,0)=0=A(B-\frac{\pi}{2})(0+\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}A(B-\frac{\pi}{2}) \end{cases}$

$\therefore B=\frac{\pi}{2}$, $A=\frac{1}{\pi^2}$.

5. 将2封信任意地投到3个号码分别是1,2,3的3个信箱中，用X和Y分别表示投入到第1,2号信箱中信的数目，求随机变量X和Y的联合分布律.

解: $P(X=i,Y=j)$

"多三项分布"

$=P(X=i)P(Y=j\mid X=i)$

$=\begin{cases} C_2^i(\frac{1}{3})^i C_{2-i}^j(\frac{1}{3})^j\cdot(\frac{1}{3})^{2-i-j}=\frac{2!}{i!\,j!\,(2-i-j)!}(\frac{1}{3})^2 & \text{当 } i,j=0,1,2 \text{ 且 } i+j\le 2 \text{ 时} \\ 0, & \text{若 } i+j>2 \end{cases}$

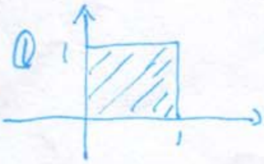
$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

8. 设二维连续型随机向量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求: ① 常数k ② (X,Y)的联合分布函数$F(x,y)$; ③ $P(Y\le X)$.

解: ①



$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=1=\int_0^1dx\int_0^1 kxy\,dy=k\int_0^1x\,dx\int_0^1y\,dy=\frac{k}{4}$

$\therefore k=4$

② $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dy$

$=\begin{cases} 0, & \text{当 } x<0 \text{ 或 } y<0 \text{ 时} \\ \int_0^x 4x\,dx\int_0^y y\,dy=x^2y^2, & \text{当 } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1 \text{ 时} \\ \int_0^1 4x\,dx\int_0^y y\,dy=y^2, & \text{当 } x>1,\ 0\le y\le 1 \text{ 时} \\ \int_0^x 4x\,dx\int_0^1 y\,dy=x^2, & \text{当 } 0\le x\le 1,\ y>1 \text{ 时} \\ 1, & \text{当 } x\ge 1 \text{ 且 } y\ge 1 \text{ 时} \end{cases}$

③

$P(Y\le X)$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}f(x,y)dy$

$=\int_0^1dx\int_0^x 4xy\,dy$

$=\int_0^1 2x\cdot x^2dx=\frac{2}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{2}$

11. 设二维离散型随机向量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P(X=i,\ Y=j) = \frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j}, \quad i,j=0,1,\cdots,n,\ i+j\le n$$

其中 $p_i>0\ (i=1,2,3)$, $p_1+p_2+p_3=1$. 求:

① X 的边缘分布律; ② 在 $Y=j$ 下, X 的条件分布律.

解: ① $$P(X=i) = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j}$$

$$= \frac{n!}{(n-i)!\,i!} p_1^i \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(n-i)!}{j!\,(n-i-j)!} p_2^j p_3^{n-i-j} = \frac{n!}{i!(n-i)!} p_1^i \sum_{j=0}^{n-i} C_{n-i}^j p_2^j p_3^{n-i-j}$$

$$= C_n^i p_1^i (p_2+p_3)^{n-i}; \quad i=0,1,\cdots,n$$

$$P(Y=j) = \sum_{i=0}^{n-j} \frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!} p_2^j \sum_{i=0}^{n-j} \frac{(n-j)!}{i!(n-j-i)!} p_1^i p_3^{n-j-i}$$

$$= C_n^j p_2^j \sum_{i=0}^{n-j} C_{n-j}^i p_1^i p_3^{n-j-i} = C_n^j p_2^j (p_1+p_3)^{n-j}; \quad j=0,1,\cdots,n$$

② $\forall y \in \{0,1,\cdots,n\}$

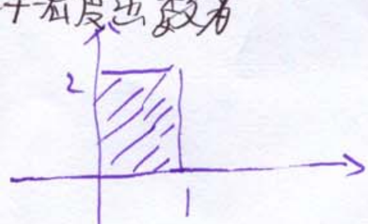
$$P(X=i \mid Y=j) = \frac{P(X=i, Y=j)}{P(Y=j)} = \frac{\frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j}}{C_n^j p_2^j (p_1+p_3)^{n-j}}$$

$$= \frac{(n-j)!}{i!(n-i-j)!} \frac{p_1^i p_3^{n-i-j}}{(p_1+p_3)^{n-j}} = C_{n-j}^i \left(\frac{p_1}{p_1+p_3}\right)^i \left(\frac{p_3}{p_1+p_3}\right)^{n-j-i}$$

$i=0,1,\cdots,n-j$.

13. 设二维连续型随机向量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+\frac{1}{3}xy, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



求 ① X 和 Y 的边缘概率密度

② X 和 Y 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$. ③ $P(Y\le\frac{1}{2} \mid X\le\frac{1}{2})$.

解: ① $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} 0, & \text{当 } x\le 0 \text{ 或 } x\ge 1 \text{ 时} \\ \int_0^2 (x^2+\frac{1}{3}xy)\,dy = 2x^2+\frac{2}{3}x, & \text{当 } x\in[0,1] \text{ 时} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{当 } y\le 0 \text{ 或 } y\ge 2 \text{ 时} \\ \int_0^1 (x^2+\frac{1}{3}xy)\,dx = \frac{1}{3}+\frac{y}{6}, & \text{当 } y\in[0,2] \text{ 时.} \end{cases}$$

② $\forall y\in[0,2]$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{6}{2+y}f(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{2+y}(x^2+\frac{1}{3}xy)=\frac{2x}{2+y}\cdot(3x+y) & \text{当 } x\in[0,1]\text{ 时}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$\forall x\in[0,1]$

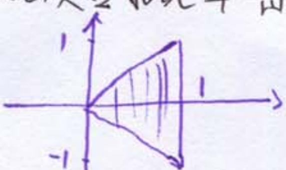
$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f(x,y)}{2x^2+\frac{2}{3}x}=\begin{cases}\frac{3}{2x(3x+1)}(x^2+\frac{1}{3}xy)=\frac{3x+y}{2(3x+1)} & \text{当 } y\in[0,2]\text{ 时}\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$$

③

$$P(Y\le\tfrac{1}{2}\mid X\le\tfrac{1}{2})=\frac{P(Y\le\frac{1}{2},X\le\frac{1}{2})}{P(X\le\frac{1}{2})}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^{\frac{1}{2}}(x^2+\frac{1}{3}xy)\,dy}{\int_0^{\frac{1}{2}}(2x^2+\frac{2}{3}x)\,dx}=\frac{5/192}{1/6}=\frac{5}{32}.$$

14. 设二维连续型随机向量(X,Y)的联合概率密度函数为

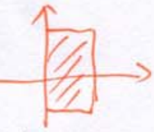
$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|\le x,\ 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



错误

注：课本上将 $|y|\le x$ 印刷为 $|y|\le 1$

此时 $\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx\,dy=2\ne 1$ ∴不可以!



求：① X和Y的边缘概率密度 ② X和Y的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$.

解：①

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}0, & \text{当 } x\le 0 \text{ 或 } x\ge 1\text{ 时}\\ \int_{-x}^{x}1\,dy=2x, & \text{当 } x\in(0,1)\text{ 时}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}0, & \text{当 } y\ge 1 \text{ 或 } y\le -1\text{ 时}\\ \int_{y}^{1}1\,dx=1-y, & \text{当 } y\in(0,1)\text{ 时}\\ \int_{-y}^{1}1\,dx=1+y, & \text{当 } y\in(-1,0)\text{ 时}\end{cases}=\begin{cases}0, & \text{当 } |y|\ge 1\text{ 时}\\ 1-|y|, & \text{当 } |y|\le 1\text{ 时}\end{cases}$$

② $\forall y\in(-1,0)$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f(x,y)}{1-|y|}=\begin{cases}\frac{1}{1+y} & \text{当 } x\in(-y,1)\text{ 时}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$\forall y\in(0,1)$

$$f_{X|Y}(x,y)=\frac{f(x,y)}{1-|y|}=\begin{cases}\frac{1}{1-y}, & \text{当 } x\in(y,1)\text{ 时}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

综合为：

$\forall y\in(-1,1)$

$$f_{X|Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{1-|y|}, & \text{当 } x\in(|y|,1)\text{ 时}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$\forall x \in (0,1)$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f(x,y)}{2x}=\begin{cases}\frac{1}{2x} & y\in(-x,x)\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

22. 设X,Y是相互独立同服从几何分布的随机变量，即他们共同的分布律为

$$P(X=k)=pq^{k-1},\ k=1,2\cdots$$

其中$p\in(0,1)$，$q=1-p$. 求：

① $Z_1=\min\{X,Y\}$的分布律；② $Z_2=X+Y$的分布律.

解：② $P(Z_2=k)=P(X+Y=k)=P\left(\bigcup_{i=1}^{k-1}(X=i,Y=k-i)\right)=\sum_{i=1}^{k-1}P(X=i,Y=k-i)$

$$=\sum_{i=1}^{k-1}P(X=i)P(Y=k-i)=\sum_{i=1}^{k-1}pq^{i-1}\cdot pq^{k-i-1}=p^2q^{k-2}\sum_{i=1}^{k-1}1=(k-1)p^2q^{k-2}$$

$k=2,3,\cdots\cdots$

① 当$Z_1=\min\{X,Y\}=k$时

$\Leftrightarrow\{X=k,Y>k\}$或$\{X\geq k,Y=k\}$

$\therefore P(Z_1=k)=P(X=k,Y>k)+P(X\geq k,Y=k)$

$$=P(X=k)P(Y>k)+P(X\geq k)P(Y=k)$$

$$=pq^{k-1}\left(\sum_{i=k+1}^{\infty}pq^{i-1}\right)+\left(\sum_{i=k}^{+\infty}pq^{i-1}\right)pq^{k-1}$$

$$=pq^{k-1}p\frac{q^k}{1-q}+p\frac{q^{k-1}}{1-q}pq^{k-1}=pq^{2(k-1)}[1+q],\ k=1,2,\cdots$$

25. 设X,Y是相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\leq 0\end{cases}$$

求$Z=X+Y$的概率密度函数$f_Z(z)$.

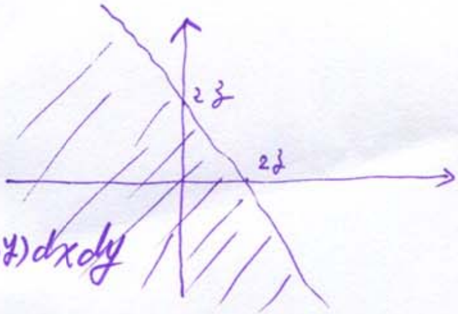
解：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,dx$ 分析：$f_X(x)f_Y(z-x)\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}f_X(x)\neq 0\\ f_Y(z-x)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<1\\ z-x>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<1\\ x<z\end{cases}$

$$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}0 & \text{当}z\leq 0\text{时}\\ \int_0^z 1\cdot e^{-(z-x)}dx & \text{当}z\in(0,1)\text{时}\\ \int_0^1 1\cdot e^{-(z-x)}dx & \text{当}z\geq 1\text{时}\end{cases}=\begin{cases}0, & z\leq 0\\ 1-e^{-z}, & z\in(0,1)\\ e^{-z}(e-1), & z\geq 1\end{cases}.$$

26. 设X，Y是相互独立同服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布的随机变量，即其共同的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

求 $Z=\frac{X+Y}{2}$ 的概率密度函数.



解：$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le 2z)=\iint\limits_{x+y\le 2z} f(x,y)\,dx\,dy$

$=\iint\limits_{x+y\le 2z} f_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy$；而 $f_X(x)f_Y(y)\ne 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_X(x)\ne 0 \\ f_Y(y)\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$

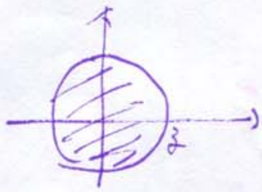
$\therefore F_Z(z)=\begin{cases} 0, & z\le 0 \\ \int_0^{2z} e^{-x}dx\int_0^{2z-x} e^{-y}\,dy=\int_0^{2z} e^{-x}(1-e^{x-2z})dx=1-e^{-2z}-2ze^{-2z}, & \text{当} z>0 \text{时} \end{cases}$

$\therefore f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases} 0, & \text{当} z\le 0 \text{时} \\ 4ze^{-2z}, & \text{当} z>0 \text{时}. \end{cases}$

32. 设X，Y是相互独立同服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$ 的随机变量，求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

$\because X,Y\sim N(0,\sigma^2)$

$\therefore f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\ x\in\mathbb{R}$



解：$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\sqrt{X^2+Y^2}\le z)=\begin{cases} 0, & \text{当} z\le 0 \text{时} \\ P(X^2+Y^2\le z^2), & \text{当} z>0 \text{时} \end{cases}$

而当 $z>0$ 时，

$P(X^2+Y^2\le z^2)=\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2} f_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy=\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dx\,dy$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{z} r\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\,dr=1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$.

$\therefore f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases} 0, & \text{当} z\le 0 \text{时} \\ \frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & \text{当} z>0 \text{时}. \end{cases}$