第2章 逻辑代数基础

第一讲：逻辑代数基本知识

第2章 逻辑代数基础

- 1 逻辑代数的基本知识
- 2 逻辑函数及其描述方法
- 3 逻辑函数的简化

§2.1 逻辑代数及运算规则

数字电路要研究的是电路的输入输出之间的因果关系, 也就是逻辑关系，相应的研究工具是逻辑代数，所以数字电路又称逻辑电路。

逻辑代数是19世纪中叶英国数学家布尔首先提出的，所以又叫布尔代数。

逻 辑 关 系 是 如 何 来 表 述 的 呢?

如果决定某一件事F发生或成立与否的条件

有多个,分别用A、B、C表示，并规定：

F＝“ … 事件发生（或成 …

“1” “0”

逻辑1 逻辑0

… 不发生 …

… 代表条件 …

正逻辑;

负逻辑

A＝B＝C＝“0”代表条件不具备；

那麽F与ABC之间就有以下三种基本的逻辑

关系：

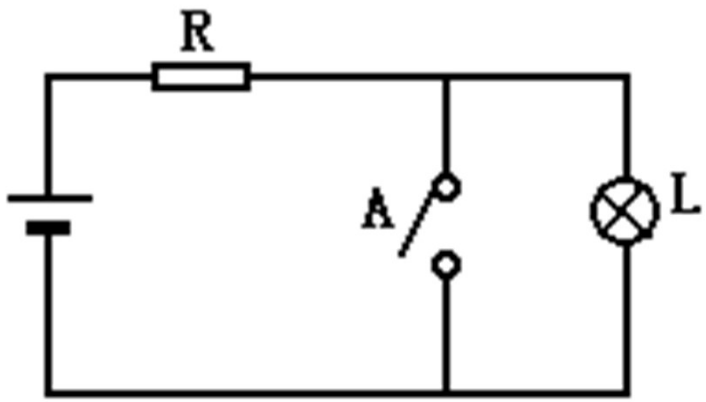
2.1.1 逻辑代数的基本运算

$$\text{三种基本运算}\begin{cases}\text{非运算（逻辑反）}\\ \text{与运算（逻辑乘）}\\ \text{或运算（逻辑加）}\end{cases}$$

1. 非运算

* 若前提为真，结论则为假；若前提为假，结论反而为真。

*电路实例



A=1 开关接通，**A=0** 开关断开

L=1 灯亮，**L=0** 灯灭

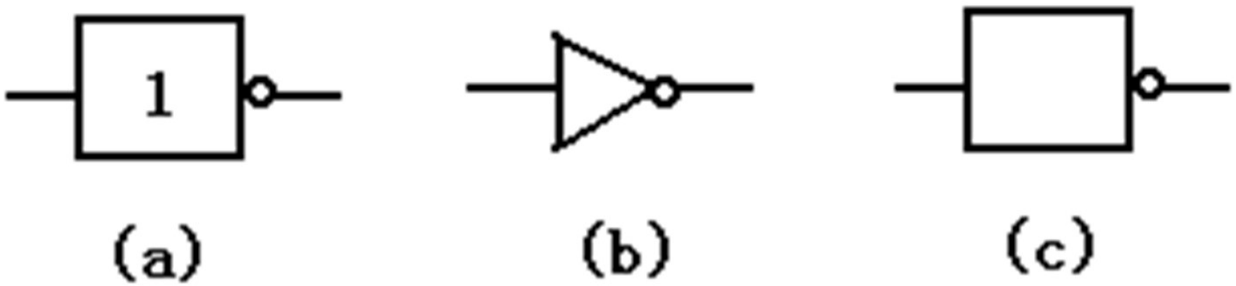
*真值表

A	L
0	1
1	0

*函数式

$$L = f(A) = \overline{A}$$

*非 门　　实现非逻辑的电路称为非门

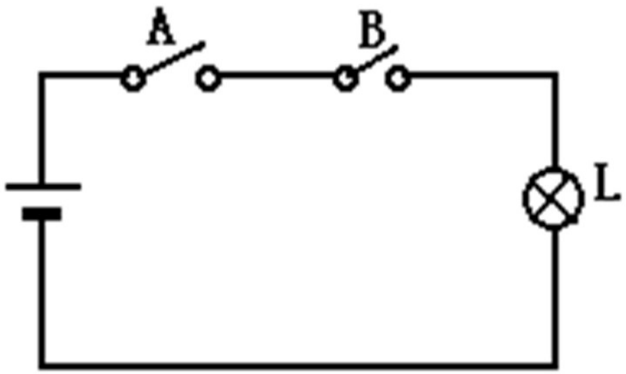


逻辑符号

2.与运算

* 所有前提皆为真,结论才为真.

*电路实例



*真值表

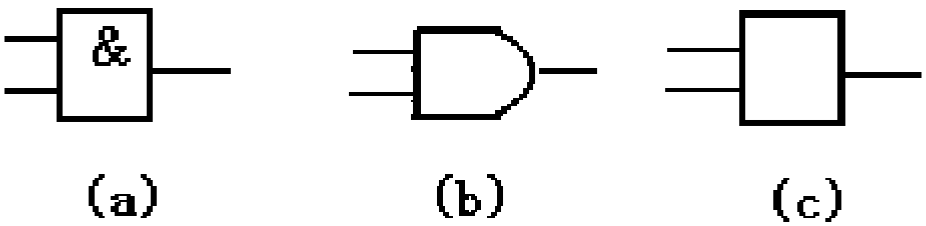
A	B	L
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

*函数式

$$L = A \times B\ (或\ A \cdot B,\ 或\ AB)$$

* 与门

实现与逻辑的电路称为与门.

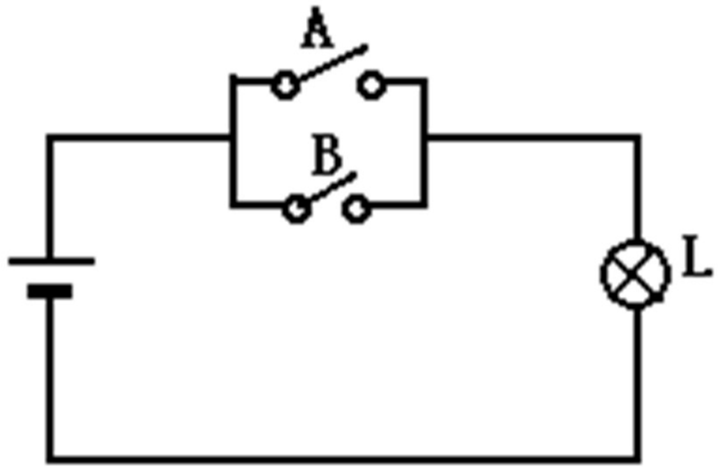


与门逻辑符号

3.或运算

*若一个或一个以上前提为真,则结论为真.

*电路实例



*真值表

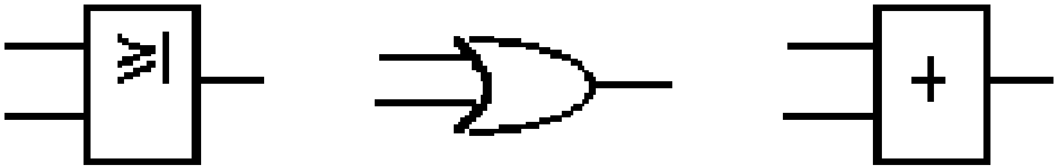
A	B	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

* 函数式

$$L = A + B\ (\text{或}\ A \vee B,\ \text{或}\ A \cup B)$$

* 或门

实现或逻辑的电路称为或门.



或门逻辑符号

以下逻辑不属基本逻辑关系，但出现的频率较高。

4.“异或” 运算

* 只有当两个输入变量不同时，结果才为真。

* 真值表

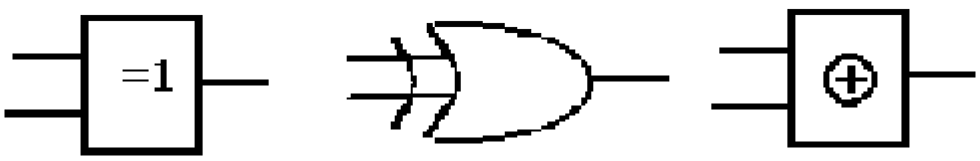
A	B	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

* 函数式

$$L = A\overline{B} + \overline{A}B = A \oplus B$$

* 异或门

实现异或逻辑的电路称为异或门.



异或门逻辑符号

5.“同或”运算

* 只有当两个输入变量相同时，结果才为真。

* 真值表

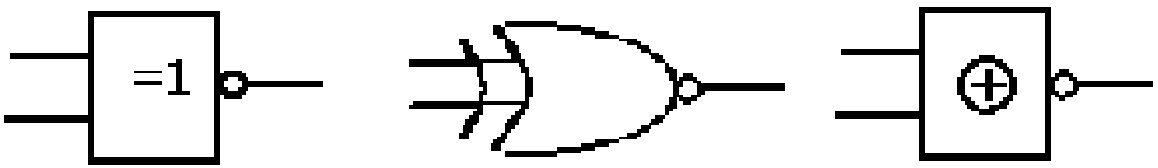
A	B	L
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

* 函数式

$$L = AB + \overline{A}\,\overline{B} = \overline{A \oplus B} = A \odot B$$

* 同或门(异或非门)

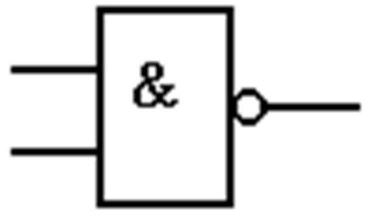
实现同或逻辑的电路称为同或门.



同或门逻辑符号

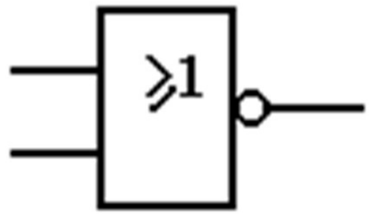
6.与非运算

$$L = \overline{A \cdot B}$$



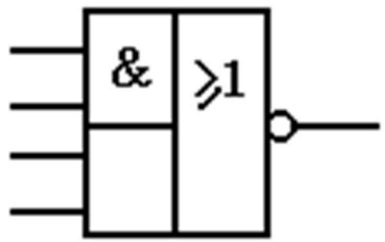
7.或非运算

$$L = \overline{A + B}$$



8.与或非运算

$$L = \overline{A \cdot B + C \cdot D}$$



2.1.2 逻辑代数的基本公式

1.常量之间的关系（公理）

与运算： $0 \cdot 0 = 0 \qquad 0 \cdot 1 = 0 \qquad 1 \cdot 0 = 0 \qquad 1 \cdot 1 = 1$

或运算： $0 + 0 = 0 \qquad 0 + 1 = 1 \qquad 1 + 0 = 1 \qquad 1 + 1 = 1$

非运算： $1' = 0 \qquad 0' = 1$

请特别注意与普通代数不同之处

2.基本公式

0-1 律： $\begin{cases} A+0=A \\ A\cdot 1=A \end{cases}$ $\begin{cases} A+1=1 \\ A\cdot 0=0 \end{cases}$

互补律： $A+A'=1$ $A\cdot A'=0$

重叠律： $A+A=A$ $A\cdot A=A$

分别令**A=0**及**A=1**代入这些公式，即可证明它们的正确性。

还原律（双重否定律）： $(A')'=A$

3.基本定理

交换律：$\begin{cases} A\cdot B = B\cdot A \\ A+B = B+A \end{cases}$

结合律：$\begin{cases} (A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C) \\ (A+B)+C = A+(B+C) \end{cases}$

分配律：$\begin{cases} A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C \\ A+B\cdot C = (A+B)\cdot(A+C) \end{cases}$

反演律（摩根定律）：$\begin{cases} (A\cdot B)' = A'+B' \\ (A+B)' = A'\cdot B' \end{cases}$

利用真值表很容易证明这些公式的正确性。如证明**A·B=B·A**：

A	B	AB	BA
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

求证：（17式）　$A+BC=(A+B)(A+C)$

证明: 右边 $=(A+B)(A+C)$

$=AA+AB+AC+BC$

$=A+A(B+C)+BC$

$=A(1+B+C)+BC$

$=A\cdot 1+BC$

$=A+BC$ **=左边**

2.1.3 逻辑代数的常用公式

1.并项公式 $$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$$

2.消冗余因子公式 $$A + \overline{A}B = A + B$$

如果某与项的一个因子恰好与另一个与项互补，则该因子是冗余的，可以消去。

3.消冗余项公式 $$AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$$

如果某两个与项有一个因子互补，而第三个与项恰好是这两个与项中不互补的全体因子的乘积，则第三项是冗余的，可以消去。

3. $AB+A'C+BC=AB+A'C$

$AB+A'C+BCD=AB+A'C$

证明:

$$
\begin{aligned}
& AB+A'C+BC \\
&=AB+A'C+(A+A')BC \\
&=AB+A'C+ABC+A'BC \\
&=AB(1+C)+A'C(1+B) \\
&=AB+A'C
\end{aligned}
$$

4. A(A+B)=A

证明：$A(A+B) = A\cdot A + A\cdot B$

$= A + A\cdot B$

$= A(1+B)$

$= A$

5. $A\cdot(A\cdot B)'=A\cdot B'$

$A'\cdot(A\cdot B)'=A'$

证明:

$$A\cdot(A\cdot B)'=A\cdot(A'+B')$$
$$=A\cdot A'+A\cdot B'$$
$$=A\cdot B'$$

$$A'\cdot(A\cdot B)'=A'\cdot(A'+B')$$
$$=A'\cdot A'+A'\cdot B'$$
$$=A'\cdot(1+B')$$
$$=A'$$

2.1.4 逻辑代数的基本规则(定理)

1.置换规则(代入规则)

任何一个变量**x** 的等式，如果将等式中所有出现**x**的地方都代之以一个逻辑函数**G**，则此等式仍然成立。

例. 将函数$G=BC$代入等式$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$中的B，证明等式依然成立

$$左=\overline{AB}$$
$$=\overline{A(BC)}$$
$$=\overline{A}+\overline{BC}$$
$$=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$$

$$右=\overline{A}+\overline{B}$$
$$=\overline{A}+\overline{BC}$$
$$=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$$

表明反演律可推广到**n**个变量。

2. 对偶规则

将任一函数F中所有的‘+’和‘·’互换，　‘0’和‘1’互换；而变量保持不变，则可得一新的函数表达式F’。称F’为原函数F的对偶函数。

例　已知$F=\overline{A}\,\overline{B}+CD$,求$F$的对偶式$F'$

$$F'=\left(\overline{A}+\overline{B}\right)\left(C+D\right)$$

* 两个逻辑函数相等，则它们各自的对偶函数也必然相等。

例　AB+AC=A（B+C）

很容易证明　（A+B）·（A+C）=A+BC

3. 反演规则

将任一函数F中所有的'+'和'·'互换，'0'和'1'互换；且原变量与反变量互换，则可得到F的反函数$\overline{F}$。

例1　已知$F=\overline{A}\,\overline{B}+CD$, 求$F$的反函数$\overline{F}$.

$$\overline{F}=(A+B)(\overline{C}+\overline{D})$$

例2　求证: $\overline{A\oplus B}=A\odot B$

$$\overline{A\oplus B}=\overline{A\overline{B}+\overline{A}B}=($$

提供了一个求反

函数的途径所以

是一条重要的定律

*反演规则是反演律的推 求出
一个函数的反函数。

2.1.5 逻辑运算的完备集

定义：一个代数系统，如果仅用它所定义的的运算中的某一组就能实现所有的运算，则这一组运算是完备的，称为完备集。

例如，对逻辑代数系统而言，*{与，或，非}*是完备集；

{与，非}？？

{或，非}？？

{与，或}？？

注意：

$$A + B = A + C \qquad B = C ? ?$$

$$A \cdot B = A \cdot C \qquad B = C ? ?$$

逻辑代数中没有减法与除法。