振动合成

一、 两个同方向同频率简谐振动的合成

*三、多个同方向同频率简谐运动的合成

四、两个同方向不同频率简谐运动的合成

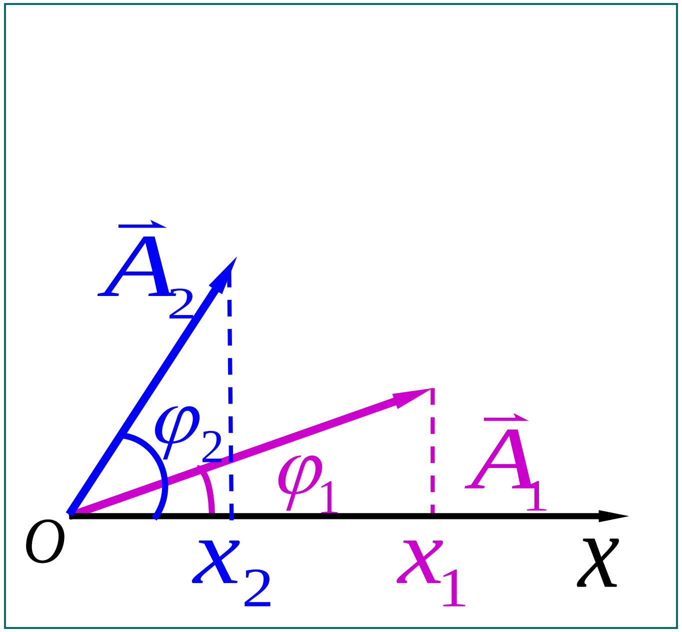
二、 两个相互垂直的同频率的简谐运动的合成

一 两个同方向同频率简谐运动的合成

设一质点同时参与两独立的同方向、同频率的简谐振动：

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

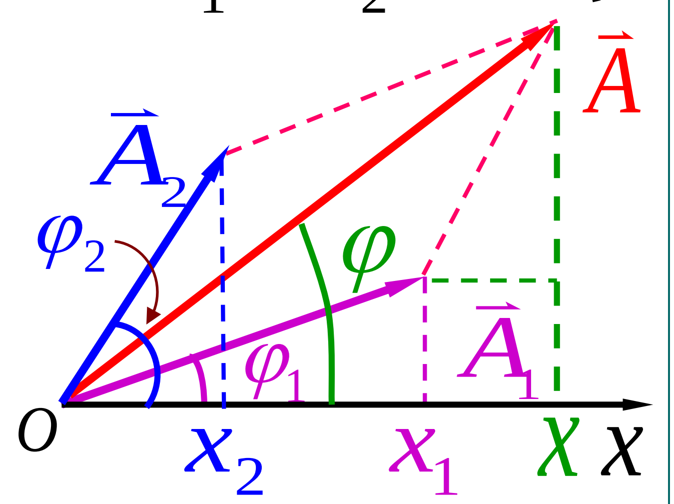


两振动的位相差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ =常数

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

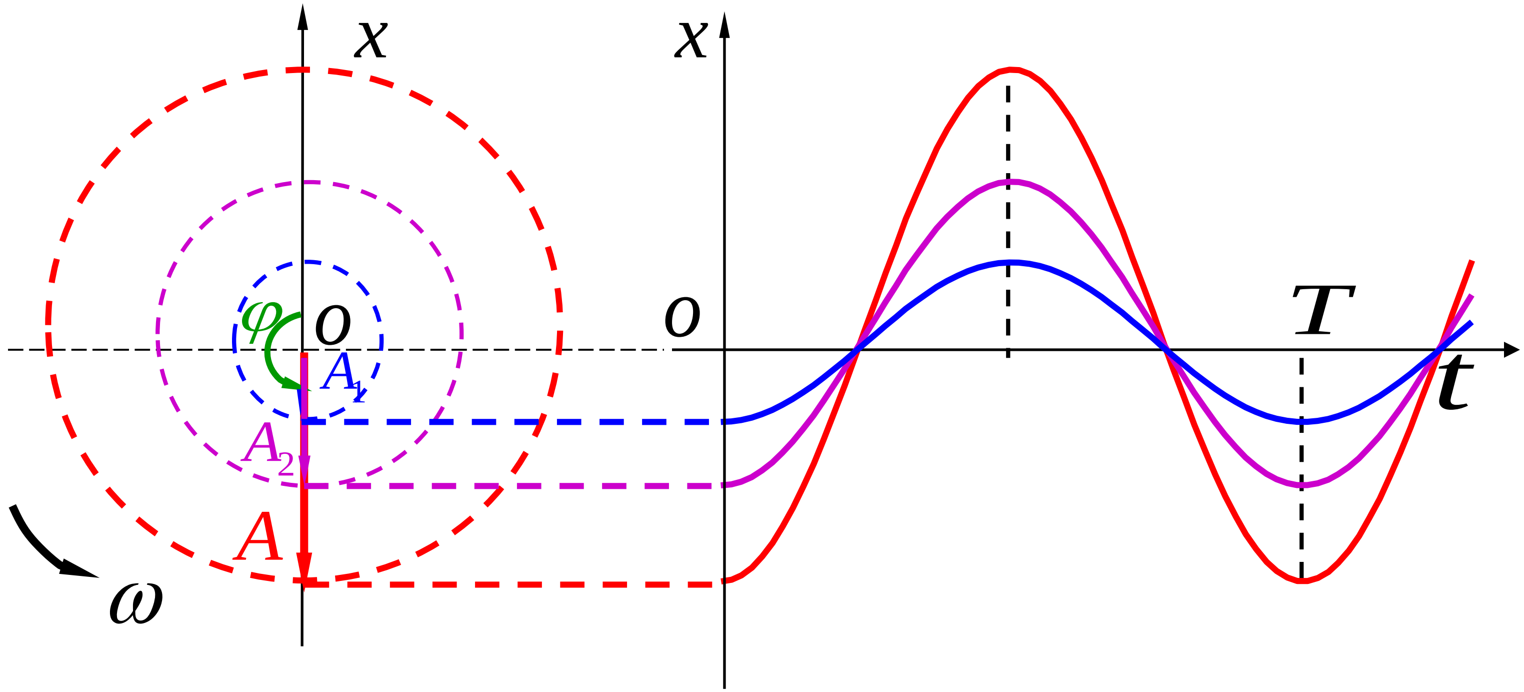
$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2$$



两个同方向同频率简谐运动合成后仍为同频率的简谐运动

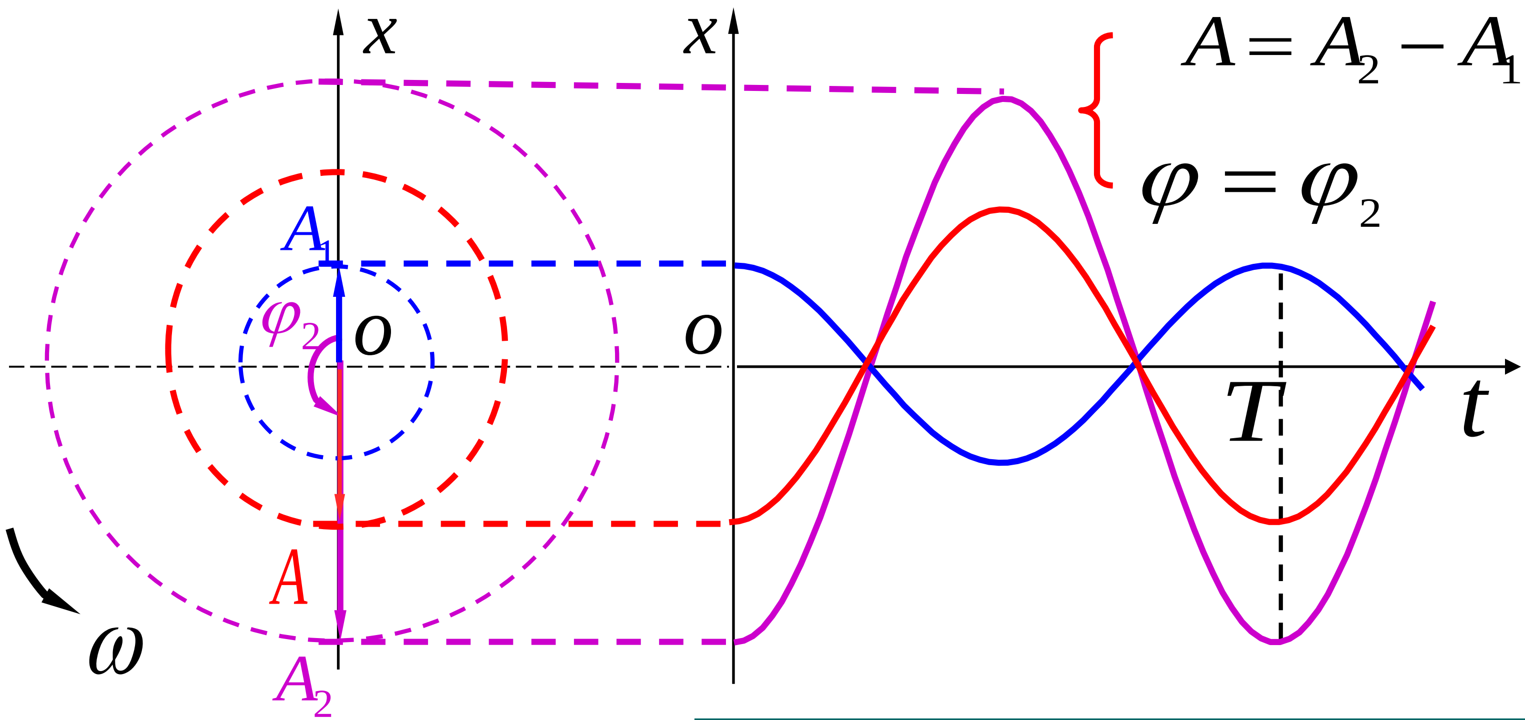
（1）相位差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$



$$\begin{cases} A = A_1 + A_2 \\ \varphi = \varphi_2 = \varphi_1 \pm 2k\pi \end{cases}$$

$$\boxed{x = (A_1 + A_2)\cos(\omega t + \varphi)}$$

（2）相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi$（$k=0,1,2\cdots$）



$$\begin{cases} A=A_2-A_1 \\ \varphi=\varphi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=A_1\cos\omega t \\ x_2=A_2\cos(\omega t+\pi) \end{cases}$$

$$\boxed{x=(A_2-A_1)\cos(\omega t+\pi)}$$

小结

（1） 相位差 $\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi \qquad (k=0,1,2\cdots)$

$$A=A_1+A_2$$

加强

（2） 相位差 $\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi \qquad (k=0,1,2\cdots)$

$$A=\left|A_1-A_2\right|$$

减弱

（3） 一般情况

$$A_1+A_2>A>\left|A_1-A_2\right|$$

例、两个同方向、同频率简谐运动方程分别为

$$x_1 = 0.4\cos(3t + \frac{\pi}{3})\ m$$

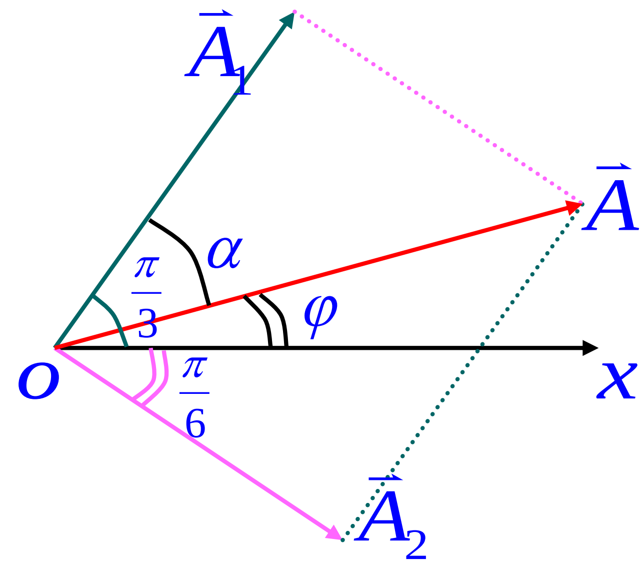
$$x_2 = 0.3\cos(3t - \frac{\pi}{6})\ m$$

求（1）合振动表达式

（2）若另有一简谐运动 $x_3 = 0.5\cos(3t + \varphi)$，当 φ 等于多少时 $x_1 + x_3$ 的振幅最大？

解：(1)本题可用解析法和旋转矢量法求出，由图示旋转矢量图（$t=0$ 时刻），知 $\vec{A}_1$和 $\vec{A}_2$夹角为$\pi/2$则合振幅为

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=0.5m$$



初相位 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}-\alpha=0.12\pi$

$$\therefore x=0.5\cos(3t+0.12\pi)$$

可由 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$

和 $\varphi=tg^{-1}(\dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2})$

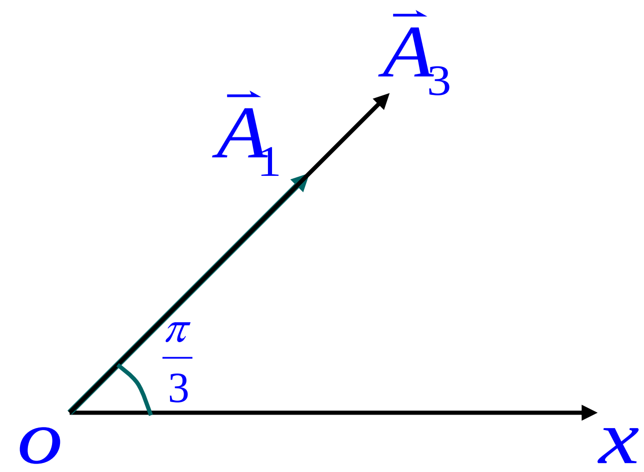
求得相同结果。

(2)要使 x_1+x_3 的振幅最大

$$\Delta\varphi=\varphi-\varphi_1=2k\pi$$

$$\therefore \varphi=\varphi_1+2k\pi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

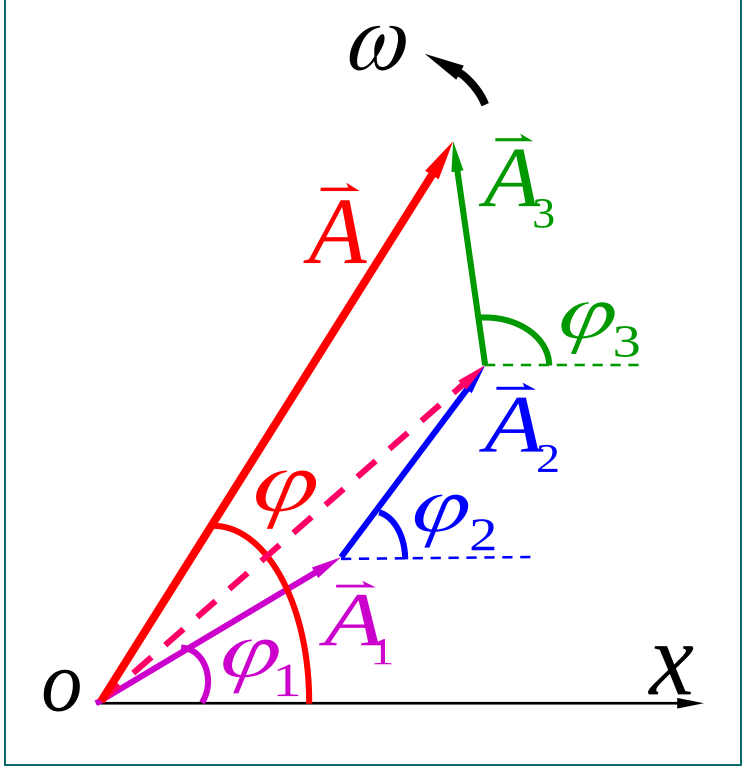


*三 多个同方向同频率简谐运动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = A_n\cos(\omega t+\varphi_n) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$$



多个同方向同频率简谐运动合成仍为简谐运动

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = A_0 \frac{\sin(\frac{N\Delta\varphi}{2})}{\sin(\frac{\Delta\varphi}{2})}$$

$$\varphi = \frac{N-1}{2}\Delta\varphi$$

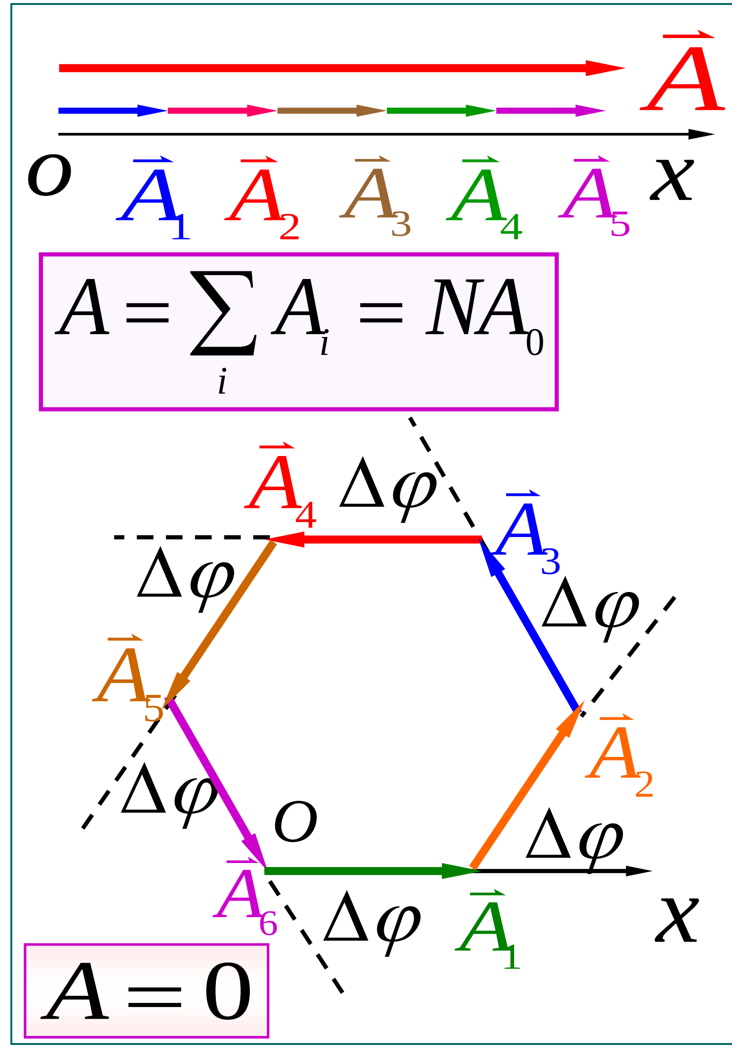
讨论

(1) $\Delta\varphi = 2k\pi$

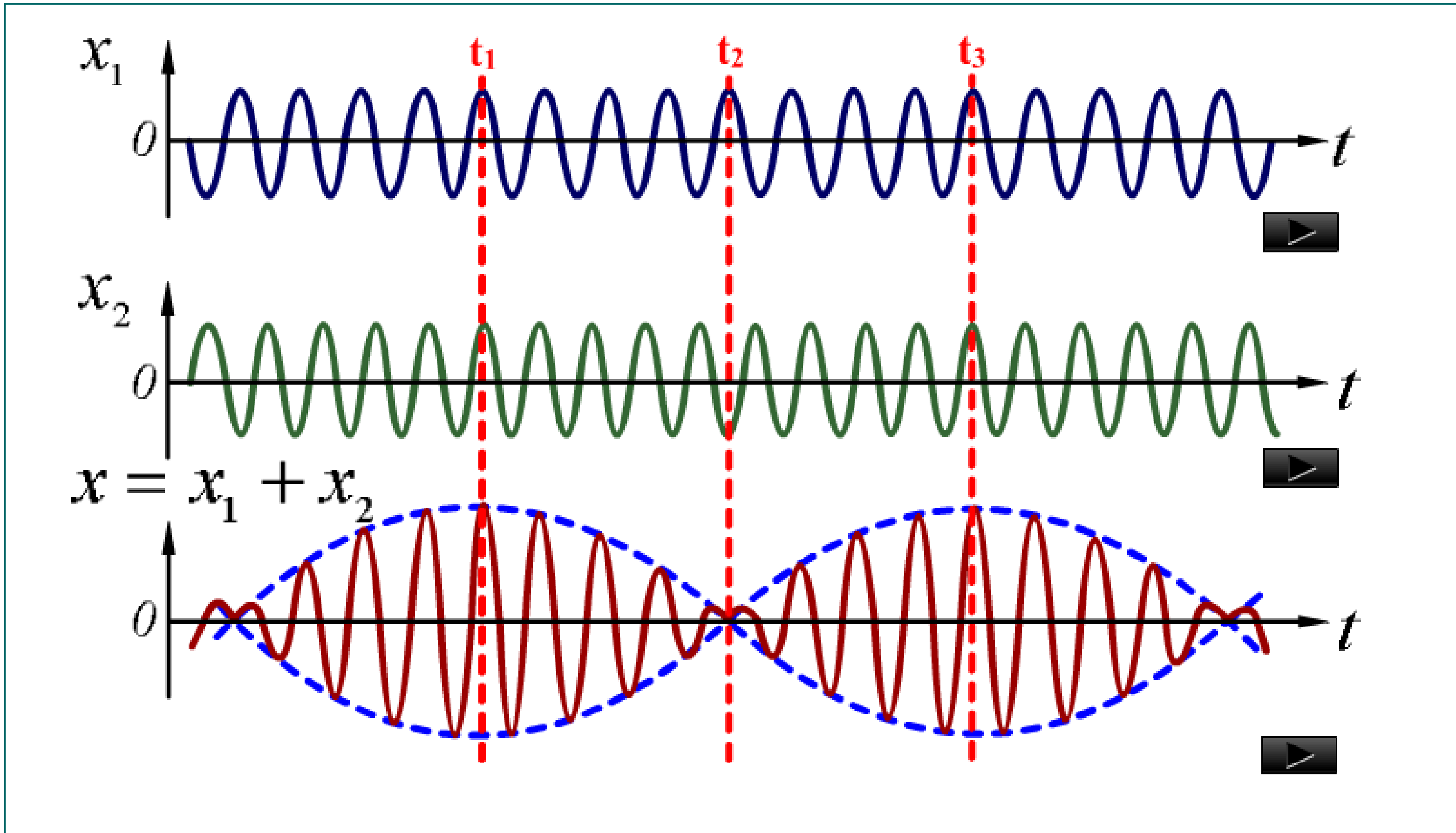
$(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

(2) $N\Delta\varphi = 2k'\pi$

$(k' \neq kN, k' = \pm1, \pm2, \cdots)$



四 两个同方向不同频率简谐运动的合成



频率较大而频率之差很小的两个同方向简谐运动的合成，其合振动的振幅时而加强时而减弱的现象叫拍.

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos \omega_1 t = A_1 \cos 2\pi \nu_1 t \\ x_2 = A_2 \cos \omega_2 t = A_2 \cos 2\pi \nu_2 t \end{cases}$$

$$\boxed{x = x_1 + x_2}$$

讨论 $A_1 = A_2$ ，$|\nu_2 - \nu_1| << \nu_1 + \nu_2$ 的情况

方法一

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos 2\pi\nu_1 t + A_2 \cos 2\pi\nu_2 t$$

$$x = \boxed{(2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t)} \cos 2\pi \boxed{\frac{\nu_2 + \nu_1}{2}} t$$

振幅部分

合振动频率

振动频率 $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$

振幅 $A = \left| 2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t \right|$

$$\begin{cases} A_{\max} = 2A_1 \\ A_{\min} = 0 \end{cases}$$

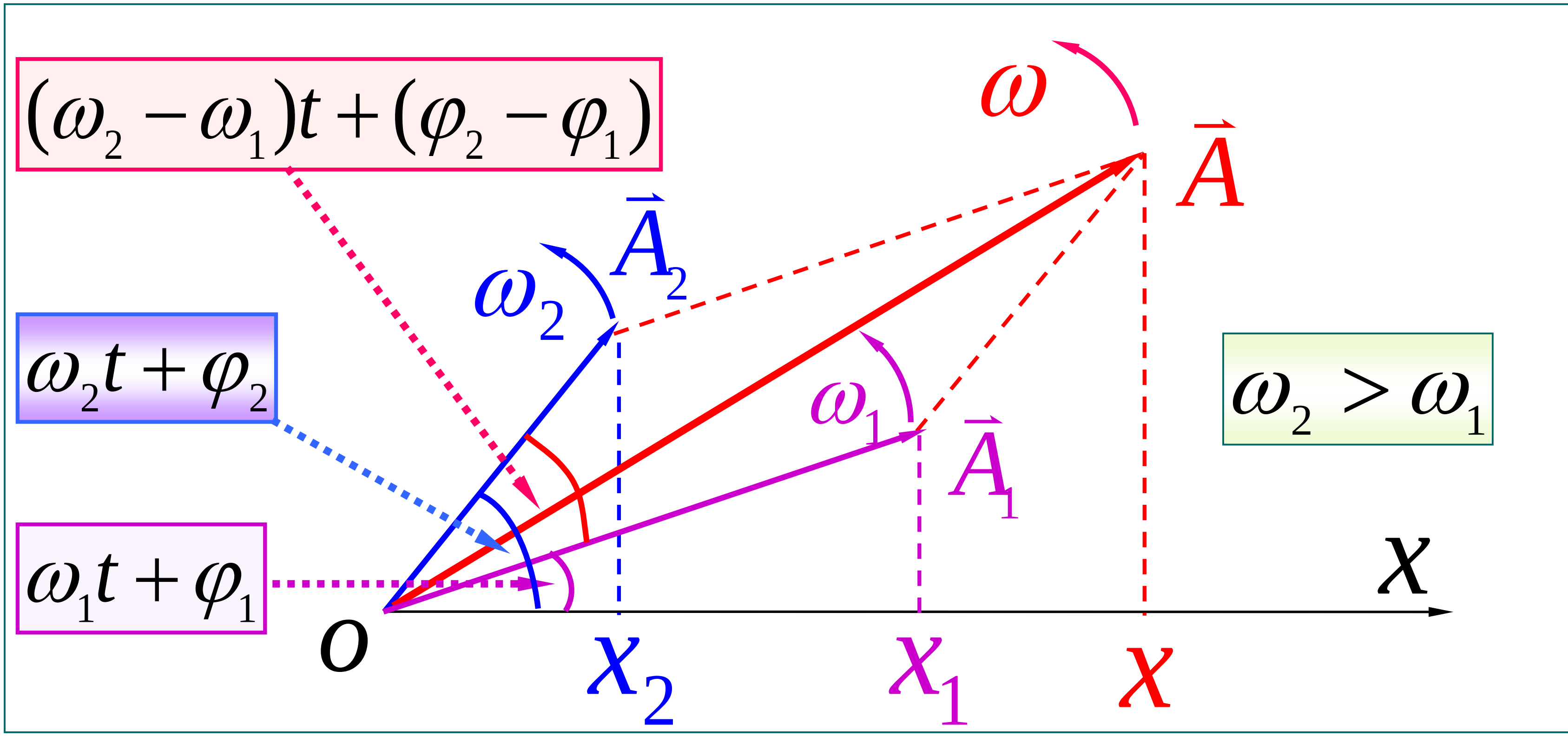
$$x = (2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t) \cos 2\pi \frac{\nu_2 + \nu_1}{2} t$$

$$2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} T = \pi \Rightarrow T = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}$$

$$\boxed{\nu = \nu_2 - \nu_1} \Leftarrow$$

拍频（振幅变化的频率）

方法二：旋转矢量合成法

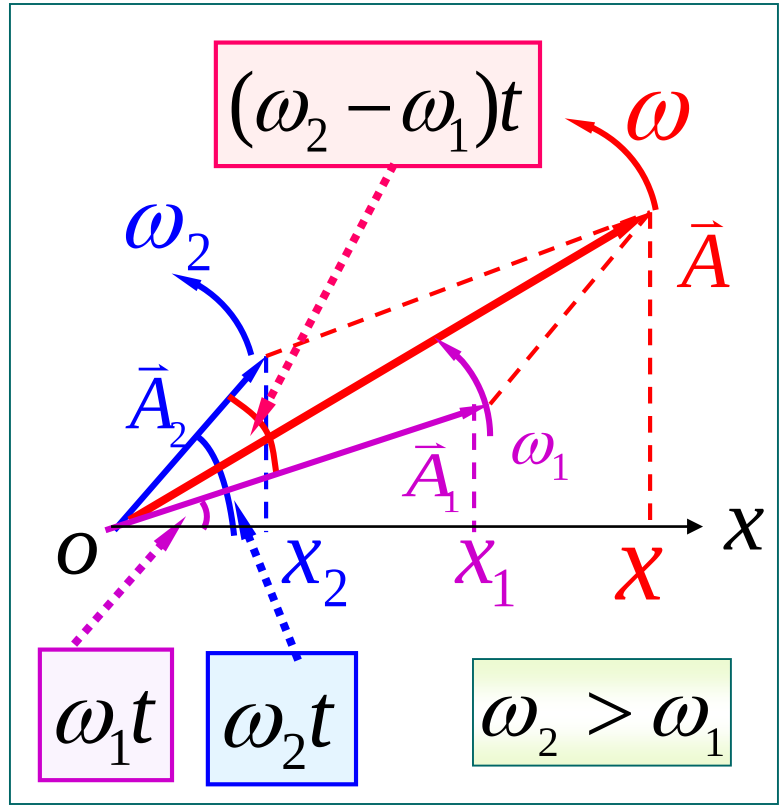


$\varphi_1=\varphi_2=0$ $\quad\quad$ $\Delta\varphi=2\pi(\nu_2-\nu_1)t$

振幅 $A = A_1\sqrt{2(1+\cos\Delta\varphi)}$

$$= \left|2A_1\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\right|$$

拍频 $\Rightarrow$ $\nu = \nu_2 - \nu_1$



振动圆频率

$$\cos\omega t = \frac{x_1+x_2}{A} \qquad \omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$$

二 两个相互垂直的同频率的简谐运动的合成

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

质点运动轨迹 （椭圆方程）

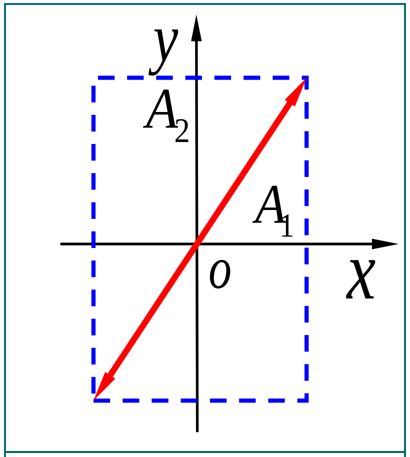
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

讨论

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

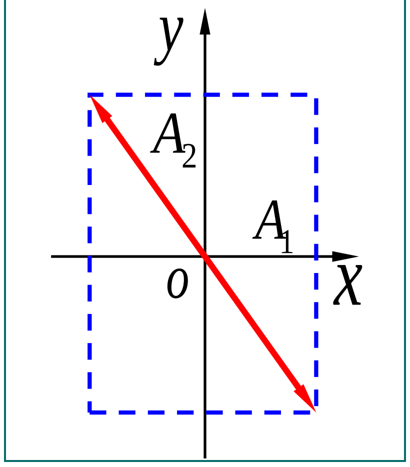
（1） $\varphi_2-\varphi_1=0$ 或 2π

$$y=\frac{A_2}{A_1}x$$



（2） $\varphi_2-\varphi_1=\pi$

$$y=-\frac{A_2}{A_1}x$$



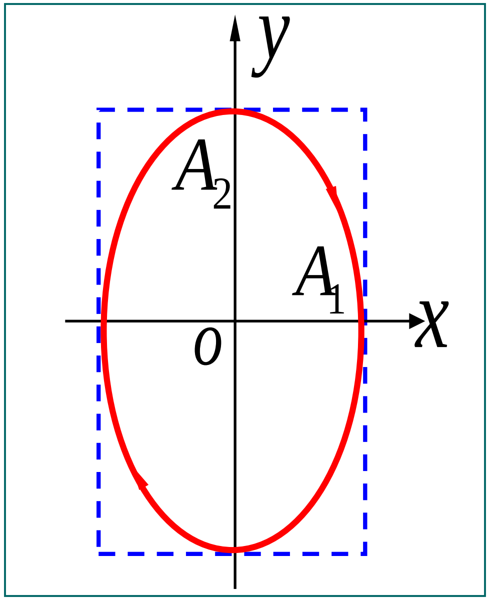
讨论

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

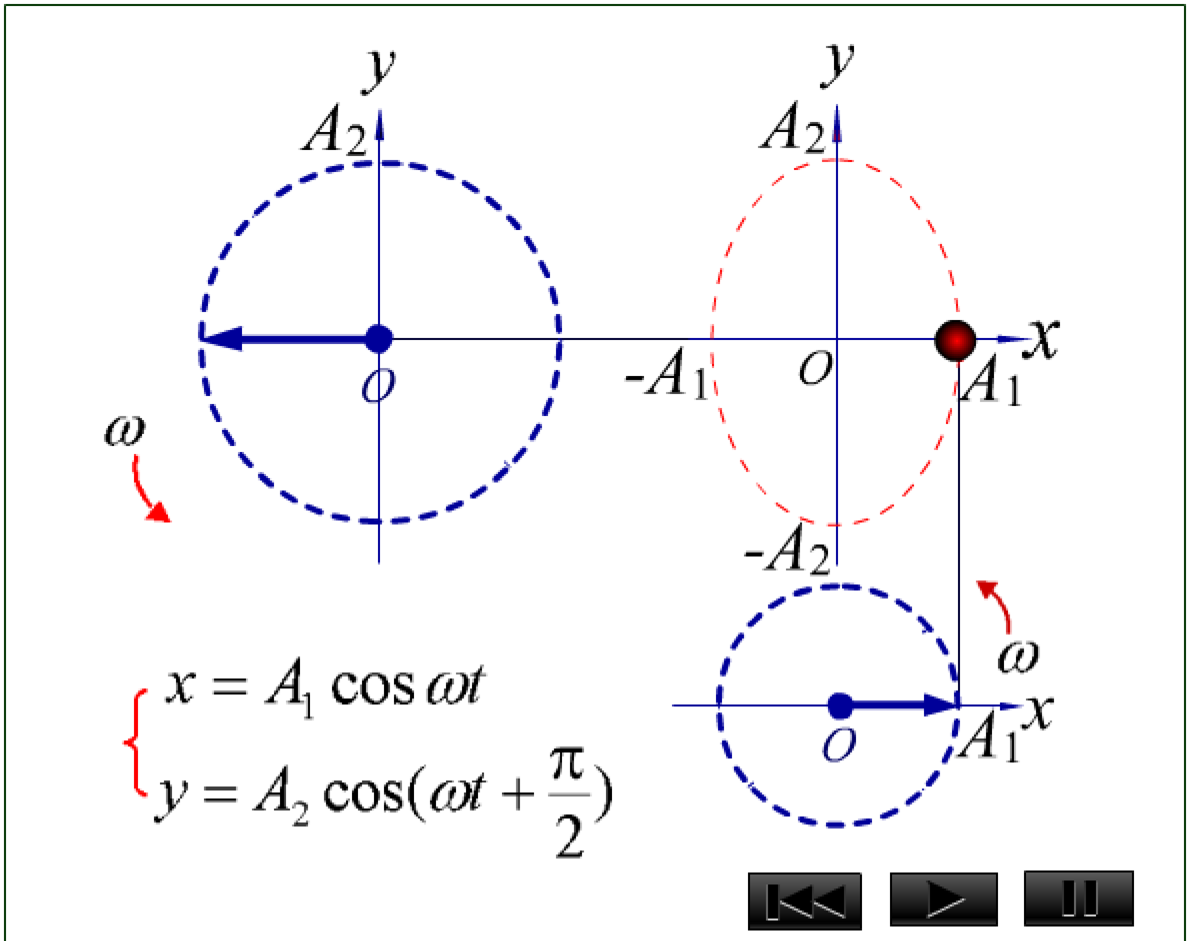
（3） $\varphi_2-\varphi_1=\pm\pi/2$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

$$\begin{cases} x=A_1\cos\omega t \\ y=A_2\cos(\omega t+\dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$$



用旋转矢量描绘振动合成图



两相互垂直同频率不同相位差简谐运动的合成图