一 阻尼振动

现象： 振幅随时间减小

原因： 阻尼

阻力系数

动力学分析： 阻尼力 $F_{\mathrm{r}} = -Cv$

$$-kx - Cv = ma$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + C\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+C\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0$$

固有角频率

$$\begin{cases}\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}\\ \delta=C/2m\end{cases}$$

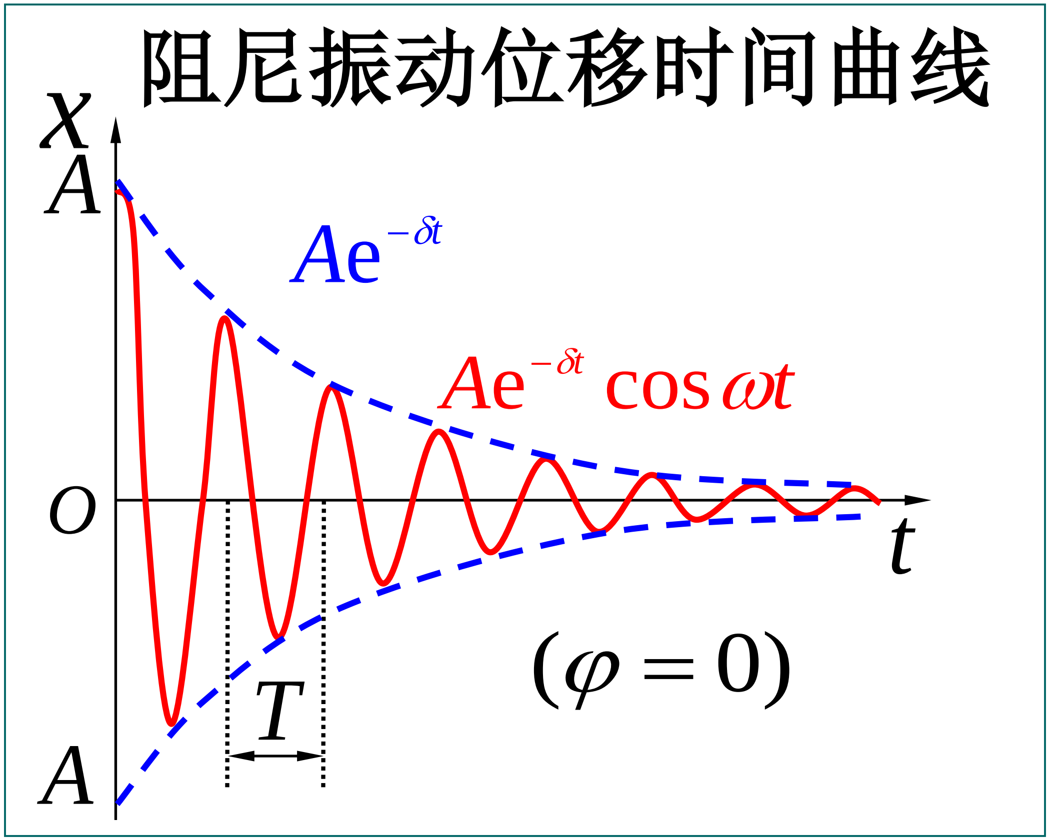
阻尼系数

$$x=\boxed{Ae^{-\delta t}}\cos(\boxed{\omega}t+\varphi)$$

振幅 角频率

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\Big/\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$$

$$x = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

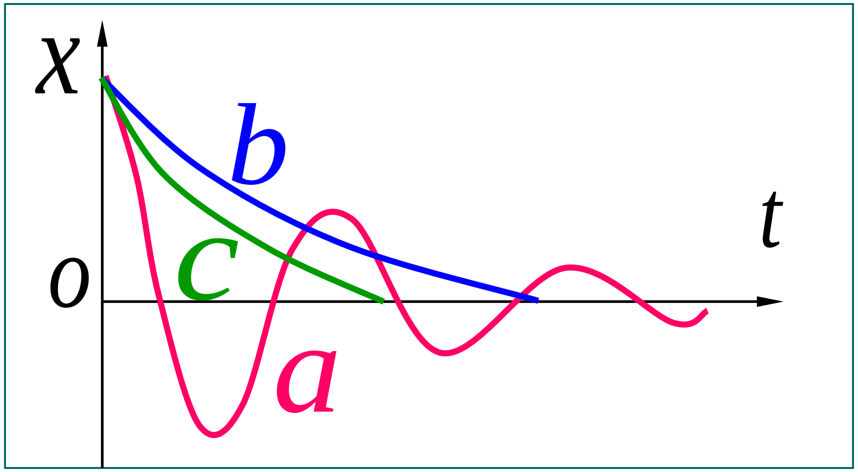


三种阻尼的比较

(a) 欠阻尼 $\omega_0^2 > \delta^2$

(b) 过阻尼 $\omega_0^2 < \delta^2$

(c) 临界阻尼 $\omega_0^2 = \delta^2$



例 有一单摆在空气（室温为 $20^{\circ}\mathrm{C}$）中来回摆动. 摆线长$l=1.0\ \mathrm{m}$，摆锤是半径$r=5.0\times10^{-3}\ \mathrm{m}$的铅球.**求**（1）摆动周期；（2）振幅减小10%所需的时间；（3）能量减小10%所需的时间；（4）从以上所得结果说明空气的粘性对单摆周期、振幅和能量的影响.

（已知铅球密度为$\rho=2.65\times10^{3}\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $20^{\circ}\mathrm{C}$ 时空气的粘度$\eta=1.78\times10^{-5}\ \mathrm{Pa\cdot s}$ ）

已知 $l = 1.0\,\mathrm{m}, r = 5.0\times10^{-3}\,\mathrm{m}, \rho = 2.65\times10^{3}\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$

$20^{\circ}\mathrm{C}$, $\eta = 1.78\times10^{-5}\,\mathrm{Pa\cdot s}$ 求（1）T

解（1）$\omega_0 = \sqrt{g/l} = 3.13\,\mathrm{s^{-1}}$

$$F_\mathrm{r} = -6\pi r\eta v = -Cv$$

$$\delta = C/2m = 9\eta/4r^2\rho = 6.04\times10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$$

$$\because \delta << \omega_0$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 2\,\mathrm{s}$$

已知 $l=1.0\ \mathrm{m}, r=5.0\times10^{-3}\ \mathrm{m}, \rho=2.65\times10^{3}\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$

$20^{\circ}\mathrm{C},\quad \eta=1.78\times10^{-5}\ \mathrm{Pa\cdot s}$ 求（2）$A'=0.9A, t?$

（3）$E'=0.9E, t?$

解（2） 有阻尼时 $A'=A\mathrm{e}^{-\delta t}$

$$0.9A=A\mathrm{e}^{-\delta t_1}\qquad t_1=\frac{\ln(1/0.9)}{\delta}=174\ \mathrm{s}\approx 3\ \mathrm{min}$$

（3） $$\frac{E'}{E}=\left(\frac{A'}{A}\right)^2=\mathrm{e}^{-2\delta t}$$

$$0.9=\mathrm{e}^{-2\delta t_2}\qquad t_2=\frac{\ln(1/0.9)}{2\delta}=87\ \mathrm{s}\approx 1.5\ \mathrm{min}$$

二 受迫振动

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+C\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=F\cos\omega_{\mathrm{p}}t$$

驱动力

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad 2\delta=C/m \qquad f=F/m$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=f\cos\omega_{\mathrm{p}}t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f\cos\omega_p t$$

驱动力的角频率

$$x=\cancel{A_0e^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)}+A\cos(\omega_p t+\psi)$$

$$A=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_p^2)+4\delta^2\omega_p^2}}\qquad \tan\psi=\frac{-2\delta\omega_p}{\omega_0^2-\omega_p^2}$$

三 共振

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2 x=f\cos\omega_{\mathrm{p}}t$$

$$x=A\cos(\omega_{\mathrm{p}}t+\psi)$$

$$A=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_{\mathrm{p}}^2)+4\delta^2\omega_{\mathrm{p}}^2}}\qquad\qquad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega_{\mathrm{p}}}=0$$

$$x=A_0\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)+A\cos(\omega_{\mathrm{p}}t+\psi)$$

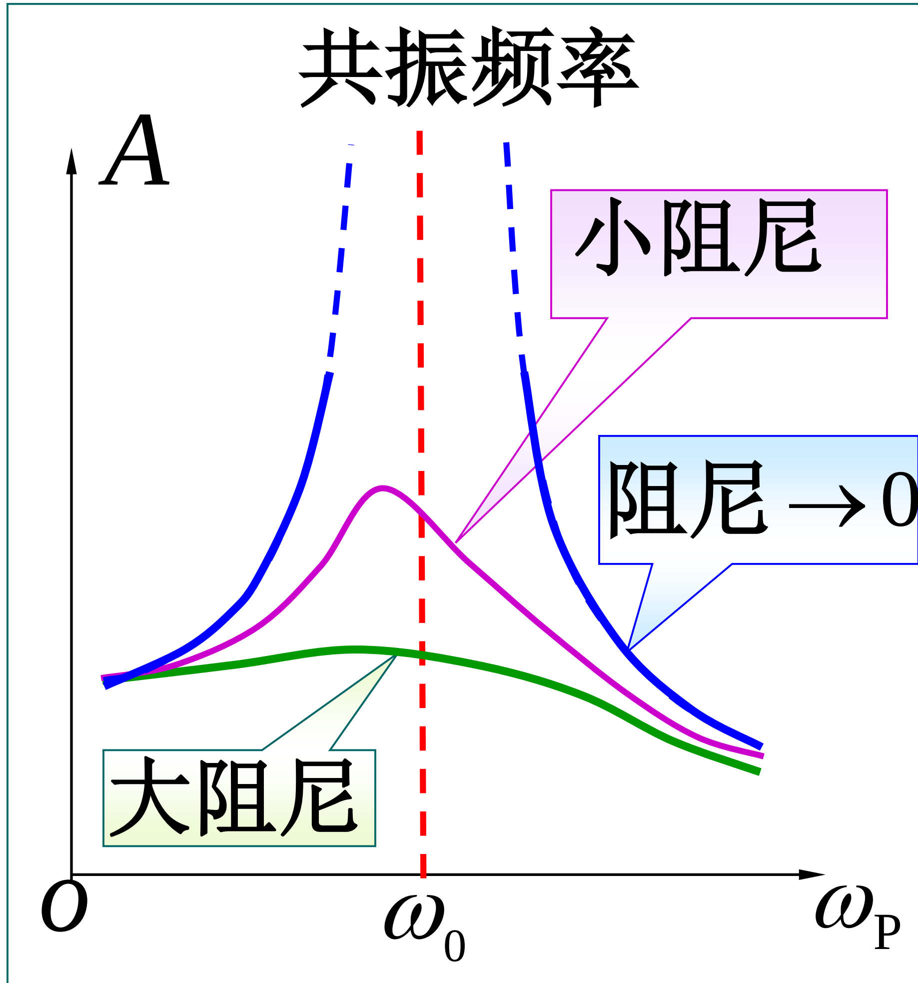
共振频率

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

共振振幅

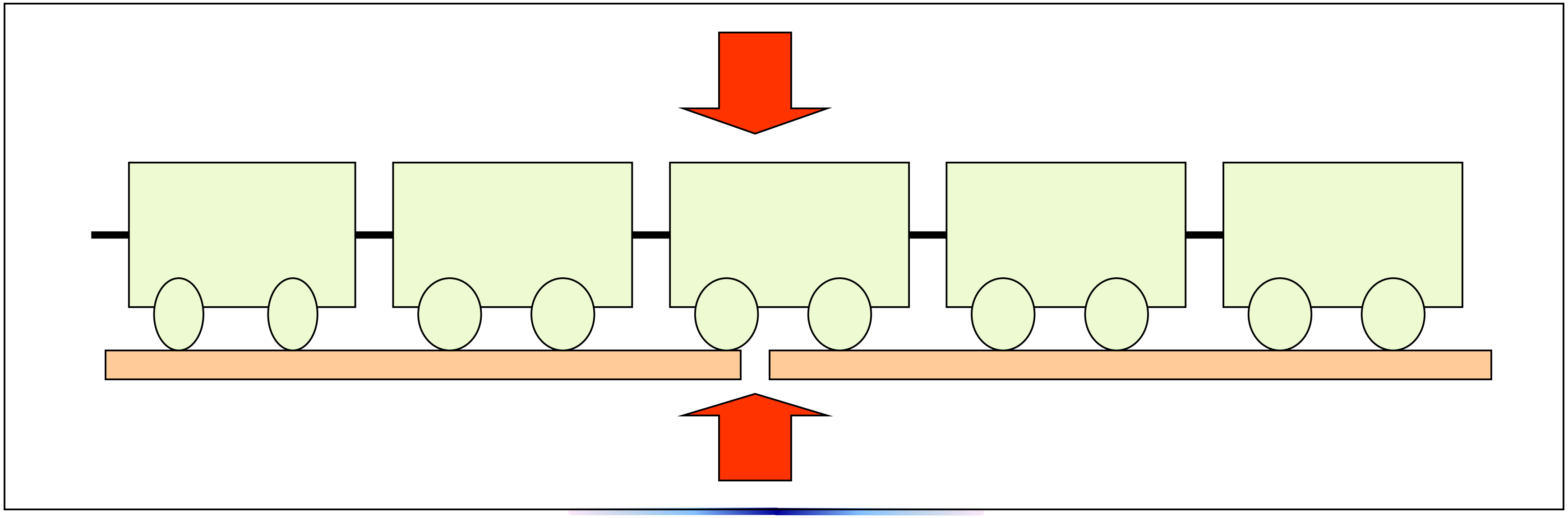
$$A_r = \frac{f}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

共振现象及应用

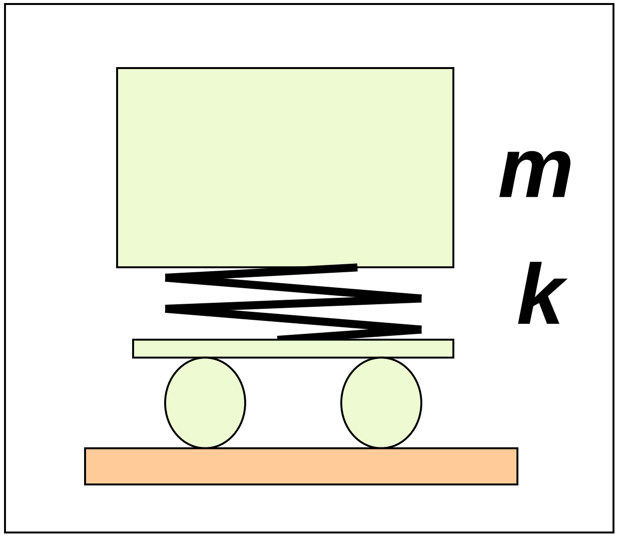


例 **火车的危险速率与轨长**

车轮行驶到两铁轨接缝处时，受到一次撞击，使车厢受迫振动. 当车速达某一速率时发生激烈颠簸，这一速率即为危险速率.



设车厢总负荷为m=5.5×10^4 kg，车厢弹簧每受力F=9.8× 10^3 N被压缩Δx=0.8 mm，铁轨长L=12.6 m，求危险速率.



解 $$F = k\Delta x \Rightarrow k = \frac{F}{\Delta x}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\Delta x}{F}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{55\times10^{3}\times0.8\times10^{-3}}{9.8\times10^{3}}} = 0.42\,\mathrm{s}$$

$$v = \frac{L}{T} = \frac{12.6}{0.42} = 29.9(\mathrm{m \cdot s^{-1}}) = 108\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

- 长轨有利于高速行车；无缝轨能避免受迫振动.

简谐运动的基本特征

1、能量特征

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2$$

2、动力学特征

$$\ddot{x}+\omega^2x=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

3、运动学特征

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

固有角频率ω—由系统的力学性质决定。

$$\omega=\sqrt{k/m}$$（弹簧振子）

$$\omega=\sqrt{g/l}$$（单摆）

$$\omega=\sqrt{mgl_{CO}/J_O}$$（复摆）

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$（电磁振荡）

周期 $T=2\pi/\omega$ $\nu=\omega/2\pi$

9-8*+9-28 质量为 **m = 10 g**的小球与轻弹簧构成的弹簧振子按方程 $x = 0.10\cos(20\pi t + \dfrac{\pi}{4})$ 振动， 式中x的单位为m，t的单位为s．求：

（1）振幅、频率、角频率、周期和初相；

（2）t=2 s时的位移、速度和加速度．

（3）平均动能、平均势能和总能量。

Ref: 9-28

4 一弹簧振子作简谐振动，当其偏离平衡位置的位移的大小为振幅的1/4时，其动能为振动总能量的（　　）

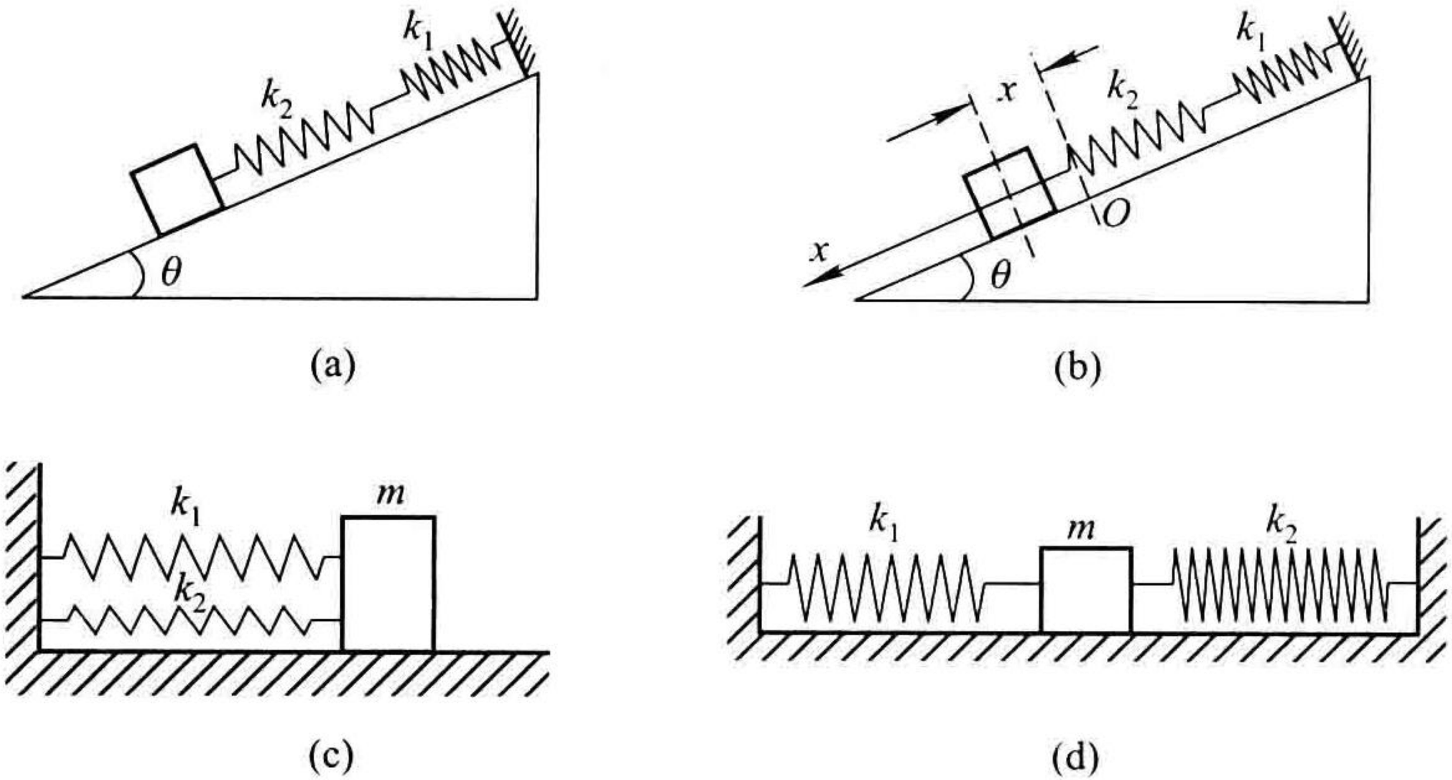
（A）7/16　　　　（B）9/16

（C）11/16　　（D）15/16

解 $x=\dfrac{1}{4}A$　　　$E_{\mathrm{p}}=\dfrac{1}{2}kx^{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{16}kA^{2}$

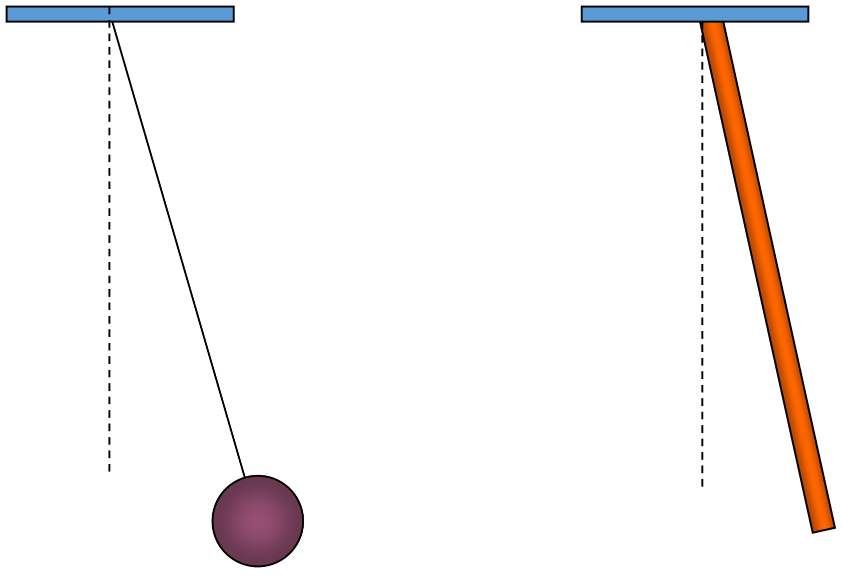
$$E_{\mathrm{k}}=E_{\mathrm{sum}}-E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kA^{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}kA^{2}=\frac{15}{16}E_{\mathrm{sum}}$$

9-11 如图(a)所示,两个轻弹簧的劲度系数分别为 k_1 和 k_2,物体在光滑斜面上振动.(1) 证明其运动仍是简谐振动;(2) 求系统的振动频率.

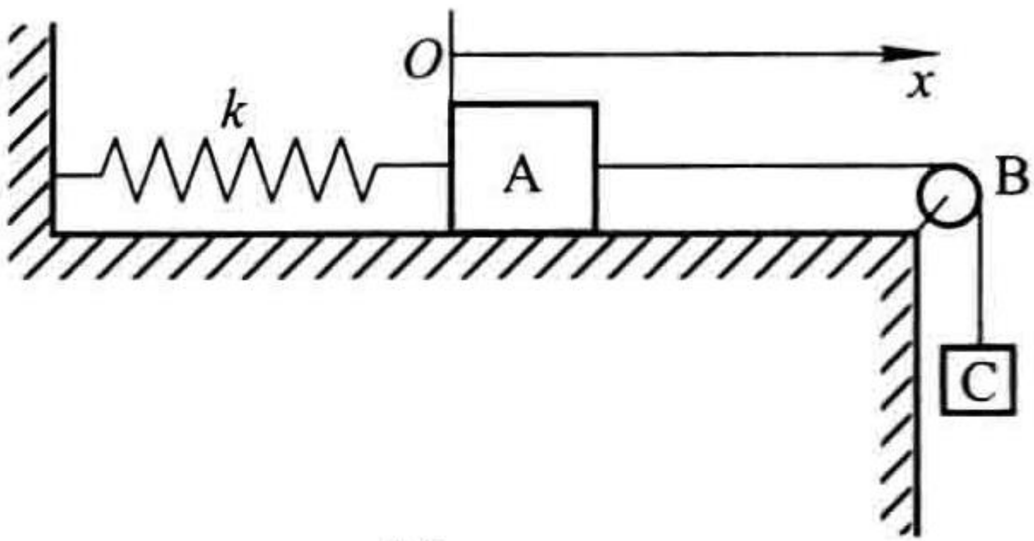


题 9-11 图

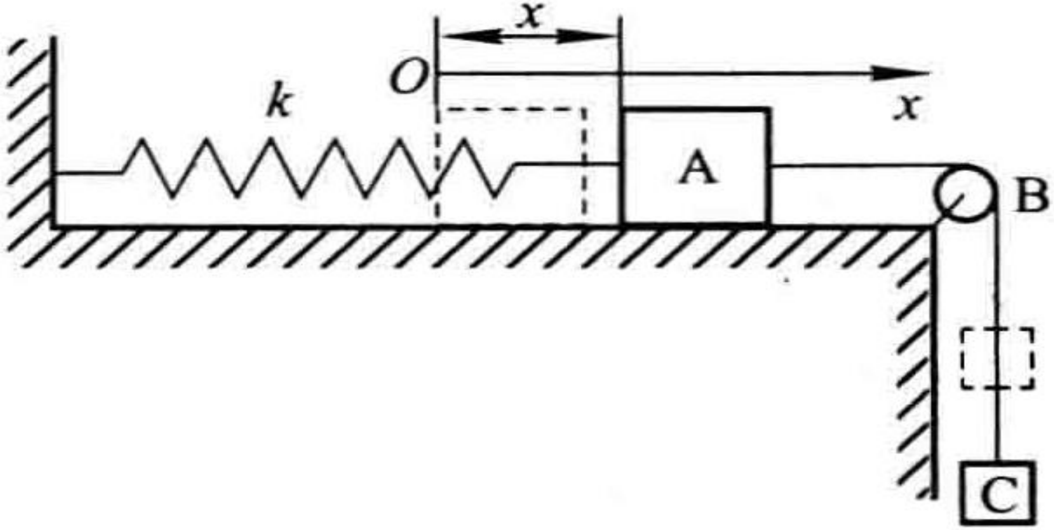
例1 一个小球和一根均匀细杆质量均为m，把它们分别做成单摆和复摆，单摆的线长和细杆的长度均为l。问当两者做简谐运动时哪个摆的更快？



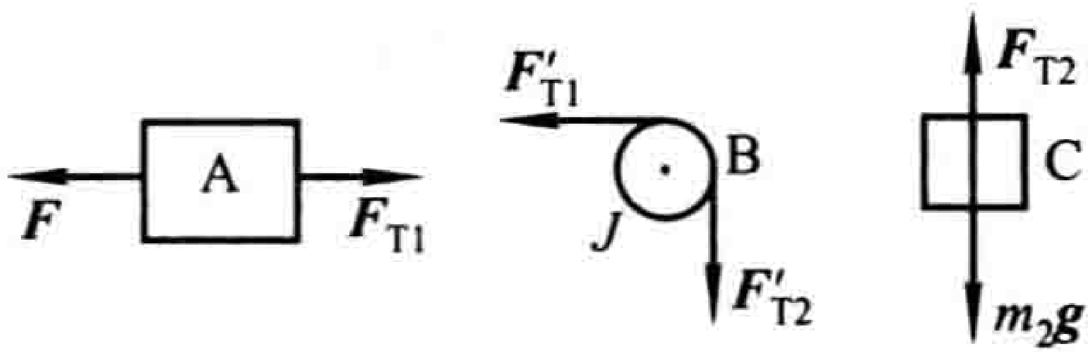
*9-12 在如图(a)所示装置中,一劲度系数为 k 的轻弹簧,一端固定在墙上,另一端连接一质量为 m_1 的物体 A,置于光滑水平桌面上. 现通过一质量 m、半径为 R 的定滑轮 B(可视为均质圆盘)用细绳连接另一质量为 m_2 的物体 C. 设细绳不可伸长,且与滑轮间无相对滑动,求系统的振动角频率.



(a)



(b)



(c)

$$F_{T1}-k(x+x_0)=m_1\frac{d^2x}{dt^2} \tag{1}$$

$$m_2g-F_{T2}=m_2\frac{d^2x}{dt^2} \tag{2}$$

$$(F_{T2}-F_{T1})R=J\alpha=\frac{1}{2}mR\frac{d^2x}{dt^2} \tag{3}$$

$$kx_0=m_2g \tag{4}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m_1+m_2+m/2}x=0$$

$$\omega=\sqrt{k/(m_1+m_2+m/2)}$$

$$E_0 = -m_2 g x + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} k(x + x_0)^2$$

$$0 = -m_2 g v + m_1 v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + m_2 v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + J\omega \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + k(x + x_0) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

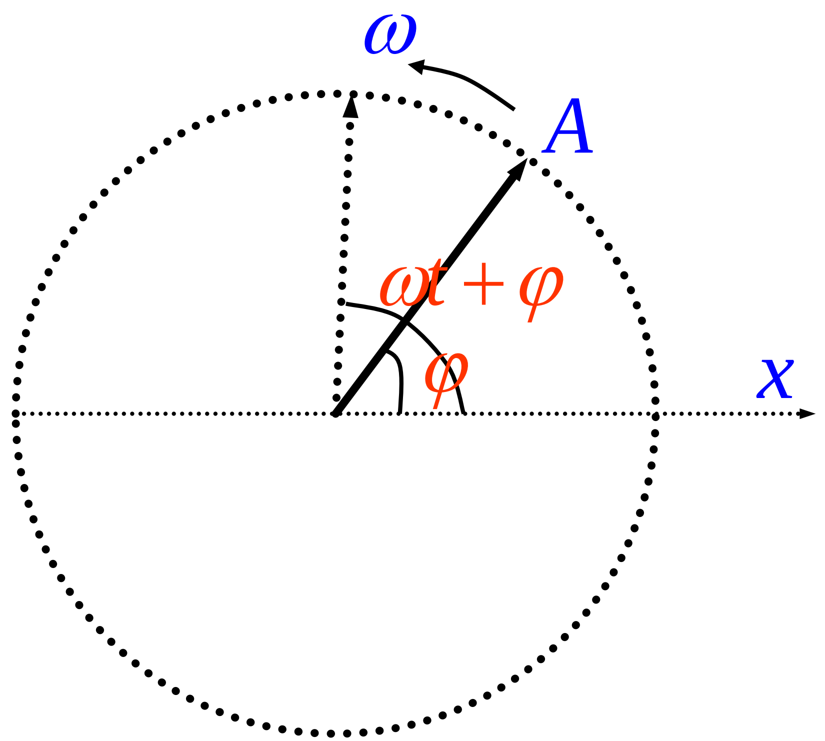
$J = mR^2/2$, $\omega R = v$, $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2 x/\mathrm{d}t^2$ 和 $m_2 g = k x_0$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m_1 + m_2 + m/2} x = 0$$

$$\omega = \sqrt{k/(m_1 + m_2 + m/2)}$$

2、旋转矢量法

旋转矢量 A
与简谐运动的
对应关系



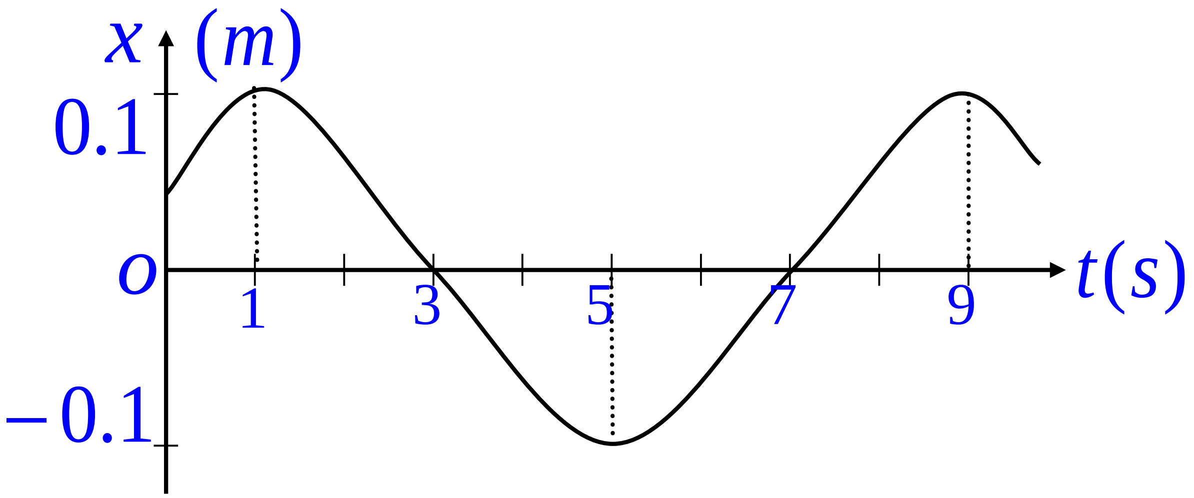
相位 $\Phi=\omega t+\varphi$

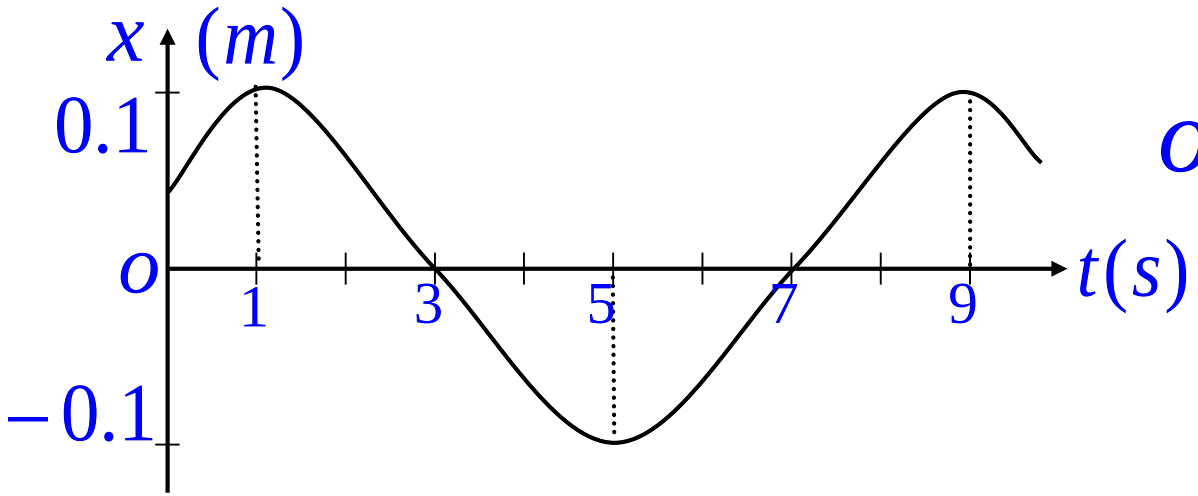
描写质点瞬时(t)运动状态的物 理量

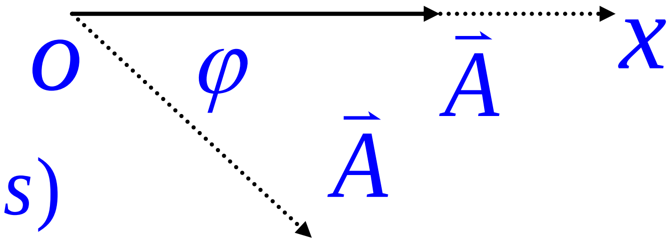
初相位 $\varphi=\Phi(t=0)$

注：熟练的确定简谐运动的相位和相位差。

3、已知简谐运动的$x-t$ 图线，写出其振动方程







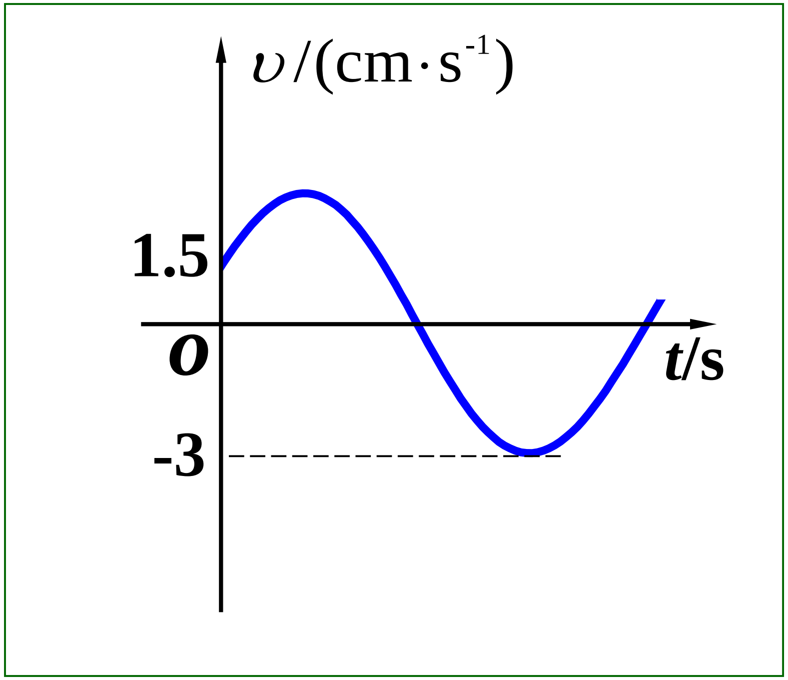
由图知 $A=0.1m, T=8s$（$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{1}{4}\pi s^{-1}$）

直接用旋转矢量法求φ，如图 $t=1s$矢量$\vec{A}$位于x轴，可见在 $t=0$ 时，矢量位于与x轴夹角为$-\varphi$处

$$\varphi=\omega\cdot\Delta t=\frac{1}{4}\pi$$

所以质点简谐运动方程为$x=0.1\cos(\frac{1}{4}\pi t-\frac{\pi}{4})$

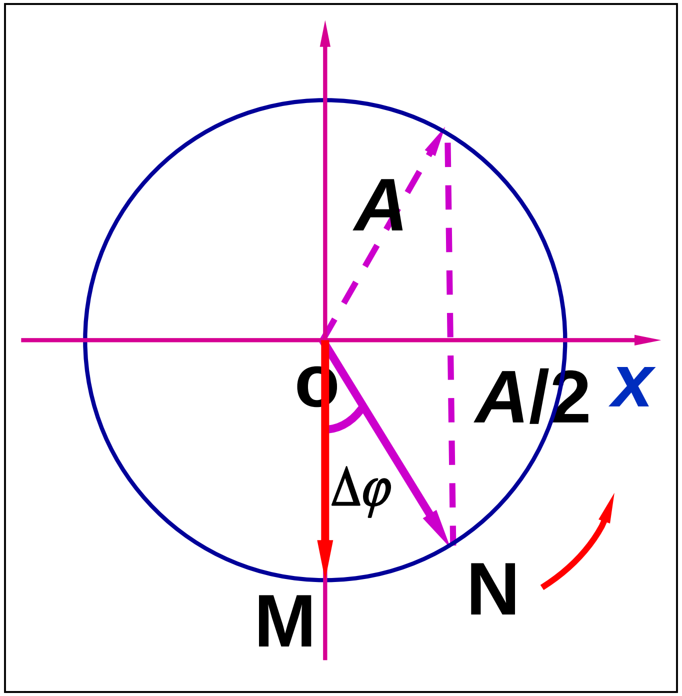
9-20 如图为一简谐运动质点的速度与时间的关系曲线，且振幅为2 cm，求：（1）振动周期；（2）加速度的最大值；（3）运动方程.



3 一质点作周期为T的简谐运动，质点由平衡位置正方向运动到最大位移一半处所需的最短时间为（　　）

（A）T/2　　（B）T/4

（C）T/8　　（D）T/12

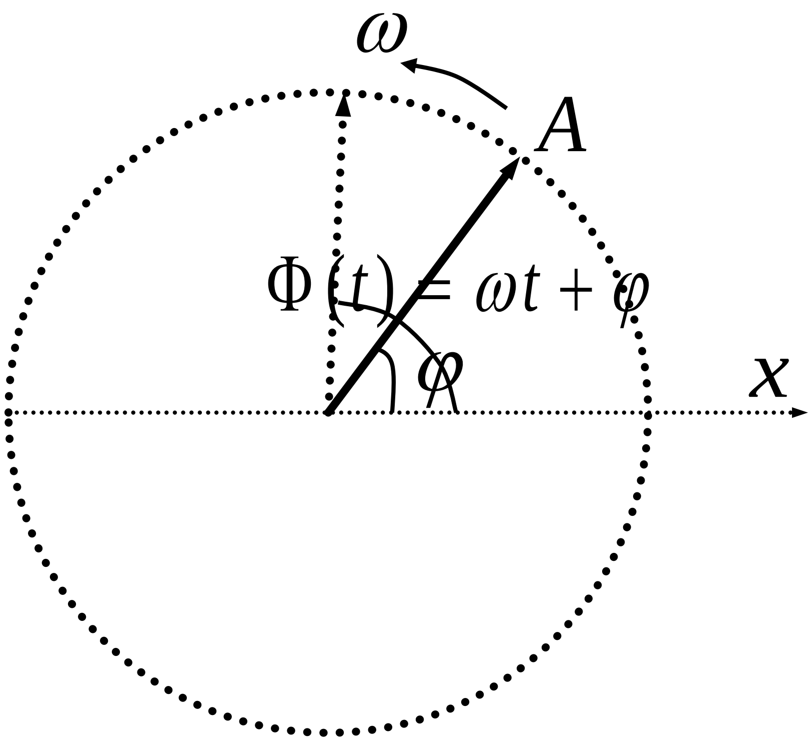


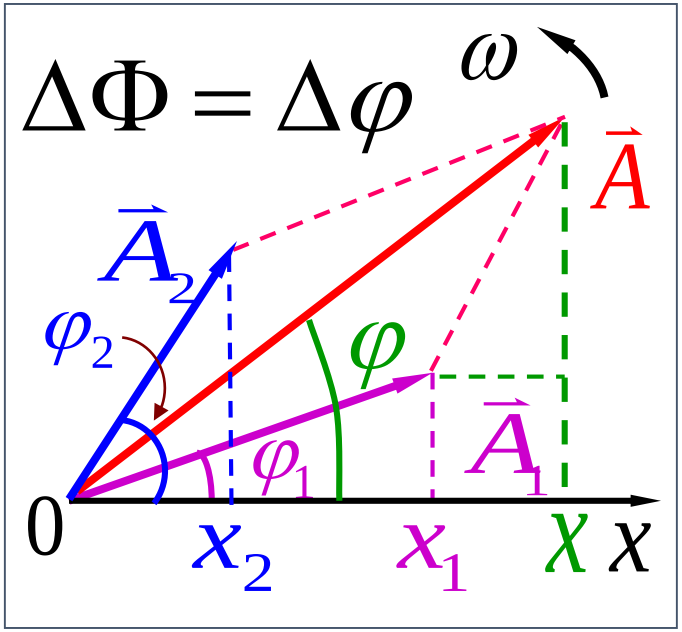
解 用矢量图法求解

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t = \pi/6$$

$$\omega = 2\pi/T \qquad \Delta t = T/12$$

3、振动合成





$$\nu_{拍}=\nu_2-\nu_1$$

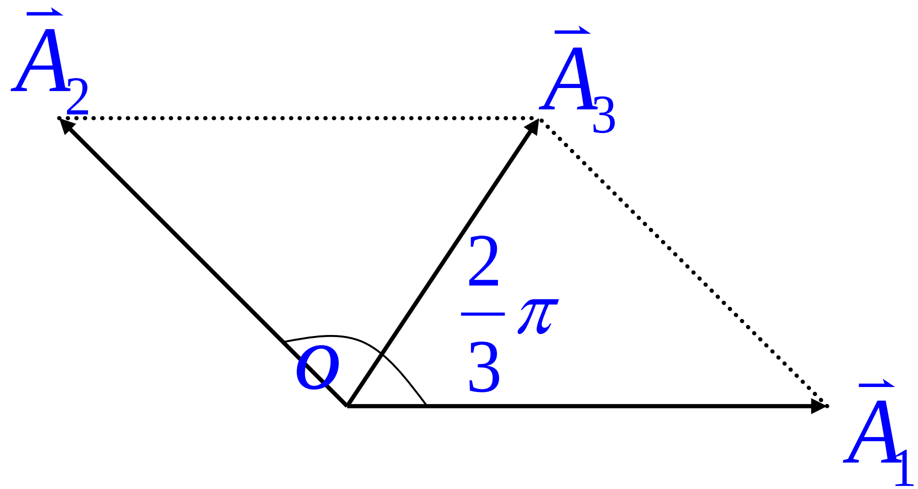
4、两个简谐运动方向相同，频率相同，振幅也相同为A，其合成的振幅仍然为A，则这两个简谐运动的相位差为

（**a**）$\dfrac{\pi}{6}$；（**b**）$\dfrac{\pi}{3}$；（**c**）$\dfrac{\pi}{2}$；（**d**）$\dfrac{2\pi}{3}$

答案：（**d**）

见旋转矢量图

$$\vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{A}_3$$



8 将频率为**348 Hz**的标准音叉振动与一待测频率的音叉振动合成，测得拍频为**3 Hz**，若在待测频率音叉的一端加上一小物块，拍频数将减少，则待测音叉的固有频率为

<u>**351Hz**</u>.

解 $|\nu_2-\nu_1|=3$ 设 $\nu_1=348\,\mathrm{Hz}$

则 $\nu_2=345\,\mathrm{Hz}$ 或 $\nu_2=351\,\mathrm{Hz}$

由题意得 $\nu_2=351\,\mathrm{Hz}$