

文章编号: 1007-2934(2011)03-0057-04

# 用波尔共振仪研究受迫振动特性

朱华泽

(西安科技大学, 陕西 西安 710054)

**摘 要:** 介绍了波尔共振仪实验系统的基本结构及原理, 测定了幅频和相频特性曲线, 分析了实验系统误差。研究发现, 当系统发生共振时, 驱动频率和固有频率近似相等且相位差为  $90^\circ$ 。

**关 键 词:** 受迫振动; 波尔共振仪; 相频特性; 幅频特性

**中图分类号:** O321

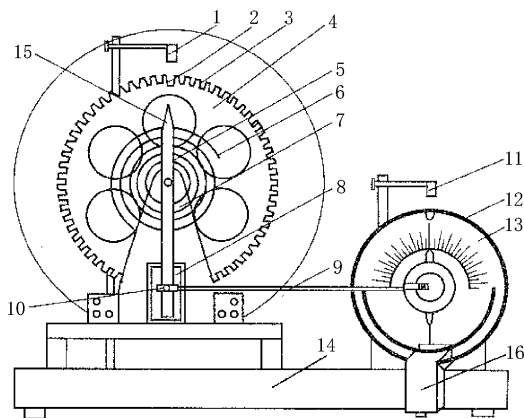
**文献标志码:** A

物体在周期性外力持续作用下发生的振动称为受迫振动, 这种周期性的外力称为驱动力<sup>[1-3]</sup>。受迫振动是一种在自然界普遍存在的物理现象, 对其性质的研究有助于增强学生从理论上对振动的理解。“用波尔共振仪研究受迫振动特性”实验是针对大学本科二年级学生开设的一项大学物理实验内容。目前清华大学、同济大学、海军航空工程学院等多所高校开设了本实验, 我校物理实验中心也开设了本实验, 但在教学过程中发现不少教材对其受迫振动运动方程的描述存在瑕疵, 对系统误差产生的原因未做分析, 使得学生在对实验的理解上存在很多困难。本文就该实验的原理、数据处理、误差分析做了详细的分析, 希望对波尔共振仪相关实验具有一定的指导意义。

## 1 实验原理

波尔共振仪结构如图1所示(电器控制箱和电机未画出), 铜制摆轮4的转动惯量为 $J$ , 摆轮可绕轴转动, 转动时会从阻尼线圈8的开口处穿过。阻尼线圈通电后会对摆轮施加电磁阻尼力矩作用, 该电磁阻尼力矩的大小可通过改变线圈中的电流来调节。蜗卷弹簧6的抗扭刚度系数为 $k$ , 摇杆5及其驱动机构(连杆9和电机)驱动蜗卷弹簧支点作准周期摆动, 最终驱动摆轮做受迫振动。当摇杆做 $a(t) = a_m \cos \varphi$  ( $a_m$ 为摇杆摆动的幅值)形式的周期摆动时, 弹簧支点随之做周期性转动。若与弹簧终点固定的摆轮转过角度 $\theta$ , 则弹簧终点

相对于支点的总转角为  $\theta - a(t) = \theta - a_m \cos \varphi$ , 设与摆轮角速度成正比的阻尼力矩为  $-\gamma \frac{d\theta}{dt}$ , 可写出摆轮在实验室坐标系中的运动方程<sup>[4-9]</sup>:



1. 光电门A; 2. 长凹槽; 3. 短凹槽; 4. 铜制摆轮; 5. 摇杆; 6. 蜗卷弹簧; 7. 机架; 8. 阻尼线圈; 9. 连杆; 10. 摇杆调节螺钉; 11. 光电门B; 12. 角度盘; 13. 有机玻璃转盘; 14. 底座; 15. 弹簧夹持螺钉; 16. 闪光灯

图1 波尔共振仪结构图

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + k\theta = ka_m \cos \varphi \quad (1)$$

令  $\omega_0^2 = \frac{k}{J}$ ,  $2\beta = \frac{\gamma}{J}$ ,  $m = \frac{ka_m}{J}$ , 式(1)变为

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = m \cos \varphi \quad (2)$$

方程(2)的通解为:

$$\theta = \theta_e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) + \theta_c \cos(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

由(3)式可知, 受迫振动可分成两部分:

第一部分,  $\theta_e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$  表示阻尼振动,

收稿日期: 2011-01-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10947124); 西安科技大学培育基金资助项目(200850)

经过一定时间后振动衰减至可忽略不计。

第二部分,因驱动力矩对摆轮做功,向振动系统传送能量,使系统最终达到稳定的振动状态,此时振幅不变,其值为:

$$\theta_2 = \frac{m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \tag{4}$$

与驱动力矩之间的相位差  $\varphi$  为:

$$\varphi = \arctan \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \arctan \frac{\beta T_0^2 T}{T^2 - T_0^2} \tag{5}$$

由式(4)和式(5)可看出,稳定振动状态的振幅  $\theta_2$  与相位差  $\varphi$  的数值与振动的起始状态无关。

令  $\frac{\partial \theta}{\partial \omega} = 0$  可得共振频率为:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \tag{6}$$

共振振幅:

$$\theta = \frac{m}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \tag{7}$$

2 实验方法

波尔共振仪振幅和周期的测定主要是通过摆轮上的凹槽和光电门A(分上下两组)实现的,摆轮摆动时上方的光电门和计数器可以测出通过短凹槽的脉冲数而得知振幅的大小(凹槽对应的圆心角为  $2^\circ$ ,故测量误差为  $2^\circ$ ),而摆轮上的长凹槽

和位于下方的光电门则用于测量周期。驱动力的周期则是利用光电门B和有机玻璃转盘上的挡光片实现的。实验中采用频闪法测定相位差这一动态物理量。

实验时,将电器控制箱上的阻尼开关旋至“1”或“2”档位置。将摆轮转动至  $150^\circ$  附近放开,让摆轮做阻尼振动,记录摆轮的振幅  $\theta$  及周期  $T_b$ 。改变电机转速(即改变驱动力矩频率),让摆轮做受迫振动,振动稳定后读取摆轮的振幅  $\theta_j(j = 1, 2)$  及驱动力矩周期值  $T_{ej}(j = 1, 2)$ 。利用频闪法测定受迫振动与驱动力相位差  $\varphi_j(j = 1, 2)$ ,仪器误差限为  $2^\circ$ 。关闭电机,将阻尼档位旋至“0”,将摆轮转动至  $150^\circ$  附近放开,让摆轮做自由振动,记录与各振幅值相对应的固有周期  $T_0(j = 1, 2)$ 。

3 结果与分析

3.1 阻尼系数测定

表1为测定阻尼系数时记录的数据,由  $\ln \frac{\theta e^{-\frac{t}{\tau}}}{\theta e^{-\frac{t+\tau}{\tau}}} = 5\beta T$  可得  $\beta = \frac{1}{5T} \ln \frac{\theta}{\theta_{+5}}$ ,利用测量值分别计算出阻尼1和2档的阻尼值:  $\beta_1 = 0.062 \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta_2 = 0.067 \text{ s}^{-1}$ 。阻尼1和2档的阻尼差为  $|\Delta\beta| = 0.004 \text{ s}^{-1}$ 。

表 1 测量阻尼系数  $\beta$

阻尼	$\theta_0$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$	$\theta_8$	$\theta_9$	$10T_b(\text{s})$	$(\text{s}^{-1})$
1	124	112	102	93	84	76	70	62	57	52	15.772	0.0615
1	121	108	99	90	82	74	67	60	55	50	15.778	0.0623
1	128	117	106	96	87	79	72	65	59	54	15.772	0.0629
2	130	117	105	96	86	77	69	62	56	50	15.781	0.0674
2	139	121	109	98	88	80	71	64	59	52	15.781	0.0672
2	116	105	95	86	76	69	62	56	50	45	15.783	0.0669

3.2 测定幅频特性和相频特性

表2记录了幅频和相频特性的实验数据,其中  $\varphi_e$  为测量值,  $\varphi_c$  为公式5的计算值。从表2可知,  $\varphi_e$  与  $\varphi_c$  间的差值均在  $2^\circ$  以内,即未超出仪器的角度测量误差限。利用公式  $\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{T_{01}}{T_{e1}}$  计算出  $\frac{\omega_1}{\omega_0}$  作为横坐标,分别以振幅  $\theta$ 、相位差  $\varphi$  为纵坐标做幅频特性和相频特性曲线,如图2所示。

图2分别为阻尼1和2档的幅频和相频特性曲线,从图中可以看出,随着  $\omega/\omega_0$  的增大,振幅先增大后减小,但在  $\omega/\omega_0$  的值接近1时振幅达到了

最大,即驱动频率和固有频率接近时发生了共振,这与共振条件  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$  一致。此外,随着  $\omega/\omega_0$  的增大,相位差逐渐增大,但在  $= 90^\circ$  处出现了拐点,此时  $\omega/\omega_0$  的值约为1,说明相位差为  $90^\circ$  时,系统发生共振现象。 $\beta$  越小,共振时的振幅越大,阻尼1和2档的  $\beta$  值相差  $0.004 \text{ s}^{-1}$ ,而最大振幅的差值达到了  $16^\circ$ 。相频特性曲线随着  $\omega/\omega_0$  的变化几乎保持不变。

3.3 误差分析

因为本仪器采用石英晶体作为计时部件,所以测量周期(圆频率)的误差很小,可以忽略不计,误差主要来自阻尼系数  $\beta$  值的测定和系统的

固有频率  $\omega_0$  的确定, 且后者对实验结果影响较大。在测量相位差时采用了频闪法, 由于闪光灯的光较强, 比较刺眼, 为读数造成一定的影响, 通常在进行理论分析时认为弹簧的劲度系数  $k$  为常数, 与扭转的角度无关。实际上, 由于制造工艺及材料性能的影响,  $k$  值随着角度的改变而略有微小的变化(变化率约为 3%), 因而系统处于不同

振幅状态时其固有频率  $\omega_0$  也各不相同。如果取  $\omega_0$  的平均值, 相差的理论值与实验值在共振点附近将相差很大, 为此可测出与各振幅对应的固有频率  $\omega_0$ 。在利用公式  $\varphi = \arctan \frac{\beta T_0^2 T}{\pi(T^2 - T_0^2)}$  计算时,  $T_0$  取与相应振幅对应的值, 这样可使系统误差明显减小。

表 2 幅频特性和相频特性测量数据

$T_{e1}(s)$	$T_{01}(s)$	$\varphi_{11}(^\circ)$	$\varphi_{e1}(^\circ)$	$\varphi_{i1}(^\circ)$	$T_{e2}(s)$	$T_{02}(s)$	$\varphi_{21}(^\circ)$	$\varphi_{e2}(^\circ)$	$\varphi_{i2}(^\circ)$
1.527 2	1.581 4	53	158	156	1.524 1	1.581 8	50	155	156
1.536 2	1.580 5	63	154	151	1.535 2	1.581 0	60	151	152
1.545 3	1.581 6	76	147	146	1.543 2	1.581 0	70	145	145
1.553 1	1.579 8	90	136	137	1.550 6	1.580 5	80	137	139
1.558 0	1.577 8	102	130	129	1.555 5	1.579 8	90	131	133
1.562 1	1.577 9	116	122	123	1.559 7	1.578 1	100	125	127
1.566 6	1.576 3	130	112	111	1.564 0	1.577 4	110	118	117
1.570 0	1.576 5	138	103	105	1.566 5	1.577 5	117	114	113
1.572 5	1.576 2	140	96	98	1.568 9	1.576 8	121	108	107
1.574 5	1.576 0	142	90	92	1.576 5	1.576 8	126	90	91
1.577 6	1.576 0	142	84	86	1.577 9	1.576 8	126	87	88
1.581 0	1.576 5	138	76	80	1.580 0	1.577 0	125	83	84
1.585 0	1.576 3	130	68	71	1.582 4	1.576 8	121	78	78
1.529 3	1.577 9	116	58	60	1.590 5	1.577 4	110	64	64
1.598 6	1.578 0	101	50	51	1.595 9	1.578 1	100	56	57
1.604 4	1.579 8	90	44	56	1.600 1	1.580 0	91	51	50
1.612 8	1.580 5	80	36	38	1.607 1	1.580 8	82	43	45
1.625 0	1.581 1	64	30	30	1.616 4	1.581 0	71	36	35

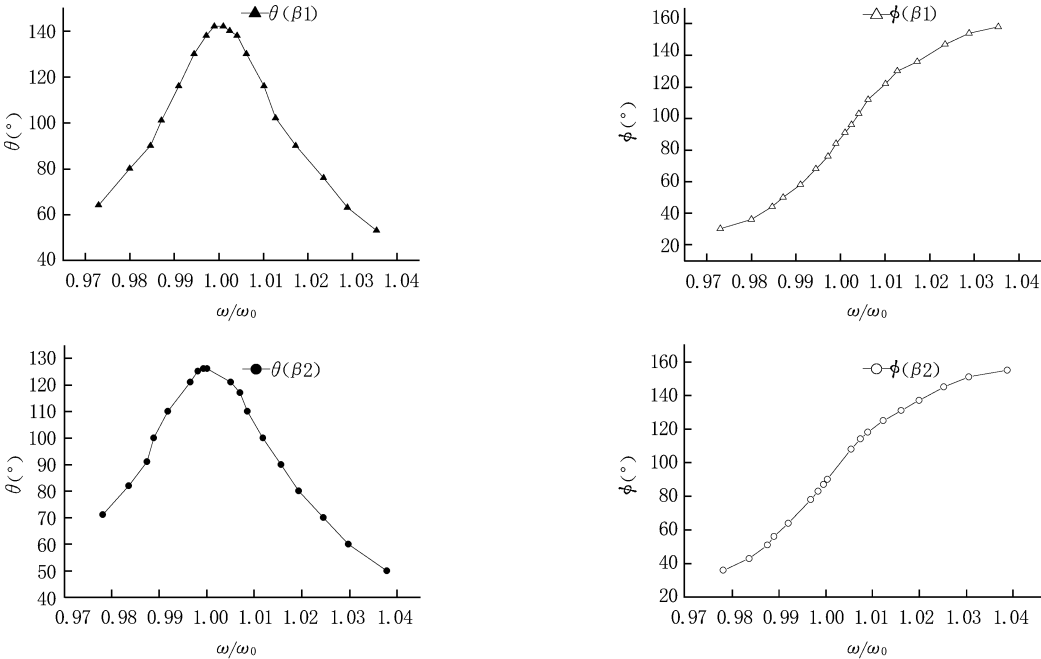


图 2 幅频特性曲线  $\theta-\omega/\omega_0$  和相频特性曲线  $\phi-\omega/\omega_0$

4 结 论

波尔共振仪实验内容丰富,包括自由振动、阻尼振动和受迫振动 3 个部分。在自由振动部分,要求测量摆轮的振幅变化时,其固有周期与振幅一一对应;在阻尼振动部分,要测量在阻尼力矩作用下的振幅衰减变化,并用对数逐差法计算阻尼系数;在受迫振动部分,测量摆轮的振动频率与振幅和相位差之间的关系,并绘制幅频特性曲线和相频特性曲线等。波尔共振实验在教学中有一些难点,主要有如下 3 个方面:(1) 实验理论较复杂,实验步骤较多;(2) 指导教师不易实时了解学生做实验的进展情况并发现问题,因而不能及时给予指导;(3) 测量的数据量较大,实验数据处理较复杂。为提高实验教学质量和效率,可将仪器通过数据接口与电脑相连,利用程序实时处理数据,并及时反馈给上课老师,实现网络化教学<sup>[7-9]</sup>。

参考文献:

[ 1] 单晓峰.关于受迫振动、共振的实验研究[J].物理实验,2006,26( 8):24-26.  
[ 2] 易忠斌.共振现象实验演示方法的探讨[J].喀什师范学院学报,2006( 6):72-74.  
[ 3] 丁慎训.物理实验教程[M].北京:清华大学出版社,2002:69.  
[ 4] 李越洋,刘存海,张勇.受迫振动特性研究[J].化学工程与装备,2008( 7):19-20.  
[ 5] 朱鹤年.波尔共振仪受迫振动的运动方程[J].物理实验,2006,25( 11):47-48.  
[ 6] 许友文,许弟余.用旋转矢量法求受迫振动的振幅和初相[J].物理与工程,2006,16( 4):20-21.  
[ 7] 方恺,陈铭南,李五旗.波尔共振仪实验的网络化教学[J].物理与工程,2006,16( 1):32-33.  
[ 8] 方恺,陈铭南.智能型波尔共振仪网络系统的设计[J].实验室研究与探索,2006,25( 7):771-772.

Research of Force Vibration Characteristics Based on Pohl Resonator

ZHU Hua ze

(Xi'an University of Science and Technology ,Xi'an 710054)

**Abstract :** The basic structure and theory of Pohl resonator were introduced .Phase frequency and amplitude frequency characteristics were measured and found that when the resonance of the system appeared ,drive frequency is almost equal to inherency frequency and phasic angle margin is equal to 90°. Finally ,system error was analyzed .

**Key words :** forced vibration ;Pohl resonator ;phase frequency characteristics ;amplitude frequency characteristics