Chap15 量子物理

初等量子论

- **黑体辐射**
  - $M(T)=\sigma T^4$
  - $\lambda_m T=b$
  - 普朗克能量子假设
- **光的波粒二象性**
  - **光子方程**
    - $E=h\nu,\quad p=\dfrac{h}{\lambda}$
  - **康普顿效应**
    - $\Delta\lambda=\dfrac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)$
- **氢原子的玻尔理论**
  - 定态假设
  - 量子化条件
  - 频率条件
  - $L=n\hbar$
  - $r_n=a_0 n^2$
  - $E_n=\dfrac{E_1}{n^2}$
  - $\dfrac{1}{\lambda}=R(\dfrac{1}{n_f^2}-\dfrac{1}{n_i^2})$

量子力学初步

- **德布罗意波**
  - $\nu=E/h,$
  - $\lambda=h/p$
  - **不确定关系**
    - $\Delta x\Delta p_x\geq h$
- **波函数**
  - 概率密度：$|\Psi|^2$
  - **标准条件：**
    - 有限,可归一化
    - 单值
    - 连续
- **薛定谔方程**
  - **一维无限深方势阱**
    - 本征函数
    - 本征能量
  - **一维方势垒**
    - 隧道效应
  - **氢原子**
    - (n, l, m_l, m_s)
    - **原子电子分布**
      - 泡利不相容
      - 能量最小

黑体辐射　斯特藩 - 玻耳兹曼定律　$M(T)=\sigma T^4$

维恩位移定律　$\lambda_{\mathrm{m}} T = b$

光子方程　$E = h\nu$　$p = \dfrac{h}{\lambda}$　$E = pc$

康普顿效应

$$\begin{cases} \text{能量守恒} \quad h\nu_0 + m_0 c^2 = h\nu + mc^2 \\ \text{动量守恒} \quad \dfrac{h\nu_0}{c}\vec{e}_0 = \dfrac{h\nu}{c}\vec{e} + m\vec{v} \end{cases}$$

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta) = 2\lambda_{\mathrm{C}} \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\lambda_{\mathrm{C}} = \frac{h}{m_0 c} = 2.43\times 10^{-12}\ \mathrm{m}$$

氢原子

玻尔理论 (1) 定态假设

(2) 量子化条件 $$L = mv_n r_n = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

(3) 频率条件 $$h\nu = E_i - E_f$$

$$r_n = a_0 n^2 \qquad E_n = \frac{E_1}{n^2}$$

波数 $$\sigma = \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

量子力学解 $$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad l = 0, 1, 2, 3, \cdots, (n-1)$$

$$L_z = m_l \hbar \qquad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm l$$

德布罗意波

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \qquad \nu = \frac{E}{h} = \frac{mc^2}{h}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}$$

$$E = E_0 + E_K, \ mc^2 = m_0 c^2 + E_K$$

$$E^2 - E_0{}^2 = p^2 c^2$$

若 $v << c$ 则 $m = m_0$ $\qquad 2mE_K = p^2$

不确定关系

$$\Delta x \Delta p_x \geq h$$

量子力学波函数

概率密度 $|\Psi|^2 = \psi\psi^*$ $\int|\Psi|^2 \mathrm{dV} = 1$

波函数的标准条件：有限、单值和连续

自由粒子波函数 $\Psi(x,t) = \psi_0 e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{h}(Et-px)}$

在势场中一维运动粒子的定态薛定谔方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - E_\mathrm{p})\psi(x) = 0$$

定态波函数性质

- 能量 E 不随时间变化.
- 概率密度 $|\psi|^2$ 不随时间变化.

一维无限深势阱

波函数 $$\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x,\quad (0<x<a)$$

能量 $$E_n=\frac{h^2}{8ma^2}n^2\quad (n=1,2,\ldots\ldots)$$

隧穿效应

粒子能穿过比其能量更高的势垒。

来源于微观粒子的波粒二象性。

原子中的电子的量子态$(n,\ l,\ m_l,\ m_s)$

名 称	允许取值	含 义
主量子数 n	$n = 1, 2, \cdots$	决定电子的能量
角量子数 l	$l = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$	决定电子的轨道角动量。
磁量子数 m_l	$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm l$	决定电子轨道角动量的取向
自旋量子数 m_s	$m_s = \pm \frac{1}{2}$	决定电子自旋角动量的取向

决定电子分布的两个原理

1) 泡利不相容原理

2) 能量最小原理

$$z_l = 2(2l+1)$$

$$z_n = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2$$

1. 下列物体中属于绝对黑体的是　（　　）

A、不辐射可见光的物体
B、不辐射任何光线的物体
C、不能反射可见光的物体
D、不能反射任何光线的物体

[D]

2. 当绝对黑体的温度从27ºC升为327ºC时，其辐射出射度M(T)增加为原来的___16___倍；峰值波长λ_m变为原来的___0.5___倍。

$$M(T) = \sigma T^4$$

$$\lambda_m T = b$$

3. 关于光子的性质,有以下说法:

(1)不论真空中或介质中的速度都是c;

(2)它的静止质量为零;

(3)它的动量为hv/c;

(4)它的总能量就是它的动能;

(5)它有动量和能量,但没有质量.

其中正确的是

A、(1)(2)(3)

B、(2)(3)(4)

C、(3)(4)(5)

D、(3)(5)

[B]

15-15 波长为0.1nm的光子入射在碳上，从而产生康普顿效应。从实验中测量到，散射光子的方向与入射光子的方向相垂直.求：
(1) 散射光子的波长；
(2) 反冲电子的动能和运动方向。

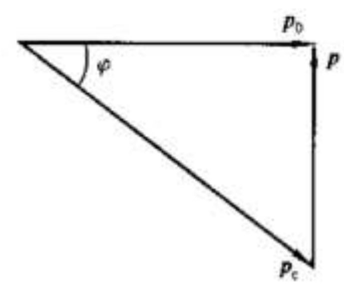
(1) $$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta) = \lambda_C = 2.43\times10^{-12}\ \mathrm{m} = 2.43\times10^{-3}\ \mathrm{nm}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = 0.10243\ \mathrm{nm}$$

(2) $$E_{ke} = \Delta E = h\left(\frac{c}{\lambda_0} - \frac{c}{\lambda}\right) = 4.72\times10^{-17}\ \mathrm{J} = 295\mathrm{eV}$$

$$p_e = \sqrt{p_0^2 + p^2} = h\sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda^2}} = 9.26\times10^{-24}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

或利用$p_e = \sqrt{\frac{E^2-E_0^2}{c^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{(m_0c^2+E_{ke})^2 - m_0^2c^4}$



$$\frac{h}{\lambda}\sin\theta = p_e\sin\varphi \qquad \varphi = \arcsin\left(\frac{h}{\lambda p_e}\right) = 44.3°$$

4. 在康普顿散射实验中，若入射光子的波长 $\lambda_0 = 3\times10^{-3}$ nm, 反冲电子的速度**v=0.6c**，求

(1)反冲电子的的德布罗意波长$\boldsymbol{\lambda_e}$

(2)散射光子的波长$\boldsymbol{\lambda}$

(3)散射角的余弦

(1) $\lambda_e = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{m_0 v / \sqrt{1-v^2/c^2}} = 3.23\times10^{-12}\ \text{m}$

(2) $E_k = h\nu_0 - h\nu = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2/4 \Rightarrow \lambda = 4.34\times10^{-12}\ \text{m}$

(3) $\Delta\lambda = \dfrac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta) \Rightarrow \cos\theta = 1 - \dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_C} = 0.449$

5. 在康普顿散射实验中，入射X射线波长$\lambda_0 = 0.00897$ nm，反冲电子的速度v=5c/13（c 为真空中的光速），求：(1) 散射X射线的波长λ；(2) 反冲电子运动的方向与入射X射线之间的夹角φ.

(1) $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{13}{12}$, $\quad E_e = \dfrac{13}{12} m_0 c^2$, $\quad E_{ke} = \dfrac{1}{12} m_0 c^2$, $\quad p_e = \dfrac{5}{12} m_0 c$

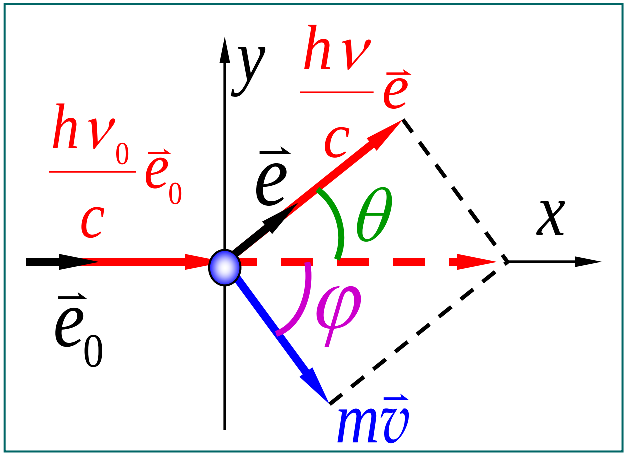
$$\frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} = E_{ke} = \frac{1}{12} m_0 c^2 \qquad \lambda = \frac{\lambda_0}{1 - \dfrac{m_0 c \lambda_0}{12h}} = 0.012 \text{ nm}$$

(2) $p_e \cos\varphi + \dfrac{h}{\lambda}\cos\theta = \dfrac{h}{\lambda_0}$

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$$

$$\cos\varphi = \frac{12}{5}\left(\frac{h}{m_0 c \lambda_0} + 1\right)\left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) = 0.9395$$

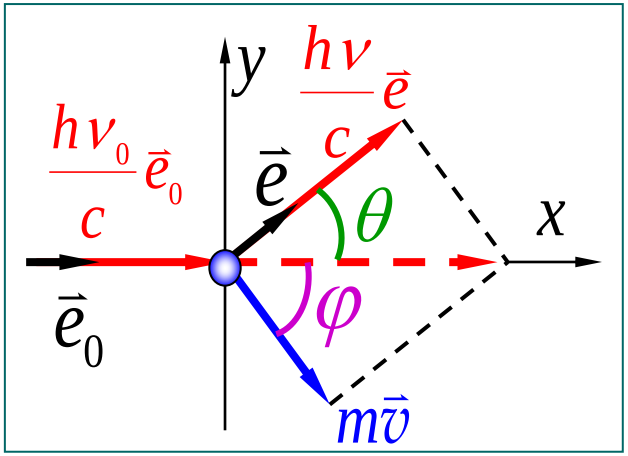
$$\varphi = 20^\circ$$



或

$$\begin{cases} \text{能量守恒} & \dfrac{hc}{\lambda_0} + m_0 c^2 = \dfrac{hc}{\lambda} + mc^2 \\ \text{动量守恒} & \left(\dfrac{h}{\lambda}\right)^2 = \left(\dfrac{h}{\lambda_0}\right)^2 + p_e^2 - 2\dfrac{h}{\lambda_0} p_e \cos\varphi \end{cases}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{5}\left(\frac{m_0 c \lambda_0}{h} + 1\right)$$



6. 已知氢原子电离能是13.6eV，一个能量为13.4eV的光子被一个氢原子中的处于第一激发态的电子吸收而形成一个光电子而脱离原子核的束缚，试求

（1）该光电子具有的动能

（2）求该光电子的德布罗意波长。

（已知$h=6.63\times10^{-34}$ J·s；$e=1.6\times10^{-19}$ C；$m_0=9.11\times10^{-31}$ kg）

$$(1)\ E_k=h\nu-\frac{E_1}{n^2}=13.4-\frac{13.6}{4}=10\ \text{eV}$$

$$(2)\ p=\sqrt{2m_0E_k}=1.7\times10^{-24}\ \text{kg}\cdot\text{m}/s$$

$$\lambda=\frac{h}{p}=3.88\times10^{-10}\ \text{m}$$

7. **根据波尔的氢原子理论，在主量子数为n的定态，电子绕核圆轨道运动的周期T_n 与n 的关系为为**

A、 $T_n \propto n$

B、 $T_n \propto n^2$

C、 $T_n \propto n^3$

D、 $T_n \propto n^{-1}$

[C]

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{n\hbar/mr}$$

8. 氢原子光谱的巴耳末系(n_f=2)中波长最大的谱线波长用λ_1表示，波长最短的谱线波长用λ_2表示，则λ_1/λ_2为

(A) 9/8　　(B) 9/5　　(C) 27/20　　(D)27/5

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2})$$

[B]

9. 某光子的波长为λ=300 nm，如果确定此波长的精确度 $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=10^{-6}$，则此光子位置的不确定量至少为

A、 0.3 m

B、 3×10^{-13} m

C、 1×10^{-6} m

D、 3×10^{-6} m

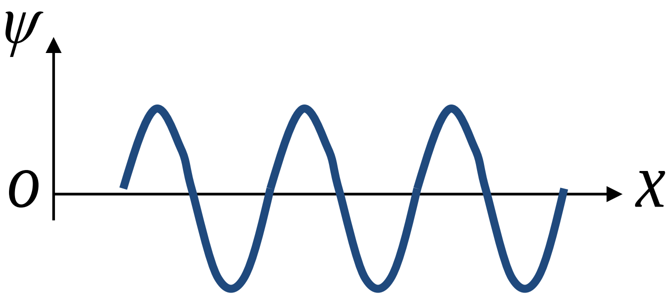
$$\Delta x=\frac{h}{\Delta p}=\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

$$\Delta p=\frac{h}{\lambda}-\frac{h}{\lambda+\Delta\lambda}=\frac{h\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

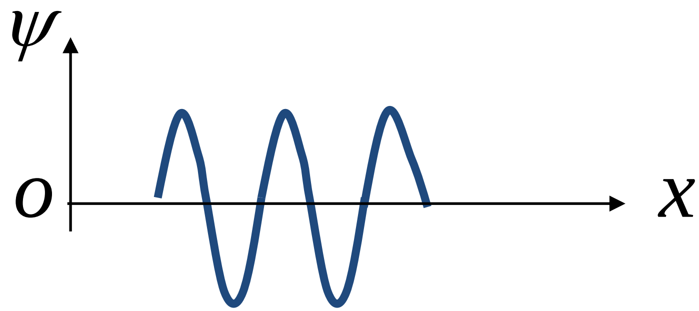
[A]

10. 设粒子运动的坐标空间波函数曲线分别如图(A)、(B)、(C)、(D)所示，那么其中确定粒子动量的精确度最高的波函数是哪个图?

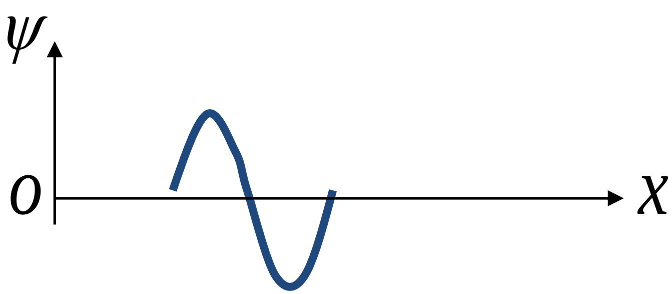
A



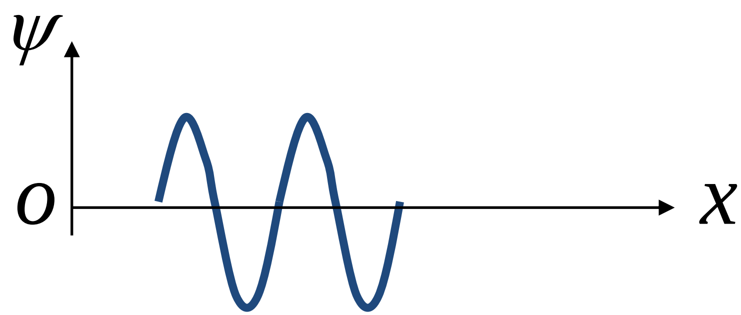
(A)



(C)



(B)



(D)

11. **将波函数在空间各点的振幅同时增大D倍,则粒子在空间的分布概率将**

(A) 增大D^2倍.

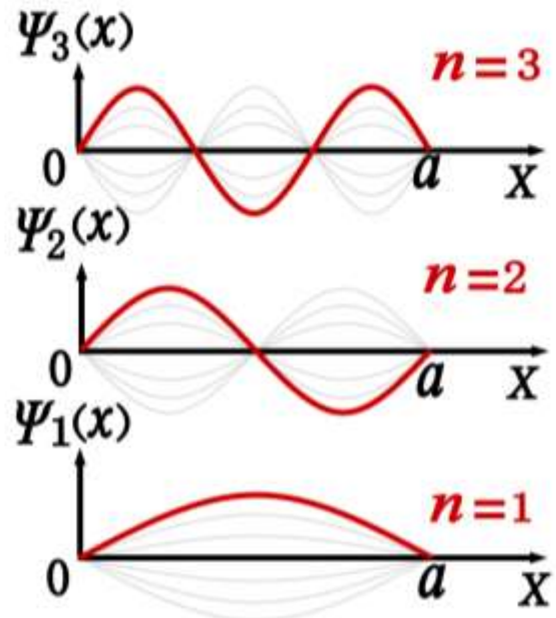
(B) 增大2D倍.

(C) 增大D倍.

(D) 不变.

[D]

12. 在宽度为a的一维无限深方势阱（在$0<x<a$范围内，势能函数$E_p=0$ ）中有一质量为m的粒子。当该粒子处于第一激发态时，其德布罗意波长为



$(A)\ a$　　　　$(B)\ 2a$

$(C)\ a/2$　　　　$(D)\ 3a$

$$E_n=\frac{h^2}{8ma^2}n^2$$

$$p=\sqrt{2mE_n}=\frac{nh}{2a}\qquad \lambda=\frac{h}{p}=\frac{2a}{n}$$

[A]

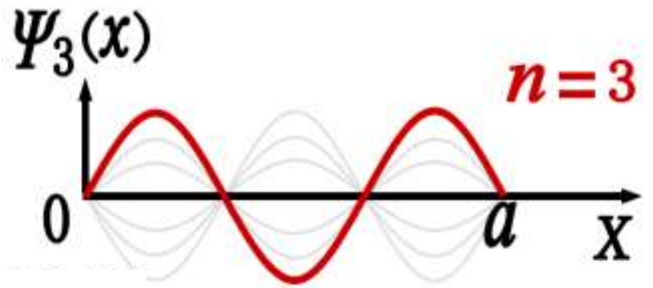
13. 一维运动的微观粒子在某区域内势能为零，且具有确定的正能量。在此区域内，粒子的定态波函数$\psi(x)$为实数且满足$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} > 0$，则$\psi(x)$在该区域的数值

（A）一定为正数
（B）一定为负数
（C）一定为零
（D）无法确定正负

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - E_p)\psi(x) = 0$$

[B]

14： 在$\mathbf{0 \le x \le L}$区间内的无限深方势阱中有一个处于第二激发态的粒子，试求在$\mathbf{\frac{L}{4} < x < \frac{3L}{4}}$之间找到该粒子的概率。



$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{3\pi x}{L} \quad (0 < x < L),$$

$$\int_{L/4}^{3L/4} |\psi(x)|^2 dx = \frac{2}{L} \int_{L/4}^{3L/4} \sin^2 \frac{3\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\pi}$$

补充1. 一质量为m的粒子被限制在宽度为L的一维有限深方势阱（在$|x| < L/2$范围内，势能函数$E_p = 0$）中，已知该粒子的某归一定态波函数为

$$\Psi(x) = \begin{cases} Ae^{\frac{\pi}{2L}(x+\frac{L}{2})} & , \quad x < -\frac{L}{2} \\ B\cos\frac{\pi x}{2L} & , \quad |x| \le -\frac{L}{2} \\ Ce^{-\frac{\pi}{2L}(x-\frac{L}{2})} & , \quad x > \frac{L}{2} \end{cases}$$

求常数A，B，C。

答： 波函数连续 $x = -\frac{L}{2}$处， $A = B\frac{\sqrt{2}}{2}$ $x = \frac{L}{2}$处， $C = B\frac{\sqrt{2}}{2}$

归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-\frac{L}{2}} A^2 e^{\frac{\pi}{L}(x+\frac{L}{2})} \mathrm{d}x + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} B^2 \cos^2\frac{\pi x}{2L} \mathrm{d}x + \int_{\frac{L}{2}}^{\infty} C^2 e^{-\frac{\pi}{L}(x-\frac{L}{2})} \mathrm{d}x = 1$$

$$A = C = \frac{\sqrt{2}}{2}B = \frac{1}{\sqrt{(4/\pi + 1)L}}$$

补充2. 一维谐振子的势能函数为$E_p(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$，其中$m$是振子的质量，$\omega$是振子的固有角频率。已知波函数$\Psi(x)=Ae^{-Bx^2/2}$为该谐振子的一个归一的定态波函数，求：（1）常数$A$和$B$；（2）$\Psi(x)$所对应的能量本征值。

（已知定态薛定谔方程$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+E_p(x)\right]\Psi(x)=E\Psi(x)$，积分公式$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$）

(1) 将$\boldsymbol{E_p(x)}$，$\boldsymbol{\Psi(x)}$代入薛定谔方程$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right]\Psi(x)=E\Psi(x)$

$$\frac{\hbar^2}{2m}B+\left(\frac{1}{2}m\omega^2-\frac{\hbar^2}{2m}B^2\right)x^2=E=\text{常数}$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2-\frac{\hbar^2}{2m}B^2=0 \qquad B=\frac{m\omega}{\hbar}=\frac{2\pi m\omega}{h}$$

归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi|^2\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}A^2e^{-Bx^2}\mathrm{d}x=A^2\sqrt{\pi/B}=1 \qquad A=\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}=\left(\frac{2m\omega}{h}\right)^{1/4}$$

(2) $$E=\frac{\hbar^2}{2m}B=\frac{\omega\hbar}{2}$$

15-38 氢原子中的电子处于$n=4$、$l=3$ 的状态.问：(1) 该电子角动量L的值为多少？ (2) 这角动量L 在z 轴的分量有哪些可能的值？ (3) 角动量L 与z 轴的夹角的可能值为多少？

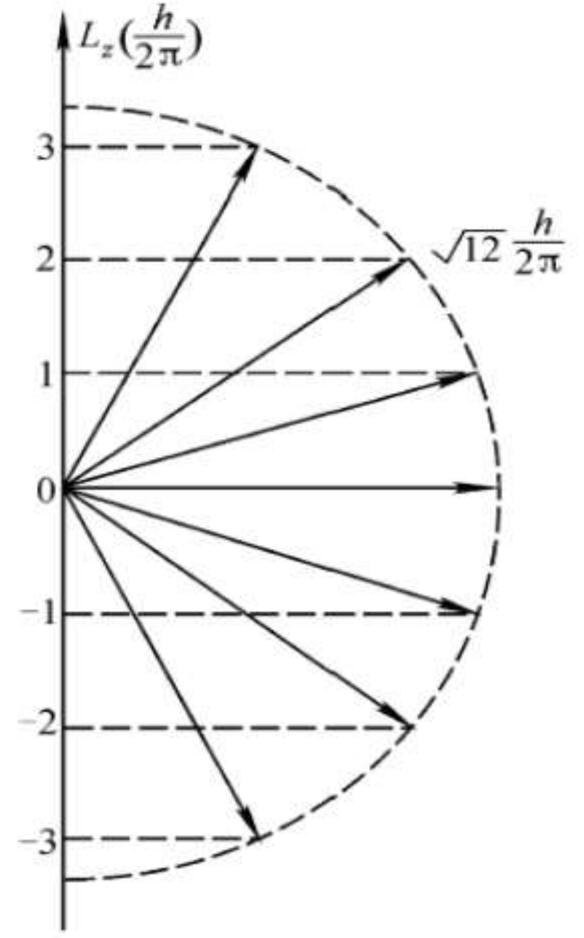
(1) $$L=\sqrt{l(l+1)}\frac{h}{2\pi}=\sqrt{12}\frac{h}{2\pi}$$

(2) $$L_z=m_l\frac{h}{2\pi} \qquad m_l=0,\pm1,\pm2,\pm3$$

(3) $$L\cos\theta=L_z$$

30°，55°，73°，90°，

107°，125°，150°



18. 直接证实了电子自旋存在的最早的实验之一是

(A) 弗兰克-赫兹实验

(B) 戴维逊—革末实验

(C) G.P.汤姆孙实验

(D) 斯特恩—格拉赫实验

[D]