ch 4.

8. 一个有n把钥匙的人要开他的门，他随机而独立地用钥匙试开，求他把门打开时试开次数 X 的数学期望 EX：

①如果试开不成功的钥匙没有从以后的选取中去除；

②如果除去试开不成功的钥匙.

解：① $P(X=k)=(\frac{n-1}{n})^{k-1}\cdot\frac{1}{n}\qquad k=1,2,\cdots$

$\therefore EX=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^{k-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k(1-\frac{1}{n})^{k-1}$

而 $\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=(\sum_{k=1}^{\infty}q^k)'=(\frac{q}{1-q})'=\frac{1}{(1-q)^2}$ 其中 $q\in(0,1)$

从而 $\sum_{k=1}^{\infty}k(1-\frac{1}{n})^{k-1}=n^2\qquad\therefore EX=\frac{1}{n}\cdot n^2=n$.

② $P(X=k)=\frac{1}{n},\quad k=1,2,\cdots,n$

$\therefore EX=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n}\frac{1+n}{2}\cdot n=\frac{n+1}{2}$.

10. 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

其中 $-\infty<\mu<+\infty$，$\sigma>0$ 是已知常数，求 EX、DX.

解：

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx\ \underline{\underline{\text{令}\ln x=t}}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}e^{t}dt$$

$$=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{[t-(\mu+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}}dt=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx\ \underline{\underline{\text{令}\ln x=t}}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}e^{2t}dt$$

$$=e^{2\mu+2\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{[t-(\mu+2\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}}dt=e^{2\mu+2\sigma^2}$$

$$\therefore DX=EX^2-(EX)^2=e^{2\mu+2\sigma^2}-e^{2\mu+\sigma^2}=e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1).$$

12. 设连续型随机变量X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

其中$\sigma>0$是已知常数，求EX, DX；

解：$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\int_0^{+\infty}(-x)\,de^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

$=(-x)e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$

$\xlongequal{\text{令}\frac{x}{\sqrt2\sigma}=t}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\sqrt2\sigma dt=\frac{\sqrt2}{2}\sigma\cdot\sqrt\pi=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma.$

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\xlongequal{\text{令}\frac{x^2}{2\sigma^2}=t}\int_0^{+\infty}2\sigma^2te^{-t}dt=2\sigma^2\int_0^{+\infty}(-t)de^{-t}$

$=(-2\sigma^2t)e^{-t}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2\sigma^2e^{-t}dt=-2\sigma^2e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=2\sigma^2$

$\therefore DX=2\sigma^2-(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma)^2=(2-\frac{\pi}{2})\sigma^2.$

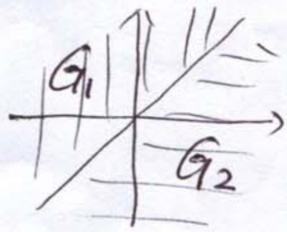
19. 设随机变量X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，求$E|X-\mu|$.

解：$E|X-\mu|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-\mu|f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-\mu|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx\xlongequal{\text{令}t=\frac{x-\mu}{\sqrt2\sigma}}\int_{-\infty}^{+\infty}|t|\frac{1}{\sqrt\pi}e^{-t^2}\sqrt2\sigma dt$

$=\frac{2\sqrt2\sigma}{\sqrt\pi}\int_0^{+\infty}te^{-t^2}dt=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma e^{-t^2}\Big|_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$

21. 设随机变量X和Y相互独立同服从正态分布$N(0,1)$，求$E\min\{X,Y\}$.

解：$E\min\{X,Y\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,y\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy$



$=\iint_{G_1}x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy+\iint_{G_2}y\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$

$=\frac{1}{2\pi}\times2\iint_{G_1}xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{y}xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{y}\right]dy$

$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(-e^{-y^2})dy=-\frac{1}{\pi}\cdot\sqrt\pi=-\frac{1}{\sqrt\pi}.$

23. 一民航机场的送客汽车载有20位乘客自机场开出，旅客有10个车站可以下车，如果到某一车站没有旅客下车就不停车，以X表示停车的次数，求EX（设每位乘客在各个车站下车是等可能的）. “$\frac{9}{10}$”

解：设随机变量 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{在第}i\text{站有人下车} \\ 0, & \text{在第}i\text{站无人下车} \end{cases}$ $\quad i=1,2,\cdots,10$

则 $EX_i = P(X_i=1) = 1 - P(X_i=0) = 1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$

$\therefore EX = E(X_1+\cdots+X_{10}) = EX_1+\cdots+EX_{10} = 10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right]$.

31. 设连续型随机变量X的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^\alpha}{\alpha!}e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

其中$\alpha>0$，证明：$P(0<X<2(\alpha+1)) > \frac{\alpha}{1+\alpha}$.

解：$\because EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_0^{+\infty} x\cdot\frac{x^\alpha}{\alpha!}e^{-x}dx = \frac{1}{\alpha!}\int_0^{+\infty} x^{\alpha+2-1}e^{-x}dx = \frac{1}{\alpha!}\Gamma(\alpha+2) = \frac{(\alpha+1)!}{\alpha!}$
$= \alpha+1$

$\therefore P(0<X<2(\alpha+1)) = P(|X-(\alpha+1)|<\alpha+1)$ 由切比雪夫不等式

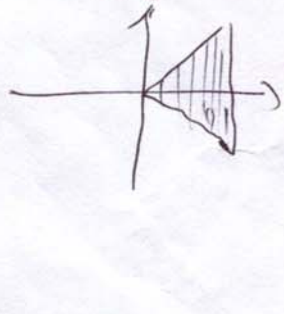
$\ge 1-\frac{DX}{(\alpha+1)^2}$

而 $DX = EX^2-(EX)^2 = \int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha+3-1}e^{-x}}{\alpha!}dx - (\alpha+1)^2 = \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\alpha!}-(\alpha+1)^2 = (\alpha+2)(\alpha+1)-(\alpha+1)^2$
$= \alpha+1$

$\Rightarrow P(0<X<2(\alpha+1)) \ge 1-\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2} = \frac{\alpha}{\alpha+1}$.

32. 设连续型随机向量的联合概率密度函数为 $f(x,y) = \begin{cases} 1, & |y|\le x,\ 0<x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

求$Cov(X,Y)$.



解：$Cov(X,Y) = E(XY)-(EX)(EY)$

而$E(XY) = \int_0^1 dx\int_{-x}^{x} xy\cdot 1dy = \int_0^1 x\cdot 0dx = 0$

$EX = \int_0^1 dx\int_{-x}^{x} x\cdot 1dy = \int_0^1 x\cdot 2xdx = \frac{2}{3}$

$EY = \int_0^1 dx\int_{-x}^{x} y\cdot 1dy = 0$

$\therefore Cov(X,Y)=0$.

34. 已知三个随机变量 X、Y、Z 中，$EX=EY=1$，$EZ=-1$，$DX=DY=DZ=1$，$\rho_{XY}=0$，$\rho_{XZ}=\frac{1}{2}$，$\rho_{YZ}=-\frac{1}{2}$，求 $D(X+Y+Z)$.

解：$D(X+Y+Z)=DX+DY+DZ+2Cov(X,Y)+2Cov(X,Z)+2Cov(Y,Z)$

$$=3+2[Cov(X,Y)+Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)]$$

而 $Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{DX\cdot DY}=0$

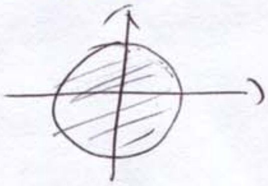
$Cov(X,Z)=\rho_{XZ}\sqrt{DX\cdot DZ}=\frac{1}{2}\sqrt{1\cdot 1}=\frac{1}{2}$

$Cov(Y,Z)=\rho_{YZ}\sqrt{DY\,DZ}=-\frac{1}{2}\sqrt{1\cdot 1}=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow D(X+Y+Z)=3+2\cdot 0=3$.

39. 设二维连续型随机向量 (X,Y) 的联合分布密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$

证明：X与Y不相关，X与Y不相互独立.



解：① $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\dfrac{E(XY)-EX\cdot EY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

$\because E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}y\,f(x,y)\,dy=\int_{-1}^{1}x\,dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}y\cdot\frac{1}{\pi}\,dy=\int_{-1}^{1}x\cdot 0\,dx=0$

$EX=\int_{-1}^{1}x\,dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\,dy=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,x\,dx=0$

$EY=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}y\cdot\frac{1}{\pi}\,dy=\int_{-1}^{1}1\cdot 0\,dy=0$

$\therefore Cov(X,Y)=0\Rightarrow\rho_{XY}=0$ $\therefore$ X、Y不相关.

②

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\,dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}; & |x|<1\\ 0 & |x|\ge 1\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}\,dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & |y|<1\\ 0 & |y|\ge 1\end{cases}$

$\therefore f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)\Rightarrow$ X、Y不相互独立.

1. 设$X_n\ (n=1,2,\cdots)$是相互独立同分布的随机变量序列，其共同的分布函数为 Ch5

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x,\quad -\infty<x<+\infty$$

试问：辛钦大数定律对此序列是否适用？

解：$f(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$

而 $EX_n=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$ 不存在 $\therefore$ 不适用辛钦大数定律.

4. 一本400页的书中，每一页的印刷错误个数服从参数 $\lambda=0.2$ 的泊松分布 $P(0.2)$，各页有多少个错误是相互独立的，求这本书中错误个数不超过90个的概率的近似值.

解：设 X_i 表示第 i 页中错误的个数，则 $X_i\sim P(0.2)\quad i=1,2,\cdots,400$

$\Rightarrow EX_i=0.2,\ DX_i=0.2$ 由独立同分布中心极限定理

$$P(0\le\sum_{i=1}^{400}X_i\le 90)\doteq\Phi\left(\frac{90-400\times0.2}{\sqrt{400\times0.2}}\right)-\Phi\left(\frac{0-400\times0.2}{\sqrt{400\times0.2}}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{\sqrt5}{2}\right)-\Phi(-4\sqrt5)=\Phi(1.118)-0\doteq\Phi(1.12)=0.86864$$

6. 计算机在进行加法运算时，对每个加数取整（取为最接近它的整数）相加，设所有的取整误差是相互独立的且都在区间 $[-0.5,0.5]$ 上服从均匀分布，求：

① 将1200个数相加，误差总和的绝对值超过20的概率；

② 最多几个数相加，能使误差总和的绝对值不超过10的概率达到0.6826？

③ 若将1200个数相加，使误差总和的绝对值不超过 x 的概率达到0.95，求 x 的最小值. 设 X_i 表示对第 i 个数取整造成的误差，则 $X_i\sim U(-0.5,0.5)$

解 ① $\Rightarrow EX_i=0,\ DX_i=\frac{1}{12}$.

$$P(|\sum_{i=1}^{1200}X_i|>20)=1-P(-20\le\sum_{i=1}^{1200}X_i\le 20)\doteq1-\Phi\left(\frac{20-1200\times0}{\sqrt{1200\times\frac{1}{12}}}\right)+\Phi\left(\frac{-20-1200\times0}{\sqrt{1200\times\frac{1}{12}}}\right)$$

$$=1-\Phi(2)+\Phi(-2)=2[1-\Phi(2)]=2[1-0.97725]=0.0455$$

② $P(|\sum_{i=1}^{N}X_i|\le10)\ge0.6826$

而 $P(|\sum_{i=1}^{N}X_i|\le10)\doteq\Phi\left(\frac{10-0}{\sqrt{N\times\frac{1}{12}}}\right)-\Phi\left(\frac{-10}{\sqrt{N\times\frac{1}{12}}}\right)=2\Phi\left(\frac{20\sqrt3}{\sqrt N}\right)-1$

$\Rightarrow\Phi\left(\frac{20\sqrt3}{\sqrt N}\right)\ge0.8413$

$\therefore\frac{20\sqrt3}{\sqrt N}\ge1\Rightarrow\sqrt N\le34.64\Rightarrow N\le$ ~~1199.9296~~ 1200

$\therefore$ 最多 ~~1199~~ 1200 个数相加 ……

③ $P\left(\left|\sum_{i=1}^{1200} x_i\right| \le x\right) = \Phi\left(\frac{x}{10}\right) - \Phi\left(-\frac{x}{10}\right) = 2\Phi\left(\frac{x}{10}\right) - 1 \ge 0.95$

$\Rightarrow \Phi\left(\frac{x}{10}\right) \ge 0.975$ $\quad\therefore \frac{x}{10} \ge 1.96 \Rightarrow x \ge 19.6$ $\quad\therefore x_{min} = 19.6$

8. 盒子中有6个相同大小的球，其中有1个球标有号码1，有2个球标有号码2，有3个球标有号码3，从盒子中有放回地取n个球，设X_i表示取出的第i $(i=1,2,\cdots,n)$个球上标有的号码，利用相互独立同分布的中心极限定理求n的最小值，使$P\left(\left|\bar{X} - \frac{7}{3}\right| < 0.1\right) \ge 0.6826$.

解:

X_i	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

$\therefore EX_i = \frac{7}{3}$, $\quad EX_i^2 = 6 \Rightarrow DX_i = \frac{5}{9}$

∵是有放回地取球 ∴ $X_1, \cdots, X_n$相互独立.

$P\left(\left|\bar{X} - \frac{7}{3}\right| < 0.1\right) = P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right| < 0.1\right)$

$= P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} EX_i\right| < 0.1n\right) = P\left(\frac{\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{7}{3}n\right|}{\sqrt{\frac{5}{9}n}} < \frac{0.1\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{5}{9}}}\right)$

$= 2\Phi\left(\frac{3\sqrt{n}}{10\sqrt{5}}\right) - 1 \ge 0.6826$

$\Rightarrow \Phi\left(\frac{3\sqrt{n}}{10\sqrt{5}}\right) \ge 0.8413 = \Phi(1)$

$\therefore n \ge \left(\frac{10\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{500}{9} = 55.56$ $\quad\therefore n_{min} = 56$

Ch 6.

4. 设$(X_1,\cdots,X_n)$是来自均匀分布总体$U(0,\theta)$的容量为n的简单随机样本，求$E\bar{X}$，$D\bar{X}$，ES_n^2.

解：∵ 总体 $X \sim U(0,\theta)$

$\therefore EX=\frac{\theta}{2}$，$DX=\frac{\theta^2}{12}$

$\Rightarrow E\bar{X}=\frac{\theta}{2}$，$D\bar{X}=\frac{1}{n}\cdot\frac{\theta^2}{12}$，$ES_n^2=\frac{\theta^2}{12}$.

5. 设$(X_1,\cdots,X_{16})$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的容量为16的简单随机样本，求：

① 已知$\sigma=5$时，$P(|\bar{X}-\mu|<2)$；

② σ未知，但样本方差$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$的观察值为$s^2=20.8$时，$P(|\bar{X}-\mu|<2)$.

解：① $P(|\bar{X}-\mu|<2)=P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{16}X_i-16\mu}{\sqrt{16\sigma^2}}\right|<\frac{2\times16}{\sqrt{16\sigma^2}}\right)$

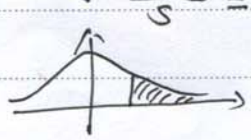
$=P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{16}X_i-16\mu}{4\times5}\right|<\frac{2\times16}{4\times5}=1.6\right)$

$\approx 2\Phi(1.6)-1=2\times0.9452-1=0.8904$

② ∵ $\frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{S}\sim t(n-1)$ 即 $\frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{16}}{S}\sim t(15)$

$\therefore P(|\bar{X}-\mu|<2)=P\left(\frac{|\bar{X}-\mu|\cdot4}{S}<\frac{2\cdot4}{S}=\frac{8}{\sqrt{20.8}}=1.7541\right)$

而 $t_{0.05}(15)\approx1.7541$



$\therefore P(|\bar{X}-\mu|<2)\approx1-2\times0.05=0.9$

6. 设$(X_1,\cdots,X_n)$是来自正态总体$N(1.5,2^2)$的容量为n的简单随机样本，如果要求样本均值$\bar{X}$位于区间$(1.01,1.99)$内的概率不小于0.95，问样本容量n至少应取多大？

解：求n_{min}使得 $P(1.01<\bar{X}<1.99)\geq0.95$.

而 $E\bar{X}=1.5$，所以 $P(1.01<\bar{X}<1.99)=P(-0.49<\bar{X}-1.5<0.49)$

$$=P(|\bar{X}-1.5|<0.49)$$

$$=P\left(\frac{|\sum_{i=1}^{n}X_i-1.5n|}{\sqrt{n\cdot 2^2}}<\frac{0.49\cdot n}{\sqrt{n\cdot 2^2}}=0.245\sqrt{n}\right)$$

$$\approx 2\Phi(0.245\sqrt{n})-1\geq 0.95$$

$\Rightarrow \Phi(0.245\sqrt{n})\geq 0.975 \Rightarrow 0.245\sqrt{n}\geq 1.96 \Rightarrow n\geq 64$

∴样本容量 n 至少应取为64.

7. 设 $(X_1,\cdots,X_{10})$ 是来自正态总体 $N(0,0.5^2)$ 的容量为10的简单随机样本，求：

注：若 X 的概率密度为 $f(x)$，则 $Y=aX$ 的概率密度为 $\frac{1}{a}f(\frac{y}{a})$

① $\sum_{i=1}^{10}X_i^2$ 的概率密度函数；

② $P(\sum_{i=1}^{10}X_i^2>4)$；

③ $P(\sum_{i=1}^{10}(X_i-\bar{X})^2>2.85)$.

解：① $\sum_{i=1}^{10}X_i^2=0.25\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i-0}{0.5}\right)^2$ 而 $\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i}{0.5}\right)^2\sim\chi^2(10)$

记 $\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i}{0.5}\right)^2$ 的概率密度函数为 $f(x)$，见书 P_{182}

则 $\sum_{i=1}^{10}X_i^2$ 的概率密度函数为 $4f(4x)=\begin{cases}\frac{4}{2^5\Gamma(5)}(4x)^4e^{-\frac{4x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$

$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt$

$$=\begin{cases}\frac{2^5}{\Gamma(5)}x^4e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

② $P(\sum_{i=1}^{10}X_i^2>4)$

$=P(\sum_{i=1}^{10}(\frac{X_i}{0.5})^2>16)=0.1$

③ $P(\sum_{i=1}^{10}(X_i-\bar{X})^2>2.85)=P(\frac{1}{0.5^2}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\bar{X})^2>11.4)$

而 $\frac{1}{0.25}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(9)$

∴ $P(\sum_{i=1}^{10}(X_i-\bar{X})^2>2.85)=0.2493$

9. 设 $(X_1, \cdots, X_n, X_{n+1})$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的容量为 $n+1$ $(n \geq 2)$ 的简单随机样本，$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$，证明：

$$\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S_n}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \sim t(n-1)$$

证明：$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$；

$\because X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}$ 相互独立

$\therefore \bar{X}$ 与 X_{n+1} 相互独立 $\Rightarrow \bar{X} - X_{n+1} \sim N(0, \frac{n+1}{n}\sigma^2)$

$$\Rightarrow -\frac{\bar{X} - X_{n+1}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\,\sigma} \sim N(0,1)$$

又 $\because S_n$ 与 $\bar{X}$ 相互独立，S_n 与 X_{n+1} 相互独立

$$\therefore \frac{\frac{-\bar{X} + X_{n+1}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\,\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}/n-1}} = \frac{-\bar{X} + X_{n+1}}{S_n}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \sim t(n-1)$$