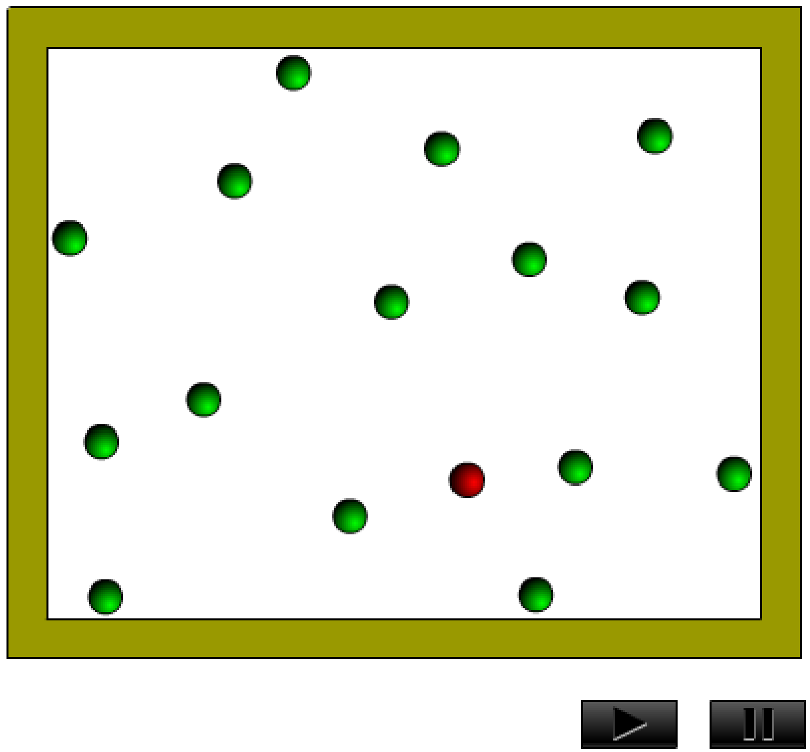
自由程： 分子两次相邻碰撞之间自由通过的路程 .



- 分子**平均自由程**：每两次连续碰撞之间，一个分子自由运动的平均路程.

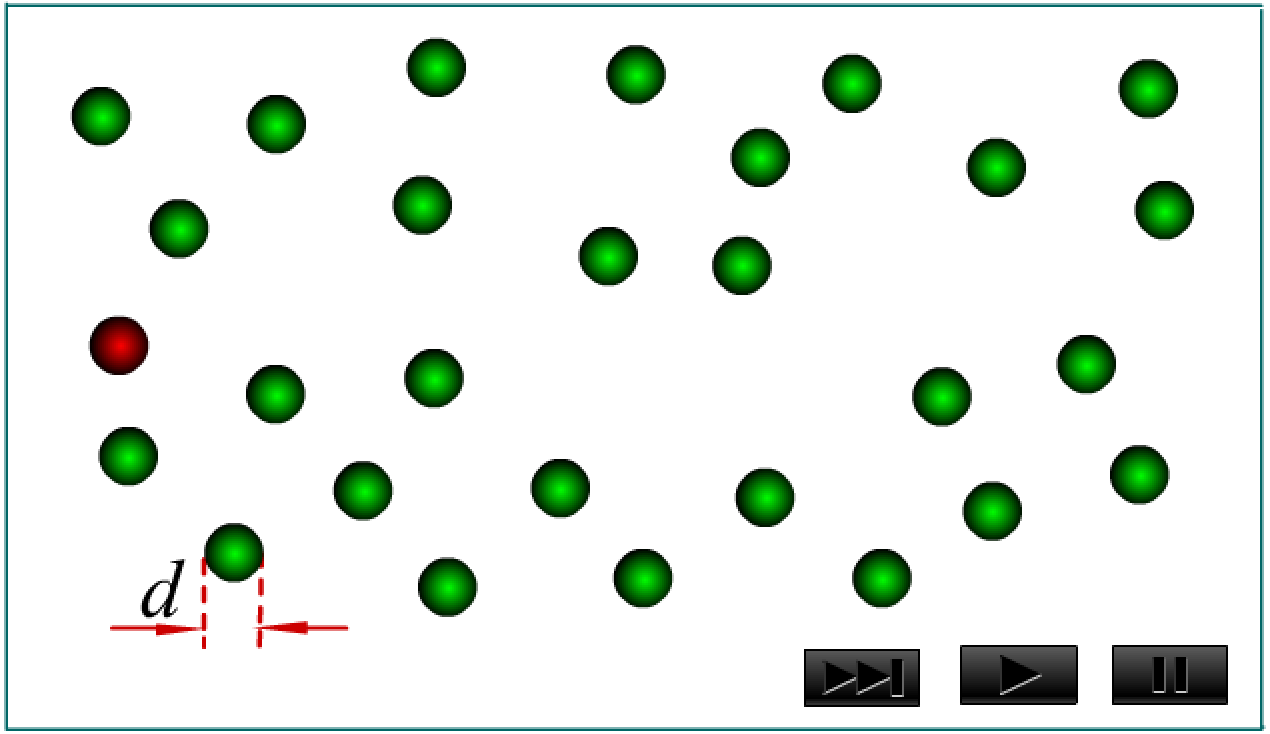
- 分子**平均碰撞次数**：单位时间内一个分子和其它分子碰撞的平均次数.

简化模型

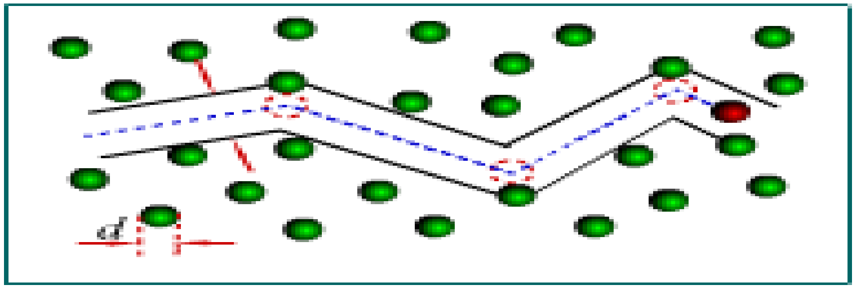
（1）分子为刚性小球．

（2）分子有效直径为 d（分子间距平均值）．

（3）其它分子皆静止，某分子以平均速率 $\overline{v}$ 相对其他分子运动．



单位时间内平均碰撞次数：$\overline{Z}=\pi d^{2}\overline{v}n$



◆ 考虑其它分子的运动，分子平均碰撞次数

$$\overline{Z} = \sqrt{2}\,\pi d^2\,\overline{v} n$$

◆ 平均自由程 $\bar{\lambda}=\frac{\bar{v}}{\bar{z}}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$

$$p=nkT$$

$$\boxed{\bar{\lambda}=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}}$$

T 一定时 $\bar{\lambda}\propto\frac{1}{p}$

p 一定时 $\bar{\lambda}\propto T$

例 试估计下列两种情况下空气分子的平均自由程：（1）273 K、$1.013\times10^{5}\,\mathrm{Pa}$ 时；（2）273 K、$1.333\times10^{-3}\,\mathrm{Pa}$ 时.

（空气分子有效直径 $d=3.10\times10^{-10}\,\mathrm{m}$）

解
$$\bar{\lambda}=\frac{kT}{\sqrt{2}\,\pi d^{2}p}$$

$$\bar{\lambda}_1=\frac{1.38\times10^{-23}\times273}{\sqrt{2}\pi\times(3.10\times10^{-10})^{2}\times1.013\times10^{5}}\,\mathrm{m}$$

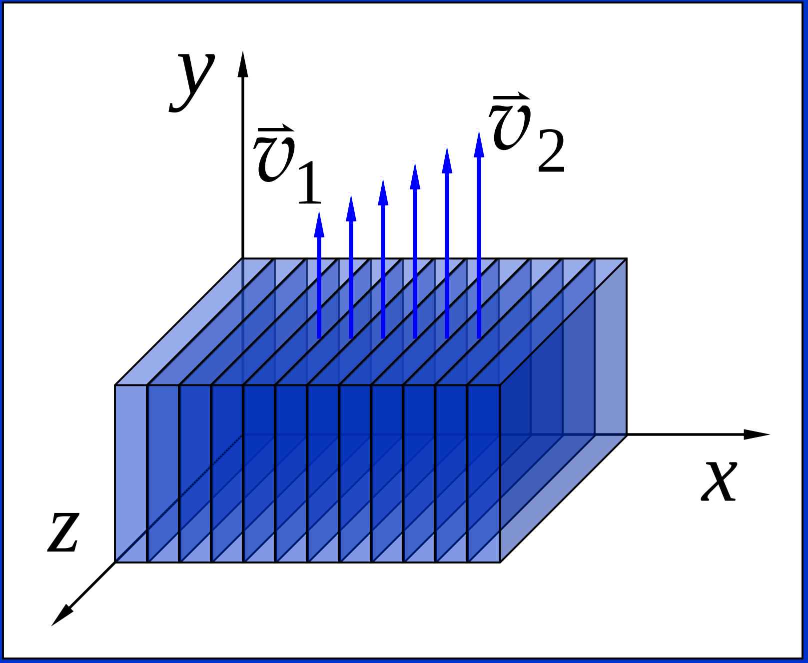
$$=8.71\times10^{-8}\,\mathrm{m}$$

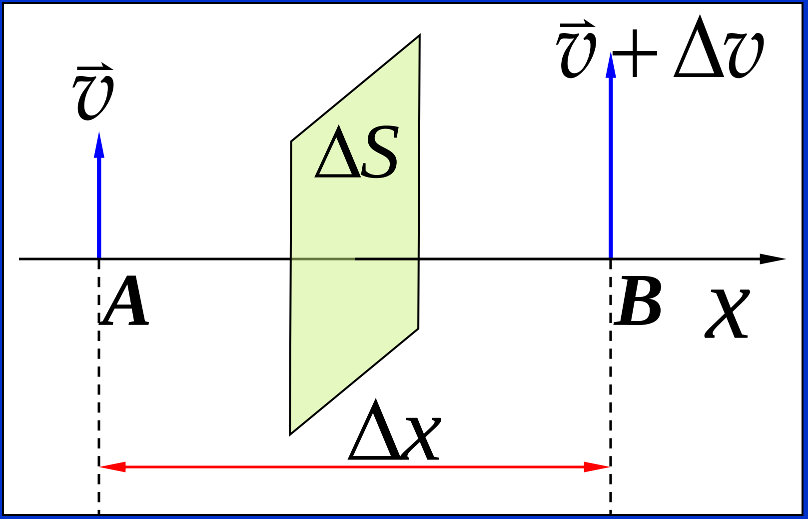
12-9 气体的迁移现象

一 粘滞现象

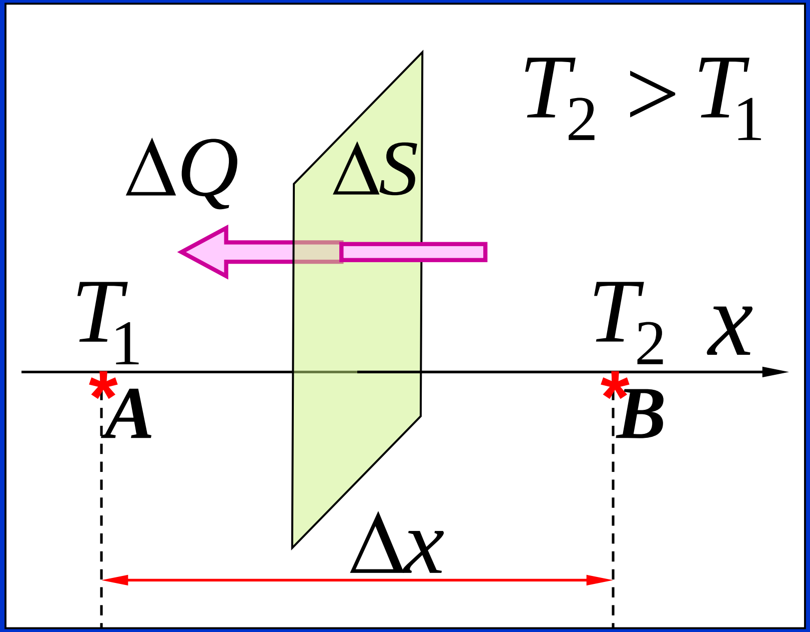
$$f = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta S$$

η为粘度（粘性系数）





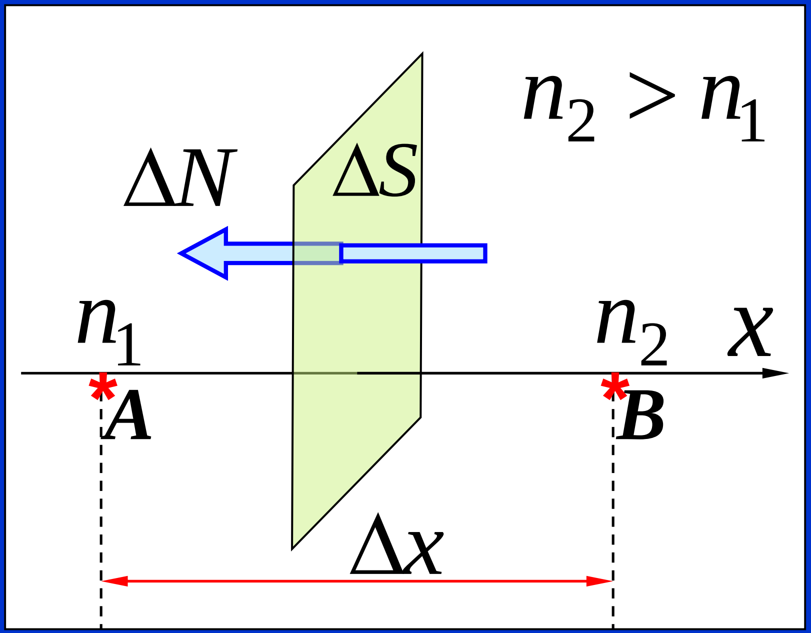
二　热传导现象



$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\kappa \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta S$$

κ 称为热导率

三 扩散现象



$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -D\frac{\Delta n}{\Delta x}\Delta S \qquad \frac{\Delta m'}{\Delta t} = -D\frac{\Delta \rho}{\Delta x}\Delta S$$

D 为扩散系数

四 三种迁移系数

- 粘度（粘性系数） $$\eta = \frac{1}{3}\rho\overline{v}\,\overline{\lambda}$$

- 热导率 $$\kappa = \frac{1}{3}\rho\overline{v}\,\overline{\lambda}$$

- 扩散系数 $$D = \frac{1}{3}\overline{v}\,\overline{\lambda}$$

12-10 范德瓦尔斯方程

对理想气体状态的修正： $pV = \nu RT$

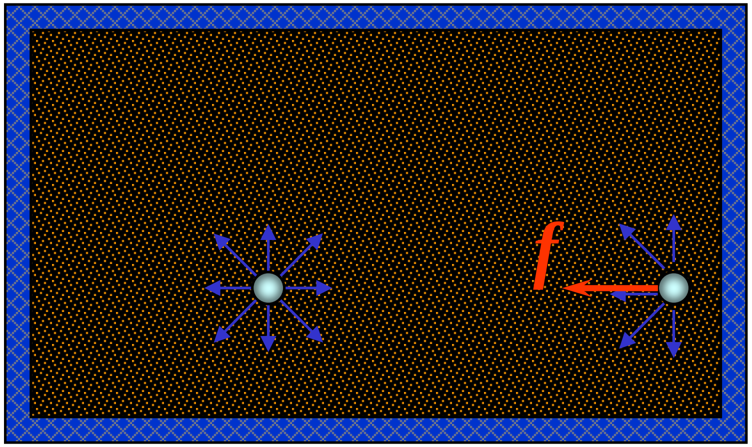
（1）体积修正

设V为容器体积，b为一摩尔分子所占体积。

$$p(V-\nu b)=\nu RT \quad \text{或} \quad p=\frac{\nu RT}{V-\nu b}$$

（2）压强修正

$$p=\frac{\nu RT}{V-\nu b}-p_{\mathrm{i}}$$



考虑分子间存在引力，气体分子施与器壁的压强应减少一个量值，称为**内压强**（$\boldsymbol{p}_{\mathrm{i}}$）。

$$\because \quad p_i \propto n^2 \quad \rightarrow \quad p_i = \nu^2 \frac{a}{V^2}$$

a为比例系数

$$p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - p_{\mathrm{i}} = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \nu^2 \frac{a}{V^2}$$

范德瓦尔斯方程：

$$\left(p + \nu^2 \frac{a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT$$

气体动理论

一、基本要求

1、理解理想气体的压强公式和温度公式，并能从宏观和统计意义上理解压强、温度和内能等概念。

2、掌握气体分子平均碰撞次数和平均自由程，了解输运过程和范氏方程。

3、理解气体分子能量均分定理，理解气体分子内能的计算。

4、了解M-B分布，掌握麦克斯韦速率分布定律和分布函数，理解分布曲线的物理意义，理解三种统计速率。

气体动理论

- 状态参量的统计意义
  - 压强公式
  - 温度公式
- 统 计 规 律
  - 能量均分定理
  - 麦克斯韦速率分布
  - 平均碰撞频率
    平均自由程

二、 基本内容

1、理想气体压强公式

$$pV = \nu RT$$

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{Nm}{N_A m} = \frac{m_{gas}}{M}$$

$$p = \frac{N}{N_A}\frac{RT}{V} = \frac{N}{V}\frac{R}{N_A}T$$

$$n = \frac{N}{V}, k_B = \frac{R}{N_A}$$

$$p = nk_B T$$

$$\rho = \frac{m_{gas}}{V} = \frac{Nm}{V} = nm$$

$$p = \frac{1}{3}nm\overline{v^2} = \frac{1}{3}\rho v_{rms}^2$$

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

某容器内分子数密度为$10^{26}m^{-3}$，每个分子的质量为3×10^{-27} kg，设其中1/6分子以速率v=200m/s垂直地向容器的一壁运动，而其余5/6分子或者离开此壁，或者平行此壁方向运动，且分子与容器壁的碰撞为完全弹性的。则

（1）每个分子作用于器壁的冲量Δp= ________;

（2）每秒碰在器壁单位面积上的分子数，即分子碰壁数Γ= ________;

（3）作用在器壁上的压强p= ________。

$$1.2\times10^{-24}kg\cdot m/s$$

$$3.33\times10^{27}m^{-2}s^{-1}$$

$$4\times10^{3}Pa$$

$$\Delta p = 2mv$$

$$= 2\times 3\times 10^{-27}\times 200 = 1.2\times 10^{-24}\,kg\cdot m/s$$

$$\Gamma = \frac{n\cdot \Delta S\cdot v\Delta t\cdot \frac{1}{6}}{\Delta t\Delta S} = \frac{1}{6}nv$$

$$= \frac{1}{6}\times 10^{26}\times 200 = 3.33\times 10^{27}\,m^{-2}s^{-1}$$

$$p = \frac{\frac{1}{6}\cdot n\cdot \Delta S\cdot v\Delta t\cdot 2mv}{\Delta t\cdot \Delta S} = \frac{1}{3}nmv^2$$

$$= \frac{1}{3}\times 10^{26}\times 3\times 10^{-27}\times 200^2 = 4\times 10^3\,Pa$$

2、平均碰撞次数和平均自由程

$$\sigma = \pi d^2$$

$$\overline{Z} = n\sigma\sqrt{2}\,\overline{v} = \sqrt{2}\,n\sigma\overline{v}$$

$$\overline{\lambda} = \overline{v}\,\frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,n\sigma}$$

汽缸内盛有一定量的氢气（可视作理想气体），当温度不变而压强增大一倍时，氢气分子的平均碰撞频率将<u>　　加倍　　</u>，而平均自由程将<u>　　减半　　</u>。

$$\bar{Z}=\sqrt{2}n\sigma\bar{v}=\sqrt{2}\sigma\frac{p}{kT}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\bar{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\frac{kT}{p}$$

1、容器中储有氧气压强 $p=1.013\times10^{5}\,Pa$，温度T=300K，计算(1)单位体积中分子数n，(2)分子间的平均距离*l*. (3) 氧分子质量。(4) 平均速率。 (5) 分子的平均动能。(6) 分子平均碰撞次数。（7）分子平均自由程（8）分子的热德布罗意波长。

解： 已知

$$M=32\times10^{-3}kg\bullet mol^{-1},$$

$$p=1.013\times10^{5}Pa,$$

$$T=300K,\quad d=3.0\times10^{-10}m$$

（1） $p = nkT$

$$n = \frac{p}{kT} = 2.44\times10^{25}m^{-3}$$

（2） $l = \sqrt[3]{1/n} = 3.45\times10^{-9}m$

分子直径～ $10^{-10}m$，气体分子的间距是其10倍，即气体分子占有的体积约为本身体积的1000倍，因此把气体分子作为质点。

(3) 气体分子质量 $m = M/N_A = 5.32\times10^{-26}kg$

(4) 平均速率 $\bar{v}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}=1.60\sqrt{\frac{RT}{M}}=4.47\times10^{2}\,m\cdot s^{-1}$

(5) $\bar{\varepsilon}=\frac{i}{2}kT=\frac{5}{2}kT=1.04\times10^{-20}\,J$

(6) $\bar{z}=\sqrt{2}\pi d^{2}n\bar{v}=4.28\times10^{9}\,s^{-1}$

(7) $\bar{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}=1.04\times10^{-7}\,m$

(8) $\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{3mkT}}=2.57\times10^{-11}m$ $\quad \frac{p^{2}}{2m}=3\cdot\frac{1}{2}kT$

3、能量按自由度均分定理

$$p=\frac{1}{3}nm\overline{v^2}=\frac{2}{3}n\frac{1}{2}m\overline{v^2}=nkT$$

$$\overline{\varepsilon_{k,t}}=\frac{1}{2}m\overline{v^2}=3\frac{1}{2}kT$$

任一自由度平均能量 $\overline{\varepsilon_i}=\frac{1}{2}kT$

理想气体内能 $E=N\frac{i}{2}kT=\nu\frac{i}{2}RT=\frac{i}{2}pV$

$$C_{p.m}=\frac{i}{2}R+R \qquad C_{vm}=\frac{i}{2}R \qquad \gamma=\frac{C_{p,m}}{C_{v,m}}=\frac{i+2}{i}$$

三、讨论

1、某刚性双原子理想气体，温度为T，在平衡状态下，下列各式的意义.

(1) $\frac{3}{2}kT$ —分子的平均平动动能

(2) $\frac{2}{2}kT$ —分子的转动动能

(3) $\frac{5}{2}kT$ —分子的平均总动能

(4) $\frac{5}{2}RT$—摩尔气体分子的内能

(5) $\frac{m}{M}\frac{5}{2}RT$—m 千克气体的内能

2、容器中装有理想气体，容器以速率 v 运动，当容器突然停止，则容器温度将升高。

若有两个容器，一个装有He，另一装有H_2气，如果它们以相同速率运动，当它们突然停止时，哪一个容器的温度上升较高。

讨论：当容器突然停止时，气体分子的定向运动转化为分子无规则热运动，使其内能增加，从而温度升高.

设容器中气体质量为m，有 $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\Delta T$

$$\therefore \Delta T = \frac{Mv^2}{iR}$$

由于 $M_{H_2} < M_{He}$，且 $i_{H_2} > i_{He}$

$\therefore \quad \Delta T_{He} > \Delta T_{H2}$

（2）两瓶不同种类的气体，它们压强和温度相同，但体积不同，问它们单位体积分子数是否相同？单位体积中气体质量是否相同？单位体积中分子总平动动能是否相同？

讨论：$T_1=T_2$，$p_1 = p_2$

由 $p = nkT$ 得 $n_1 = n_2$

又 $\because n = \dfrac{\rho}{m}$， 不同气体 m 不同 $\therefore$ $\rho_1 \neq \rho_2$

单位体积中的分子总平动动能数 $n\bar{\varepsilon}_k = \overline{W}$

因 $n_1 = n_2$，$\bar{\varepsilon}_{k_1} = \bar{\varepsilon}_{k_2}$ 则 $\overline{W}_1 = \overline{W}_2$

在容积为**V = 4.0×10^{-3} m^3**的容器中，装有压强**P = 5.0×10^2 Pa**的理想气体，则容器中气体分子的平动动能总和为____3J____。

$$E_{k,t} = N3\frac{1}{2}kT = \frac{3}{2}PV$$

4、麦克斯韦速率分布

（1）分布函数

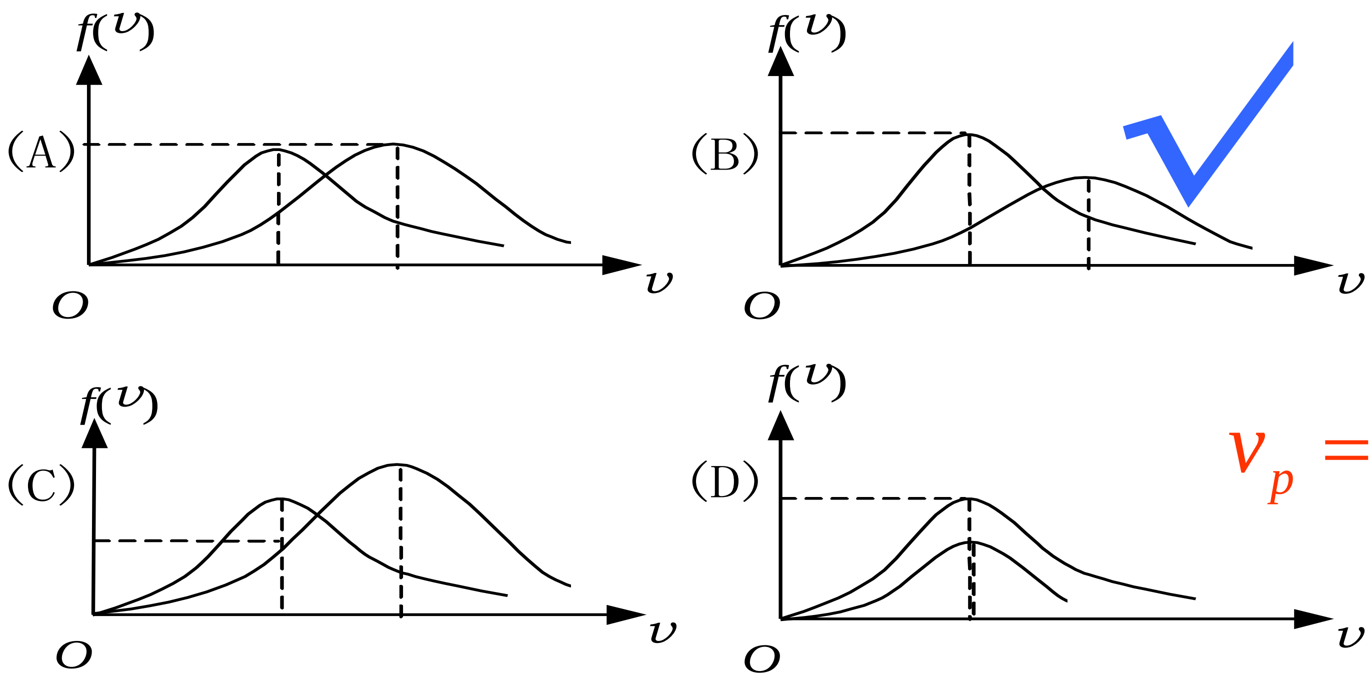
$$f(v)=\frac{dN}{Ndv}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2$$

（2）分布函数物理意义及分布曲线的物理意义。

（3）三种统计速率

$$\begin{cases} v_p=\sqrt{\dfrac{2kT}{m}}=\sqrt{\dfrac{2RT}{M}} \\ \bar{v}=\sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}=\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}} \\ \sqrt{\bar{v}^2}=\sqrt{\dfrac{3kT}{m}}=\sqrt{\dfrac{3RT}{M}} \end{cases}$$

1．下列各图所示的速率分布曲线，哪一图中的两条曲线能是同一温度下氮气和氦气的分子速率分布曲线？（　　）



$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

曲线下面面积恒为1。

同一温度下不同气体的麦氏曲线，峰值随分子质量增大而升高，但最概然速率向速率减小的方向移动。

2、说明下列各式的物理意义(理想气体在平衡态下)

(1) $f(v)dv$

因为 $f(v)dv=\dfrac{dN}{N}$，即为速率间隔为$v \to v+dv$ 内分子数占总分子数的比率（概率）.

(2) $Nf(v)dv$

因为 $dN=Nf(v)dv$,即表示处在速率区间内的分子数.
$v \to v+dv$

（3） $\int_0^{\infty} vf(v)dv$

将式写成 $\int_0^{\infty} vf(v)dv = \frac{N}{N}\int_0^{\infty} vf(v)dv = \frac{\int_0^{\infty} vdN}{N}$

表示分子的平均速率.

(4) $\int_{v1}^{v_2} f(v)dv$

表示速率间隔 $v_1 \to v_2$ 之间的分子数占总分子数的比率.

（5）速率间隔 $v_1 \to v_2$ 内分子的平均速率的表示式是什么？

$$\int_{v_1}^{v_2} vf(v)dv ?$$

由平均速率定义：

$$\bar{v} = \frac{N_1 v_1 + N_2 v_2 + \cdots}{N_1 + N_2 + \cdots\cdots} \Rightarrow \frac{\int_{v1}^{v2} vdN}{\int_{v1}^{v2} Nf(v)dv}$$

$$= \frac{\int_{v1}^{v2} Nvf(v)dv}{N\int_{v1}^{v2} f(v)dv} = \frac{\int_{v1}^{v2} vf(v)dv}{\int_{v1}^{v2} f(v)dv}$$

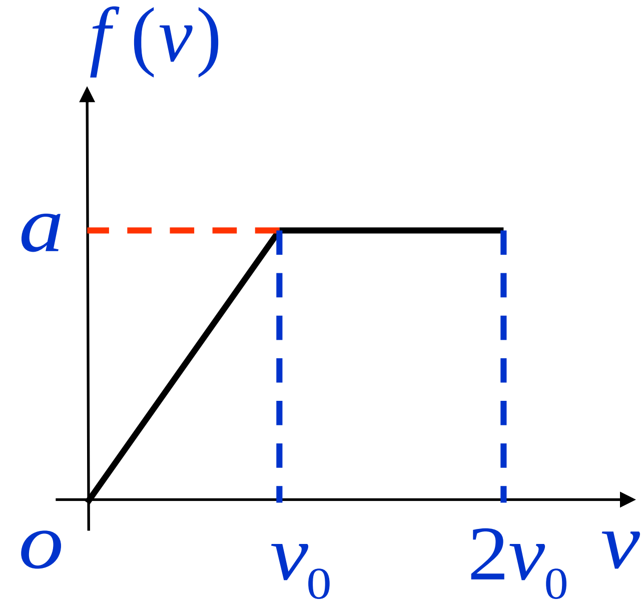
3 、 图 示 有 N 个 粒 子 系 统 ，其速率分布函数为

$$\begin{cases} f(v)\text{与}v\text{正比} & 0 \le v < v_0 \\ f(v) = a & v_0 < v \le 2v_0 \\ f(v) = 0 & v > 2v_0 \end{cases}$$

求(1) 常数 a ， (2)速率在 $1.5v_0 \to 2v_0$ 之间的粒子数 (3) 粒子的平均速率.。

解：首先找出 $0 \to v_0$ 的分布

函数由图可知 $f(v) = \dfrac{a}{v_0} v$



（1）由归一化条件

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$$

结合本题条件，即

$$\int_0^{v_0} \frac{a}{v_0} v dv + \int_{v_0}^{2v_0} a dv = 1$$

$$\frac{a}{v_0} \frac{v_0^2}{2} + a(v_0) = 1 \qquad \therefore \ a = \frac{2}{3v_0}$$

（2）$\Delta N=\int_{1.5v_0}^{2v_0} Nf(v)dv$

$$=\int_{1.5v_0}^{2v_0} a dv = N\int_{1.5v_0}^{2v_0}\frac{2}{3v_0}dv=\frac{N}{3}$$

（3）平均速率

$$\bar{v}=\int_0^{\infty} vf(v)dv$$

$$=\frac{a}{v_0}\int_0^{v_0} v^2 dv + a\int_{v_0}^{2v_0} v dv = \frac{11}{9}v_0$$

在无外力场作用的条件下，处于平衡态的气体分子按速度分布的规律可用————————分布率来描述。如果气体处在外力场中，气体分子在空间的分布规律可用————————分布率来描述。