第2章 逻辑代数基础

第二讲：逻辑函数及其描述

第2章 逻辑代数基础

§2.2　逻辑函数及其表示方法

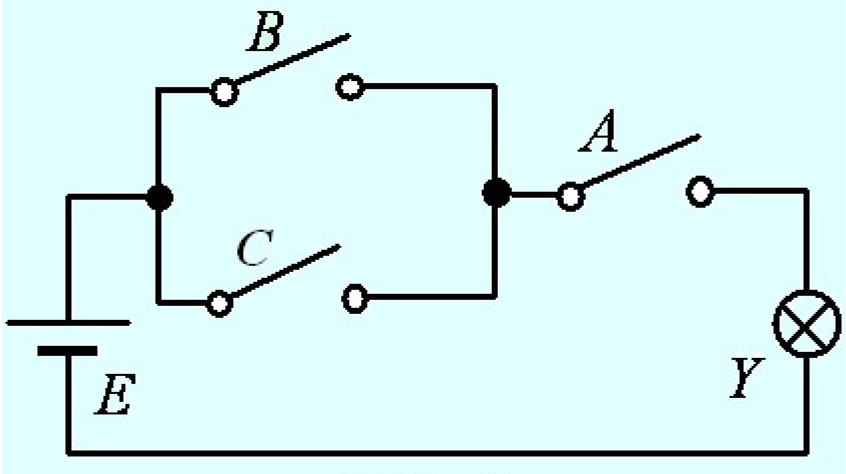
一、逻辑函数

如果以逻辑变量作为输入，以运算结果作为输出，当输入变量的取值确定之后，输出的取值便随之而定。输出与输入之间的函数关系称为逻辑函数。$Y=F(A,B,C,\ldots)$

二、逻辑函数表示方法

常用逻辑函数的表示方法有：逻辑真值表（真值表）、逻辑函数式（逻辑式或函数式）、逻辑图、波形图、卡诺图及硬件描述语言。它们之间可以相互转换。

例：一举重裁判电路



电路图

设A、B、C为1表示开关闭合，0表示开关断开；

Y为1表示灯亮，为0表示灯暗。得到函数表示形式：

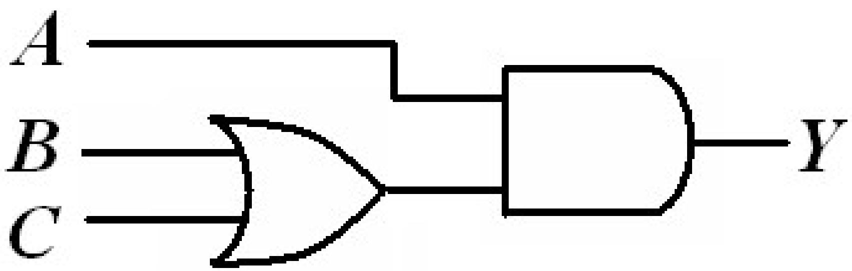
真值表

输入			输出
A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

函数式

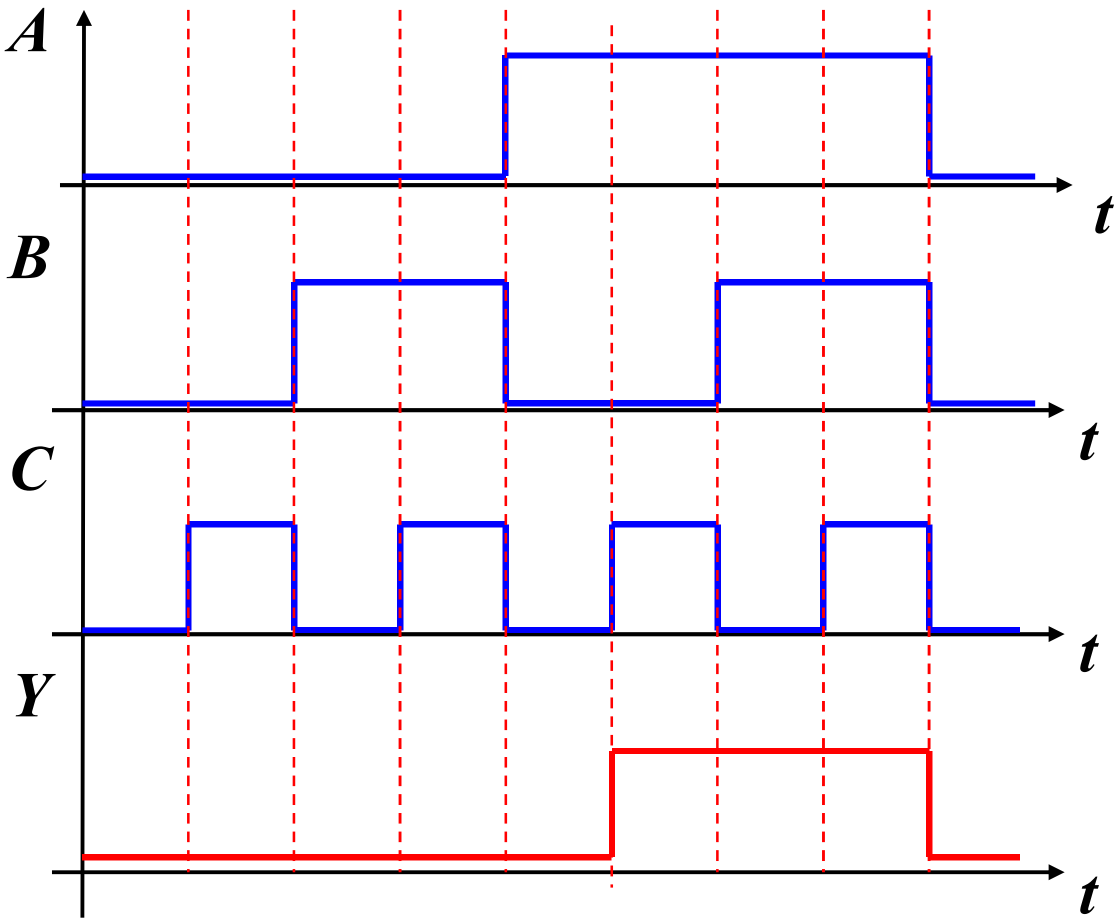
$$Y = AB'C + ABC' + ABC$$
$$= A(B+C)$$

逻辑图



波形图

$$Y = A(B + C)$$



真值表：将输入、输出的所有可能状态一一对应地列出。

A	Y
0	1
1	0

一输入变量，二种组合

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

二输入变量，四种组合

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

三输入变量，八种组合

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1

A	B	C	D	Y
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

四输入变量，16种组合

n个变量可以有2^n个组合，真值表一般按二进制的顺序，输出与输入状态一一对应，列出所有可能的状态。

逻辑函数的标准形式

逻辑函数式：把逻辑函数的输入、输出关系写成与、或、非等逻辑运算的组合式。也称为逻辑函数式，通常采用“与或”的形式。

例： $F = A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + ABC$

最小项：在 **n** 变量逻辑函数中，若 **m** 是包含 **n** 个因子的乘项积，而且这**n**个变量均以原变量或反变量的形式在 **m** 中出现一次，则称**m** 为该组变量的最小项。

上例中每一项都是最小项。

逻辑相邻：若两个最小项只有一个变量以原、反区别，则称它们逻辑相邻。

例： $\overline{A}\,\overline{B}C$ 与 $\overline{A}BC$ 逻辑相邻。

1、二变量的全部最小项

A B	最小项	编号
0 0	$\overline{A}\,\overline{B}$	m_0
0 1	$\overline{A}\,B$	m_1
1 0	$A\,\overline{B}$	m_2
1 1	$A\,B$	m_3

2、三变量的全部最小项

A B C	最小项	编号
0 0 0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	m_0
0 0 1	$\overline{A}\,\overline{B}\,C$	m_1
0 1 0	$\overline{A}\,B\,\overline{C}$	m_2
0 1 1	$\overline{A}\,B\,C$	m_3
1 0 0	$A\,\overline{B}\,\overline{C}$	m_4
1 0 1	$A\,\overline{B}\,C$	m_5
1 1 0	$A\,B\,\overline{C}$	m_6
1 1 1	$A\,B\,C$	m_7

3、四变量的全部最小项

编号为 $m_0 \sim m_{15}$ （略）

最小项的性质：

$A'B'C$ 全部最小项的真值表 $AB'C$

A	B	C	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

①任意一个最小项，只有一组变量取值使其值为**1**。

②任意两个不同的最小项的乘积必为**0**。

③全部最小项的和必为**1**。

逻辑函数的最小项（SOP）表达式

任何一个逻辑函数都可以表示成唯一的一组最小项之和，称为**标准与或表达式**，也称为**最小项表达式**。

对于不是最小项表达式的与或表达式，可利用公式 $A + A' = 1$ 和 $A(B+C) = AB + AC$ 来配项展开成最小项表达式。

对于不是最小项表达式的与或表达式，

可利用公式**A＋A′＝1** 和**A(B+C)＝AB＋AC**

来配项展开成最小项表达式。

例2.5.6

$$
\begin{aligned}
Y &= AB'C'D + A'CD + AC \\
&= AB'C'D + A'(B'+B)CD + A(B'+B)C \\
&= AB'C'D + A'B'CD + A'BCD + AB'C(D'+D) + ABC(D'+D) \\
&= AB'C'D + A'B'CD + A'BCD + AB'CD' + AB'CD + ABCD' + ABCD \\
&= m_3 + m_7 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{14} + m_{15} \\
&= \sum m(3,7,9,10,11,14,15)
\end{aligned}
$$

如果列出了函数的真值表，则只要将函数值为**1**的那些最小项相加，便是函数的最小项表达式。

A	B	C	Y	最小项
0	0	0	0	m_0
0	0	1	1	m_1
0	1	0	1	m_2
0	1	1	1	m_3
1	0	0	0	m_4
1	0	1	1	m_5
1	1	0	0	m_6
1	1	1	0	m_7

$m_1 = A'B'C$

$m_2 = A'BC'$

$m_3 = A'BC$

$m_5 = AB'C$

$$Y = m_1 + m_2 + m_3 + m_5 = \sum m(1,2,3,5)$$

$$= A'B'C + A'BC' + A'BC + AB'C$$

卡诺图

卡诺图的构成：将*n*个输入变量的全部最小项用小方块阵列图表示，并且将逻辑相临的最小项放在相临的几何位置上，所得到的阵列图就是*n*变量的卡诺图。

卡诺图的每一个方块（最小项）代表一种输入组合，并且把对应的输入组合注明在阵列图的上方和左方。

ABCD=0100时函数取值

编号为0010的单元对应于最小项：$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	0	φ	1
11	0	φ	0	1
10	1	1	0	1

只有一项不同

函数取0、1均可，称为**无所谓状态**。

四变量卡诺图

A \ B	0	1
0	1	0
1	0	1

两变量卡诺图

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	0	φ	1

三变量卡诺图

有时为了方便，用二进制对应的十进制表示单元格的编号。单元格的值用函数式表示。

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

$$F(A,B,C)=\Sigma(1,2,4,7)$$

1,2,4,7单元取1，其它取0

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

四变量卡诺图单元格的编号

各种表示方法之间的相互转换

例2.5.1

1、真值表→逻辑函数式

方法:将真值表中为1的项相加,写成 "与或式"。

$$Y = A'BC + AB'C + ABC'$$

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

2、逻辑式→真值表

方法:将输入变量取值的所有组合状态逐一带入逻辑式求函数值,列成表即得真值表。

例2.5.2

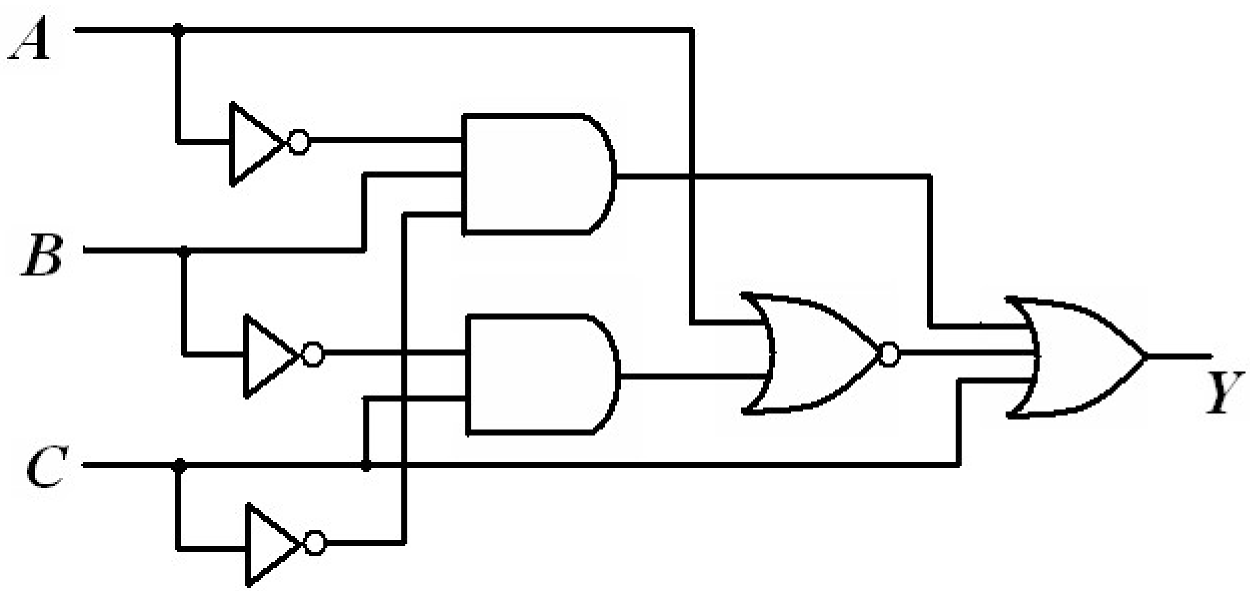
$$Y = A + B'C + A'BC'$$

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

3、逻辑式→逻辑图

方法:用图形符号代替逻辑式中的运算符号,就可以画出逻辑图.

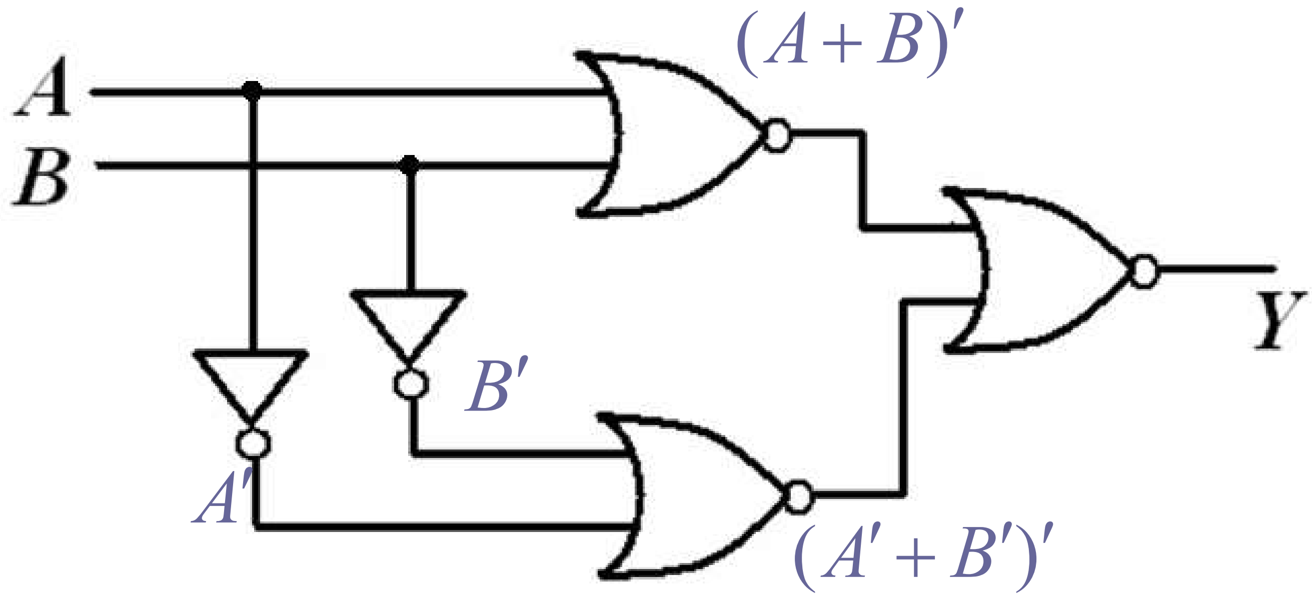
例2.5.3 $Y=(A+B'C)'+A'BC'+C$



4、逻辑图→逻辑式

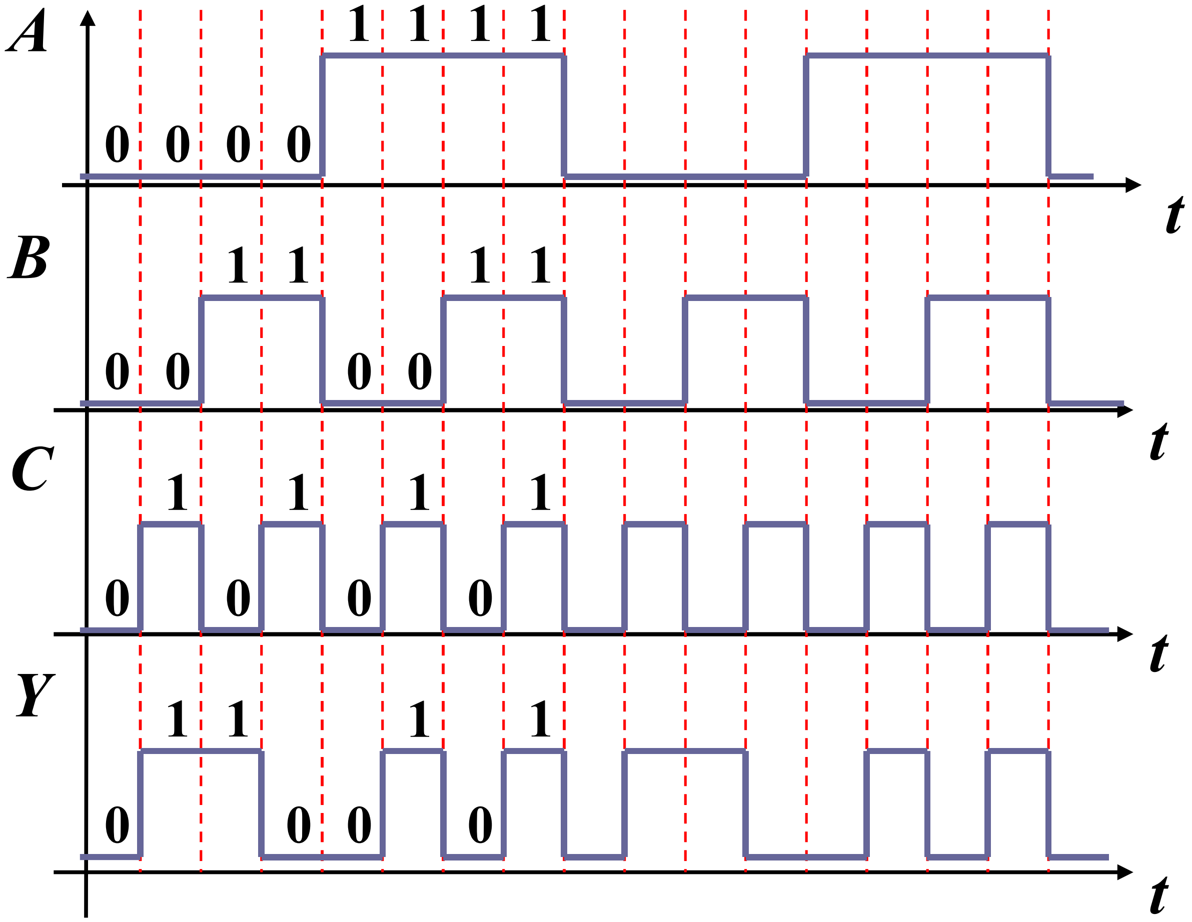
方法:从输入端到输出端逐级写出每个图形符号对应的逻辑式，即得到对应的逻辑函数式.

例2.5.4



$$Y=((A+B)'+(A'+B')')'=(A+B)(A'+B')=AB'+A'B$$

5、波形图→真值表



A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

三、逻辑函数形式的变换

根据逻辑表达式，可以画出相应的逻辑图，**表达式的形式决定门电路的个数和种类**。在用电子器件组成实际的逻辑电路时，由于选择不同逻辑功能类型的器件，因此需要将逻辑函数式变换成相应的形式。

- 实现电路的与门少
- 下级或门输入端个数少

1、最简与或表达式

- 首先是式中乘积项最少
- 乘积项中含的变量最少

与门的输入端个数少

$$Y = A'BE' + A'B + AC' + AC'E + BC' + BC'D$$
$$= A'B + AC' + BC'$$
$$= A'B + AC'$$

→ **最简与或表达式**

2、最简与非-与非表达式

$$Y = A'B + AC'$$
$$= ((A'B + AC')')'$$
$$= ((A'B)' \cdot (AC')')'$$

①在最简与或表达式的基础上两次取反

②用摩根定律去掉内层的非号

3、最简或与表达式

$$Y = A'B + AC'$$

①求出反函数的最简与或表达式

$$\begin{aligned} Y' &= (A'B + AC')' = (A'B)' \cdot (AC')' \\ &= (A + B') \cdot (A' + C) \\ &= A'B' + AC + B'C \\ &= A'B' + AC \end{aligned}$$

②利用反演规则写出函数的最简或与表达式

$$\begin{aligned} Y &= (A'B' + AC)' \\ &= (A'B')' \cdot (AC)' \\ &= (A + B) \cdot (A' + C') \end{aligned}$$

4、最简或非-或非表达式

$$Y = A'B + AC'$$

$$= (A+B)(A'+C')$$

①求最简或与表达式

$$= (((A+B)(A'+C'))')'$$

②两次取反

$$= ((A+B)' + (A'+C')')'$$

③用摩根定律去掉内部的非号

5、最简与或非表达式

方法一：

$$Y = A'B + AC'$$

$$= ((A+B)' + (A'+C')')'$$

$$= (A'B' + AC)'$$

①求最简或非-或非表达式

②用摩根定律去掉内部非号。

方法二：

$$Y = A'B + AC'$$

①求出反函数的最简与或表达式

$$\begin{aligned} Y' &= (A+B')\cdot(A'+C) \\ &= A'B' + AC + B'C \\ &= A'B' + AC \end{aligned}$$

②求反，得到最简与或非表达式

$$Y = (A'B' + AC)'$$