DOI:10.16854/j.cnki.1000-0712.1994.11.002

第13卷第11期 大学物理 Vol.13 No.11
1994年 11月 COLLEGE PHYSICS Nov.1994

从功能关系讨论受迫振动的振幅

陶 湘

（烟台师范学院物理系，山东烟台 264025）

摘要 本文通过由平衡位置到最大位移以及由最大位移到平衡位置的两个四分之一周期中外力作功的定量计算，根据功能原理，得到了各种情况下受迫振动的振幅均小于位移共振的振幅以及受迫振动的振幅虽与强迫力频率有关但却稳定的结论，并给出了速度共振的振幅表达式.

关键词 受迫振动；位移共振；速度共振

分类号 O32

同一振动系统（m、β 相同）在强迫力幅值相同的情况下，其振幅随强迫力频率的不同而不同，一般的力学教材只是从数学推导上给出了振幅公式. 本文通过两个 1/4 周期中力作功的计算，用功能原理定量比较了不同强迫力频率下受迫振动的振幅，得到了位移共振振幅最大的结论，也得到了受迫振动的振幅虽随强迫力频率的改变而改变，但却稳定的结论.

下面研究一下质量为 m 的质点作受迫振动，其中各量表达如下：弹性力 $-kx$，阻力 $-\gamma v$，强迫力 $F=F_0\cos pt$，且令 $\omega_0^2=k/m$，$2\beta=\gamma/m$，$f=F_0/m$，得动力学方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f\cos pt \tag{1}$$

稳态后的运动学方程为

$$x=A\cos(pt+\varphi) \tag{2}$$

质点振动的速度为 $v=-Ap\sin(pt+\varphi)$，速度幅值为

$$v_0=Ap \tag{3}$$

将(2)式代入(1)式，得

$$-Ap^2(\cos pt\cos\varphi-\sin pt\sin\varphi)$$
$$-2\beta Ap(\sin pt\cos\varphi+\cos pt\sin\varphi)$$
$$+\omega_0^2A(\cos pt\cos\varphi-\sin pt\sin\varphi)=f\cos pt$$

等式两边 $\cos pt$ 和 $\sin pt$ 前的系数应分别相等，得

$$A(\omega_0^2-p^2)\cos\varphi-2\beta Ap\sin\varphi=f \tag{4}$$

$$A(\omega_0^2-p^2)\sin\varphi+2\beta Ap\cos\varphi=0 \tag{5}$$

(5)$\times\cos\varphi-$(4)$\times\sin\varphi$，得 $2\beta Ap=-f\sin\varphi$，即

$$\sin\varphi=\frac{-2\beta Ap}{f}=-\frac{2\beta v_0}{f} \tag{6}$$

由(6)式知，$\sin\varphi<0$，φ 必在第三、四象限，即受迫振动的相位比强迫力相位落后 0 到 π. (4)式平方 +(5)式平方再开方，得

$$A=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-p^2)^2+4\beta^2p^2}} \tag{7}$$

由(5)式得 $$\mathrm{tg}\varphi=-\frac{2\beta p}{\omega_0^2-p^2} \tag{8}$$

下面讨论相同振动系统（m、β 相同）在相同力幅下的情况.

1 p 对 φ 的影响

由(8)式可知：$p\to0$，$\varphi\to0$；p 加大但 $<\omega_0$，φ 在第四象限；$p=\omega_0$，$\varphi=-\pi/2$；$p>\omega_0$，φ 在第三象限；$p\to\infty$，$\varphi\to\pi$. 见图1.

2 稳定受迫振动的几种振幅比较

2.1 位移共振

将位移共振条件 $p=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$ 代入(7)式，得位移共振振幅

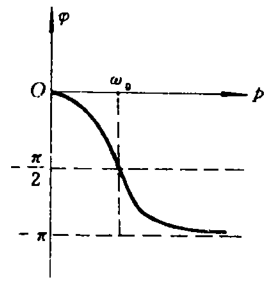

图 1 受迫振动初相φ与强迫力频率p的关系

$$A_1=f/2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2} \qquad (9)$$

2.2 速度共振

将速度共振条件$p=\omega_0$代入(7)式，得速度共振振幅

$$A_{速度}=f/2\beta\omega_0 \qquad (10)$$

2.3 其它情况的振幅

$A<A_1$. 例$p=0$, $A=f/\omega_0^2=F_0/k$, 相当于在恒力作用下引起的位移. $p\to\infty$, $A\to 0$, 如图 2 所示.

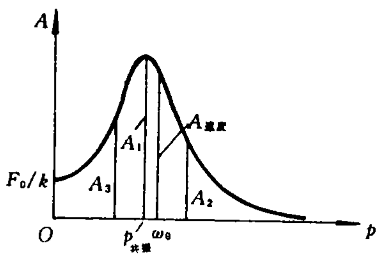

图 2 稳定受迫振动振幅与强迫力频率关系

其中$p_{共振}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$

3 稳定受迫振动的几种速度幅值的比较

3.1 速度共振

由速度共振的意义，速度幅值达极大值，则由(6)式的$v_0=-\dfrac{f\sin\varphi}{2\beta}$可知，$\sin\varphi=-1$，速度共振时速度幅值

$$v_{0速度}=f/2\beta \qquad (11)$$

3.2 位移共振

由位移共振的条件$p=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$可见，$p$略小于$\omega_0$，则$\varphi$略大于$-\pi/2$，速度幅值$v_{0位移}$略小于$f/2\beta$，即位移共振时速度的幅值略小于速度共振时的速度幅值.

3.3 其它情况

由(6)式$v_0=|\sin\varphi|f/2\beta$可知，因$|\sin\varphi|<1$，速度幅值$v_0$小于位移共振的速度幅值.

4 稳定受迫振动中的功能关系

本文研究从平衡位置到最大位移再回到平衡位置过程中的功能关系，因弹性力$-kx$的功与能量守恒相联系，所以本文只计算强迫力与阻力的功，以便对受迫振动的振幅进行比较.

4.1 质点经平衡位置、到最大位移、再到平衡位置的时刻

设质点经上述三位置的时刻分别为t_1、t_2、t_3. 因$x=A\cos(pt+\varphi)=0$，得$pt+\varphi=\pm\pi/2$，又因$v=-Ap\sin(pt+\varphi)>0$，所以取$pt+\varphi=-\pi/2$，得$t=t_1=\left(-\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\Big/p$. 到最大位移时，因$x=A$，则$pt+\varphi=k\cdot 2\pi$，又因考虑的是从平衡位置到最大位移的最少时间，所以$k=0$，得$t=t_2=-\varphi/p$. 再回到平衡位置时，因$x=0$, $pt+\varphi=\pm\pi/2$，又因$v=-Ap\sin(pt+\varphi)<0$，所以取$pt+\varphi=+\pi/2$，得$t=t_3=\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\Big/p$. 因$-\pi<\varphi<0$，为保证$t$的正值，将到达上述三个位置的时刻分别取经一个周期$T$后的相应时刻$t_1'$、$t_2'$、$t_3'$. 即质点经平衡位置的时刻

$$t_1'=t_1+T=\frac{\left(-\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)}{p}+\frac{2\pi}{p}=\frac{\left(\dfrac{3}{2}\pi-\varphi\right)}{p} \qquad (12)$$

到达最大位移的时刻

$$t_2'=t_2+T=-\frac{\varphi}{p}+\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi-\varphi}{p} \qquad (13)$$

再达到平衡位置的时刻

$$t_3' = t_3 + T = \frac{\frac{1}{2}\pi - \varphi}{p} + \frac{2\pi}{p} = \frac{\frac{5}{2}\pi - \varphi}{p} \quad (14)$$

4.2 总功的计算

设强迫力 F、阻力 $-\gamma v$ 对质点的功分别为

$$W_F = \int F_0 \cos pt \, \mathrm{d}x = -\int F_0 A p \cos pt \sin(pt+\varphi) \mathrm{d}t \quad (15)$$

$$W_v = \int -\gamma v \, \mathrm{d}x = \int -\gamma p^2 A^2 \sin^2(pt+\varphi) \mathrm{d}t \quad (16)$$

设初态对应时刻为 t_0，末态对应时刻为 t，则从初态到末态强迫力与阻力的功分别为

$$W_F = -pAF_0\left(-\frac{\cos\varphi}{2p}\cos^2 pt + \frac{\sin\varphi}{2}t + \frac{\sin\varphi}{4p}\sin 2pt\right)\Bigg|_{t_0}^{t} \quad (17)$$

$$W_v = -\gamma p^2 A^2\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4p}\sin 2(pt+\varphi)\right]\Bigg|_{t_0}^{t} \quad (18)$$

4.2.1 由平衡位置到最大位移的总功$W_{总1}$

将时刻 t_1' 代替 t_0、t_2' 代替 t 代入(17)、(18)式，得

$$W_{F1} = \frac{AF_0}{2}\left(\cos\varphi - \frac{\pi}{2}\sin\varphi\right) \quad (19)$$

$$W_{v1} = -\frac{1}{4}\gamma p A^2 \pi \quad (20)$$

由(7)式，$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-p^2)^2+4\beta^2p^2}} = \frac{mf}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-p^2)^2+\gamma^2p^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-p^2)^2+\gamma^2p^2}}$，

则$F_0 = A\gamma p\sqrt{1+\frac{m^2(\omega_0^2-p^2)^2}{\gamma^2p^2}}$，令

$$C = \sqrt{1+\frac{m^2(\omega_0^2-p^2)^2}{\gamma^2p^2}} \quad (21)$$

则 $$F_0 = A\gamma p \cdot C \quad (22)$$

将(22)式代入(19)式，得

$$W_{F1} = \frac{A^2\gamma p}{2}\left(\cos\varphi - \frac{\pi}{2}\sin\varphi\right)\cdot C \quad (23)$$

将(20)、(23)式代入总功 $W_{总1} = W_{F1} + W_{v1}$ 中，得

$$W_{总1} = \frac{1}{2}\gamma p A^2\left[\left(\cos\varphi - \frac{\pi}{2}\sin\varphi\right)\cdot C - \frac{\pi}{2}\right] \quad (24)$$

4.2.2 由最大位移到平衡位置的总功$W_{总2}$

将时刻 t_2'代 t_0、t_3'代 t 代入(17)式，得

$$W_{F2} = -\frac{AF_0}{2}\left(\cos\varphi + \frac{\pi}{2}\sin\varphi\right)$$

将(22)式代入上式，得

$$W_{F2} = -\frac{\gamma p A^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}\sin\varphi + \cos\varphi\right)\cdot C \quad (25)$$

将时刻 t_2'代 t_0、t_3'代 t 代入(18)式，得

$$W_{v2} = -\frac{1}{4}\gamma p A^2 \pi \quad (26)$$

将(25)、(26)式代入总功 $W_{总2} = W_{F2} + W_{v2}$ 中，得

$$W_{总2} = -\frac{\gamma p A^2}{2}\left[\left(\cos\varphi + \frac{\pi}{2}\sin\varphi\right)\cdot C + \frac{\pi}{2}\right] \quad (27)$$

4.3 讨论

4.3.1 $p<\omega_0$的情况

因 φ 在第四象限，且 φ 随 p 的变大而减小，即 p 由 $0\to\omega_0$，φ 由 $0\to-\pi/2$；又由(21)式，知 $C>1$，且 C 值也随 p 的变大而减小，由(21)式计算可知，当 p 由 $0\to\omega_0$，C 由 $\infty\to 1$，故(24)式中的$\left[\left(\cos\varphi - \frac{\pi}{2}\sin\varphi\right)C - \frac{\pi}{2}\right]>0$，

(27)式中的$\left[\left(\cos\varphi + \frac{\pi}{2}\sin\varphi\right)\cdot C + \frac{\pi}{2}\right]>0$，

则总功 $W_{总1}>0$，$W_{总2}<0$. 因为由平衡位置到最大位移时外力作正功，故质点由平衡位置的最大动能向最大位移处的势能转变时，最大位移处的势能大于平衡位置处的动能，即 $E_{pm}>E_{km}$；而由最大位移到平衡位置过程，外力作负功，故势能向动能转化中，由于能量的消耗，平衡位置的动能小于最大位移处的势能，仍有 $E_{pm}>E_{km}$. 因此一个周期中，必然有势能的平均值 $\overline{E}_p$ 大于动能的平均值 $\overline{E}_k$. 位移共振就属于这种情况.

4.3.2 $p>\omega_0$ 的情况

因 φ 在第三象限，且 φ 随 p 的变大而减小，即 p 由 $\omega_0\to\infty$，φ 由 $-\pi/2\to-\pi$；又由(21)式知 $C>1$，且 C 随 p 的变大而变大，由(21)式计算可知，当 p 由 $\omega_0\to\infty$，C 由 $1\to\infty$，故(24)式中的 $\left[\left(\cos\varphi-\frac{\pi}{2}\sin\varphi\right)\cdot C-\frac{\pi}{2}\right]<0$，

(27)式中的 $\left[\left(\cos\varphi+\frac{\pi}{2}\sin\varphi\right)\cdot C+\frac{\pi}{2}\right]<0$，

则由平衡位置到最大位移的总功 $W_{总1}<0$，而由最大位移到平衡位置时外力的总功 $W_{总2}>0$. 因为质点由平衡位置到最大位移时外力作负功，故质点由平衡位置处的动能向最大位移处势能转化时，最大位移处的势能小于平衡位置处的动能，即 $E_{pm}<E_{km}$；又因为由最大位移到平衡位置时，外力作正功，故势能向动能转变时平衡位置处的动能大于最大位移处的势能，仍有 $E_{km}>E_{pm}$.

4.3.3 $p=\omega_0$ 的速度共振情况

由(21)式可知 $C=1$，又将 $\varphi=-\pi/2$ 代入(24)、(27)式得 $W_{总1}=0$，$W_{总2}=0$，必然有最大位移处的势能等于平衡位置处的动能.

5 结论

5.1 位移共振与速度共振的比较

虽位移共振的最大动能 E_{km} 略小于速度共振的最大动能，但从平衡位置到最大位移过程，对位移共振过程外力作正功，而速度共振过程外力作功为零，故由功能原理可知，位移共振的最大势能 E_{pm} 要大于速度共振的最大势能；又因 $E_{pm}=\frac{1}{2}kA^2$，可知位移共振的振幅要大于速度共振的振幅. 同理可知其它情况受迫振动的振幅均小于位移共振的振幅.

5.2 速度共振的振幅表达式

速度共振时虽强迫力与速度同相位，即强迫力处处作正功，但因强迫力的正功与阻力的负功绝对值相等，故总功为零，所以只是动能与势能的转换. 与 $E_{km}=\frac{1}{2}m\left(\frac{f}{2\beta}\right)^2$ 对应的 $E_{pm}=\frac{1}{2}kA^2_{速度}$，故得速度共振的振幅 $A_{速度}=\frac{1}{\omega_0}\cdot\frac{f}{2\beta}$.

5.3 受迫振动具有稳定的振幅

由(24)、(27)式可见，由于由平衡位置到最大位移中外力的总功与由最大位移到平衡位置中外力的总功，对给定的振动系统在相同力幅下，只与强迫力频率有关，故每一种振动的振幅均不变，平衡位置的动能也均不变.

将以上研究的主要结果列于下表

强迫力频率 p 与圆频率 ω_0 关系	速度幅值	平衡位置到最大位移强迫力与阻力总功 $W_{总1}$	最大位移到平衡位置强迫力与阻力总功 $W_{总2}$	最大位移处势能 E_{pm} 与平衡位置处动能 E_{km} 的关系	振幅
$p<\omega_0$	小于 $f/2\beta$	正功	负功	$E_{pm}>E_{km}$	$A_3<A_1$
$p=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$ (位移共振)	略小于 $f/2\beta$	正功	负功	$E_{pm}>E_{km}$	A_1 最大
$p=\omega_0$ (速度共振)	$f/2\beta$	零	零	$E_{pm}=E_{km}$	$A_{速度}=\frac{1}{\omega_0}\cdot\frac{f}{2\beta}<A_1$
$p>\omega_0$	小于 $f/2\beta$	负功	正功	$E_{pm}<E_{km}$	$A_2<A_1$

(下转 31 页)