第2章　逻辑代数基础

【目的要求】

理解：逻辑变量与逻辑函数的概念.

掌握：逻辑代数的基本运算、基本定理和规则.

掌握：逻辑函数的表示方法和化简方法.

【重点与难点】

重点：逻辑函数的各种表示方法和相互转换，逻辑的化简方法.

难点：具有无关项的卡诺图化简.

2.1 概述

在数字电路中，主要研究的是电路的输入输出之间的逻辑关系，因此数字电路又称逻辑电路，其研究工具是逻辑代数（布尔代数或开关代数）。

逻辑变量：用字母表示，取值只有0和1。
此时，0和1不再表示数量的大小，
只代表两种不同的状态。

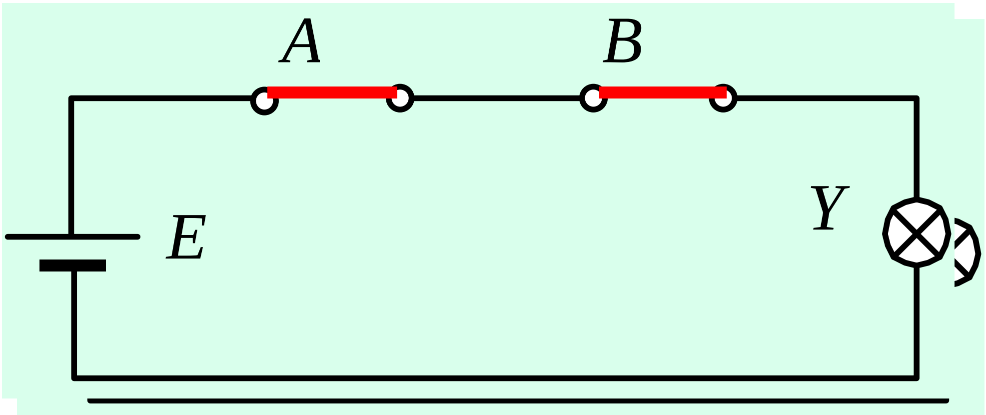
2.2 逻辑代数中的三种基本运算

一、与逻辑（与运算 AND）

与逻辑：仅当决定事件（Y）发生的所有条件（A，B，C，...）均满足时，事件（Y）才能发生。表达式为：

$$Y = A\,B\,C\ldots$$

例：开关A，B串联控制灯泡Y



电路图

A接通、B断开，灯不亮。
A断开、B接通，灯不亮。
A、B都断开，灯不亮。
A、B都接通，灯亮。

将开关接通记作1，断开记作0；灯亮记作1，灯灭记作0。可以作出如下表格来描述与逻辑关系：

功能表

开关 A	开关 B	灯 Y
断开	断开	灭
断开	闭合	灭
闭合	断开	灭
闭合	闭合	亮

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

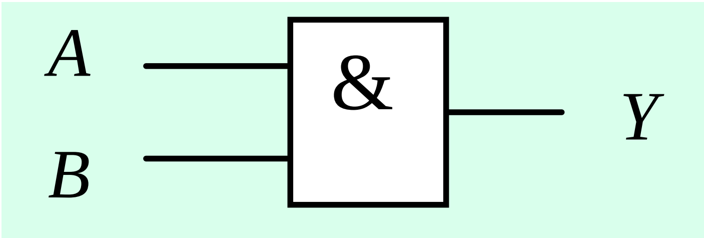
真值表

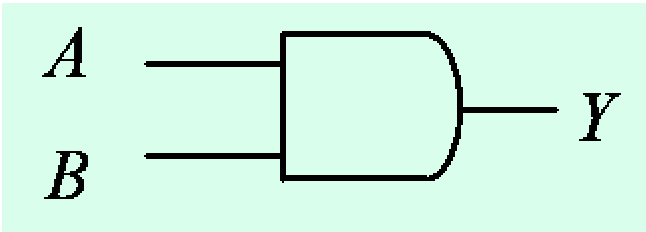
两个开关均接通时，灯才会亮。
逻辑表达式为：

$$Y = A \cdot B$$

实现与逻辑的电路称为与门。

与门的逻辑符号：





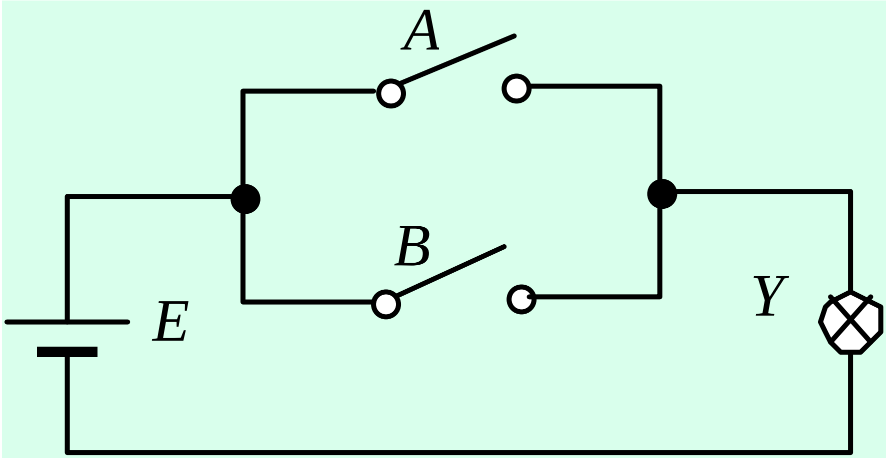
$$Y = A \bullet B$$

二、或逻辑（或运算 OR）

或逻辑：当决定事件（Y）发生的各种条件A，B，C，…)中，只要有一个或多个条件具备，事件（Y）就发生。表达式为：

$$Y = A + B + C + \ldots$$

真值表



电路图

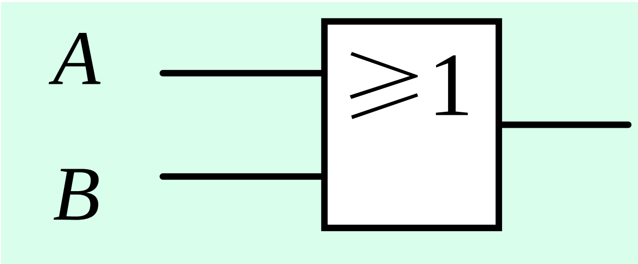
A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

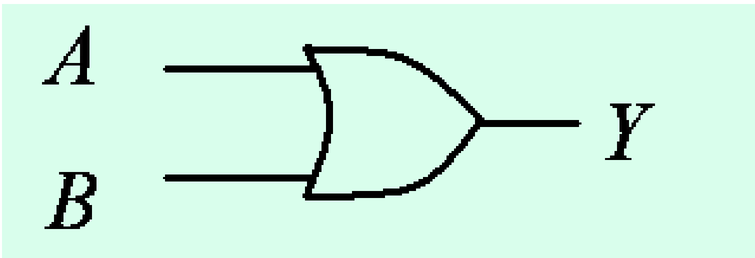
两个开关只要有一个接通，灯就会亮。逻辑表达式为：

$$Y = A + B$$

实现或逻辑的电路称为或门。

或门的逻辑符号：



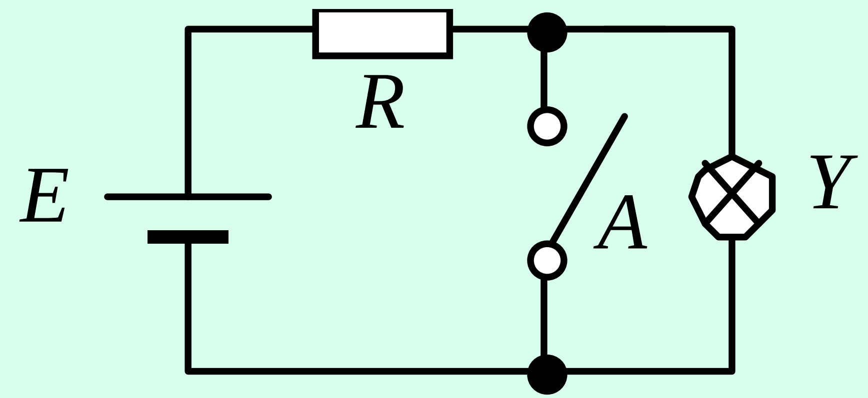


Y=A+B

三、非逻辑（非运算 NOT）

非逻辑：指的是逻辑的否定。当决定事件（Y）发生的条件（A）满足时，事件不发生；条件不满足，事件反而发生。表达式为：

$$Y = A'$$



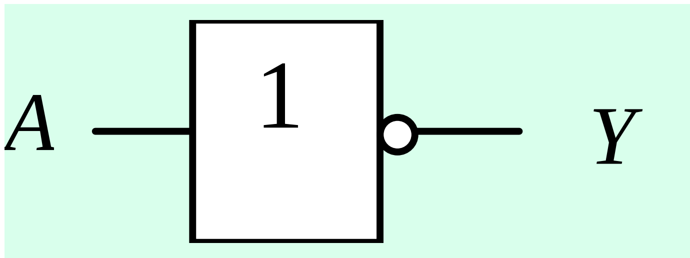
电路图

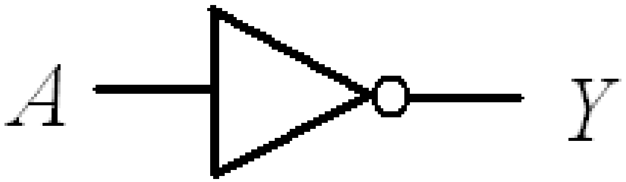
功真值表

A	Y
0	1
1	0

实现非逻辑的电路称为**非门**。

非门的逻辑符号：





$Y = A'$

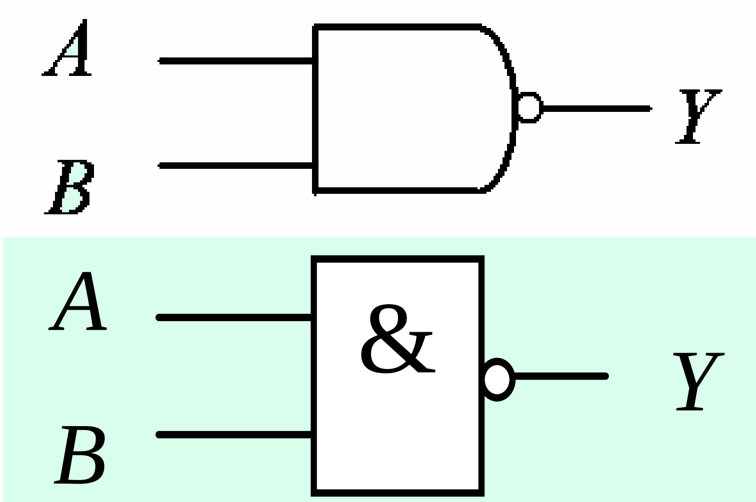
常用的逻辑运算

1、与非运算(NAND)：

逻辑表达式为： $Y=(A\cdot B)'$

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

真值表



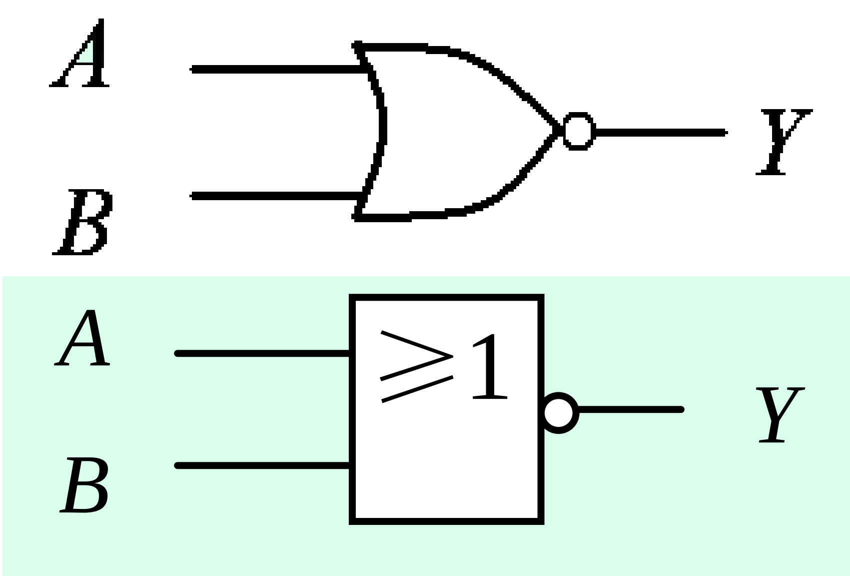
与非门的逻辑符号

2、或非运算(NOR)：

逻辑表达式为：$Y=(A+B)'$

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

真值表



或非门的逻辑符号

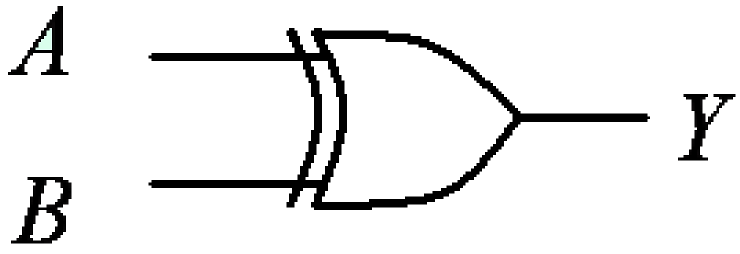
3、异或运算(Exclusive OR)：逻辑表达式为:

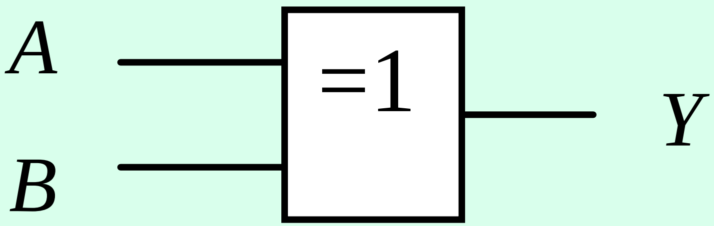
$$Y = A'B + AB' = A \oplus B$$

- 只有当两个输入变量不同时，结果才为真

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

真值表





异或门的逻辑符号

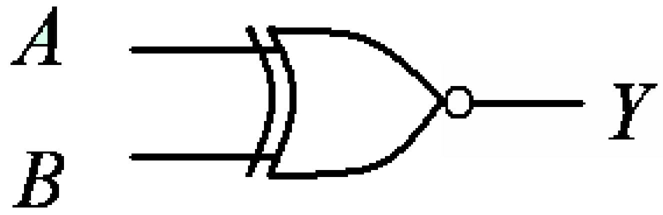
4、同或运算(Exclusive NOR)：逻辑表达式为：

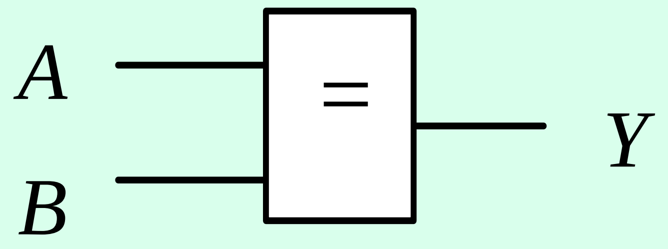
$$Y = A'B' + AB = A \odot B$$

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

真值表

●只有当两个输入变量相同时，结果才为真



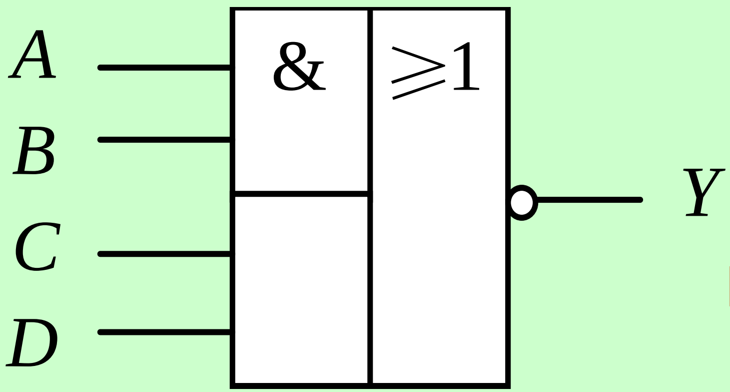


同或门的逻辑符号

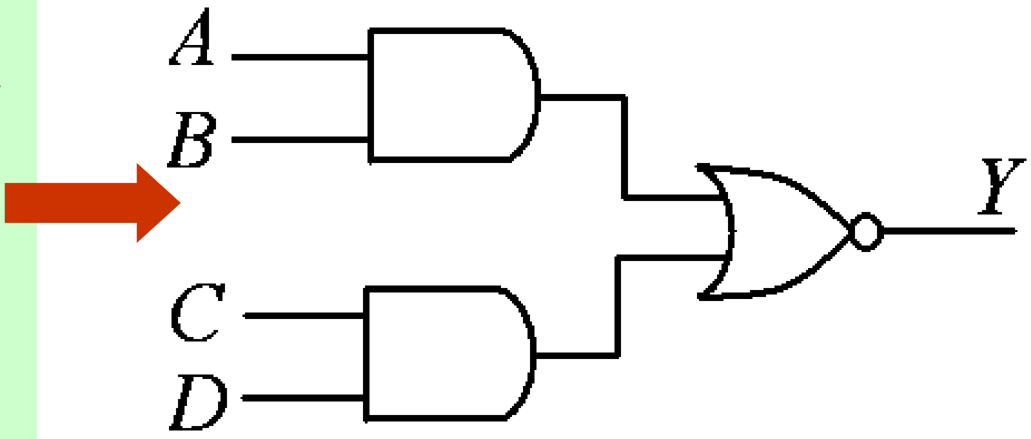
异或和同或互为反运算

5、 与或非运算(AND-NOR)：逻辑表达式为：

$$Y = (A \cdot B + C \cdot D)'$$



与或非门的逻辑符号



2.3 逻辑代数的基本公式和常用公式

一、基本公式

1.常量之间的关系

与运算： $0 \cdot 0 = 0 \quad 0 \cdot 1 = 0 \quad 1 \cdot 0 = 0 \quad 1 \cdot 1 = 1$

或运算： $0 + 0 = 0 \quad 0 + 1 = 1 \quad 1 + 0 = 1 \quad 1 + 1 = 1$

非运算： $1' = 0 \quad 0' = 1$

请特别注意与普通代数不同之处

2. 基本公式

0-1 律： $\begin{cases} A+0=A \\ A\cdot 1=A \end{cases}$ $\begin{cases} \boxed{A+1=1} \\ A\cdot 0=0 \end{cases}$

互补律： $\boxed{A+A'=1}$ $A\cdot A'=0$

重叠律： $\boxed{A+A=A \quad A\cdot A=A}$

还原律（双重否定律）： $(A')'=A$

分别令A=0及A=1代入这些公式，即可证明它们的正确性。

3. 基本定理

利用真值表很容易证明这些公式的正确性。如证明A·B=B·A：

A	B	AB	BA
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

交换律：
$$\begin{cases} A\cdot B = B\cdot A \\ A+B = B+A \end{cases}$$

结合律：
$$\begin{cases} (A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C) \\ (A+B)+C = A+(B+C) \end{cases}$$

分配律：
$$\begin{cases} A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C \\ \boxed{A+B\cdot C = (A+B)\cdot(A+C)} \end{cases}$$

反演律（摩根定律）：
$$\boxed{\begin{cases} (A\cdot B)' = A'+B' \\ (A+B)' = A'\cdot B' \end{cases}}$$

求证：（17式） $A+BC=(A+B)(A+C)$

证明:右边 $=(A+B)(A+C)$

$=AA+AB+AC+BC$

$=A \ +A(B+C)+BC$

$=A(1+B+C)+BC$

$=A \bullet 1+BC$

$=A+BC$ =左边

课本上用真值表证明

二、常用公式

1. $A+AB=A$

2. $\boxed{\begin{array}{c} A+A'B=A+B \\ A'+AB=A'+B \end{array}}$

注：红色变量被吸收掉！

证明:

$A+A'B = (A+A')\cdot(A+B)$;分配律

$=1\cdot(A+B)$

$=A+B$

$A+BC=(A+B)(A+C)$

3. $AB+AB'=A$

4. $A(A+B)=A$

证明: $A(A+B)=A\cdot A+A\cdot B$

$=A+A\cdot B$

$=A(1+B)$

$=A$

5. $AB+A'C+BC = AB+A'C$

$AB+A'C+BCD = AB+A'C$

证明: $AB+A'C+BC$

$$
\begin{aligned}
&= AB+A'C+(A+A')BC \\
&= AB+A'C+ABC+A'BC \\
&= AB(1+C)+A'C(1+B) \\
&= AB+A'C
\end{aligned}
$$

6. $A\cdot(A\cdot B)'=A\cdot B'$

$A'\cdot(A\cdot B)'=A'$

证明:

$$A\cdot(A\cdot B)'=A\cdot(A'+B')$$
$$=A\cdot A'+A\cdot B'$$
$$=A\cdot B'$$

$$A'\cdot(A\cdot B)'=A'\cdot(A'+B')$$
$$=A'\cdot A'+A'\cdot B'$$
$$=A'\cdot(1+B')$$
$$=A'$$

2.4 逻辑代数的基本定理

一、代入定理

任何一个含有变量A的等式，如果将所有出现A的位置都用同一个逻辑函数代替，则等式仍然成立。这个规则称为代入定理。

例如，已知等式 $(A \cdot B)' = A' + B'$，用函数*Y*=*BC*代替等式中的*B*，根据代入定理，等式仍然成立，即有：

$$(A \cdot (B \cdot C))' = A' + (B \cdot C)' = A' + B' + C'$$

二、反演定理

对于任何一个逻辑表达式Y，如果将表达式中的所有“·”换成“＋”，“＋”换成“·”，“0”换成“1”，“1”换成“0”，原变量换成反变量，反变量换成原变量，那么所得到的表达式就是函数Y的反函数Y'（或称补函数）。这个规则称为反演定理。

$$Y = A(B + C) + CD$$

$$Y' = (A' + B'C')(C' + D')$$

$$Y = ((AB' + C)' + D)' + C$$

$$Y' = (((A' + B)C')'D')' \cdot C'$$

应用反演定理应注意两点：

1、保持原来的运算优先顺序，即如果在原函数表达式中，AB之间先运算，再和其它变量进行运算， 那么非函数的表达式中，仍然是AB之间先运算。

2、不属于单个变量上的反号应保留不变。

三、对偶定理

对于任何一个逻辑表达式Y，如果将表达式中的所有“·”换成“＋”，“＋”换成“·”，“0”换成“1”，“1”换成“0”，而变量保持不变，则可得到的一个新的函数表达式 Y^D, Y^D称为Y的对偶式(**Duality**)。

$$Y = A(B+C) \longrightarrow Y^D = A + B \cdot C$$

$$Y = (AB+CD)' \longrightarrow Y^D = ((A+B)\cdot(C+D))'$$

对偶定理：如果两个逻辑式相等，则它们的对偶式也相等。

利用对偶规则,可以使要证明及要记忆的公式数目减少一半。

（2）式 $$1 \cdot A = A$$ →

（12）式 $$0 + A = A$$

$$A(B+C) = AB + AC$$ →

$$A + BC = (A+B)(A+C)$$

2.5 逻辑函数及其表示方法

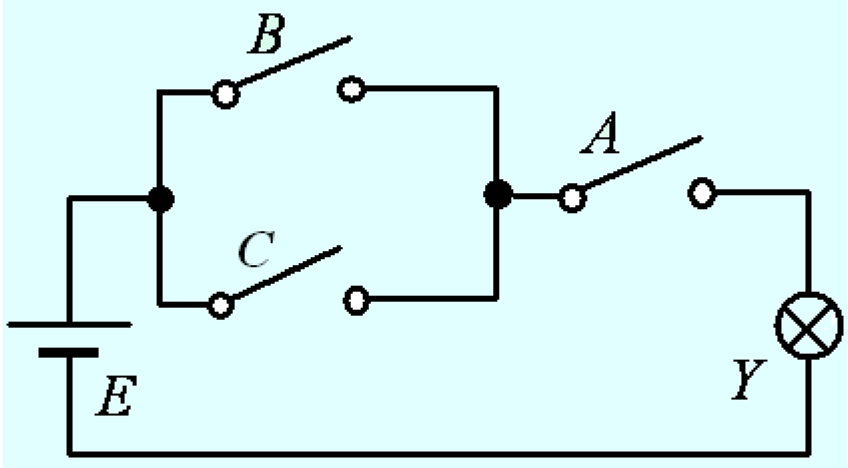
一、逻辑函数

如果以逻辑变量作为输入，以运算结果作为输出，当输入变量的取值确定之后，输出的取值便随之而定。输出与输入之间的函数关系称为逻辑函数。$Y=F(A,B,C,\ldots)$

二、逻辑函数表示方法

常用逻辑函数的表示方法有：逻辑真值表（简称真值表，Truth Table）、逻辑函数式（简称逻辑式或函数式）、逻辑图 (Logic Diagram)、波形图 (Waveform)、卡诺图 (Karnaugh Map) 及 硬件描述语言。它们之间可以相互转换。

例：一举重裁判电路



电路图

设A、B、C为1表示开关闭合，0表示开关断开；

Y为1表示灯亮，为0表示灯暗。得到函数表示形式：

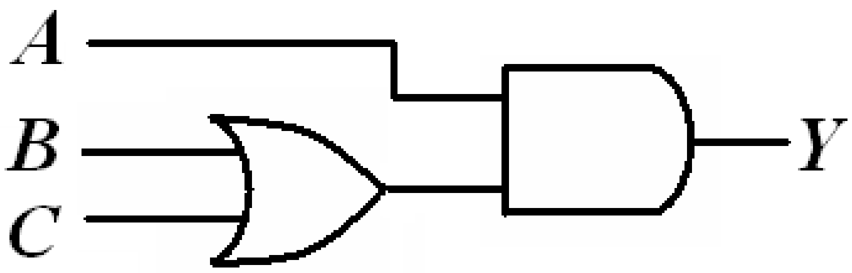
真值表

输入			输出
A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

函数式

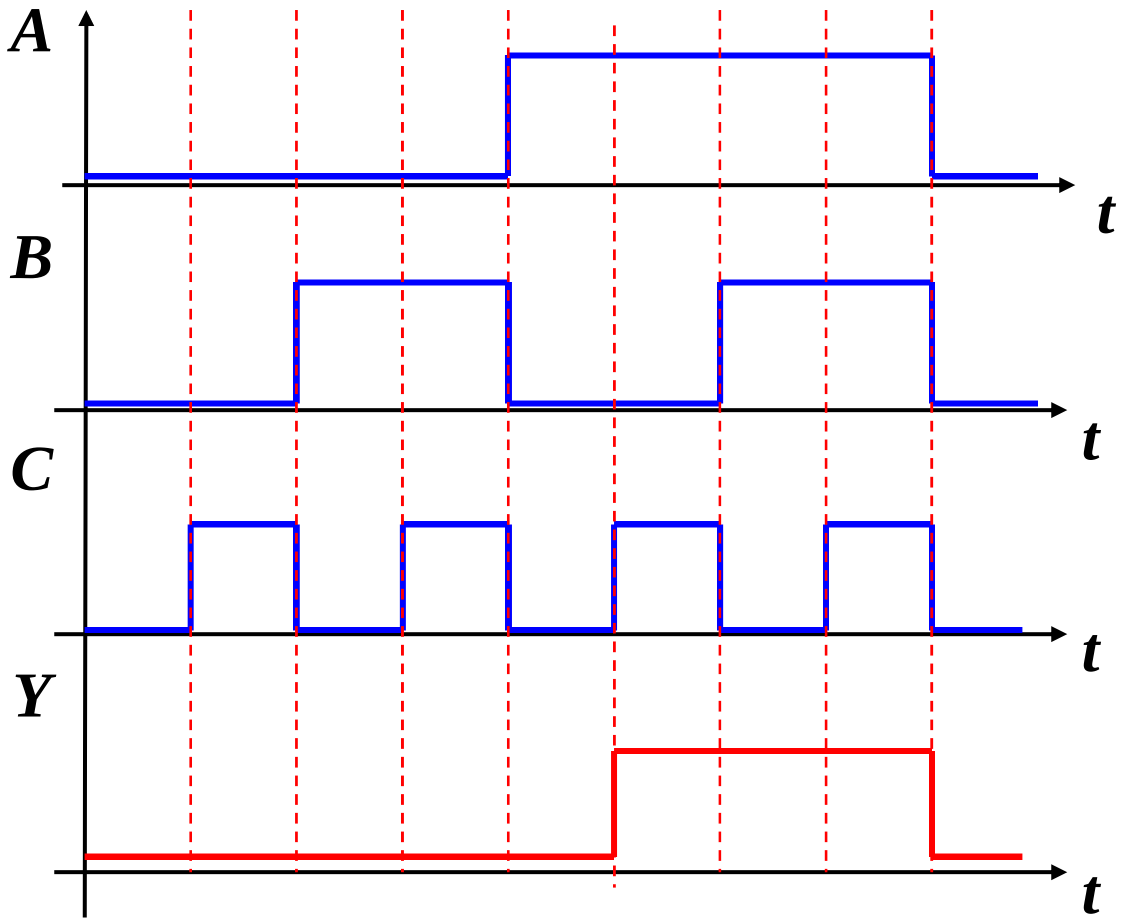
$$Y = AB'C + ABC' + ABC$$
$$= A(B+C)$$

逻辑图



波形图

$$Y = A(B + C)$$



真值表：将输入、输出的所有可能状态一一对应地列出。

A	Y
0	1
1	0

一输入变量，二种组合

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

二输入变量，四种组合

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

三输入变量，八种组合

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1

A	B	C	D	Y
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

四输入变量，**16**种组合

n个变量可以有2^n个组合，一般按二进制的顺序，输出与输入状态一一对应，列出所有可能的状态。

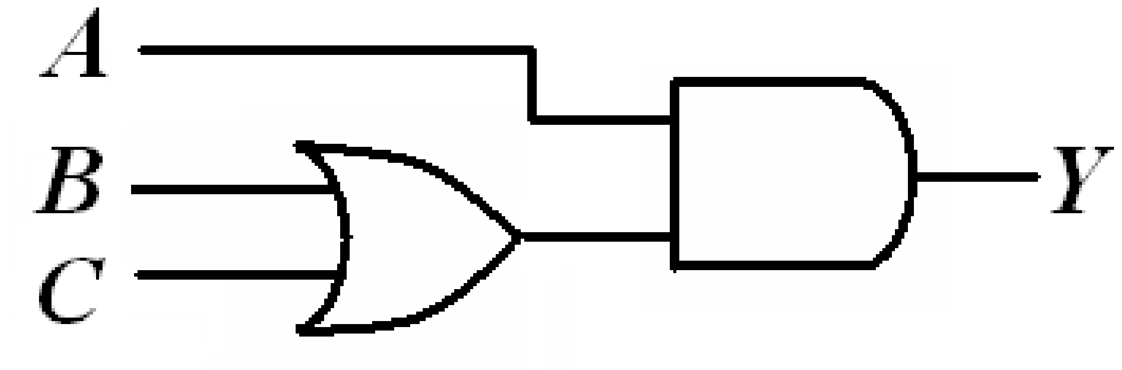
逻辑函数式

把逻辑函数的输入、输出关系写成与、或、非等逻辑运算的组合式，即逻辑代数式，又称为逻辑函数式，通常采用“与或”的形式。

比如： $F = AB'C' + A'BC' + A'B'C + A'B'C' + ABC$

逻辑图：

　　把相应的逻辑关系用逻辑符号和连线表示出来。



$$Y = A(B + C)$$

各种表示方法之间的相互转换

例2.5.1

1、真值表→逻辑函数式

方法:将真值表中为1的项相加,写成 “与或式”。

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$Y = A'BC + AB'C + ABC'$$

2、逻辑式→真值表

方法:将输入变量取值的所有组合状态逐一带入逻辑式求函数值,列成表即得真值表。

例2.5.2

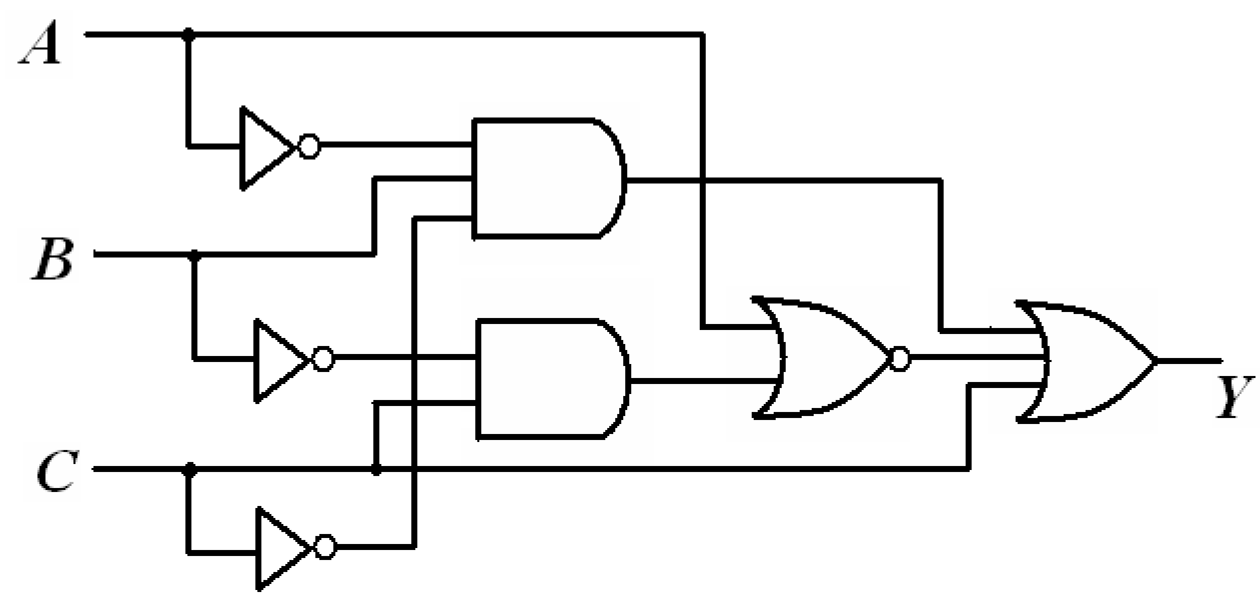
$$Y = A + B'C + A'BC'$$

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

3、逻辑式→逻辑图

方法:用图形符号代替逻辑式中的运算符号，就可以画出逻辑图.

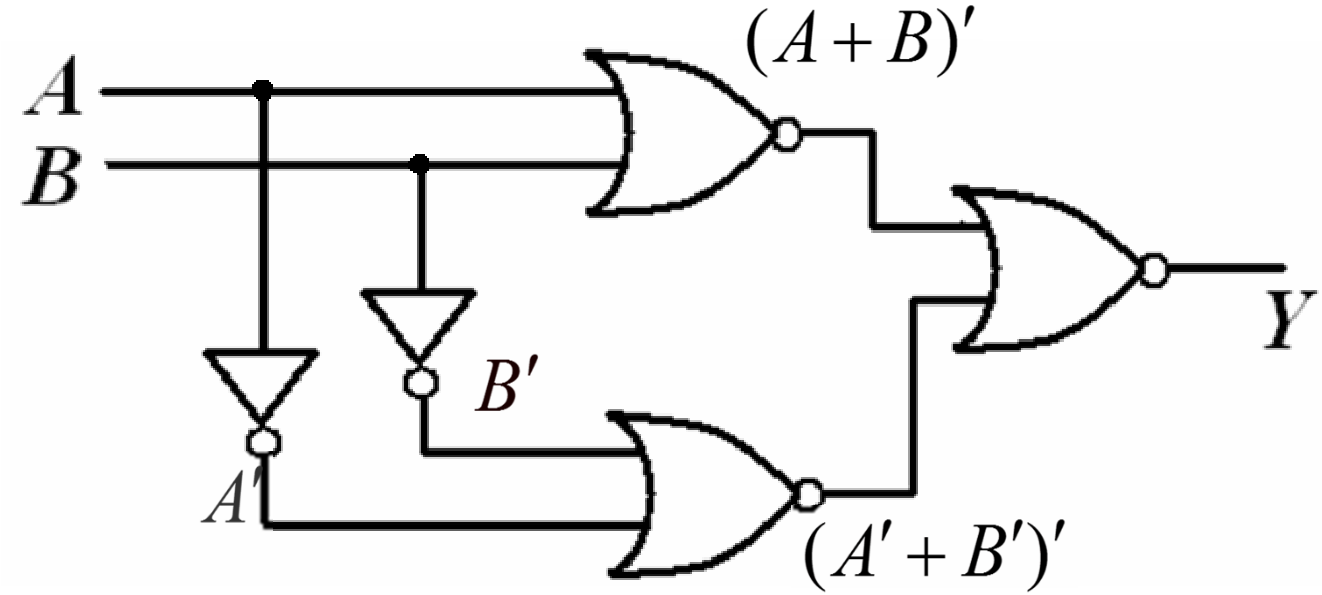
例**2.5.3** $Y=(A+B'C)'+A'BC'+C$



4、逻辑图→逻辑式

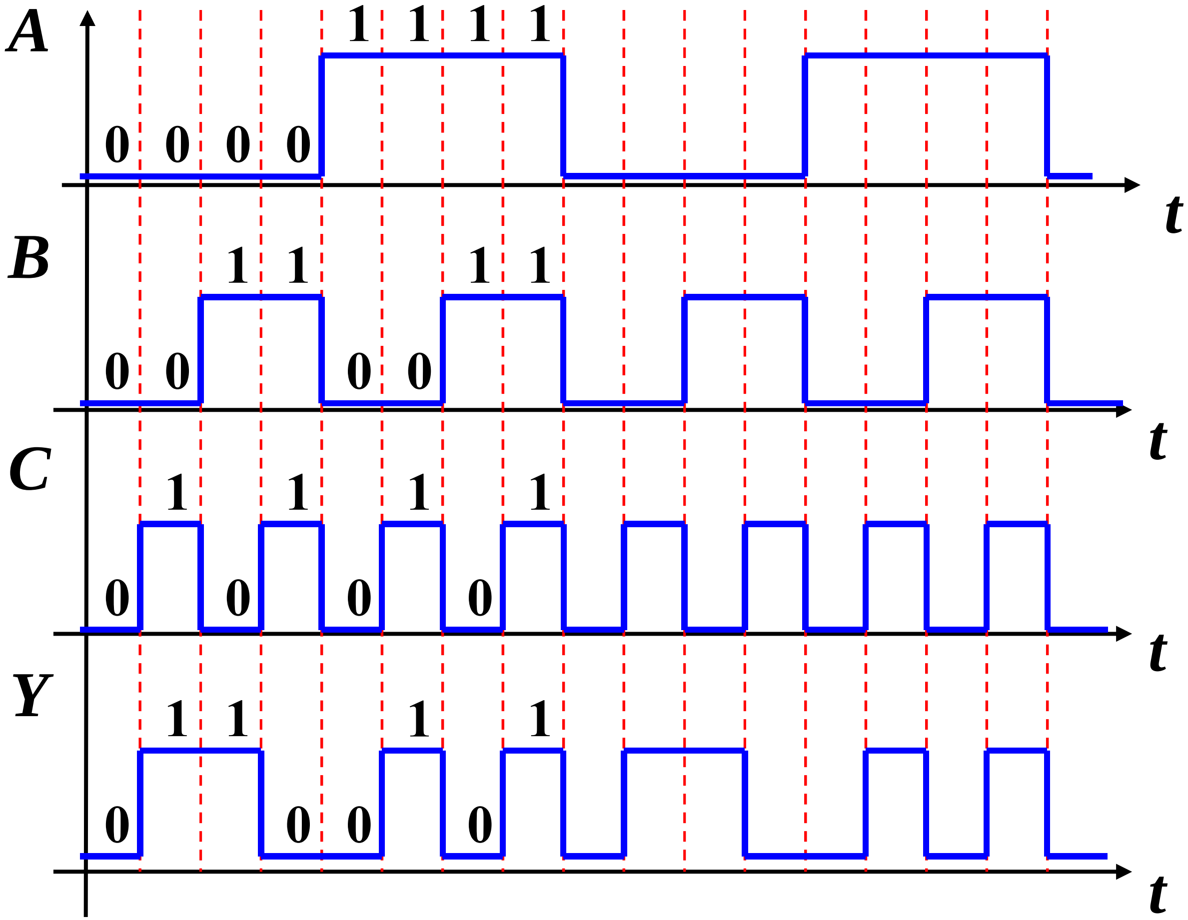
方法:从输入端到输出端逐级写出每个图形符号对应的逻辑式，即得到对应的逻辑函数式.

例2.5.4



$$Y=((A+B)'+(A'+B')')'=(A+B)(A'+B')=AB'+A'B$$

5、波形图→真值表



A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

三、逻辑函数的两种标准形式

最小项：

在n变量逻辑函数中，若m为包含n个因子的乘积项，而且这n个变量都以原变量或反变量的形式在m 中出现，且仅出现一次，则这个乘积项m称为该函数的一个标准积项，通常称为最小项。

3个变量A、B、C可组成 8(2^3)个最小项：

4个变量可组成 16(2^4)个最小项，记作m_0～m_{15}。

$m_4 = AB'C'$、$m_5 = AB'C$、$m_6 = ABC'$、$m_7 = ABC$

最小项的性质：

$A'B'C$ 全部最小项的真值表 $AB'C$

A	B	C	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

①任意一个最小项，只有一组变量取值使其值为**1**。

②任意两个不同的最小项的乘积必为**0**。

③全部最小项的和必为**1**。

逻辑函数的最小项表达式

任何一个逻辑函数都可以表示成唯一的一组最小项之和，称为标准与或表达式，也称为最小项表达式。

对于不是最小项表达式的与或表达式，可利用公式$A+A'=1$ 和$A(B+C)=AB+AC$来配项展开成最小项表达式。

例2.5.6

$$
\begin{aligned}
Y &= AB'C'D + A'CD + AC \\
&= AB'C'D + A'(B'+B)CD + A(B'+B)C \\
&= AB'C'D + A'B'CD + A'BCD + AB'C(D'+D) + ABC(D'+D) \\
&= AB'C'D + A'B'CD + A'BCD + AB'CD' + AB'CD + ABCD' + ABCD \\
&= m_3 + m_7 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{14} + m_{15} \\
&= \sum m(3,7,9,10,11,14,15)
\end{aligned}
$$

如果列出了函数的真值表，则只要将函数值为1的那些最小项相加，便是函数的最小项表达式。

A	B	C	Y	最小项
0	0	0	0	m_0
0	0	1	1	m_1
0	1	0	1	m_2
0	1	1	1	m_3
1	0	0	0	m_4
1	0	1	1	m_5
1	1	0	0	m_6
1	1	1	0	m_7

$m_1 = A'B'C$

$m_2 = A'BC'$

$m_3 = A'BC$

$m_5 = AB'C$

$$Y = m_1 + m_2 + m_3 + m_5 = \sum m(1,2,3,5)$$

$$= A'B'C + A'BC' + A'BC + AB'C$$

2.6 逻辑函数的化简方法

一、公式化简法

- 并项法： $AB+AB'=A$
- 吸收法： $A+AB=A$
- 消项法： $AB+A'C+BC=AB+A'C$
- 消因子法： $A+A'B=A+B$
- 配项法： $A+A=A \qquad A+A'=1$

例2.6.1 试用并项法化简下列函数

$$Y_1 = \underline{A}(B'CD)' + \underline{A}B'CD$$

$$= A\left((B'CD)' + B'CD\right) = A$$

$$Y_2 = A\underline{B'} + A\underline{CD} + A'\underline{B'} + A'\underline{CD}$$

$$= \left(A + A'\right)B' + \left(A + A'\right)CD = B' + CD$$

$$Y_3 = A'BC' + A\underline{C'} + B'\underline{C'}$$

$$= \underline{A'B}C' + (\underline{A'B})'C' = \left(A'B + (A'B)'\right)C' = C'$$

$$Y_4 = \underline{BC'}D + \underline{BC}D' + \underline{BC'}D' + \underline{BC}D$$

$$= BC'(D + D') + BC(D' + D) = \underline{B}C' + \underline{B}C = B$$

例2.6.2 试用吸收法化简下列函数

$$Y_1 = \left((A'B)' + C\right)\underline{A}B\underline{D} + \underline{AD}$$

$$= \left[\left((A'B)' + C\right)B + 1\right]AD = AD$$

$$Y_2 = \underline{AB} + \underline{AB}C' + \underline{AB}D + \underline{AB}(C' + D')$$

$$= AB\left[1 + C' + D + (C' + D')\right] = AB$$

$$Y_3 = (\underline{A + BC}) + (\underline{A + BC})\left(A' + (B'C' + D)'\right)$$

$$= A + BC$$

例2.6.3 用消项法化简下列函数

$$Y_1 = AC + AB' + (B + C)'$$

$$= \underline{AC} + \underline{AB'} + \underline{B'C'} \;\; = AC + B'C'$$

$$Y_2 = \underline{AB'}\,\underline{CD'} + (\underline{AB'})'\underline{E} + A'\underline{CD'E}$$

$$= AB'CD' + (AB')'E$$

$$Y_3 = A'B'\underline{C} + AB\underline{C} + A'B\underline{D'} + AB'\underline{D'} + A'B\underline{CD'} + \underline{CD'}E'$$

$$= \underline{(A \oplus B)'} \cdot \underline{C} + \underline{(A \oplus B)}\underline{D'} + (A'B + BE')\underline{CD'}$$

$$= (A \oplus B)' \cdot C + (A \oplus B)D'$$

例2.6.4 用消因子法化简下列函数

$$Y_1 = \underline{B'} + A\underline{B}C = B' + AC$$

$$Y_2 = A\underline{B'} + \underline{B} + A'B$$

$$= A + \underline{B} + A'\underline{B} = A + B$$

$$Y_3 = AC + A'D + C'D$$

$$= AC + (A' + C')D = \underline{AC} + (\underline{AC})' \cdot D$$

$$= AC + D$$

例2.6.5 化简函数 $Y = A'BC' + A'BC + ABC$

解：$Y = A'BC' + A'BC + \underline{A'BC} + ABC$ **; A+A＝A**

$= (A'\underline{BC'} + \underline{A'B}C) + (A'\underline{BC} + A\underline{BC})$

$= A'B + BC$

例2.6.6 化简函数 $Y = AB' + A'B + BC' + B'C$

解：$Y = AB' + A'B(\underline{C + C'}) + BC' + (\underline{A + A'})B'C$ **; A+A'＝1**

$= \underline{AB'} + \underline{AB'}C + A'\underline{BC'} + \underline{BC'} + \underline{A'}B\underline{C} + \underline{A'}B'\underline{C}$

$= AB' + BC' + A'C$

例2.6.6 化简函数 $Y = AB' + A'B + BC' + B'C$

解二：$Y = \cancel{AB'} + A'B + \cancel{BC'} + B'C + AC'$;增加冗余项

①　②　③　④　⑤

$= A'B + B'C + AC'$; ②⑤消去③，④⑤消去①

解三：$Y = AB' + \cancel{A'B} + BC' + \cancel{B'C} + A'C$;增加冗余项

①　②　③　④　⑤

$= AB' + BC' + A'C$; ①⑤消去④,③⑤消去②

例2.6.7 化简逻辑函数

$$Y = AC + B'C + BD' + CD' + A(B + C') + A'BCD' + AB'DE$$

解：$Y = AC + B'C + BD' + \underline{CD'} + A(B + C') + A'B\underline{CD'} + AB'DE$

吸收法

$= AC + \underline{B'C} + BD' + CD' + A(\underline{B'C})' + AB'DE$

消因子法

$= \underline{A}C + B'C + BD' + CD' + \underline{A} + \underline{A}B'DE$

吸收法

$= \underline{B}'C + \underline{B}D' + CD' + A$

消项法

$= B'C + BD' + A$

二、卡诺图化简法

逻辑函数的卡诺图表示法

卡诺图的定义：

将*n*变量的全部最小项各用一个小方块表示，并使具有逻辑相邻性的最小项在几何位置上相邻排列，得到的图形叫做*n*变量最小项的卡诺图。

逻辑相邻项：仅有一个变量不同其余变量均相同的两个最小项，称为逻辑相邻项。

$$A'BC' \qquad\qquad A'BC$$

不是逻辑相邻项

$$A'B'C$$

是逻辑相邻项

卡诺图的表示：

A \ B	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

2 变量卡诺图

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

3 变量卡诺图

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

4 变量卡诺图

上下对折，
左右对折
均是逻辑
相邻项.

用卡诺图表示逻辑函数：

例2.6.8 用卡诺图表示逻辑函数

$$Y = A'B'C'D + A'BD' + ACD + AB'$$

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		
01	1			1
11			1	
10	1	1	1	1

解：将***Y***化为最小项之和的形式

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		
01	1			1
11			1	
10	1	1	1	1

$D' + A'BC'D' + ABCD$

$' + AB'C'D + AB'C'D'$

$_{10} + m_{11} + m_{15}$

例2.6.9 已知逻辑函数的卡诺图,试写出该函数的逻辑式

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

$$Y = AB'C' + A'B'C + ABC + A'BC'$$

用卡诺图化简逻辑函数

合并最小项的原则

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0

$= A'C'$

$= AC$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	0	0	1
11	0	0	0	1
10	0	1	0	0

$= BCD'$

$= B'C'D$

合并最小项的原则

（2）任何4个（2^2个）相邻的最小项，可以合并为一项，并消去2个变量。

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	1	1	0

$= A'$

$= C$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	1	1	0

$= BD'$

$= B'D$

合并最小项的原则

（3）任何8个（2^3个）相邻最小项，可以合并为一项，并消去3个变量。

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

$= B$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$= D'$

合并最小项的原则

利用 $AB+AB'=A$

2个最小项合并，消去1个变量；

4个最小项合并，消去2个变量；

8个最小项合并，消去3个变量；

… …

2^n个最小项合并，消去n个变量；

卡诺图化简法的步骤

★ 画出变量的卡诺图;

★ 作出函数的卡诺图;

★ 画圈;

★ 写出最简与或表达式。

画圈的原则

◆ 合并个数为2^n;

◆ 圈尽可能大---乘积项中含因子数最少;

◆ 圈尽可能少---乘积项个数最少;

◆ 每个圈中至少有一个最小项仅被圈过一次，以免出现多余项。

例2.6.10 用卡诺图将下式化简为最简与一或函数式

$$Y = AC' + A'C + BC' + B'C$$

Y: $A \backslash BC$	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1		1

$$Y = AB' + A'C + BC'$$

Y: $A \backslash BC$	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1		1

$$Y = AC' + A'B + B'C$$

例2.6.11 用卡诺图将下式化简为最简与—或函数式

$$Y = ABC + ABD + AC'D + C'D' + AB'C + A'CD'$$

Y: AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$$Y = A + D'$$

Y

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$$Y' = A'D$$

$$Y = (Y')' = (A'D)' = A + D'$$

2.7 具有无关项的逻辑函数化简

约束项、任意项和逻辑函数式中的无关项

无关项

约束项: 当限制某些输入变量的取值不能出现时，用它们对应的最小项恒等于0来表示。

任意项: 在输入变量的某些取值下函数值是1还是0皆可，并不影响电路的功能。在这些变量的取值下，其值等于1的那些最小项称为任意项。

在卡诺图中用符号“φ”、“×”或“d”表示无关项。在化简函数时即可以认为它是1，也可以认为它是0。

例2.7.1 化简逻辑函数 $Y = A'B'C'D + A'BCD + AB'C'D'$

已知约束条件为

$$A'B'CD + A'BC'D + ABC'D' + AB'C'D + ABCD + ABCD' + AB'CD' = 0$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	X	0
01	0	X	1	0
11	X	0	X	X
10	1	X	0	X

$$Y = A'D + AD'$$

例2　判断一位十进制数是否为偶数。

A B C D	Y	A B C D	Y	说　明
0 0 0 0	1	1 0 0 0	1	
0 0 0 1	0	1 0 0 1	0	
0 0 1 0	1	1 0 1 0	×	不会出现
0 0 1 1	0	1 0 1 1	×	不会出现
0 1 0 0	1	1 1 0 0	×	不会出现
0 1 0 1	0	1 1 0 1	×	不会出现
0 1 1 0	1	1 1 1 0	×	不会出现
0 1 1 1	0	1 1 1 1	×	不会出现

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	×	×	×	×
10	1	0	×	×

输入变量A，B，C，D取值为0000～1001时，逻辑函数Y有确定的值，根据题意，偶数时为1，奇数时为0。

$$Y(A,B,C,D)=\Sigma m(0,2,4,6,8)$$

无关项：$\Sigma d(10,11,12,13,14,15)=0$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	×	×	×	×
10	1	0	×	×

$$Y(A,B,C,D)=\Sigma m(0,2,4,6,8)+\Sigma d(10,11,12,13,14,15)$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	×	×	×	×
10	1	0	×	×

不利用无关项的化简结果为：

$$Y = A'D' + B'C'D'$$

利用无关项的化简结果为：

$$Y = D'$$

2.8 多输出逻辑函数的化简

$$Y_1(A,B,C,D)=\Sigma m(1,4,5,6,7,10,11,12,13,14,15)$$

$$Y_2(A,B,C,D)=\Sigma m(1,3,4,5,6,7,12,14)$$

$$Y_3(A,B,C,D)=\Sigma m(3,7,10,11)$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	1	1

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	1
11	1	0	0	1
10	0	0	0	0

$$Y_1=B+AC+A'C'D$$

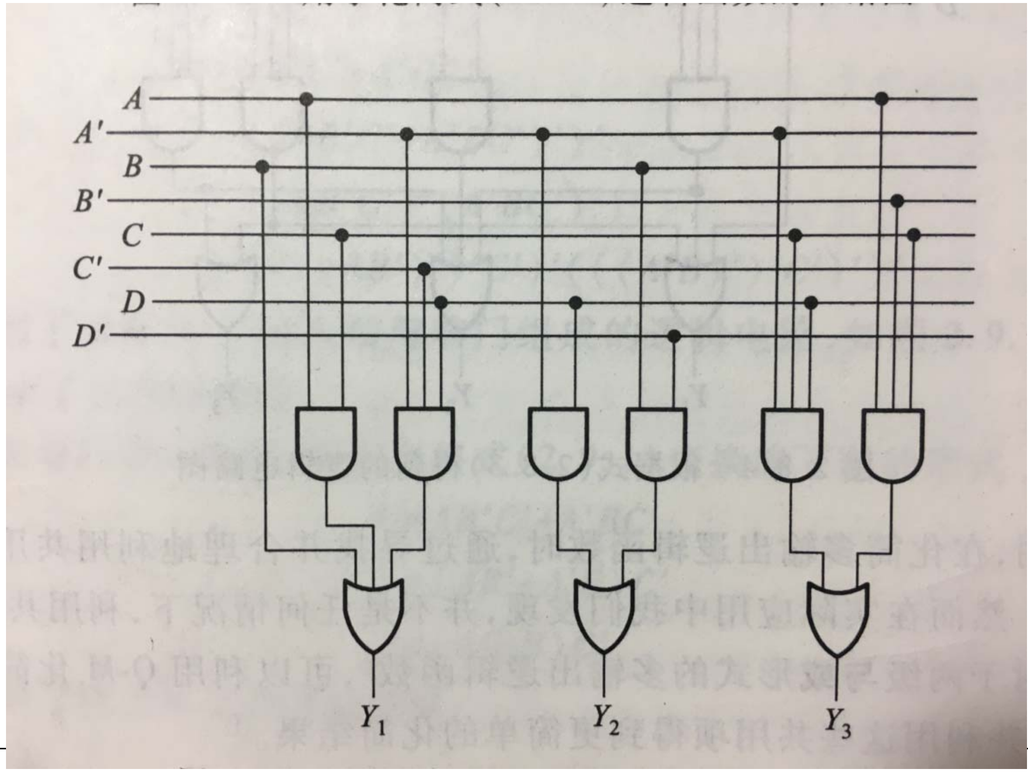
$$Y_2=A'D+BD'$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	0	0	0	0
10	0	0	1	1

$$Y_1 = B + AC + A'C'D$$

$$Y_2 = A'D + BD'$$

$$Y_3 = A'CD + AB'C$$



AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	1	1

$$Y_1 = B + AC + A'C'D$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	1
11	1	0	0	1
10	0	0	0	0

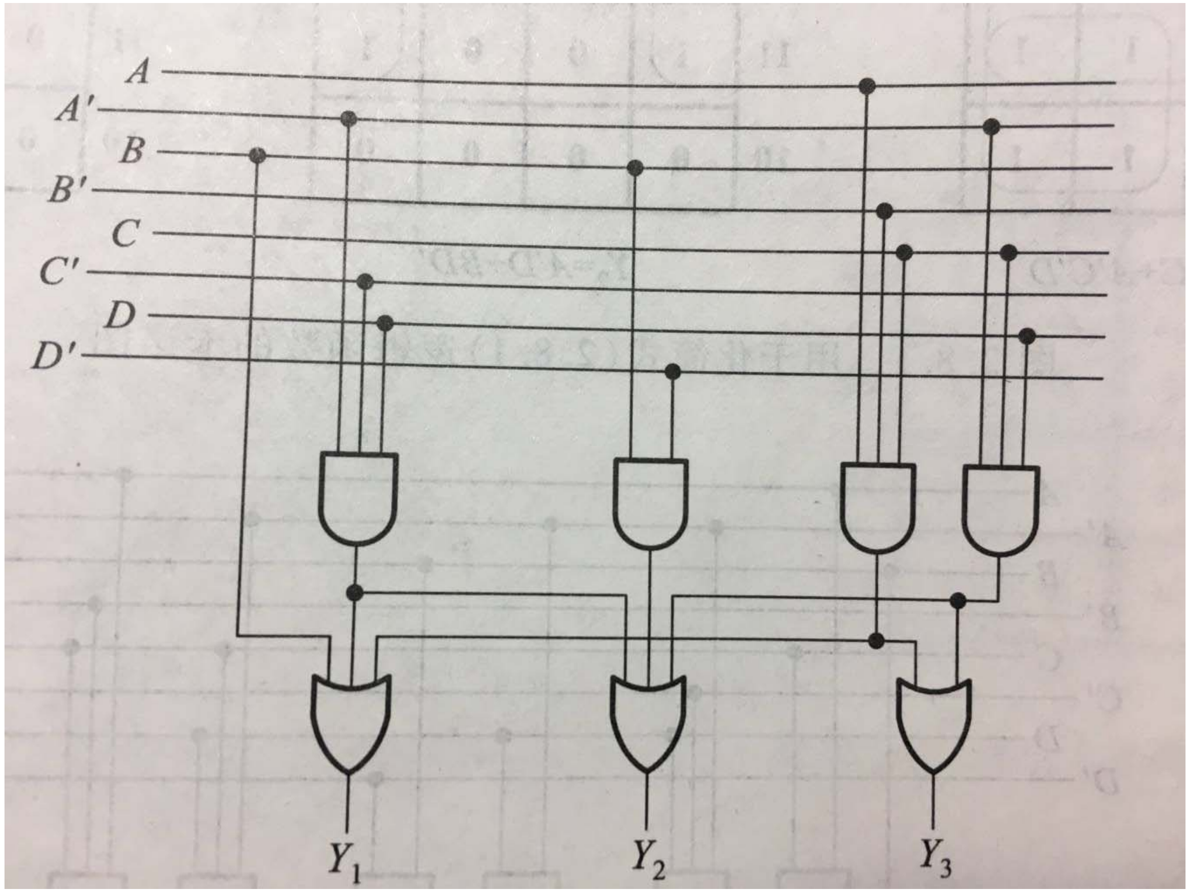
$$Y_2 = A'D + BD'$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	0	0	0	0
10	0	0	1	1

$$Y_3 = A'CD + AB'C$$

$$Y_1 = B + AB'C + A'C'D$$

$$Y_2 = A'C'D + A'CD + BD'$$



☺ 少了两个与门

☺ 连线简单

2.9　逻辑函数形式的变换

根据逻辑表达式，可以画出相应的逻辑图，表达式的形式决定门电路的个数和种类。在用电子器件组成实际的逻辑电路时，由于选择不同逻辑功能类型的器件，因此需要将逻辑函数式变换成相应的形式。

- 实现电路的与门少
- 下级或门输入端个数少

1、最简与或表达式

- 首先是式中乘积项最少
- 乘积项中含的变量最少

与门的输入端个数少

$$Y = A'BE' + A'B + AC' + AC'E + BC' + BC'D$$
$$= A'B + AC' + BC'$$
$$= A'B + AC'$$

最简与或表达式

2、最简与非-与非表达式

$$Y = A'B + AC'$$

$$= ((A'B + AC')')'$$

$$= ((A'B)' \cdot (AC')')'$$

①在最简与或表达式的基础上两次取反

②用摩根定律去掉内层的非号

3、最简与或非表达式

$$Y = A'B + AC'$$

$$\begin{aligned} Y' &= (A'B + AC')' \\ &= (A + B')(A' + C) \\ &= 0 + AC + A'B' + B'C \\ &= AC + A'B' \end{aligned}$$

①求反函数的与或表达式

$$Y'' = Y = (AC + A'B')'$$

②两次取反

反函数用最小项来求解表达

$$
\begin{aligned}
Y &= A'B + AC' \\
&= A'B(C + C') + AC'(B + B') \\
&= A'BC + A'BC' + ABC' + AB'C' \\
&= \sum m(2,3,4,6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y' &= \sum m(0,1,5,7) \\
&= A'B'C' + A'B'C + AB'C + ABC \\
&= A'B' + AC
\end{aligned}
$$

4、最简或非-或非表达式

$$Y = A'B + AC'$$

$$= (A'B' + AC)'$$

$$= ((A+B)' + (A'+C')')'$$

①求最简与或非表达式

②用反演定律将每个乘积项变成或非形式。