一　简谐运动

1 机械振动

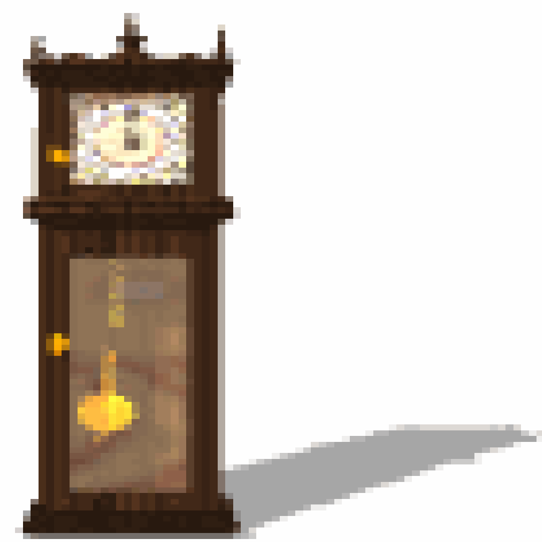
物体或物体的某一部分在一定位置附近来回往复的运动

平衡位置

实例：

心脏的跳动，

钟摆，乐器，　地震等



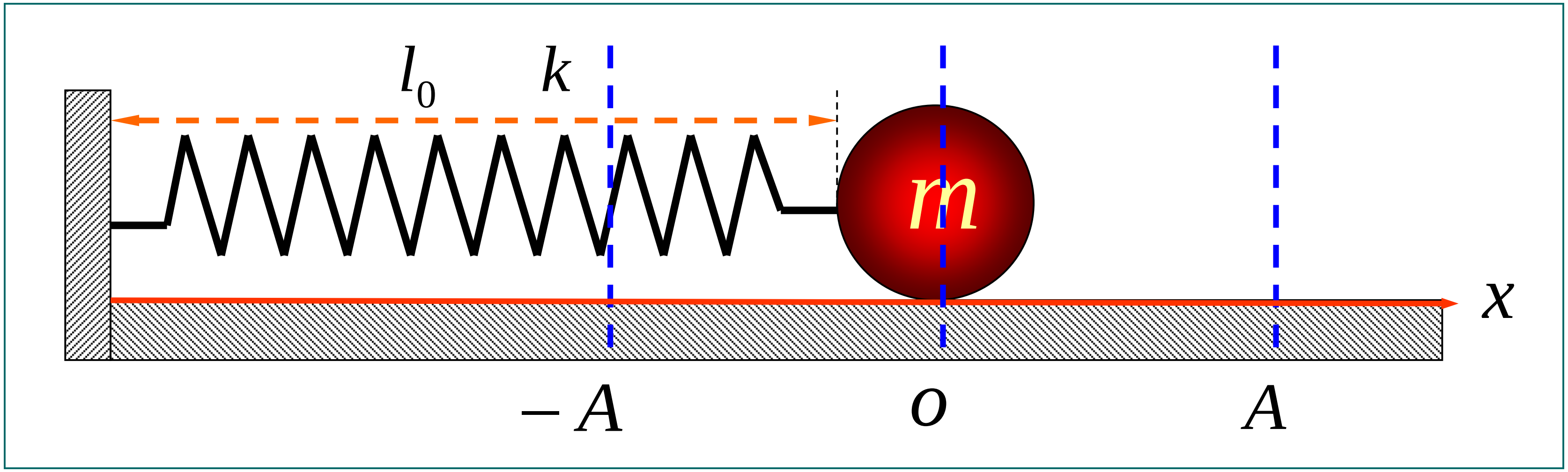
2 简谐振动

- 简谐运动　最简单、最基本的振动

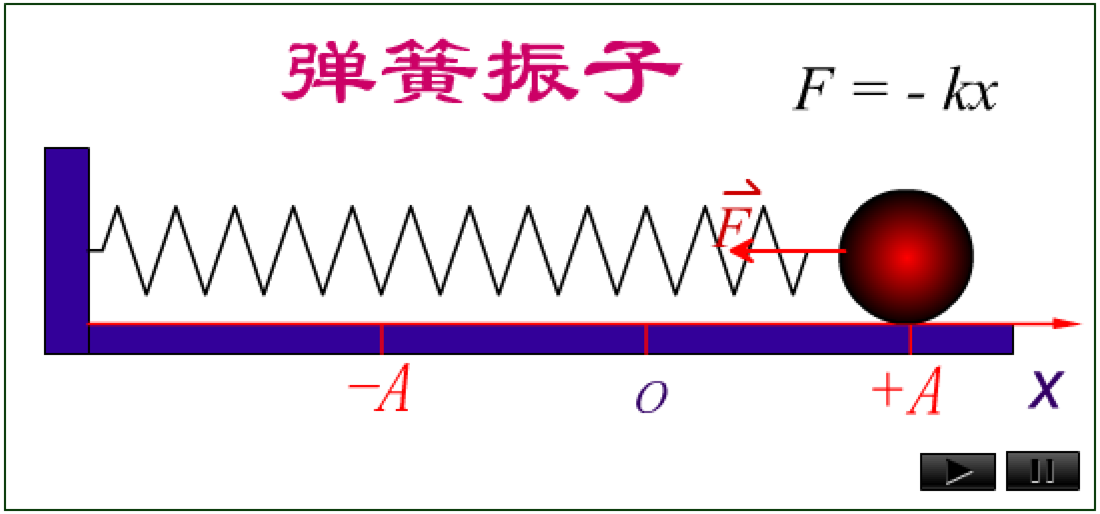
简谐运动 $\xrightarrow[\text{分解}]{\text{合成}}$ 复杂振动

谐振子　作简谐运动的物体

弹簧振子的振动



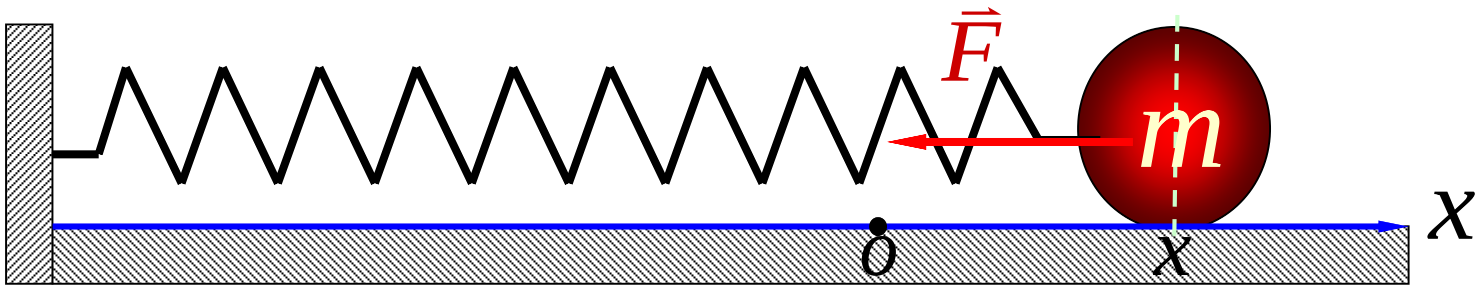
$$x = 0 \quad F = 0$$



振动的成因：

回复力+惯性

3 弹簧振子的运动分析



$$F=-kx=ma$$

令 $$\omega^2=\frac{k}{m}$$

得 $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x$$

即 $$a=-\omega^2x$$

简谐运动的特征：加速度 a 与位移的大小 x 成正比，方向相反

解方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$$

简谐运动的微分方程

设初始条件为:

$t = 0$ 时， $x = x_0$ ， $v=v_0$

解得 $x = \boxed{A}\cos(\omega t + \boxed{\varphi})$ 简谐运动方程

积分常数，根据初始条件确定

由 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ ⟵ 简谐运动方程

得 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$\boxed{\text{初始条件} \quad t = 0 \quad x = x_0 \quad v = v_0}$

其中
$$\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \\ \varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \end{cases}$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

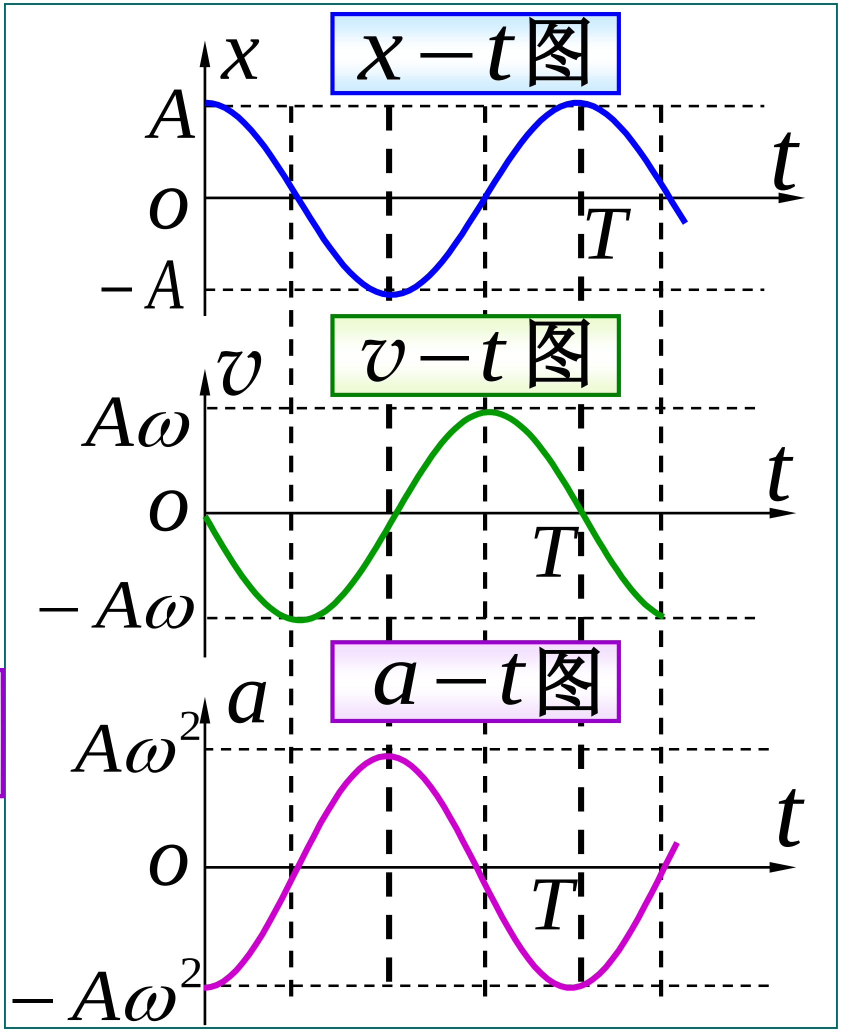
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$ 取 $\varphi = 0$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$= A\omega\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= A\omega^2\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$



简谐运动的基本特征

1、运动学特征 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

2、动力学特征 $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

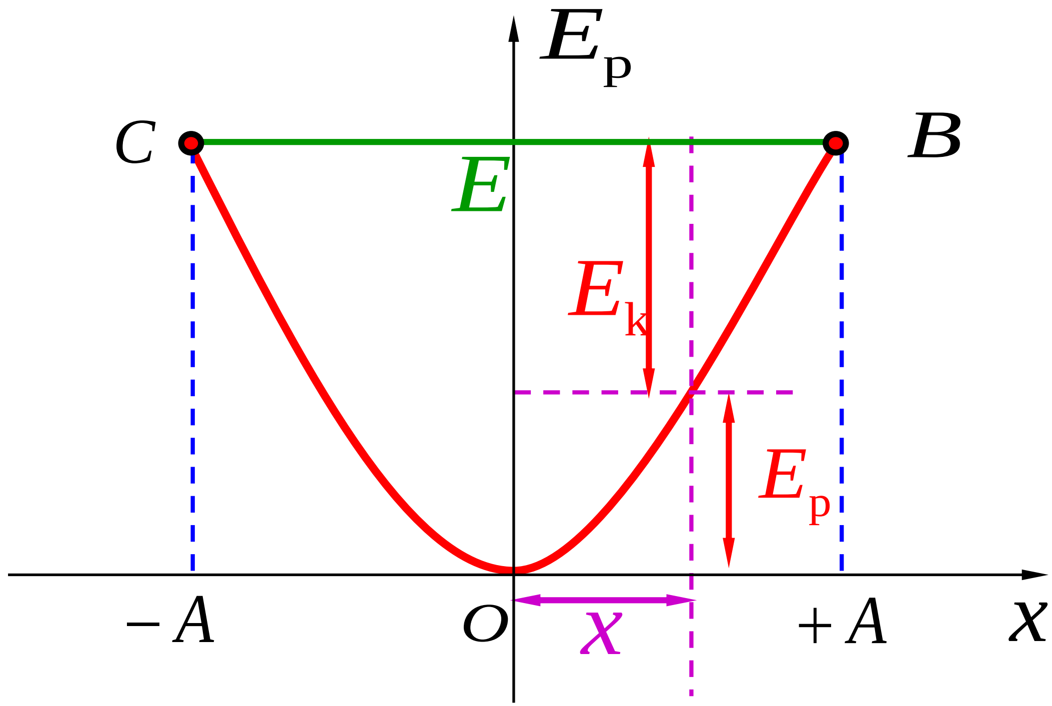
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3、能量特征

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2}$$

简谐运动系统是保守系统：势能为平方形式.

简谐运动势能曲线



二、简谐运动的特征量

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

1、角/圆频率 ω

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2、振幅 *A*

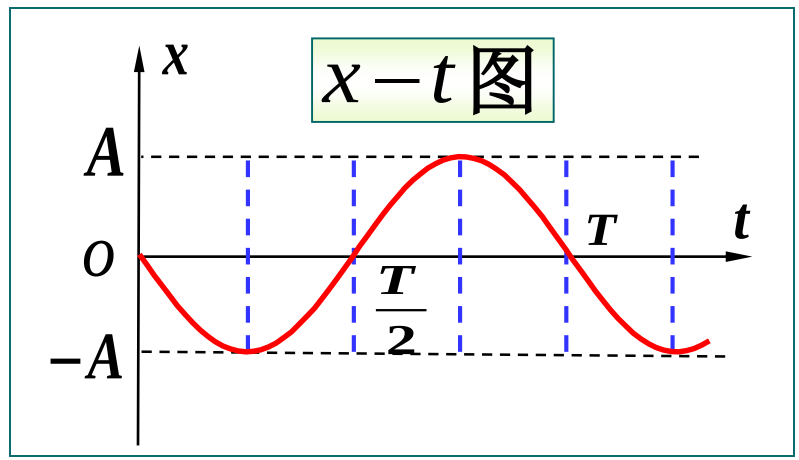
$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

3、初相位 φ

1 周期、频率

$$x = A\cos(\omega t+\varphi) = A\cos[\omega(t+T)+\varphi]$$

- 周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$



注意

弹簧振子周期

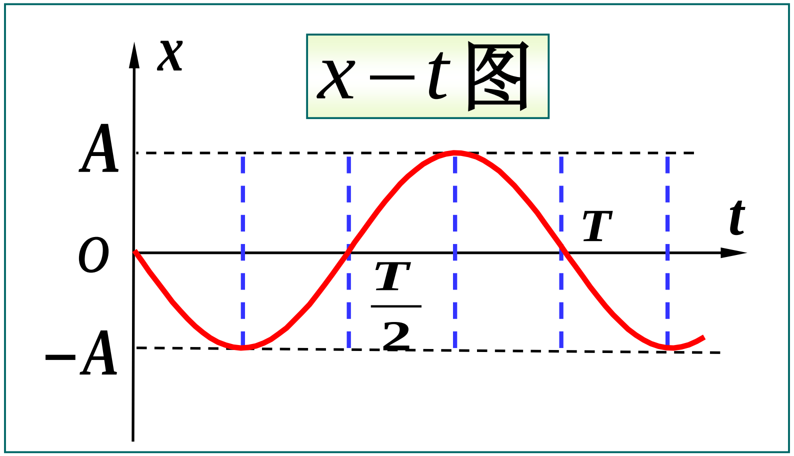
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$x = A\cos(\omega t+\varphi) = A\cos[\omega(t+T)+\varphi]$$

- **频率** $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$

- **圆频率**

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$



周期和频率仅与振动系统**本身**的物理性质有关

例如，心脏的跳动80次/分

周期为 $$T=\frac{1}{80}(\min)=\frac{60}{80}(\mathrm{s})=0.75\,\mathrm{s}$$

频率为 $$\nu=1/T=1.33\mathrm{Hz}$$

动物的心跳频率(参考值,单位:Hz)

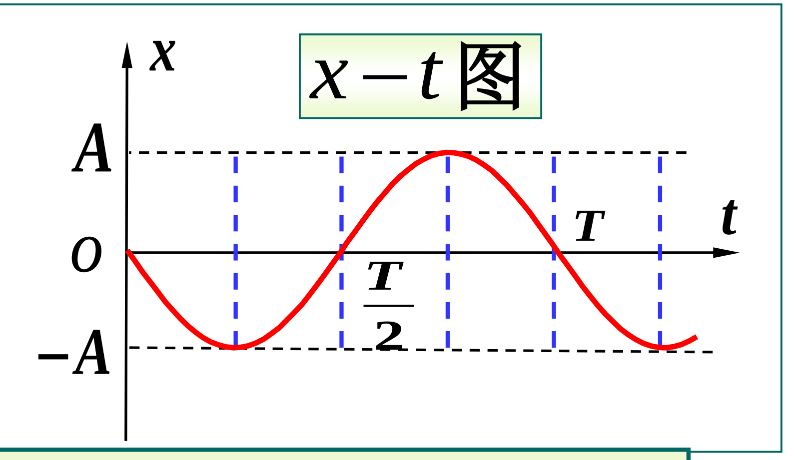
大象	0.4~0.5	马	0.7~0.8
猪	1~1.3	兔	1.7
松鼠	6.3	鲸	0.13

昆虫翅膀振动的频率（Hz）

雌性蚊子	355~415
雄性蚊子	455~600
苍　　蝇	330
黄　　蜂	220

2 振幅

$$A = |x_{\max}|$$



$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

3. 相位 $\boxed{\Phi(t)=\omega t+\varphi}$

$$x=A\cos\left(\omega t+\varphi\right)=A\cos\Phi$$

$$v=-\omega A\sin\left(\omega t+\varphi\right)=-\omega A\sin\Phi$$

相位Φ的意义: 表征任意时刻（t）物体振动状态. 物体经一周期的振动，相位改变 2π

.

人有悲欢离合，月有阴晴圆缺，此事古难全。

相 位 $\Phi(t)=\omega t+\varphi$

初相位 φ $t=0$时，$\Phi(t)=\varphi$

$$\boxed{\tan\varphi=\frac{-v_0}{\omega x_0}}$$

对给定振动系统，周期由系统本身性质决定，振幅和初相由初始条件决定.

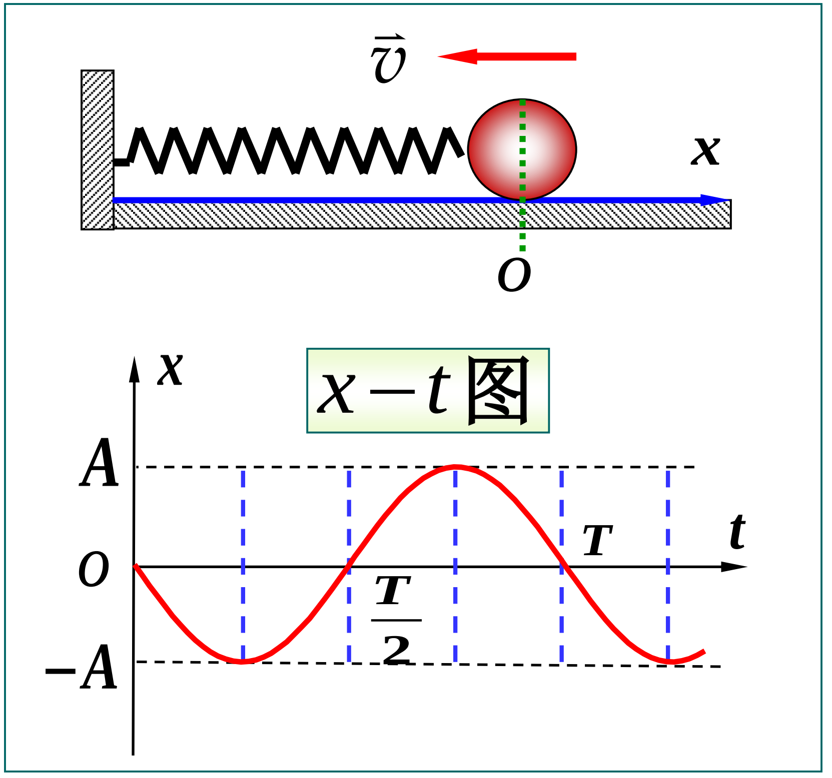
讨论 已知 $t=0, x=0, v_0<0$ 求 φ

$$0 = A\cos\varphi \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\because v_0 = -A\omega\sin\varphi < 0$$

$$\therefore \sin\varphi > 0 \text{ 取 } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$x = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



简谐运动的几何表示：旋转矢量

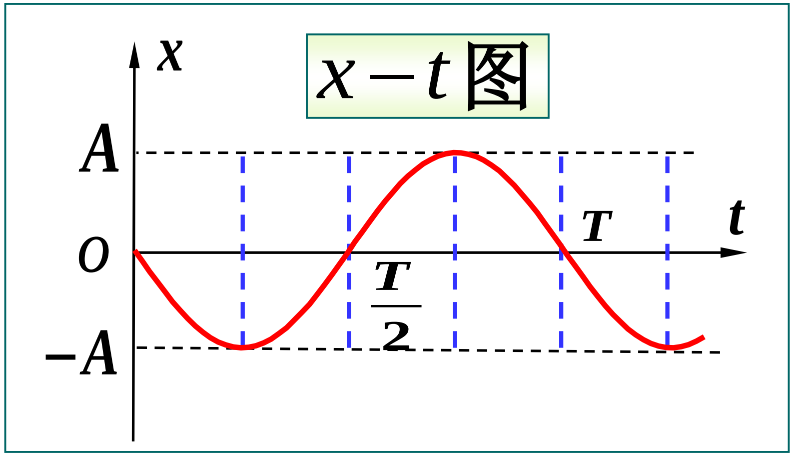
代数表示

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

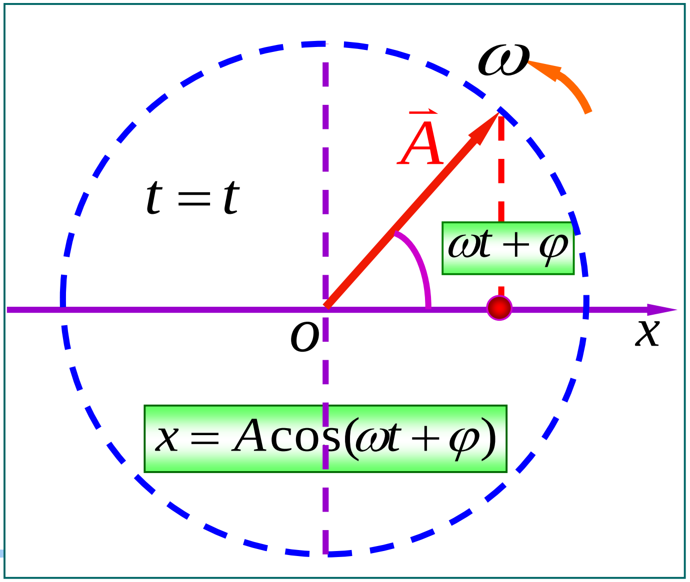
复数表示

$$z = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$$

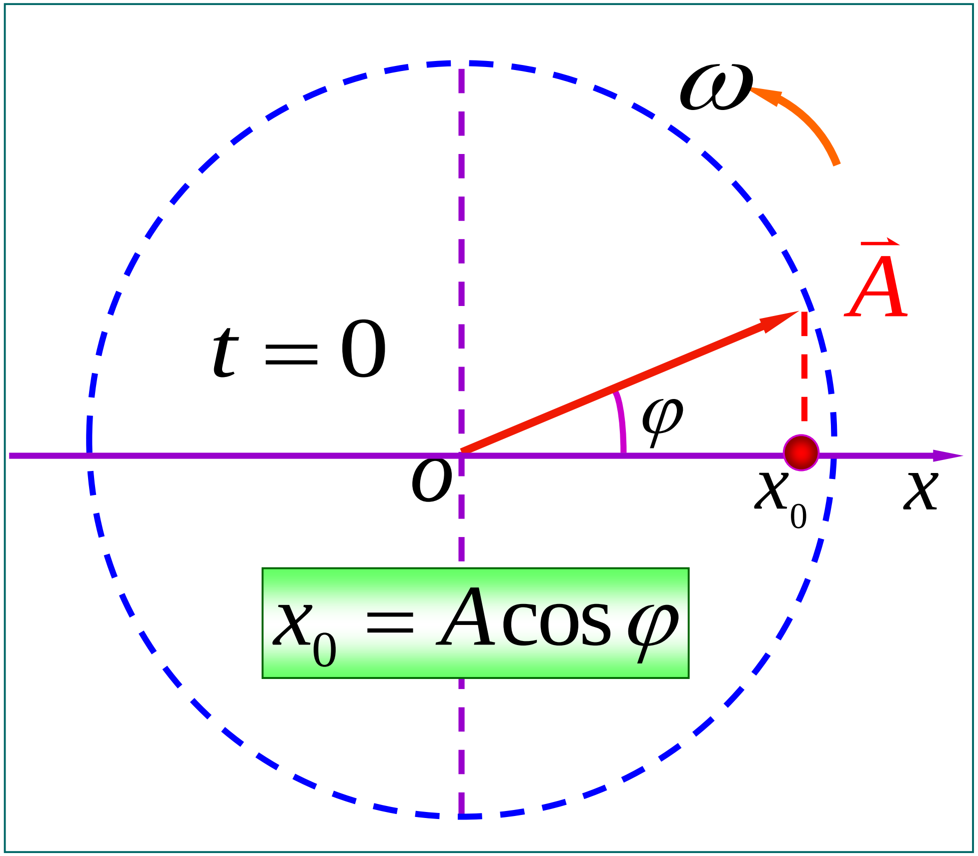
图像表示



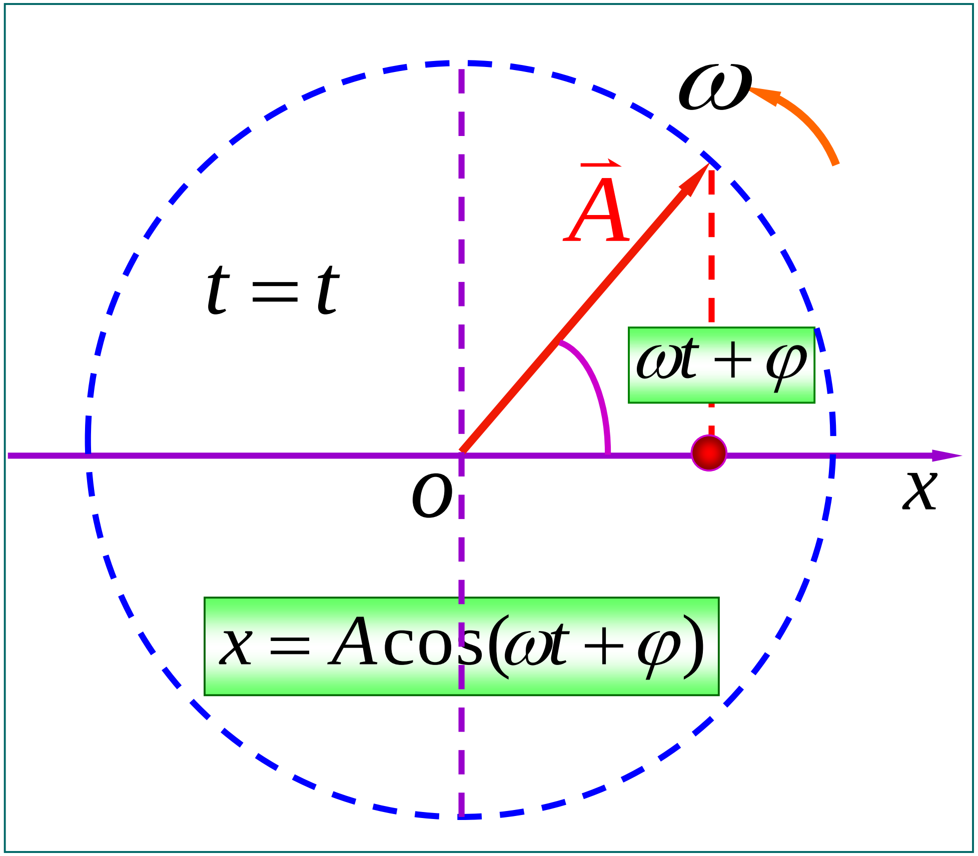
矢量表示



1.旋转矢量



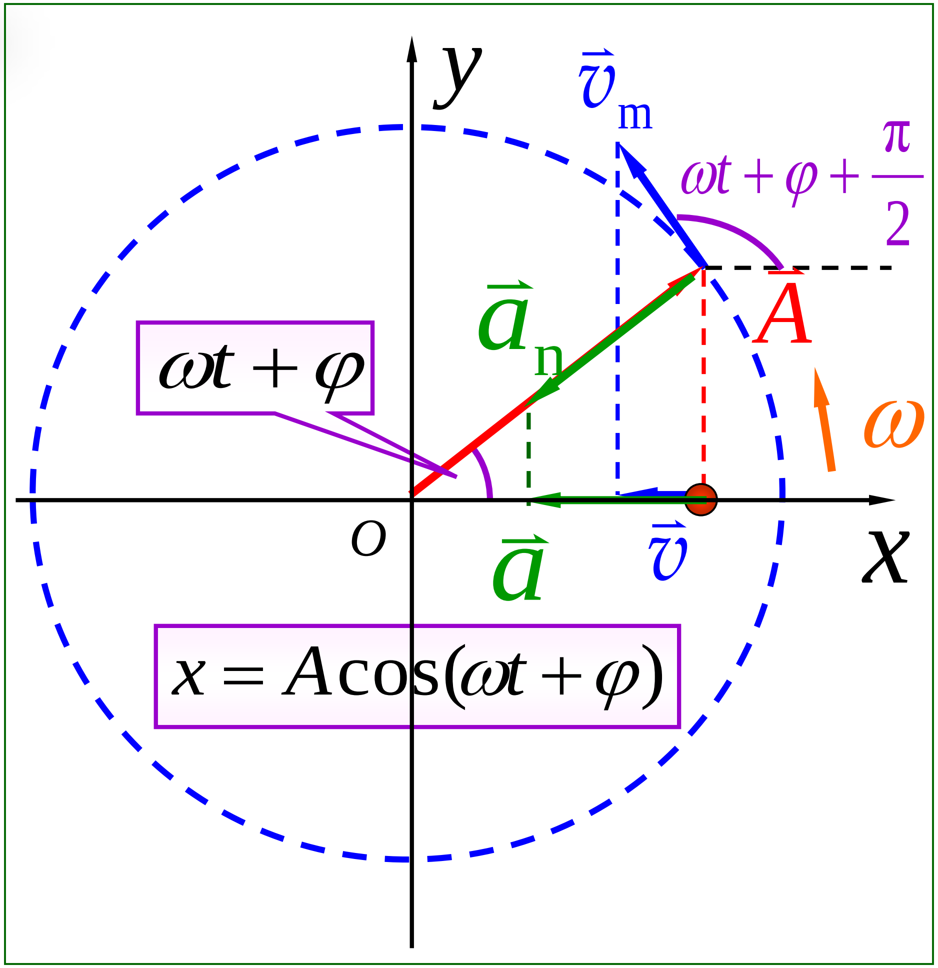
自Ox轴的原点O作一矢量$\vec{A}$，使它的模等于振动的振幅A，并使矢量$\vec{A}$在Oxy平面内绕点O作**逆时针**方向的匀角速转动，其角速度ω与振动频率相等，这个矢量就叫做**旋转矢量**.



以 o 为原点旋转矢量 $\vec{A}$ 的端点在 x 轴上的投影点的运动为简谐运动.

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

以 o 为原点旋转矢量 $\vec{A}$ 的端点在 x 轴上的投影点的运动为简谐运动.



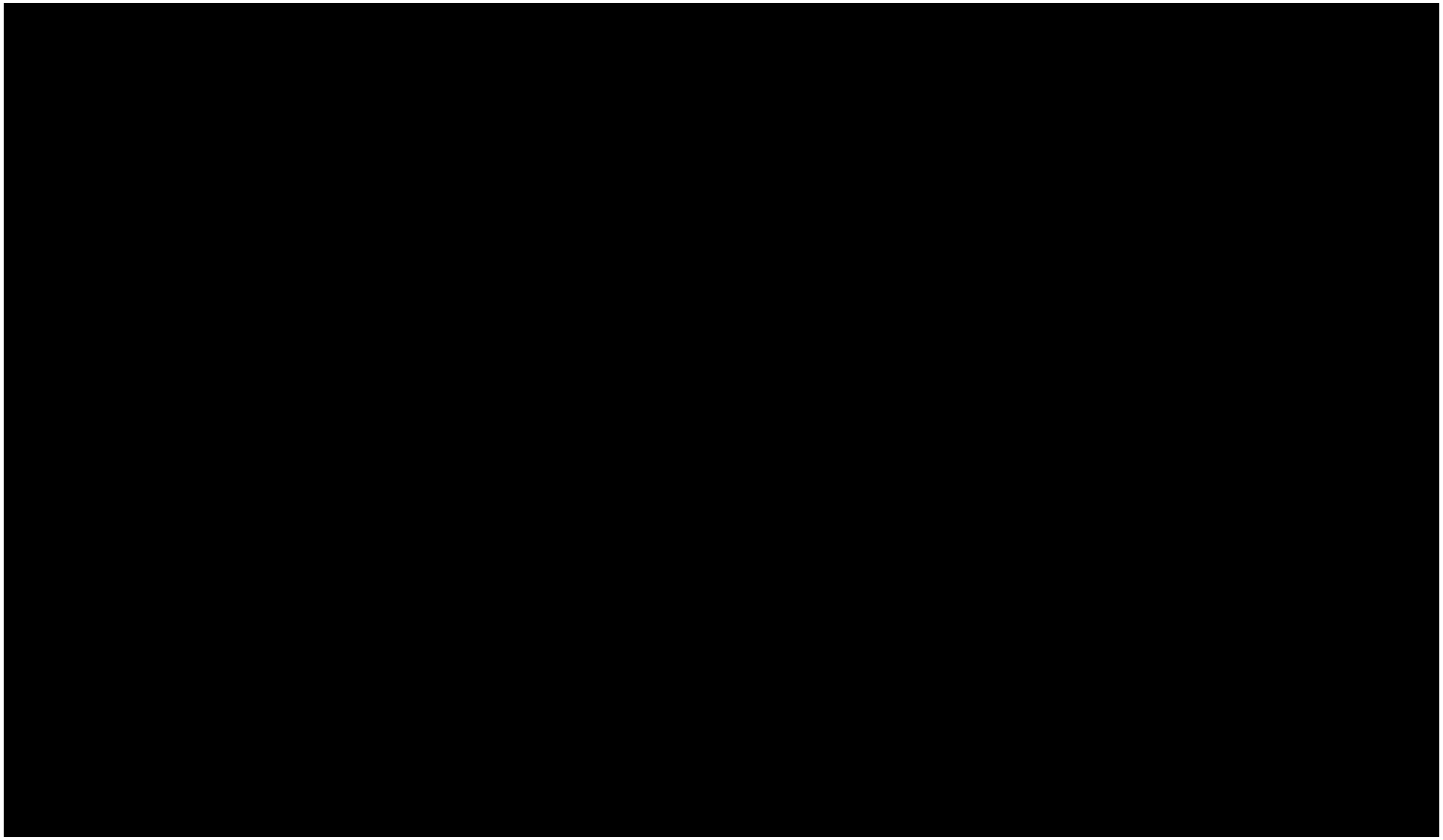
$$v_m = A\omega$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

$$a_n = A\omega^2$$

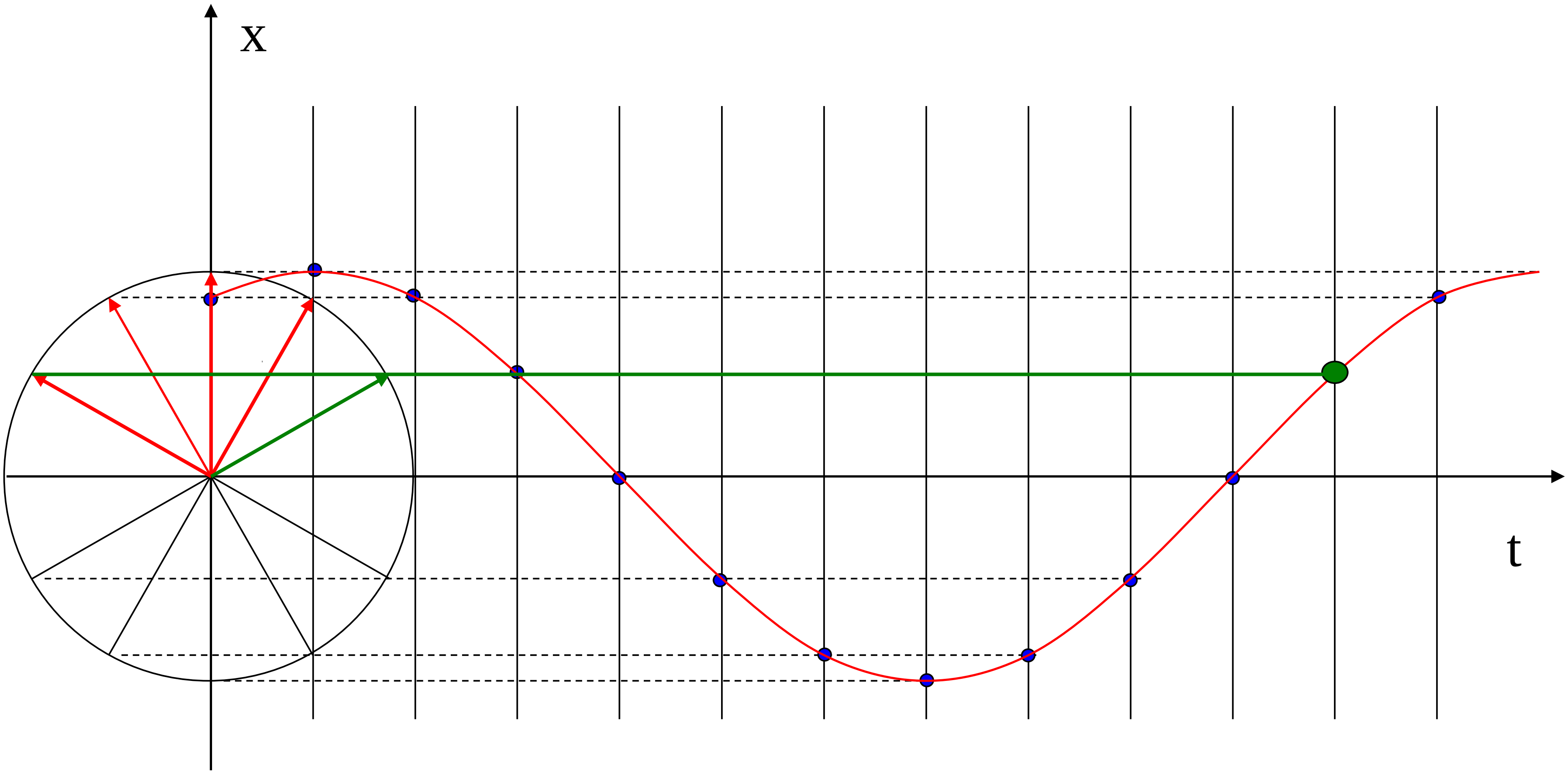
$$a = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$$

用旋转矢量图画简谐运动的$x-t$图



利用旋转矢量图画振动曲线。

$$x = (6cm)\cos(4t - \frac{\pi}{6})$$


x
t

2、旋转矢量法的应用

（1）旋转矢量端点在 ox 轴上投影点的运动，形象而直观地展示了简谐运动。

（2）旋转矢量把描述简谐运动的三个物理量 $(A, \omega, \omega t + \varphi)$ 直观地表示出来

（3）用旋转矢量 $\vec{A}$ 与 ox 轴夹角表示相位，不仅相位计算方便，而且有助于对相位概念的理解

（4）旋转矢量为振动合成提供了直观的几何方法

讨论

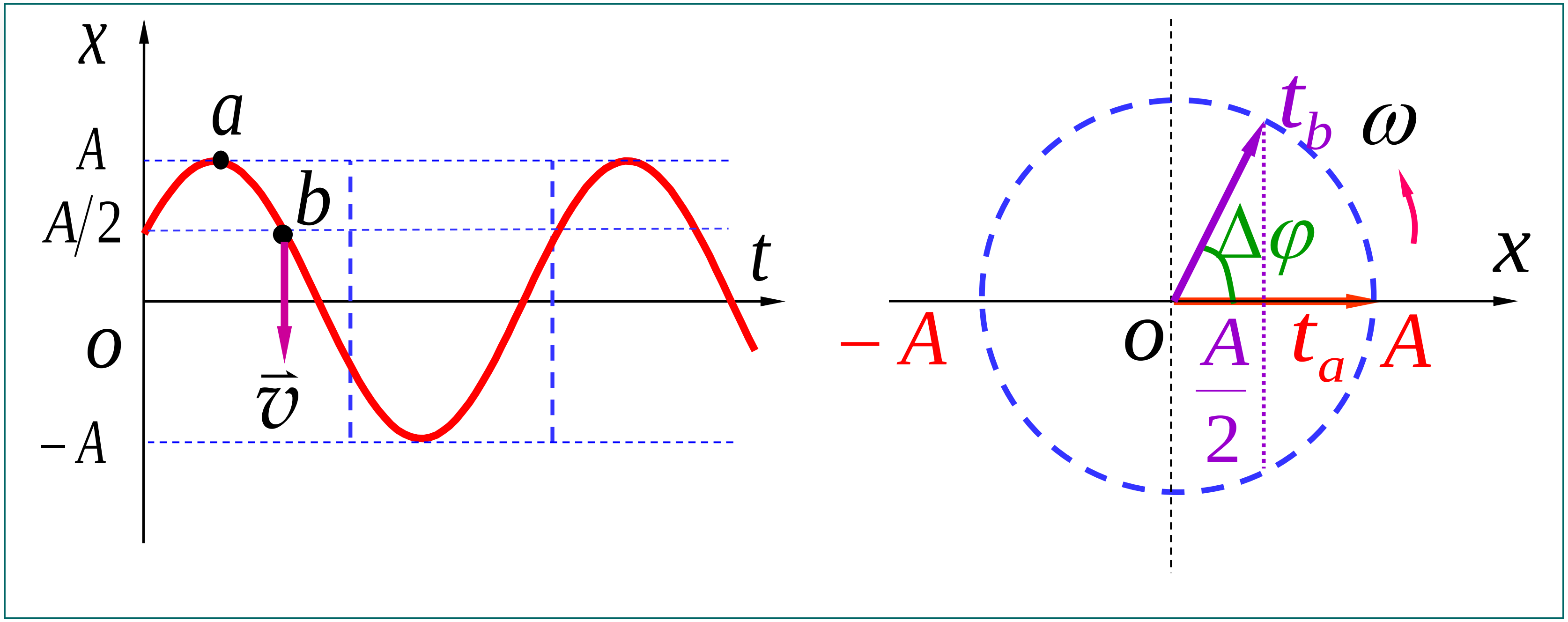
➢ 相位差：表示两个相位之差

（1）对同一简谐运动，相位差可以给出两运动状态间变化所需的时间.

$$x_1 = A\cos(\omega t_1 + \varphi) \qquad x_2 = A\cos(\omega t_2 + \varphi)$$

$$\Delta\Phi = (\omega t_2 + \varphi) - (\omega t_1 + \varphi)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\Phi}{\omega}$$



$$\Delta\Phi = \frac{\pi}{3} \qquad \Delta t = \frac{\pi/3}{2\pi}T = \frac{1}{6}T$$

（2）对于两个同频率的简谐运动，相位差表示它们间步调上的差异（解决振动合成问题）.

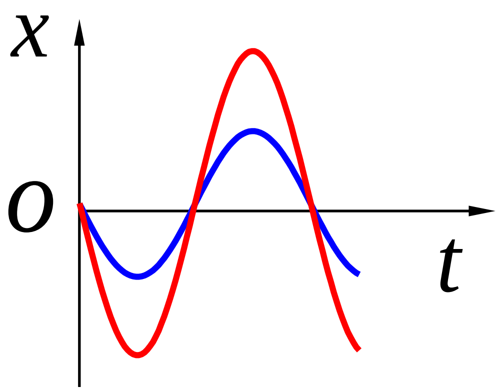
$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\Delta\Phi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \Delta\varphi$$

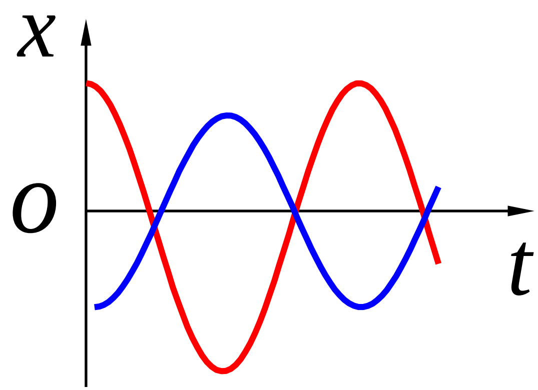
$$\boxed{\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

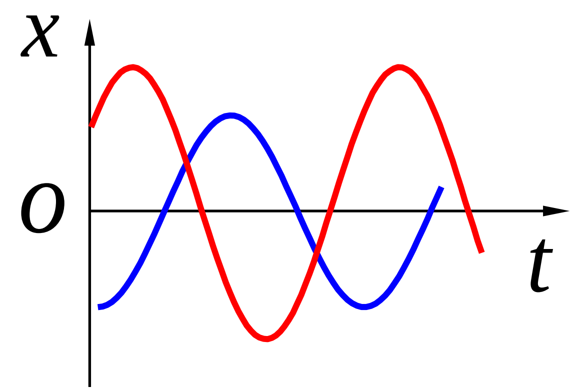
$\Delta\varphi = 0$ 同步



$\Delta\varphi = \pm\pi$ 反相



$\Delta\varphi$为其它 $\begin{cases} \text{超前} \\ \text{落后} \end{cases}$



一维简谐运动

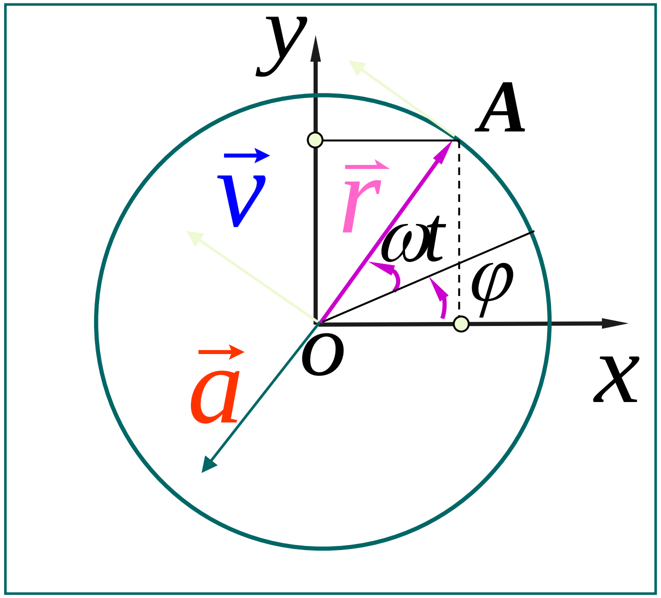
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$= \omega A\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

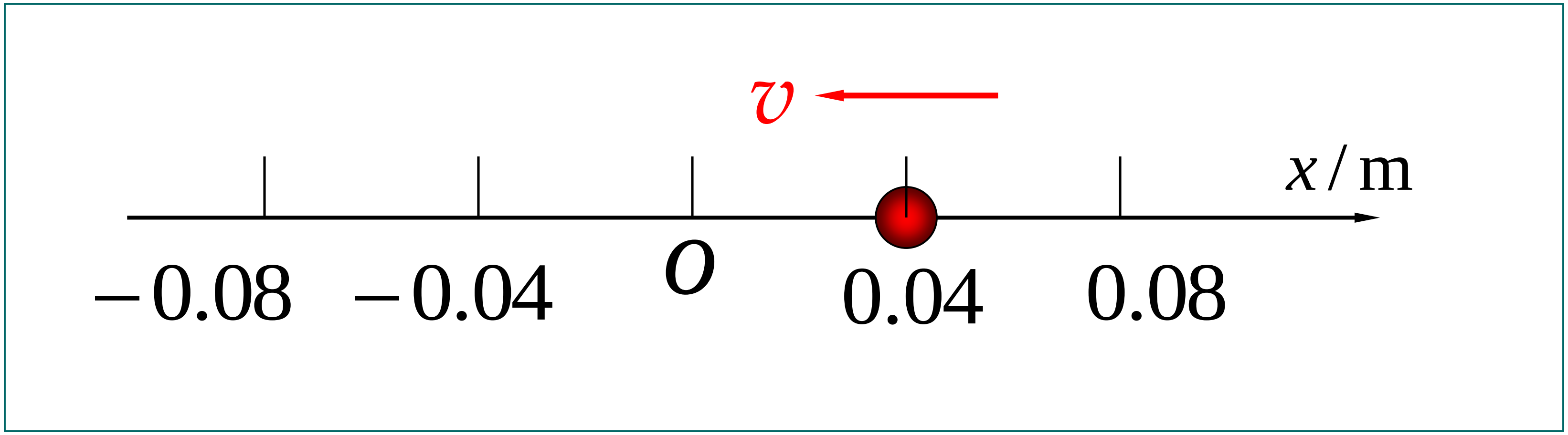
$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$



例 一质量为0.01 kg的物体作简谐运动，其振幅为0.08 m，周期为4 s，起始时刻物体在x=0.04 m处，向ox轴负方向运动（如图）. **试求**

（1）t=1.0 s时，物体所处的位置和所受的力；



已知 $m = 0.01\,\mathrm{kg},\ A = 0.08\,\mathrm{m},\ T = 4\,\mathrm{s}$

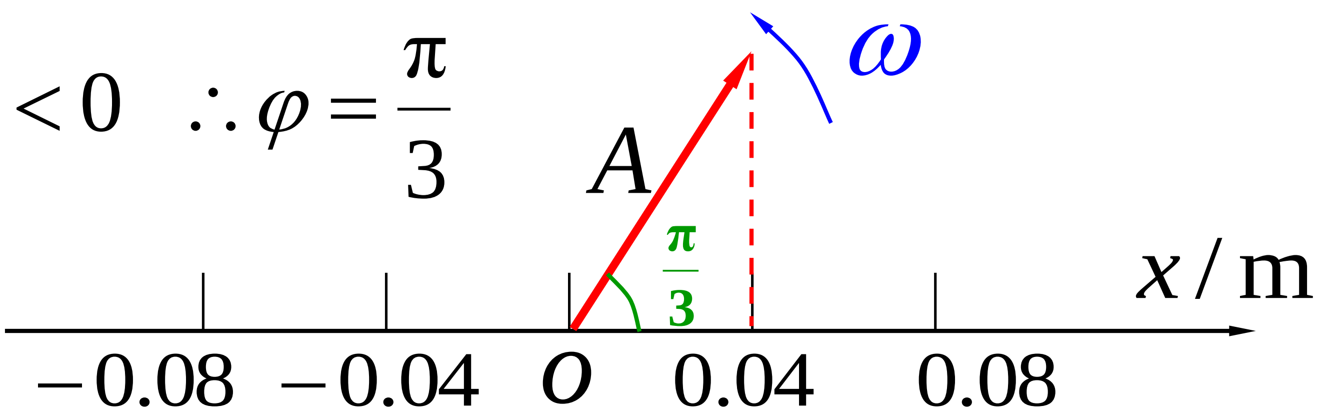
$t = 0,\ x = 0.04\,\mathrm{m},\ v_0 < 0$ 求（1）$t = 1.0\,\mathrm{s},\ x,\ F$

解 $A = 0.08\,\mathrm{m}\quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{s}^{-1}$

$t = 0,\quad x = 0.04\,\mathrm{m}$

代入 $x = A\cos(\omega t + \varphi) \Longrightarrow \varphi = \pm\dfrac{\pi}{3}$

$\because v_0 < 0 \quad \therefore \varphi = \dfrac{\pi}{3}$



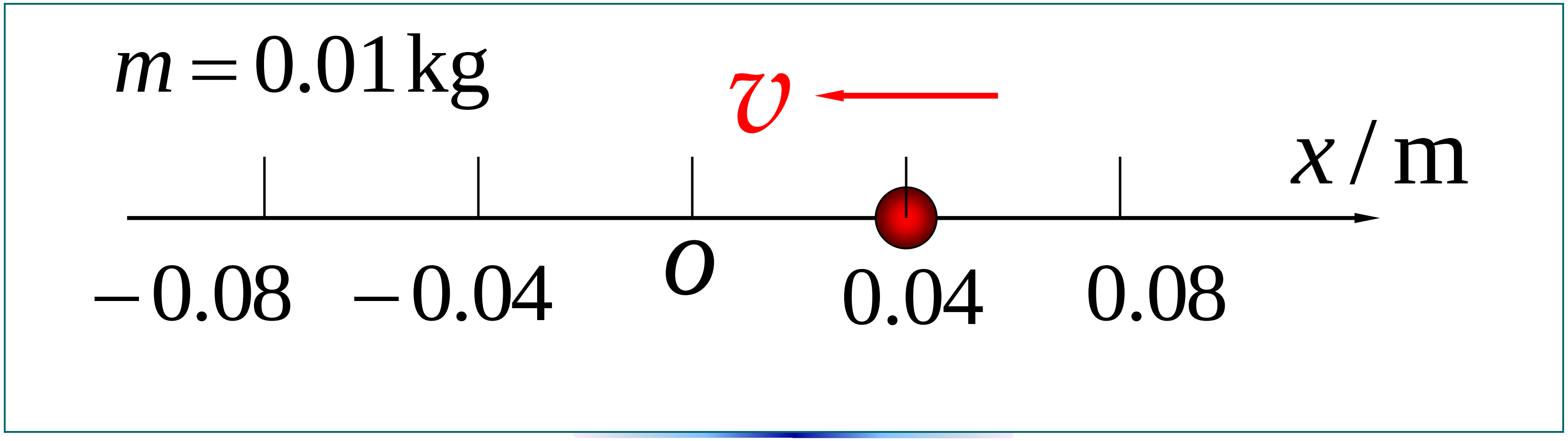
$$\because \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore x = 0.08\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})$$

可求（1）$t = 1.0\,\mathrm{s}, x, F$

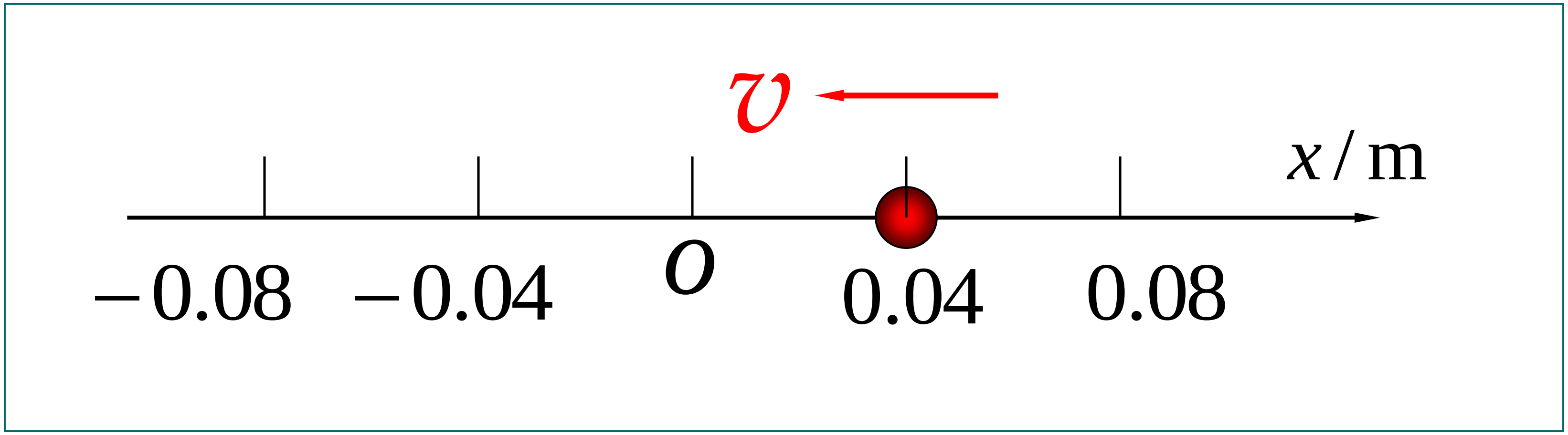
$t = 1.0\,\mathrm{s}$ 代入上式得 $x = -0.069\,\mathrm{m}$

$$F = -kx = -m\omega^2 x = 1.70\times 10^{-3}\,\mathrm{N}$$



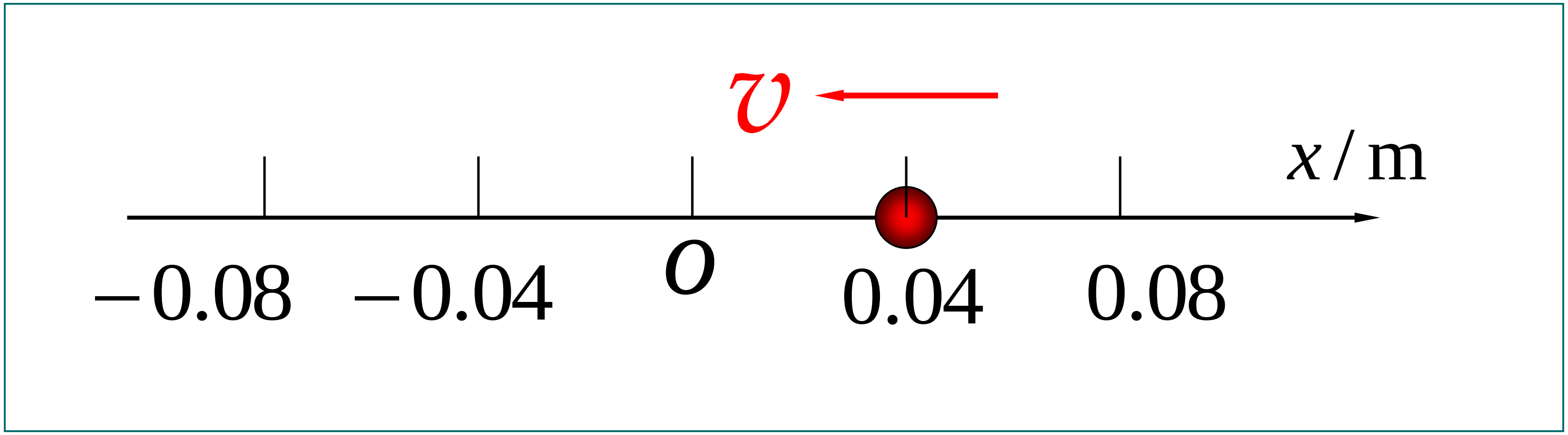
（2）由起始位置运动到x = -0.04 m处所需要的最短时间.

法一 设由起始位置运动到x= -0.04 m处所需要的最短时间为t

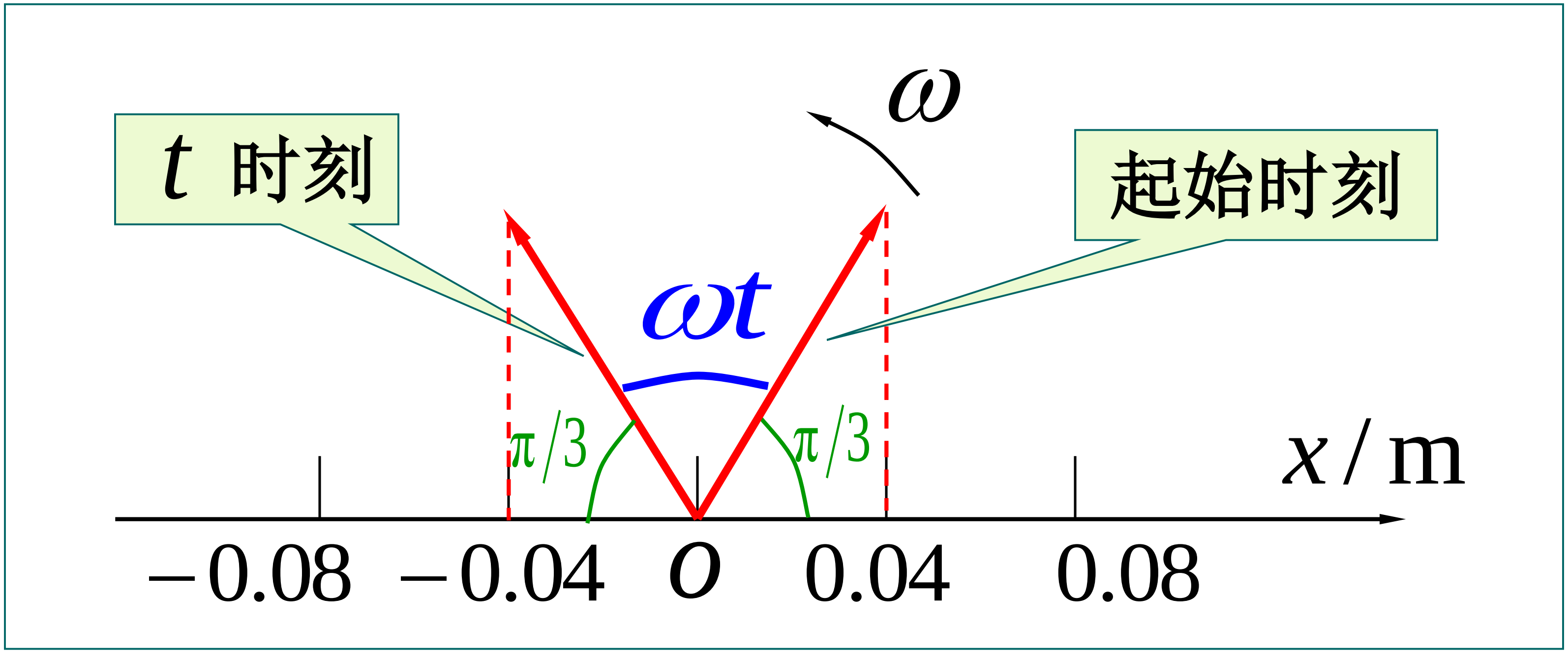


$$x = 0.08\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow -0.04 = 0.08\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})$$

$$t = \frac{\arccos(-\frac{1}{2}) - \frac{\pi}{3}}{\pi/2} = \frac{2}{3} = 0.667\,\mathrm{s}$$



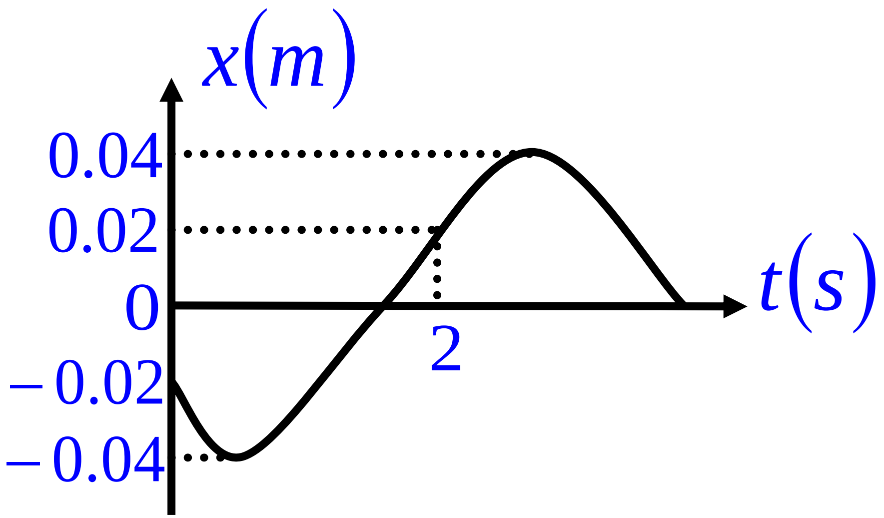
法二

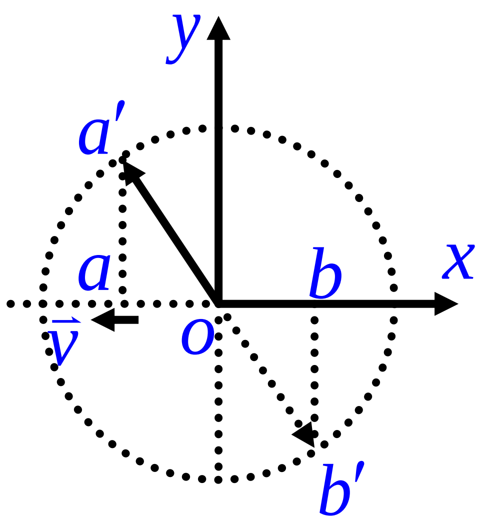


$$\omega t=\frac{\pi}{3}\qquad \omega=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\qquad t=\frac{2}{3}=0.667\,\mathrm{s}$$

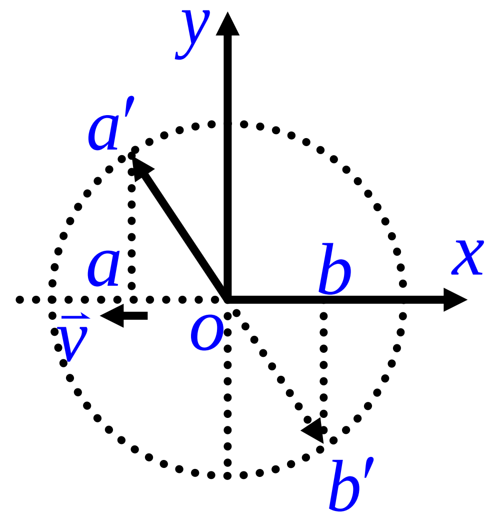
例2：根据运动曲线确定相位

例2、已知物体作简谐运动的图线，试根据图线写出其振动方程





解：旋转矢量法



初相的确定：$t=0$ 时质点位于 a 点向 x 轴负方向运动，则对应的旋转矢量位于 a' 位置，所以初相位 $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$

角频率的确定：$t=2s$ 时，质点位于 b 点向 x 轴正方向，对应的旋转矢量位于 b' 位置，可见矢量旋转 $\Delta\varphi=\pi$，则角频率为

$$\omega=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{\pi}{2}$$

$$x=0.04\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{2\pi}{3}\right)\quad（\mathrm{SI}）$$