chp 7.

1. 设总体X的分布律为 $f(x,\theta)=\theta^{2-x}(1-\theta)^{x-1}$, $x=1,2$.

$(X_1,\cdots,X_n)$是来自总体X的容量为n的简单随机样本,求:

X	1	2
P	θ	$1-\theta$

① θ的矩估计量$\hat{\theta}_1$; ② θ的最大似然估计量$\hat{\theta}_L$.

解: ① $\overline{X}=EX=\theta+2(1-\theta)=2-\theta$ $\quad\therefore\ \hat{\theta}=2-\overline{X}$.

② $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta^{2-X_i}(1-\theta)^{X_i-1}$

$\Rightarrow \ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\left[(2-X_i)\ln\theta+(X_i-1)\ln(1-\theta)\right]$

$\Rightarrow \dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\sum_{i=1}^{n}\left[(2-X_i)\dfrac{1}{\theta}-(X_i-1)\dfrac{1}{1-\theta}\right]=\dfrac{1}{\theta}\left[2n-\sum_{i=1}^{n}X_i\right]-\dfrac{1}{1-\theta}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i-n\right]=$

$\Rightarrow \hat{\theta}_L=2-\overline{X}$.

3. 设总体X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)(x-1)^{\theta}, & 1<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

其中$\theta>-1$是未知常数,$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体X的容量为n的简单随机样本,

① θ的矩估计量$\hat{\theta}$;

② θ的最大似然估计量$\hat{\theta}_L$.

解: ① $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_1^2(\theta+1)x(x-1)^{\theta}dx=\int_1^2 x\,d(x-1)^{\theta+1}$

$=x(x-1)^{\theta+1}\Big|_1^2-\int_1^2(x-1)^{\theta+1}dx=2-\dfrac{1}{\theta+2}(x-1)^{\theta+2}\Big|_1^2=2-\dfrac{1}{\theta+2}$

$\therefore\ \overline{X}=2-\dfrac{1}{\theta+2}\quad\Rightarrow\quad\hat{\theta}=\dfrac{1}{2-\overline{X}}-2=\dfrac{2\overline{X}-3}{2-\overline{X}}$.

② $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)(X_i-1)^{\theta}\Rightarrow\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1+\theta)+\theta\ln(X_i-1)\right]$

$\Rightarrow\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\sum_{i=1}^{n}\left[\dfrac{1}{1+\theta}+\ln(X_i-1)\right]=\dfrac{n}{1+\theta}+\ln(X_1-1)\cdots(X_n-1)=0$

$\therefore\ \hat{\theta}_L=-\dfrac{n}{\ln(X_1-1)\cdots(X_n-1)}-1$

9. 设总体 X 的分布律为

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

，$(X_1,\cdots,X_n)$是来自总体 X 的容量为 n 的简单随机样本，N_1、N_2 和 N_3 分别为样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 中取 1，2 和 3 的个数，求：

① θ 的矩估计量；② θ 的最大似然估计量 $\hat\theta_L$；

③ 讨论 $\hat\theta_L$ 是否是 θ 的无偏估计，证明你的结论.

解：① $\bar X = EX = \theta^2 + 4\theta(1-\theta) + 3(1-\theta)^2 = 3-2\theta$ $\quad\therefore \hat\theta = \dfrac{3-\bar X}{2}$

$\because \bar X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}[N_1+2N_2+\cdots$

而 $N_1+N_2+N_3=n$

$\therefore \hat\theta$ 亦可表为 $\dfrac{2N_1+N\cdots}{2n}$

或 $1-\dfrac{N_2+2\cdots}{2n}$

② $L(\theta) = [P(X_i=1)]^{N_1}[P(X_j=2)]^{N_2}[P(X_k=3)]^{N_3}$

$= \theta^{2N_1}[2\theta(1-\theta)]^{N_2}(1-\theta)^{2N_3} = 2^{N_2}\theta^{2N_1+N_2}(1-\theta)^{N_2+2N_3}$

$\Rightarrow \ln L(\theta) = N_2\ln 2 + (2N_1+N_2)\ln\theta + (N_2+2N_3)\ln(1-\theta)$

$\therefore \dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \dfrac{2N_1+N_2}{\theta} - \dfrac{N_2+2N_3}{1-\theta} = 0 \quad \therefore \hat\theta_L = \dfrac{2N_1+N_2}{2(N_1+N_2+N_3)} = \dfrac{2N_1+N_2}{2n}$

③ $E\hat\theta_L = E\left(\dfrac{2N_1+N_2}{2n}\right) = E\left(\dfrac{3n-(N_1+2N_2+3N_3)}{2n}\right) = E\left(\dfrac{3-\frac{1}{n}(N_1+2N_2+3N_3)}{2}\right) = E\left(\dfrac{3-\bar X}{2}\right)$

$= \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}E\bar X = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}EX = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}(3-2\theta) = \theta \Rightarrow \hat\theta_L$ 是 θ 的无偏估计.

13. 总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$ $(X_1,\cdots,X_n)$是来自该总体 X 的容量为 n 的简单随机样本，$\hat\theta_1 = \bar X$，$\hat\theta_2 = n\min\{X_1,\cdots,X_n\}$，证明：

① $\hat\theta_1$，$\hat\theta_2$ 都是 θ 的无偏估计量；

② $\hat\theta_1$ 比 $\hat\theta_2$ 有效.

解：① $E\hat\theta_1 = E\bar X = EX = \int_0^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx \overset{\frac{x}{\theta}=t}{=\!=} \theta\int_0^{+\infty} t e^{-t}dt = \theta\Gamma(2) = \theta$

$\therefore \hat\theta_1$ 是 θ 的无偏估计量.

$E\hat\theta_2 = E(n\min\{X_1,\cdots,X_n\}) = nE(\min\{X_1,\cdots,X_n\})$

而 $F_{\min\{X_1,\cdots,X_n\}}(y) = P(\min\{X_1,\cdots,X_n\}\le y) = 1-P(\min\{X_1,\cdots,X_n\}>y) = 1-P(X_1>y, X_2>y,\cdots,X_n>y)$

$= 1-P(X_1>y)P(X_2>y)\cdots P(X_n>y) = 1-[1-P(X\le y)]^n$

$= 1-[1-F_X(y)]^n$

$\therefore f_{\min\{X_1,\cdots,X_n\}}(y) = +n[1-F_X(y)]^{n-1}f_X(y)$

又 $F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} f(x)dx = \begin{cases} 0, & y\le 0 \\ \int_0^y \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx = 1-e^{-\frac{y}{\theta}}, & \text{当 } y>0 \text{ 时} \end{cases}$

因此 $E\hat{\theta}_2 = nE(\min\{X_1,\cdots,X_n\}) = n\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot n[1-F_X(y)]^{n-1}f_X(y)dy$

$= n^2\int_0^{+\infty} y\frac{1}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}}[1-1+e^{-\frac{y}{\theta}}]^{n-1}dy = \theta\int_0^{+\infty}\frac{ny}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}n}d\frac{ny}{\theta} \xlongequal{\frac{ny}{\theta}=t} \theta\int_0^{+\infty} t e^{-t}dt$

$= \theta\Gamma(2) = \theta$

$\Rightarrow \hat{\theta}_2$ 是 θ 的无偏估计.

② $D\hat{\theta}_1 = D\bar{X} = \frac{1}{n}DX$

而 $EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx = \theta^2\int_0^{+\infty}(\frac{x}{\theta})^2e^{-\frac{x}{\theta}}d(\frac{x}{\theta}) \xlongequal{\frac{x}{\theta}=t} \theta^2\int_0^{+\infty}t^2e^{-t}dt = \Gamma(3)\theta^2 = 2\theta^2$

$\therefore DX = EX^2-(EX)^2 = 2\theta^2-\theta^2 = \theta^2$

$\Rightarrow D\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}(2\theta^2-\theta^2) = \frac{1}{n}\theta^2$

$D\hat{\theta}_2 = D(n\min\{X_1,\cdots,X_n\}) = n^2D(\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\})$ 记 $T=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

$ET^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}t^2f_T(t)dt = \int_0^{+\infty}t^2\cdot n\frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}}[1-1+e^{-\frac{t}{\theta}}]^{n-1}dt$

$= \int_0^{+\infty}\frac{n}{\theta}t^2e^{-\frac{n}{\theta}t}dt \xlongequal{\frac{n}{\theta}t=z} \int_0^{+\infty}\frac{\theta^2}{n^2}z^2e^{-z}dz = \frac{\theta^2}{n^2}\Gamma(3) = \frac{2\theta^2}{n^2}$

从而 $DT = \frac{2\theta^2}{n^2}-(ET)^2 = \frac{2}{n^2}\theta^2-(\frac{\theta}{n})^2 = \frac{\theta^2}{n^2}$

$\therefore D\hat{\theta}_2 = n^2\cdot\frac{\theta^2}{n^2} = \theta^2$

$\because D\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\theta^2 \le D\hat{\theta}_2 = \theta^2$ $\therefore \hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

17. 设某车间生产的螺杆的直径 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，今从中随机地抽取5只螺杆测得直径为(单位：mm)

22.3, 21.5, 22.0, 21.8, 21.4

① 已知 $\sigma=0.3$，求 μ 的置信度为95%的置信区间；

② σ 未知，求 μ 的置信度为95%的置信区间.

解：① $(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}})$

而 $n=5$, $\sigma=0.3$, $u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0.025} = 1.96$, $\bar{X} = \frac{1}{5}(22.3+21.5+22.0+21.8+21.4) = 21.8$

$\therefore$ 所求区间为 $(21.5370, 22.0630)$

② $\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$

而 $\bar{x}=21.8$, $n=5$, $t_{0.025}(4)=2.776$,

$S^2=\frac{1}{4}\left[22.3^2+21.5^2+22.0^2+21.8^2+21.4^2-5\bar{x}^2\right]=0.135 \Rightarrow S=0.3674$

∴所求区间为 $(21.3439,\ 22.2561)$

20. 某学校有A、B两个班参加模拟考试，A班10人，B班12人，模拟考试的成绩如下：

$\begin{cases} \text{A班}: 70,68,65,68,69,65,64,66,63,71 \\ \text{B班}: 68,65,68,69,68,67,63,70,59,64,68,62 \end{cases}$

设这两个班的模拟考试成绩分别服从正态分布 $N(\mu_1,6)$, $N(\mu_2,11)$，且相互独立，求两个班的平均成绩差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为95%的置信区间.

解: $\left(\bar{x}-\bar{y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}},\ \bar{x}-\bar{y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\right)$

而 $m=10$, $\sigma_1^2=6$; $\bar{x}=66.9$ | $u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$

$n=12$, $\sigma_2^2=11$; $\bar{y}=65.9167$

∴所求区间为 $(-1.4305,\ 3.3971)$

22. 研究由机器A和机器B生产的钢管内径，随机地抽取机器A生产的钢管18根，测得样本方差 $S_1^2=0.34$，随机地抽取机器B生产的钢管13根，测得样本方差 $S_2^2=0.29$，由机器A和机器B生产的钢管内径分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且相互独立，求两机器生产的钢管内径方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信度90%的置信区间.

解: $\left(\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}\frac{S_{1m}^2}{S_{2n}^2},\ \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}\frac{S_{1m}^2}{S_{2n}^2}\right)$

$m=18$, $S_{1m}^2=0.34$, $F_{0.05}(17,12)=2.5828$

$n=13$, $S_{2n}^2=0.29$, $F_{0.95}(17,12)=0.4201$

∴所求区间为 $(0.4539,\ 2.7908)$

ch 8.

2. 设某元件的使用寿命 X 服从正态分布 $N(\mu, 100^2)$，要求平均寿命不低于1000小时元件才合格，现从一批元件中随机地抽取了25个元件测得平均寿命为 $\bar{x}=950$ 小时，试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下判定这批元件是否合格？即检验假设 $H_0: \mu \geq 1000 \longleftrightarrow H_1: \mu < 1000$.

解：由题意，可知拒绝域为 $\left\{(x_1, \cdots, x_n) \middle| \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leq -u_\alpha\right\}$，其中 $\mu_0=1000, \sigma=100, n=2$

$u_{0.05}=1.645$. 故拒绝域为 $\left\{(x_1, \cdots, x_{25}) \middle| \bar{x} \leq 967.1\right\}$，本题中 $\bar{x}=950 \leq 967.1$

即样本落入拒绝域中，因而拒绝 H_0，即判定这批元件不合格.

3. 解：由题意即检验假设 $H_0: \mu=70 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq 70$.

而此时拒绝域为 $\left\{(x_1, \cdots, x_n) \middle| \left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{s}\sqrt{n}\right| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$，其中 $n=36$. $\mu_0=70, \alpha=0.05$,

$t_{0.025}(35)=2.030$. 故拒绝域为 $\left\{(x_1, \cdots, x_{36}) \middle| \left|\frac{\bar{x}-70}{s}\right| \geq \frac{2.03}{6} \approx 0.3383\right\}$.

本题中 $\bar{x}=66.5, s=15$ 可知 $\left|\frac{\bar{x}-70}{s}\right|=0.2333 < 0.3383$，即样本不在拒绝域中

因而接受 H_0，即判定这次考试全体考生的平均成绩为70分.

5. 解：由题意可知拒绝域为 $\left\{(x_1, \cdots, x_n) \middle| \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \text{或} \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$ 其中 $n=15, \alpha=0.$

$\sigma_0^2=0.0004$, $\chi^2_{0.025}(14)=26.119$, $\chi^2_{0.975}(14)=5.629$. 故拒绝域为 $\{(x_1, \cdots, x_{15}) | s^2 \leq 0.000$

或 $s^2 \geq 0.00075\}$. 本题中 $s^2=0.023$，∴ 拒绝 H_0，即认为 σ^2 与 0.0004 有显著差异。

6. 解：由题意可知拒绝域为 $\left\{(x_1, \cdots, x_n) \middle| \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_\alpha(n-1)\right\}$ 其中 $n=10$, $\sigma_0^2=0.1$

$\chi^2_{0.05}(9)=16.919$ (12.321). 故拒绝域为 $\left\{(x_1, \cdots, x_{10}) \middle| s^2 \geq 0.1880\right\}$. 本题中 $s^2=0.1369$，

样本没有落入拒绝域，因而判定该运动员跳远成绩的总体方差 σ^2 为 0.1

7. 解：由题意即检验假设 $H_0: \mu_1=\mu_2$; $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.

此时拒绝域为 $\left\{(x_1, \cdots, x_m; y_1, \cdots, y_n) \middle| \frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\right\}$，其中 $m=8, n=10, t_{0.025}(16)=2.1$

$s_w=\sqrt{\frac{s_{1m}^2(m-1)+(n-1)s_{2n}^2}{m+n-2}}$，本题中 $\bar{x}=35, \bar{y}=34.9$, $s_{1m}^2=2.8571$ ($(m-1)s_{1m}^2=20$); $(n-1)s_{2n}^2=14.9$

$s_{2n}^2 \approx 1.6556$

$\therefore s_w=1.4770$, $\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=0.4743 \Rightarrow |\bar{x}-\bar{y}|=0.1 < s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\, t_{\frac{\alpha}{2}}(16) \approx 1.4851$

从而判定新旧方法对成鸡的体重无显著影响.

9. 某大型养鸡场想试验白鸡和黑鸡的重量是否有差异，随机地抽取11只及10只称得重量如下：

白鸡：5.4　7.1　9.1　8.2　9.1　8.1　7.4　7.1　8　9.1　6.1

黑鸡：8.6　9.1　9　9.6　8.4　8.1　8　8.1　9.2　7.4

假设白鸡和黑鸡的体重分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 试在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，检验假设 $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

解：$\bar{X} = 7.7$　$\bar{Y} = 8.55$　$m = 11$　$n = 10$

$S_m^2 = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{11} (x_i - \bar{x})^2 = 1.5040$

$S_n^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = 0.4539$

参见书 P_{256} 表 8-4.

$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$　　$F = \frac{S_m^2}{S_n^2} \sim F(m-1, n-1)$

统计量　$f = \frac{S_m^2}{S_n^2} \approx 3.3135 > F_\alpha(m-1, n-1) = F_{0.05}(10, 9) = 3.14$

$\Rightarrow$ 样本观察值落入拒绝域中.

(Ch 9)

1. 设 $\{\xi(t): t\in(-\infty,+\infty)\}$ 是一随机过程，其中 $\xi(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$.
A, B 是相互独立同服从均值为0，方差为 a^2 的正态分布 $N(0,a^2)$，求：
<1>. $\xi(t)$ 的一维分布函数 $F(x;t)$；
<2> $\xi(t)$ 的相关函数 $R_\xi(s,t)$.

解：① $\forall t\in(-\infty,+\infty)$ $\cos\omega t$, $\sin\omega t$ 为常数.
而 $A\sim N(0,a^2)$, $B\sim N(0,a^2)$ 且 A, B 相互独立.
$\therefore \cos\omega t\cdot A+\sin\omega t\cdot B\sim N(0,a^2)$ 即 $\xi(t)\sim N(0,a^2)$.
从而 $F(x;t)=P(\xi(t)\le x)=P\left(\frac{\xi(t)-0}{a}\le\frac{x-0}{a}\right)=\Phi\left(\frac{x}{a}\right)$.

② $\xi(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$
$\xi(s)=A\cos\omega s+B\sin\omega s$
$\Rightarrow \xi(s)\cdot\xi(t)=A^2\cos\omega t\cdot\cos\omega s+B^2\sin\omega t\cdot\sin\omega s+AB(\sin\omega t\cdot\cos\omega s+\cos\omega t\cdot\sin$

$\therefore R_\xi(s,t)=E[\xi(s)\cdot\xi(t)]$
$=\cos\omega t\cdot\cos\omega s\cdot E(A^2)+\sin\omega t\cdot\sin\omega s\cdot E(B^2)+\sin\omega(t+s)\cdot E(AB)$
$(E(A^2)=Var(A)+E^2(A)=a^2,\ E(B^2)=a^2\quad E(AB)=E(A)\cdot E(B)=0)$
$=a^2\cdot\cos[\omega(s-t)]$

2. 利用掷一枚硬币的随机试验定义一随机过程如下：
$$\xi(t)=\begin{cases}\cos\pi t, & 出现H\\ 2t, & 出现T\end{cases}\qquad -\infty<t<+\infty.$$
其中 H 表示正面朝上、T 表示反面朝上. $P(H)=P(T)=\frac{1}{2}$. 求 $\xi(t)$ 的二维分布函数 $F(x,y;\frac{1}{2},1)$

解：$\xi(\frac{1}{2})=\begin{cases}0, & 出现H\\ 1, & 出现T\end{cases}$ $\quad\xi(1)=\begin{cases}-1 & 出现H\\ 2 & 出现T\end{cases}$

$\xi(\frac{1}{2})$ 与 $\xi(1)$ 此二随机变量的联合分布律为.

$\xi(\frac{1}{2})$ \ $\xi(1)$	-1	2
0	$\frac{1}{2}$	0
1	0	$\frac{1}{2}$

二维分布函数
$$F(x,y;\tfrac{1}{2},1)=P(\xi(\tfrac{1}{2})\le x;\ \xi(1)\le y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0\le x<1 且 y\ge -1 或 x\ge 1 且 y<2.\\ 1 & x\ge 1 且 y\ge 2\\ 0 & 其它.\end{cases}$$

6、设 $\{X(t): t\in(-\infty,+\infty)\}$ 是一随机过程，其中 $X(t)=A\sin(\omega t+\Theta)$

A 与 Θ 是相互独立的随机变量，A 在区间 $(-1,1)$ 上服从均匀分布 $U(-1,1)$，$P(\Theta=\pm\frac{\pi}{4})$

求 $X(t)$ 的均值函数 $m_X(t)$ 和相关函数 $R_X(s,t)$

解：①、$\forall t\in(-\infty,+\infty)$. ∵ A 与 Θ 相互独立. ∴ A 与 $\sin(\omega t+\Theta)$ 相互独立

$m_X(t)=E[X(t)]=EA\cdot E\sin(\omega t+\Theta)=0\cdot E\sin(\omega t+\Theta)]=0$

②、$R_X(s,t)=E[X(s)\cdot X(t)]=E[\underbrace{A^2\cdot \sin(\omega t+\Theta)\sin(\omega s+\Theta)}_{\text{相互独立}}]=E(A^2)\cdot E[\sin(\omega t+\Theta)\sin(\omega s+\Theta$

而 $E(A^2)=DA+(EA)^2=\frac{2^2}{12}+0^2=\frac{1}{3}$

$E[\sin(\omega t+\Theta)\sin(\omega s+\Theta)]=\frac{1}{2}\sin(\omega t+\frac{\pi}{4})\sin(\omega s+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}\sin(\omega t+\frac{\pi}{4})\sin(\omega s-\frac{\pi}{4})$

$=-\frac{1}{4}[\cos(\frac{\pi}{2}+\omega(t+s))-\cos(\omega(t-s))]-\frac{1}{4}[\cos(\omega(t+s)-\frac{\pi}{2})-\cos\omega(t$

$=\frac{1}{4}\sin\omega(t+s)+\frac{1}{2}\cos\omega(t-s)-\frac{1}{4}\sin\omega(t+s)$

$=\frac{1}{2}\cos\omega(t-s)$

∴ $R_X(s,t)=\frac{1}{6}\cos\omega(t-s)$

7. 设随机过程 $Z(t)=X+Yt$, $-\infty<t<+\infty$ 其中 X, Y 是两个随机变量. 若已知 (X,Y) 的协方差矩阵为 $\begin{pmatrix} a_1^2 & r \\ r & a_2^2 \end{pmatrix}$ 求 $Z(t)$ 的协方差函数

解：$\forall s,t\in(-\infty,+\infty)$

$m_Z(s)=EZ(s)=E(X)+sE(Y)$，$m_Z(t)=EX+tEY$

$Z(s)\cdot Z(t)=X^2+tsY^2+sXY+tXY$

∴ $R_Z(s,t)=E[Z(s)Z(t)]=E(X^2)+tsE(Y^2)+sE(XY)+tE(XY)$

$\Rightarrow Cov_Z(s,t)=R_Z(s,t)-m_Z(s)m_Z(t)$

$=EX^2+tsEY^2+(s+t)EXY-[(EX)^2+st(EY)^2+(s+t)(EX\cdot EY)]$

$=EX^2-(EX)^2+ts[EY^2-(EY)^2]+(s+t)[E(XY)-EX\cdot EY]$

$=a_1^2+tsa_2^2+(s+t)r$

9. 设 $\{N(t),t\ge0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，试求：$P(N(t-d)=j\mid N(t)=k)$，$d>0$.

解：$\forall t\ge0 \quad N(t)\sim P(\lambda t)$

$\forall k=0,1,2,\cdots$

$$P(N(t-d)=j\mid N(t)=k)$$

$$=\frac{P(N(t-d)=j)\,P(N(t)=k\mid N(t-d)=j)}{P(N(t)=k)}$$

$$=\frac{P(N(t-d)=j)}{P(N(t)=k)}\,P(N(t-d,t)=k-j)$$

$$=\frac{\frac{((t-d)\lambda)^j}{j!}e^{-\lambda(t-d)}}{\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}}\cdot\frac{(\lambda d)^{k-j}}{(k-j)!}e^{-\lambda d}$$

$$=\frac{k!}{j!\,(k-j)!}\,\frac{(t-d)^j d^{k-j}}{t^k}$$

$$=C_k^j\left(1-\frac{d}{t}\right)^j\left(\frac{d}{t}\right)^{k-j} \qquad (j=0,1,2,\cdots k)$$

10. 移动通信系统的某小区基站的业务到达次数 $\{N(t),t\ge0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，每一个到达业务能被基站接受的概率为 p，试求在时间 $[0,t]$ 内被成功接受的业务数 $\xi(t)$ 的一维概率分布律.

解：$\forall k=0,1,2\cdots$

$$P(\xi(t)=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}P(N(t)=n)\,P(\xi(t)=k\mid N(t)=n)$$

$$=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\cdot C_n^k p^k q^{n-k}=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda t}p^k(\lambda t)^k(\lambda t q)^{n-k}}{k!\cdot(n-k)!}$$

$$=\frac{(\lambda t p)^k}{k!}e^{-\lambda t}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t q)^l}{l!}=\frac{(\lambda t p)^k}{k!}e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda t q}$$

$$=\frac{(\lambda t p)^k}{k!}e^{-\lambda t p} \qquad \text{i.e. } \xi(t)\sim P(\lambda t p)$$

15. 设 $\{W(t), t\ge 0\}$ 是参数为 a^2 的维纳过程，$\xi(t)=W(t)-aW(t-h)$，$t\ge 0$. 其中 $h>0$ 是常数
求：① $\xi(t)$ 的一维概率密度函数 ② $\xi(t)$ 的相关函数.

解：① $\xi(t)=W(t)-W(t-h)+(1-a)[W(t-h)-W(0)]$ "$t\ge h$"

而 $W(t)-W(t-h)$ 与 $W(t-h)-W(0)$ 相互独立.

且 $W(t)-W(t-h)\sim N(0,\sigma^2 h)$

$W(t-h)-W(0)\sim N(0,\sigma^2(t-h))$

$\therefore \xi(t)\sim N(0,\sigma^2 h+(1-a)^2 a^2(t-h)) = N(0,\sigma^2[a^2(t-h)-2a(t-h)+t])$

$$f_{\xi(t)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{a^2(t-h)-2a(t-h)+t}}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2[a^2(t-h)-2a(t-h)+t]}}$$

② $C_\xi(s,t)=E(\xi(s)\xi(t))-E(\xi(s))E(\xi(t))$ $\because E\xi(t)=0=E\xi$

$=E(\xi(s)\xi(t))$

而 $\xi(s)\xi(t)=W(s)W(t)-aW(s-h)W(t)-aW(s)W(t-h)+a^2W(s-h)W(t-h)$

而 $\{W(t),t\ge 0\}$ 是齐次增量过程

$\therefore C_W(s,t)=\sigma^2\min\{s,t\}=E(W(s)W(t))-EW(s)\cdot EW(t)$

$=E(W(s)\cdot W(t))-0\cdot 0=E(W(s)W(t))$

从而有 $C_\xi(s,t)=\sigma^2\min\{s,t\}-a\sigma^2\min\{s-h,t\}-a\sigma^2\min\{s,t-h\}+a^2\min\{s-h,t-h\}$

"$s,t\ge h$"

16. 设 $\{W(t),t\ge 0\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程，求：① $\xi(t)=W(t)+g(t)$ （$g(t)$ 是普通函数）
②. $\xi(t)=\sigma^2 W(\frac{t}{a^2})$ 的协方差函数

解：①由例 9.3.6 知 $C_\xi(s,t)=C_W(s,t)=\sigma^2\min\{s,t\}$

②. $W(t)\sim N(0,\sigma^2 t)$

$\therefore W(\frac{t}{a^2})\sim N(0,\sigma^2\frac{t}{a^2})$

$\Rightarrow DW(\frac{t}{a^2})=\sigma^2\frac{t}{a^2}$

$\Rightarrow D[a^2W(\frac{t}{a^2})]=a^2\sigma^2 t$

$\xi(t)$ s.t. $\xi(0)=0$ 齐次独立增量过程.

$\therefore C_\xi(s,t)=D_\xi(\min\{t,s\})=a^2\sigma^2\min\{t,s\}$

2. 从数 $1,2,\cdots,N$ 中任取一数，记为 ξ_1；再从数 $1,2,\cdots,\xi_1$ 中任取一数，记为 ξ_2，如此继续从 $1,\cdots,\xi_{n-1}$ 中任取一数，记为 ξ_n；说明 $\{\xi_n, n\geq 1\}$ 构成一齐次马氏链，并写出其状态空间和一步转移概率矩阵。

解：① $I=\{1,2,\cdots,N\}$.

② $P(\xi_{n+1}=j\mid \xi_0=i_0,\xi_1=i_1,\cdots,\xi_n=i_n)=\begin{cases}0 & j>i_n\\ \frac{1}{i_n} & j\leq i_n\end{cases}$

$=P(\xi_{n+1}=j\mid \xi_n=i_n)$　　∴ 是马氏链.

且 $P(\xi_{n+1}=j\mid \xi_n=i)=\begin{cases}0 & j>i\\ \frac{1}{i} & j\leq i\end{cases}$

$\quad //$

$P(\xi_2=j\mid \xi_1=i)$　　由 Theorem 10.2 可知 其为齐次的

③ $P=(p_{ij})=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N} & \frac{1}{N}\end{bmatrix}$

5 袋中有5个黑球，5个白球，重复做下列试验：从袋中随机取一个球，若球是白色的则放回袋中；若是黑的，则不放回袋中；设 ξ_n 是第 n 次取球后袋中所剩下黑球个数，试说明 $\{\xi_n, n\geq 1\}$ 构成一齐次马氏链。

①.求出它的一步转移概率矩阵；②直接求两步转移概率 $p_{32}(2)$

解，$\{\xi_n, n\geq 1\}$ 的状态空间 $I=\{5,4,3,2,1,0\}$

$P\{\xi_n=j\mid \xi_1=i_1,\xi_2=i_2,\cdots,\xi_{n-1}=i\}=\begin{cases}\frac{5}{5+i} & j=i\\ \frac{i}{5+i} & j=i-1\\ 0 & 其他\end{cases}$

$=P\{\xi_n=j\mid \xi_{n-1}=i\}$

∴ $\{\xi_n, n\geq 1\}$ 构成一齐次马氏链．　　"结果与 n 无关"

① $P(1)=$
$$\begin{array}{c|c} \xi_n \backslash \xi_{n+1} & \begin{matrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{matrix}\\ \begin{matrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\end{matrix} & \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2/7 & 5/7 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3/8 & 5/8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4/9 & 5/9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/10 & 5/10\end{bmatrix}\end{array}$$

② 设 Y_n 表示第 n 次取球情况 $Y_n=\begin{cases}0 & 取到白球\\ -1 & 取到黑球\end{cases}$

则 $\xi_{n+1}=\xi_n+Y_{n+1}$

$p_{32}(2)=P(\xi_{n+2}=2|\xi_n=3)=P(\xi_{n+1}+Y_{n+2}=2|\xi_n=3)=P(\xi_n+Y_{n+1}+Y_{n+2}=2|\xi_n=3)$

$=P(Y_{n+1}+Y_{n+2}=-1)=P(Y_{n+1}=0,Y_{n+2}=-1)+P(Y_{n+1}=-1,Y_{n+2}=0)$

$=P(Y_{n+1}=0)P(Y_{n+2}=-1|Y_{n+1}=0)+P(Y_{n+1}=-1)P(Y_{n+2}=0|Y_{n+1}=-1)$

$=\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{225}{448}$

球8(黑3)　　球7(黑2)

n　　$n+1$　　$n+2$.

8. 设任意相继两天中，雨天转晴天的概率为1/3，晴天转雨天的概率为$\frac{1}{2}$. 任一天的晴或雨互为逆事件. 以0表示晴天状态，以1表示雨天状态. 若某天的天气状况只与昨天的天气状态有关，与前天的天气状况无关. 设 ξ_n 是第 n 天的状态，试写出 $\{\xi_n, n\geq 1\}$ 的一步转移概率矩阵. 又若已知5月1日为晴天，问5月3日为晴天，5月5日为雨天的概率各为多少？

解：由题知 $\forall n\geq 1$，$P(\xi_{n+1}=0|\xi_n=0)=\frac{1}{2}$　　$P(\xi_{n+1}=1|\xi_n=1)=\frac{2}{3}$

$P(\xi_{n+1}=1|\xi_n=0)=\frac{1}{2}$　　$P(\xi_{n+1}=0|\xi_n=1)=\frac{1}{3}$

且 $\{\xi_n, n\geq 1\}$ 是一齐次马氏链，从而 $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$.

设5月1日为第 n 天，则欲求 $P(\xi_{n+4}=1|\xi_n=0)$ 及 $P(\xi_{n+2}=0|\xi_n=0)$

$P(2)=P^2=\begin{bmatrix}\frac{5}{12} & \frac{7}{12}\\ \frac{7}{18} & \frac{11}{18}\end{bmatrix}$　　$\therefore P(\xi_{n+2}=0|\xi_n=0)=\frac{5}{12}$

$P(4)=P^4=\begin{bmatrix}\frac{25}{144}+\frac{49}{12\times 18} & \frac{35}{144}+\frac{77}{12\times 18}\\ \frac{35}{12\times 18}+\frac{77}{18^2} & \frac{49}{12\times 18}+\frac{121}{18^2}\end{bmatrix}$

$\therefore P(\xi_{n+4}=1|\xi_n=0)=\frac{35}{144}+\frac{77}{12\times 18}=\frac{259}{432}$.

9. 在一计算机系统中，每一循环具有误差的概率取决于先前一个循环是否具有误差. 以0表示误差状态，以1表示无误差状态. 设状态的一步转移概率矩阵P为

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$}} \\ 1 & & \end{array}$$

试说明相应的齐次马氏链是遍历的，并求其平稳分布：

① 用定义求；

② 利用遍历性定理求.

解：① $|\lambda E - P| = (\lambda - \frac{1}{4})(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{4},\ \lambda_2 = 1$

P关于$\lambda_1 = \frac{1}{4}$的特征向量 $\xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$，$P$关于$\lambda_2 = 1$的特征向量 $\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\therefore P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow P(n) = P^n = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -(\frac{1}{4})^n & 1 \\ 2(\frac{1}{4})^n & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + (\frac{1}{4})^n & 1 - (\frac{1}{4}) \\ 2 - 2(\frac{1}{4})^n & 1 + 2(\end{bmatrix}$$

$$\lim_{n \to \infty} P(n) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

（齐次马氏链是遍历的且）$\therefore$ 平稳分布 $\pi = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

② 状态空间 $I = \{0, 1\}$ 是有限的
$P(1) = P$ 的每一个元素均为正数 $\Big\}$ $\Rightarrow$ 齐次马氏链是遍历的.

设 $\pi = (x_1, x_2)$

则由 $\pi P = \pi$ 及 $x_1 + x_2 = 1$ $(x_1 > 0, x_2 > 0)$ 可得 $x_1 = \frac{2}{3}$，$x_2 = \frac{1}{3}$

即平稳分布 $\pi = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.