



# 第2章 逻辑代数基础

## 第三讲：逻辑函数化简

## 2.2 逻辑函数及描述方法

**逻辑函数：**输出变量相对于输入变量的逻辑关系。

描述方法 {  
真值表  
逻辑表达式  
逻辑电路图  
卡诺图

例 判奇电路：三个输入信号中没有或仅有奇数个高电平时,输出为高电平。否则,输出为低电平。

A、B、C——输入信号      F——输出信号

“1”——高电平      “0”——低电平

## 2.2.1 逻辑函数式

**逻辑代数式：**把逻辑函数的输入、输出关系写成与、或、非等逻辑运算的组合式。也称为逻辑函数式，通常采用“**与或**”的形式。

**例：**  $F = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + ABC$

**最小项：**若表达式中的乘积包含了所有变量的原变量或反变量，则这一项称为最小项。

**上例中每一项都是最小项。**

**逻辑相邻：**若两个最小项只有一个变量以原、反区别，则称它们逻辑相邻。

**例：**  $\overline{A}\overline{B}C$  与  $\overline{A}B\overline{C}$  逻辑相邻。

**最小项：**在  $n$  变量逻辑函数中，若  $m$  是包含  $n$  个因子的乘项积，而且这  $n$  个变量均以原变量或反变量的形式在  $m$  中出现一次，则称  $m$  为该组变量的最小项。

### 1、二变量的全部最小项

A B	最小项	编号
0 0	$\bar{A} \bar{B}$	$m_0$
0 1	$\bar{A} B$	$m_1$
1 0	$A \bar{B}$	$m_2$
1 1	$A B$	$m_3$

### 2、三变量的全部最小项

A B C	最小项	编号
0 0 0	$\bar{A} \bar{B} \bar{C}$	$m_0$
0 0 1	$\bar{A} \bar{B} C$	$m_1$
0 1 0	$\bar{A} B \bar{C}$	$m_2$
0 1 1	$\bar{A} B C$	$m_3$
1 0 0	$A \bar{B} \bar{C}$	$m_4$
1 0 1	$A \bar{B} C$	$m_5$
1 1 0	$A B \bar{C}$	$m_6$
1 1 1	$A B C$	$m_7$

### 3、四变量的全部最小项

编号为  $m_0 \sim m_{15}$  （略）


$$F = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + ABC$$

逻辑相邻

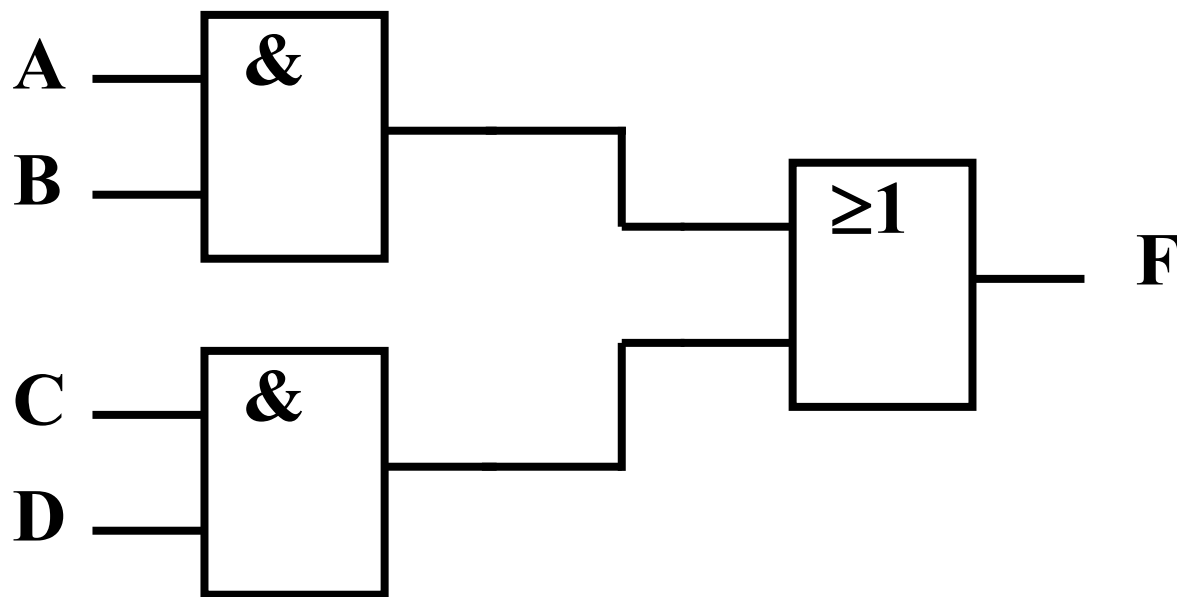
$$\overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} = \overline{A}\overline{C}$$

逻辑相邻的项可以  
合并，消去一个因子



## 2.2.2 逻辑图

把相应的逻辑关系用逻辑符号和连线表示出来，就构成了逻辑图。



$$F=AB+CD$$

### 2.2.3 真值表

将输入、输出的所有可能状态一一对应地列出。

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

**注意：** $n$ 个变量可以有 $2^n$ 个组合，一般按二进制的顺序，输出与输入状态一一对应，列出所有可能的状态。

## 2.2.4 卡诺图

卡诺图的构成：将 $n$ 个输入变量的全部最小项用小方块阵列图表示，并且将**逻辑相邻**的最小项放在相邻的几何位置上，所得到的阵列图就是 $n$ 变量的卡诺图。

卡诺图的每一个方块（最小项）代表一种输入组合，并且把对应的输入组合注明在阵列图的上方和左方。



ABCD=  
0100时函  
数取值

编号为0010的  
单元对应于最  
小项： $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$

只有一  
项不同

函数取0、1  
均可，称为  
**无所谓状态。**

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	0	1
	01	1	0	$\phi$	1
	11	0	$\phi$	0	1
	10	1	1	0	1

四变量卡诺图

A	B	
	0	1
0	1	0
1	0	1

两变量卡诺图

	BC			
	00	01	11	10
A				
0	1	1	0	1
1	1	0	$\phi$	1

三变量卡诺图

有时为了方便，用二进制对应的十进制表示单元格的编号。单元格的值用函数式表示。

BC A	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

$$F(A, B, C) = \Sigma(1, 2, 4, 7)$$

1,2,4,7单元取  
1，其它取0

CD AB	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

四变量卡诺图单  
元格的编号

## 2.2.5 标准表达式

十进制	变量坐标	最小项	最小项符号	函数F	$\overline{F}$
0	000	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$	$m_0$	$f_0$	$\overline{f_0}$
1	001	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$	$m_1$	$f_1$	$\overline{f_1}$
2	010	$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$	$m_2$	$f_2$	$\overline{f_2}$
3	011	$\overline{A} \cdot B \cdot C$	$m_3$	$f_3$	$\overline{f_3}$
4	100	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$	$m_4$	$f_4$	$\overline{f_4}$
5	101	$A \cdot \overline{B} \cdot C$	$m_5$	$f_5$	$\overline{f_5}$
6	110	$A \cdot B \cdot \overline{C}$	$m_6$	$f_6$	$\overline{f_6}$
7	111	$A \cdot B \cdot C$	$m_7$	$f_7$	$\overline{f_7}$

## 2.3 逻辑函数的化简

### 2.3.1 利用逻辑代数的基本公式

➤ 并项法:  $AB + AB' = A$

➤ 吸收法:  $A + AB = A$

➤ 消项法:  $AB + A'C + BC = AB + A'C$

➤ 消因子法:  $A + A'B = A + B$

➤ 配项法:  $A + A = A \quad A + A' = 1$

例1:  $F = A\bar{B}C + \underline{AB\bar{C}} + ABC$  **提出AB**

$$= A\bar{B}C + AB(\bar{C} + C)$$

**=1**

$$= \underline{A\bar{B}C} + AB$$

**提出A**

$$= A(\bar{B}C + B)$$

**反变量吸收**

$$= A(C + B)$$
$$= AC + AB$$

例2:  $F = \overline{\overline{AB}} + \overline{\overline{AB}} \cdot \overline{BC} + \overline{BC}$

$= (AB + \overline{AB}) + (BC + \overline{BC})$  反演

$= AB + \overline{AB}(C + \overline{C})$   
 $+ \overline{BC}(A + \overline{A}) + \overline{BC}$  配项

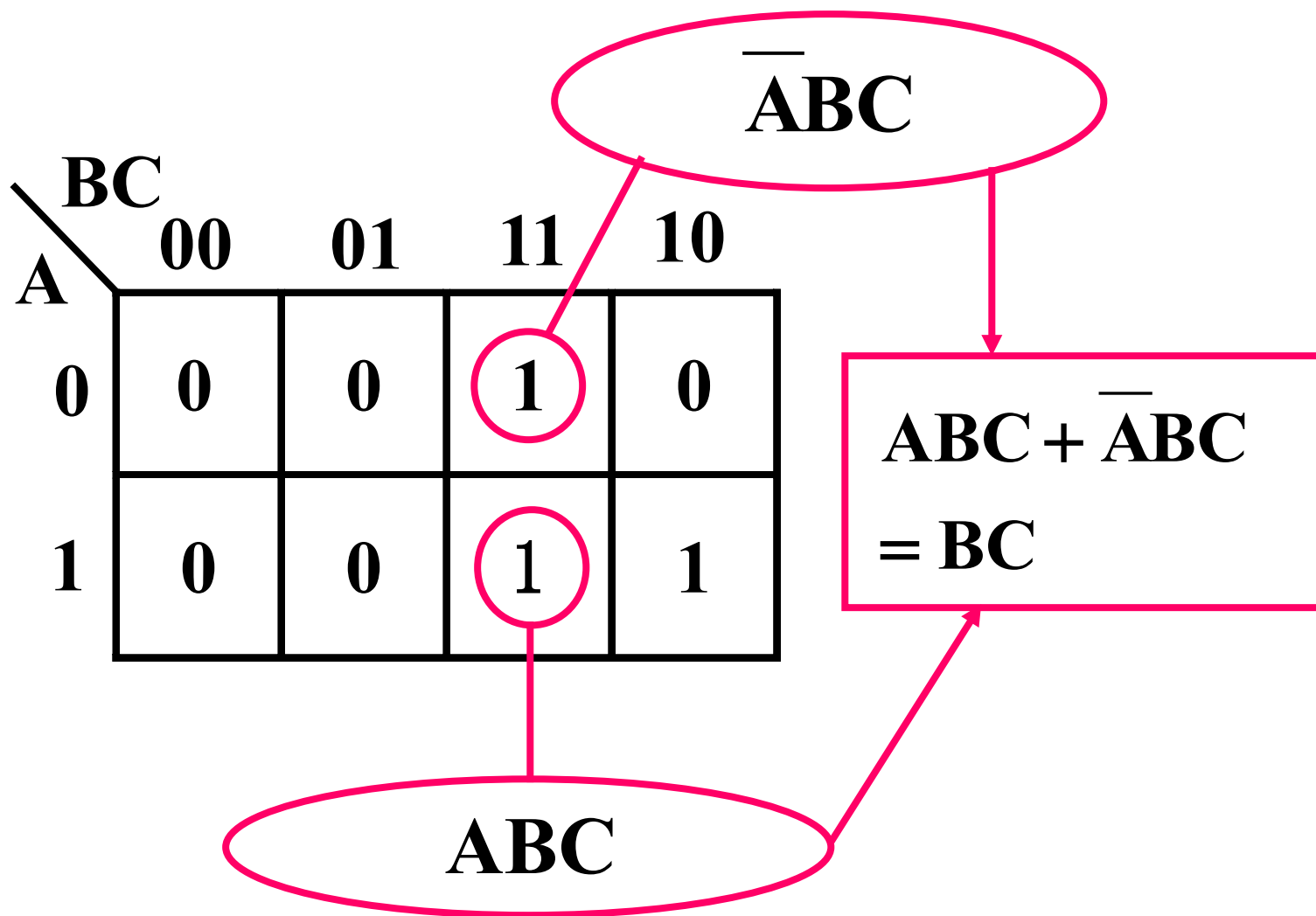
$= \overline{AB} + \overline{AB}BC + \overline{AB}BC$  被吸收

$+ \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{BC}$  被吸收

$= AB + \overline{AC}(\overline{B} + B) + \overline{BC}$

$= AB + \overline{AC} + \overline{BC}$

## 2.3.2 利用卡诺图化简



化简过程:

A \ BC	00	01	11	10
	0	0	1	0
1	0	0	1	1

$$F=AB+BC$$



# 利用卡诺图化简的规则


1. 相邻单元的个数是 $2^N$ 个，并组成矩形时，可以合并。

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	0	0	0
	01	0	0	1	0
	11	0	1	1	0
	10	1	1	1	0
	00	0	0	0	0

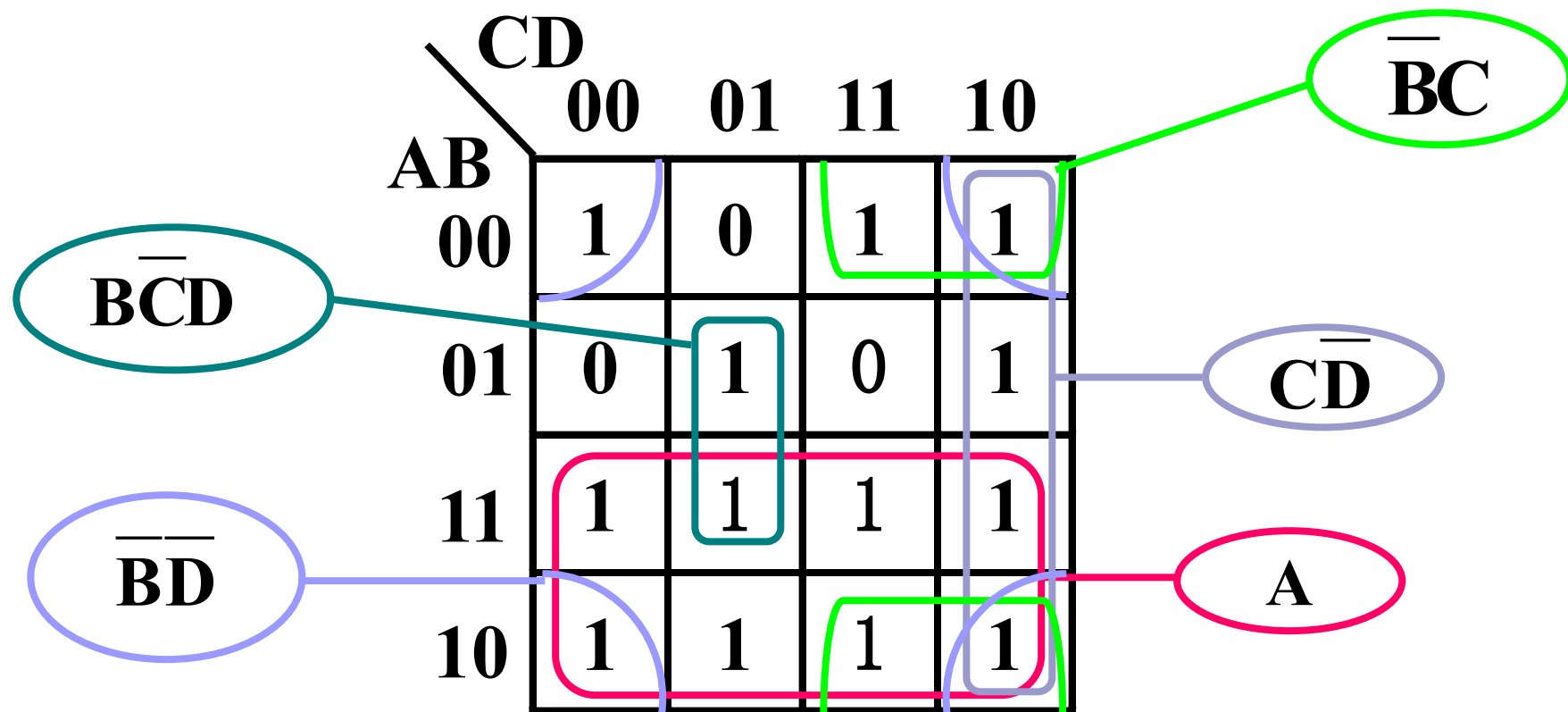
A pink oval labeled **AD** is positioned to the left of the table, with a line pointing to the cell at AB=11, CD=00.

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	0	0	0
	01	0	1	0	0
	11	1	1	0	0
	10	1	0	0	0
	00	0	0	0	0

A blue 'X' is drawn across the table, indicating that the wrap-around rule (adjacency between the first and last columns) is not being applied in this example.

- 
2. 先找面积尽量大的组合进行化简，可以减少每项的因子数。
  3. 各最小项可以重复使用。
  4. 注意利用无所谓状态，可以使结果大大简化。
  5. 所有的1都被圈过后，化简结束。
  6. 化简后的逻辑式是各化简项的逻辑和。

**例1:** 化简  $F(A,B,C,D)=\Sigma(0,2,3,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15)$



$$F = A + \overline{CD} + \overline{BC} + \overline{BD} + \overline{BCD}$$

## 例2：化简

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	1	1
	01	1	1	1	1
	11	1	0	0	1
	10	1	1	1	1

ABD

$$F = \overline{ABD}$$

**例3：** 已知真值表如图，用卡诺图化简。

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	1
1	1	1	1

101状态未给出，即是无所谓状态。

化简时可以将无所谓状态当作1或0，目的是得到最简结果。

BC		00	01	11	10
A					
0		0	0	0	0
1		1	$\phi$	1	1

$\phi$  被认为是1

A

$$F=A$$

#### 例4 化简逻辑函数

$$Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}BCD + A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$$

已知约束条件为

$$\overline{A}BCD + \overline{A}\overline{B}CD + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}CD + ABCD + ABC\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} = 0$$

$AB \backslash CD$		$CD$			
		00	01	11	10
00	0	1	×	0	
01	0	×	1	0	
11	×	0	×	×	
10	1	×	0	×	

$$Y = \overline{A}D + A\overline{D}$$

### 例5 判断一位十进制数是否为偶数。

A B C D	Y	A B C D	Y	说 明
0 0 0 0	1	1 0 0 0	1	
0 0 0 1	0	1 0 0 1	0	
0 0 1 0	1	1 0 1 0	×	不会出现
0 0 1 1	0	1 0 1 1	×	不会出现
0 1 0 0	1	1 1 0 0	×	不会出现
0 1 0 1	0	1 1 0 1	×	不会出现
0 1 1 0	1	1 1 1 0	×	不会出现
0 1 1 1	0	1 1 1 1	×	不会出现



$CD$					
$AB$		00	01	11	10
00		1	0	0	1
01		1	0	0	1
11		×	×	×	×
10		1	0	×	×

输入变量A, B, C, D取值为0000~1001时, 逻辑函数Y有确定的值, 根据题意, 偶数时为1, 奇数时为0。

$$Y(A, B, C, D) = \sum m(0, 2, 4, 6, 8)$$

无关项:

$$\sum d(10, 11, 12, 13, 14, 15) = 0$$

$AB \backslash CD$		$CD$			
		00	01	11	10
$AB$	00	1	0	0	1
	01	1	0	0	1
	11	×	×	×	×
	10	1	0	×	×

$$Y(A, B, C, D) = \Sigma m(0, 2, 4, 6, 8) + \Sigma d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

	$CD$	00	01	11	10
$AB$	00	1	0	0	1
	01	1	0	0	1
	11	×	×	×	×
	10	1	0	×	×

不利用无关项的  
化简结果为:

$$Y = A'D' + B'C'D'$$

利用无关项的  
化简结果为:

$$Y = D'$$

# 作业：

2.2 (4)

2.3 (b)

2.7 (a)

2.8

2.10 (6)

2.11 (5)

2.13 (4) (6) (10)

2.16 (2) (8)

2.18 (b) (d)

2.20 (b) (d)

2.24

2.26 (2)

2.27 (2)