简谐运动的基本特征

1、运动学特征 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

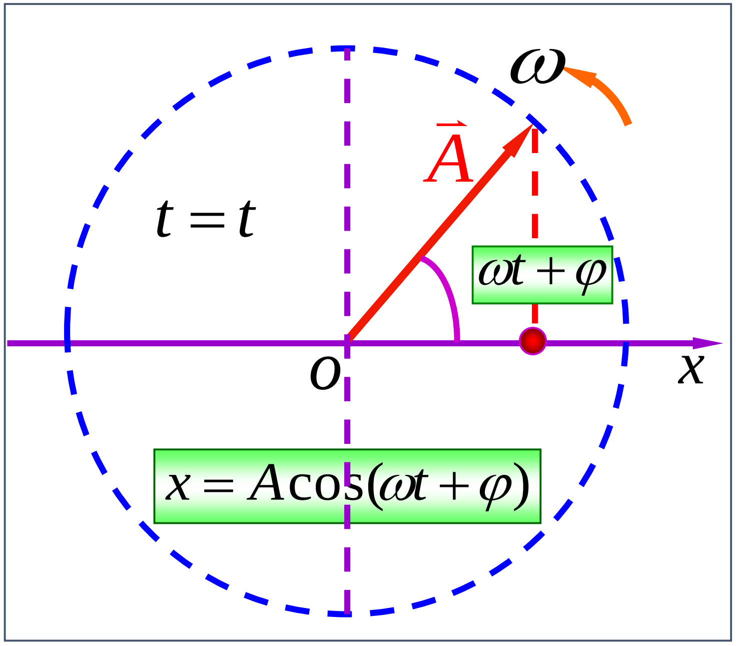
2、动力学特征 $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3、能量特征

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2}$$

简谐振动的几何表示：旋转矢量



以o为原点旋转矢量$\vec{A}$的端点在x轴上的投影点的运动为简谐运动.

一　单摆

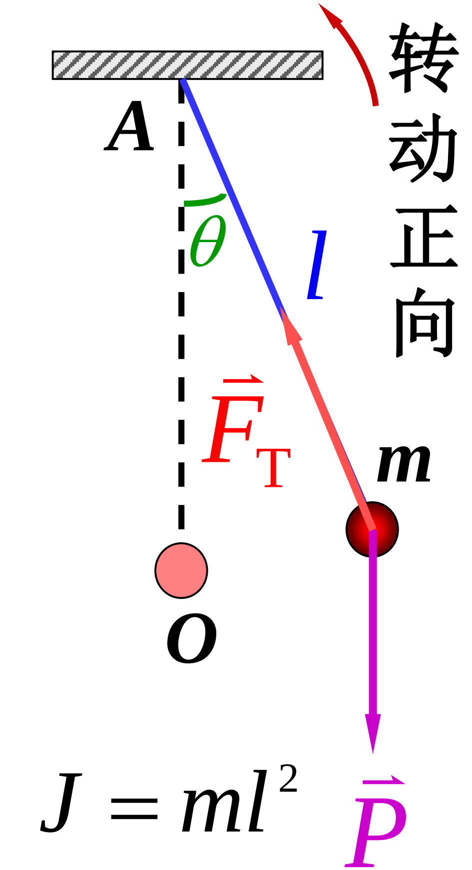
动力学分析：

$\theta < 5^\circ$ 时，$\sin\theta \approx \theta$

$$M = -mgl\sin\theta \approx -mgl\theta$$

$$-mgl\theta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta$$



$$J = ml^2$$

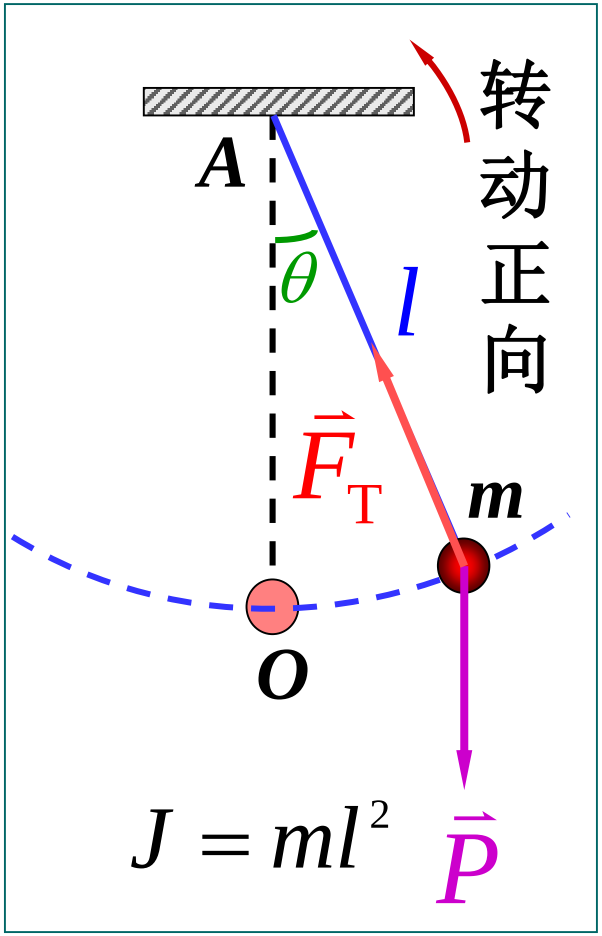
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{g}{l}\theta$$

令 $\omega^2=\frac{g}{l}$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2\theta$$

$$\theta=\theta_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



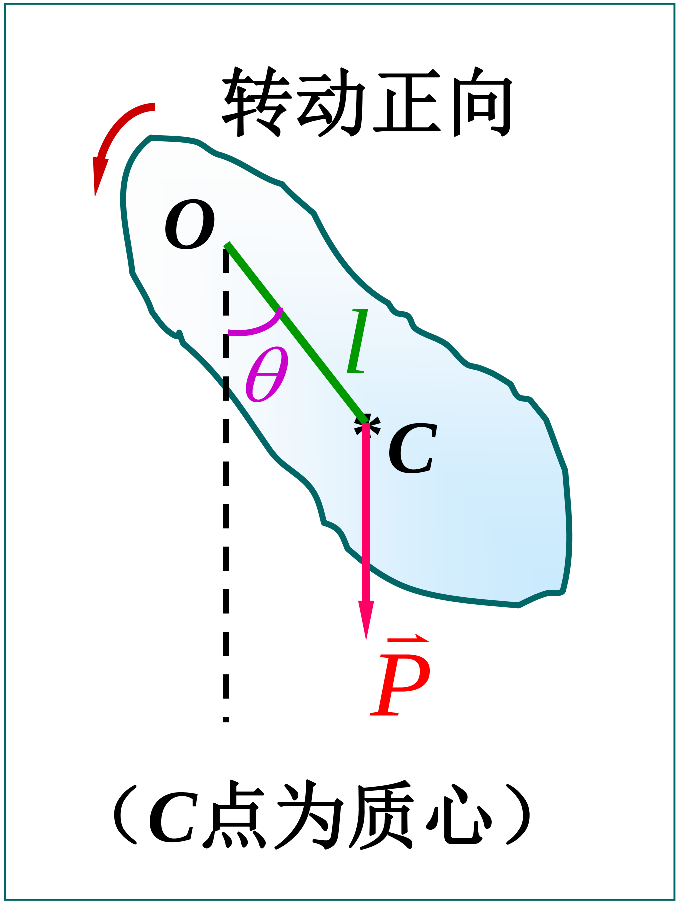
二 复摆 $(\theta < 5^\circ)$

$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{F}$$

$$M = -mgl\sin\theta$$

$$= J\beta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$-mgl\theta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$



令 $\omega^2 = \dfrac{mgl}{J}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\theta$$

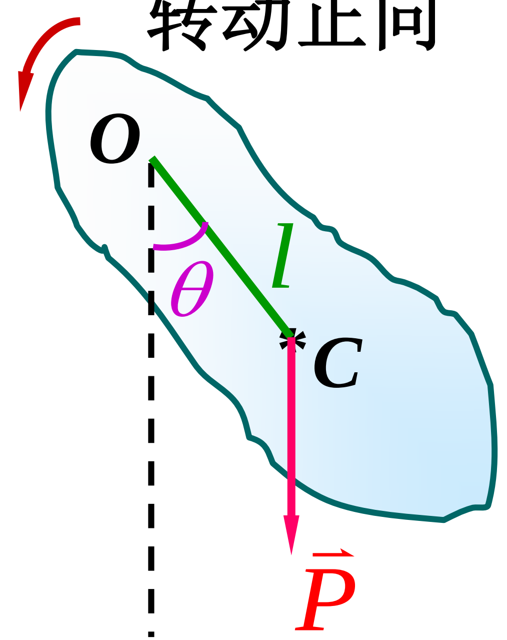
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2\theta$$

$$\omega=\sqrt{\frac{mgl}{J}}$$

$$\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

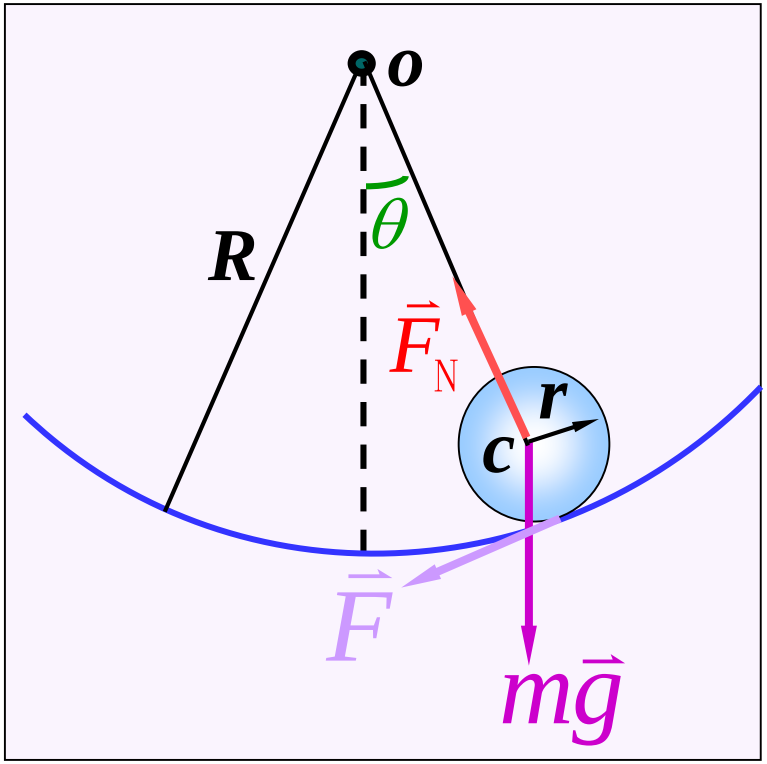
$$T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

$$\theta=\theta_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)$$ 角谐振动



（C点为质心）

例 一半径为 r 的均质球,可沿半径为 R 的固定大球壳的内表面作纯滚动(如图示).试求圆球绕平衡位置作微小运动的动力学方程及其周期.



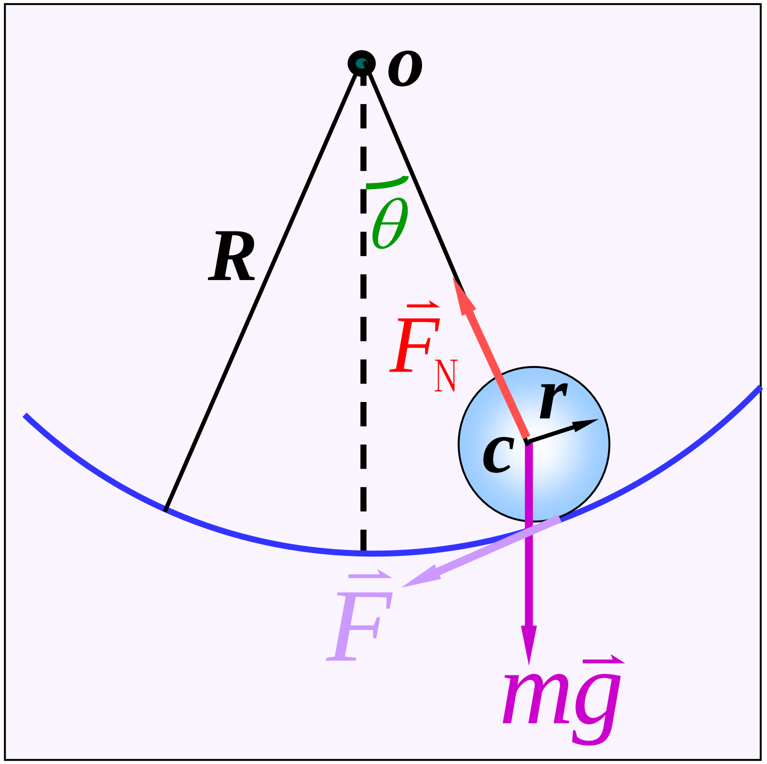
解：

$$-(mg\sin\theta+F)=ma_t \quad (1)$$

$$Fr=\frac{2}{5}mr^2\alpha \quad (2)$$

$$a_t=(R-r)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \quad (3)$$

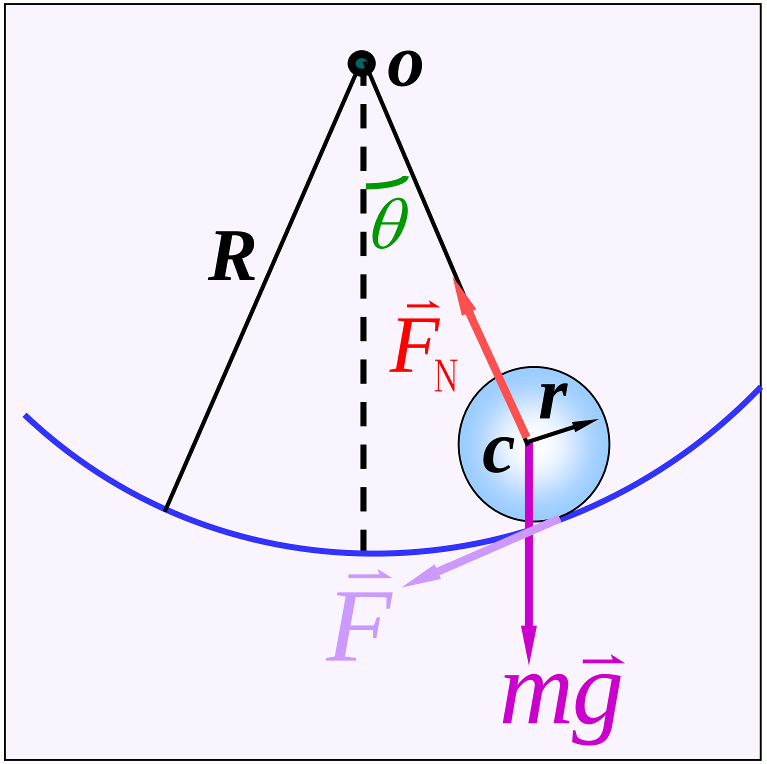
$$\boldsymbol{a_t=r\alpha} \quad (4)$$



联立（1）、（2）、（3）、（4）式，得运动方程

$$\frac{7}{5}(R-r)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-g\sin\theta$$

$$\frac{7}{5}(R-r)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-g\sin\theta$$



令 $\omega^2=\dfrac{5g}{7(R-r)}$

$$\sin\theta\approx\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2\theta \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$

简谐运动SHM

1、能量特征:

简谐振子的势能

$$E_p(x) \equiv V(x)$$

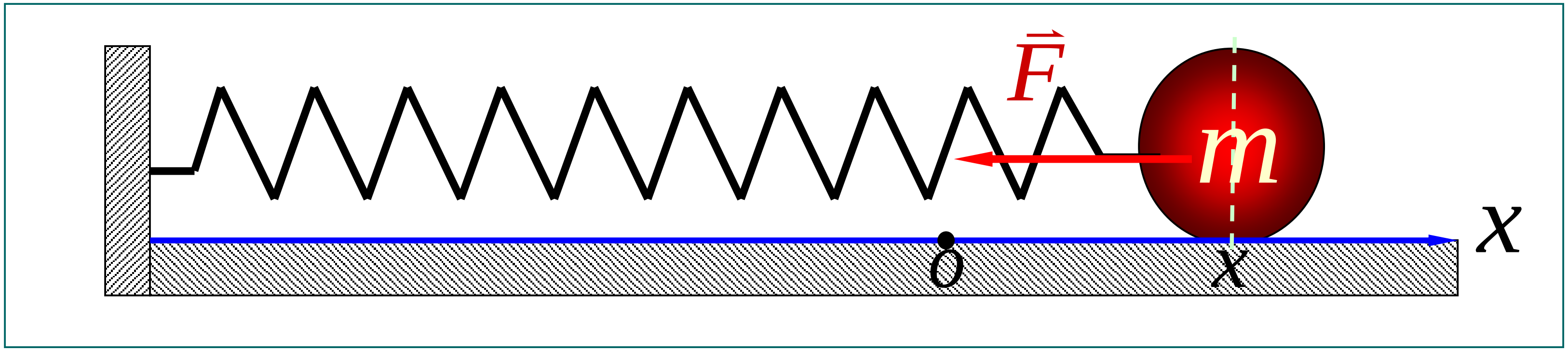
$$= V(0) + V'(0)x + (1/2)\, V''(0)x^2 + \ldots.$$

平衡位置: $x = 0,\ V(0) = 0$

平衡条件: $V'(0)=0$

稳定平衡: $V''(0)>0$

卧式弹簧振子的势能和机械能



$$F = -kx$$

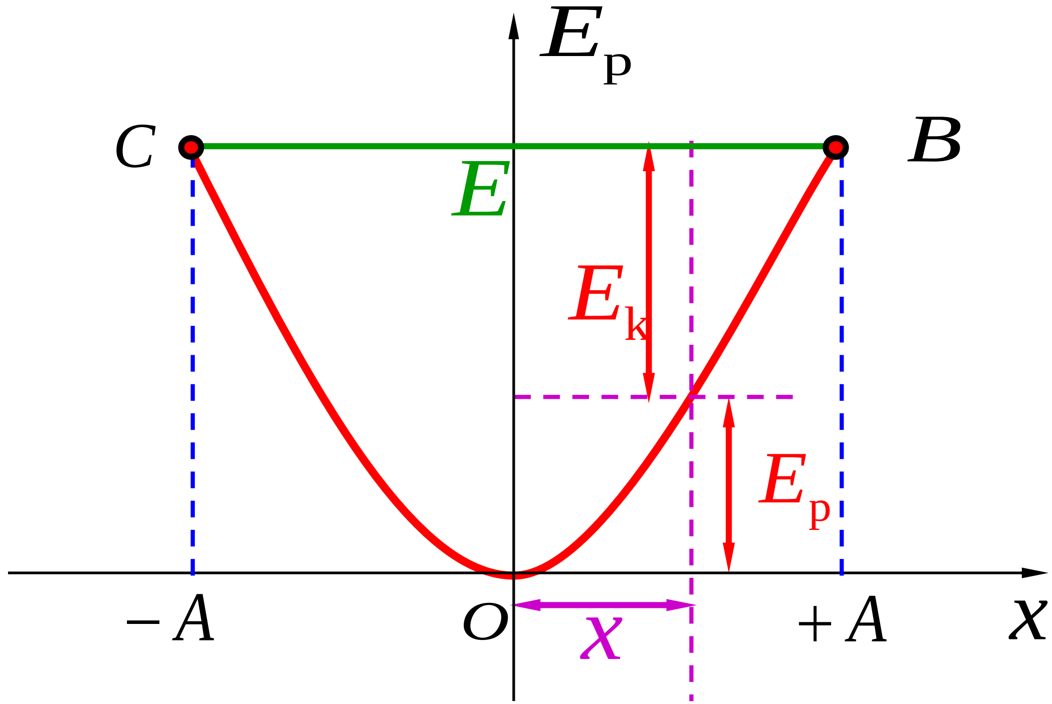
$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 常量$$

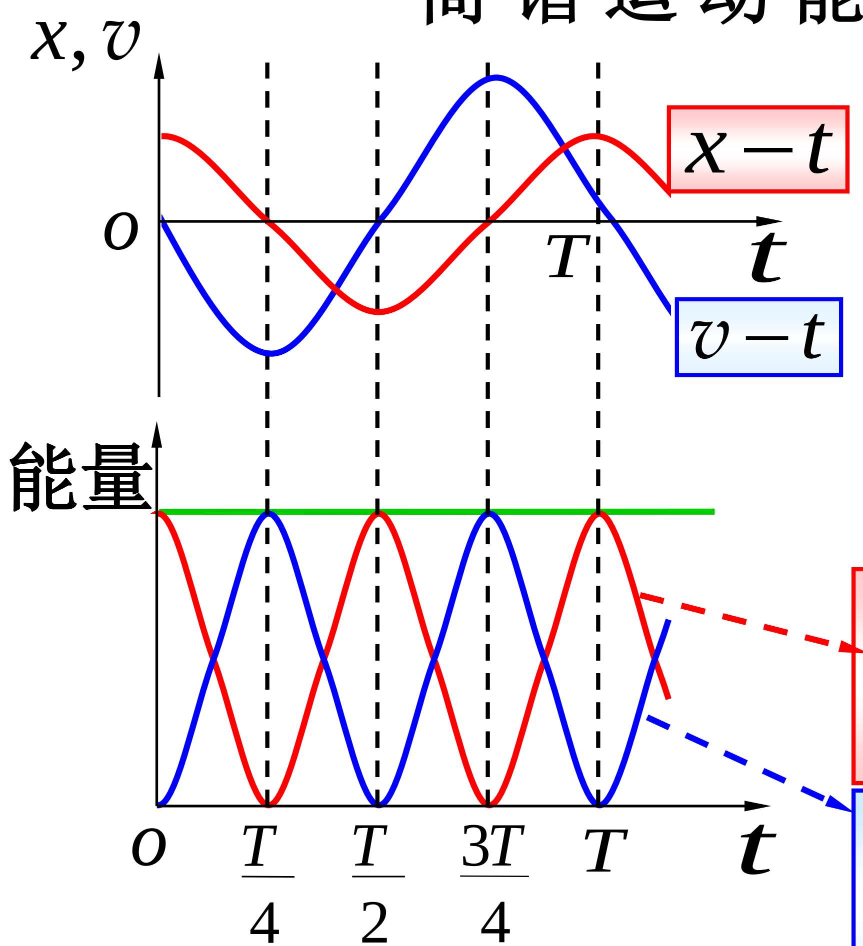
线性回复力是保守力，作简谐运动的系统机械能守恒.

弹簧振子势能$E_p(x) = (1/2)kx^2$

弹簧振子势能曲线



简 谐 运 动 能 量 图



$$\varphi = 0$$

$$x = A\cos\omega t$$

$$v = -A\omega\sin\omega t$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t$$

9-5 当质点以频率 ν 作简谐振动时，它的动能的变化频率为

(A) ν　　 (B) 2ν　　(C) 4ν　　(D) $\nu/2$

解

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^{2}=\frac{1}{2}kA^{2}\sin^{2}(\omega t+\varphi)$$

$$=\frac{1}{2}kA^{2}\left[\frac{1-\cos(2\omega t+2\varphi)}{2}\right]$$

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}\qquad \nu'=\frac{\omega'}{2\pi}=2\nu$$

简谐振子的动能和势能的相位差是

(A) 0
(B) π
(C) π/2
(D) 不确定（取决于振动初相位）

Answer：B（反相, in phase）

例 质量为0.10 kg的物体，以振幅1.0×10^{-2} m作简谐运动，其最大加速度为$4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，**求：**

（1）振动的周期；

（2）通过平衡位置的动能；

（3）总能量；

（4）物体在何处其动能和势能相等？

已知 $m = 0.10\,\mathrm{kg}$，$A = 1.0\times 10^{-2}\,\mathrm{m}$，

$a_{\max} = 4.0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

求:(1) T；(2) $E_{\mathrm{k,max}}$(3) E；(4) 何处动势能相等?

解（1）$a_{\max} = A\omega^2$ $\quad \omega = \sqrt{\dfrac{a_{\max}}{A}} = 20\,\mathrm{s^{-1}}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.314\,\mathrm{s}$$

（2）$E_{\mathrm{k,max}} = \dfrac{1}{2} m v_{\max}^2 = \dfrac{1}{2} m\omega^2 A^2 = 2.0\times 10^{-3}\,\mathrm{J}$

（3）$E = E_{\mathrm{k,max}} = 2.0\times 10^{-3}\,\mathrm{J}$

（4）$E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{p}}$ $\quad E_{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{2} k x^2 = \dfrac{1}{2} m\omega^2 x^2$

$$x = \pm 0.707\,\mathrm{cm}$$

保守系统/简谐振子的能量特征

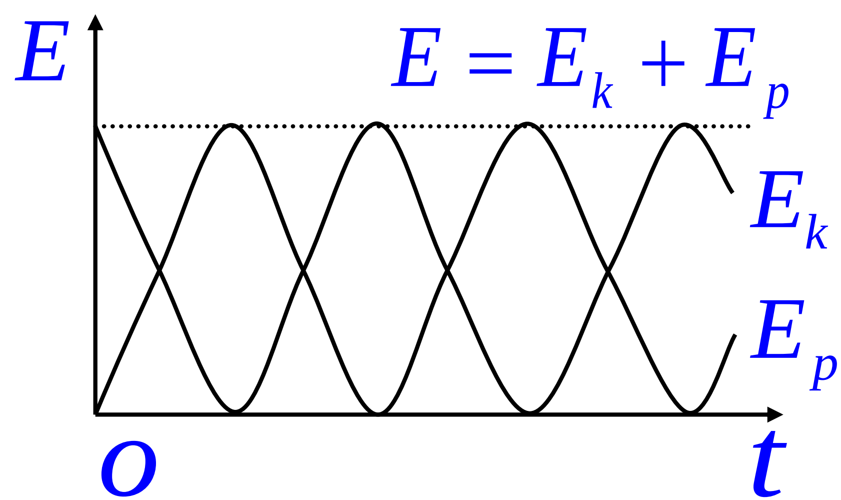
保守系统：

无内部耗散（阻尼）无外界驱动

能量守衡

$$E = E_k + E_p$$

$$H = T + V$$



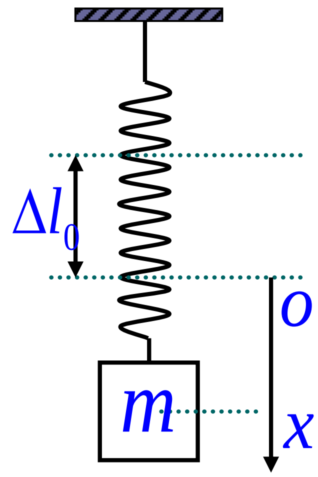
势能形式 $E_p = (1/2)kx^2$

竖式弹簧振子的势能（以平衡位置为零点）

$$mg = k\Delta l_0$$

$$E_{\mathrm{p}} = -mgx + \frac{1}{2}k(x+\Delta l_0)^2 - \frac{1}{2}k\Delta l_0{}^2$$

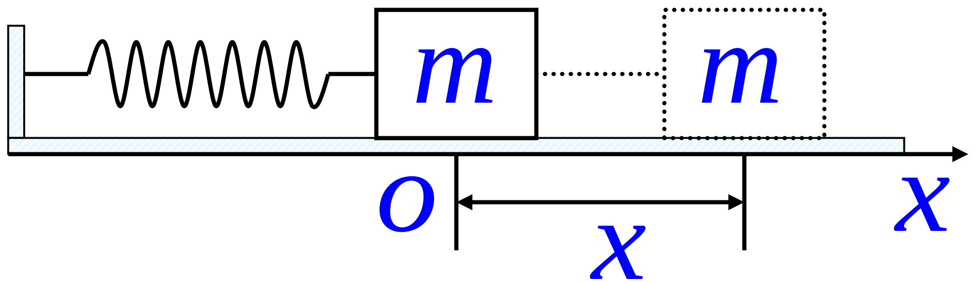
$$= \frac{1}{2}kx^2$$



Ref: Ex9-11斜面上的弹簧振子（串联）

2、动力学特征

(1)弹簧振子:



$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\text{常量}$$

$$\ddot{x}+\omega^2x=0 \qquad \omega=\sqrt{k/m}$$

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

能量守恒 $\xrightarrow{\text{推导}}$ 简谐运动方程

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=常量$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=0$$

$$m\cancel{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+kx\cancel{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}x=0$$

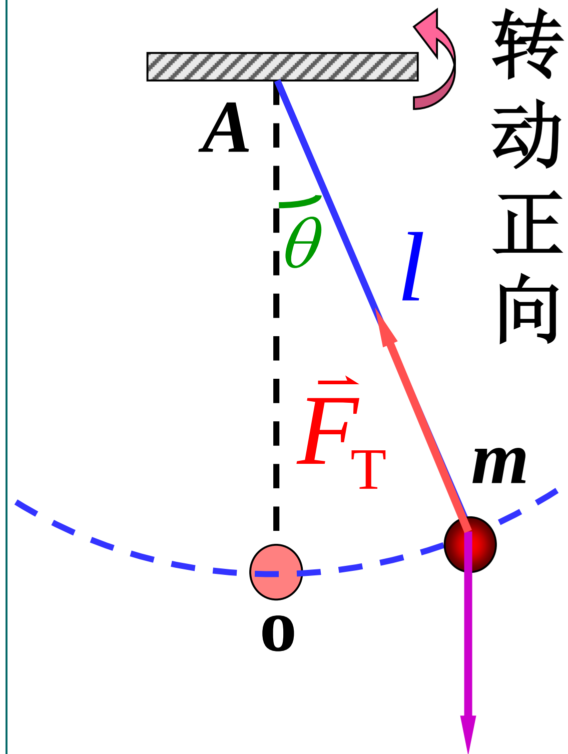
（2）单摆

$$E=\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2+mgl(1-\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2+mgl(1-\cos\theta)$$

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

$\theta<5^\circ$ 时，$\sin\theta\approx\theta$



$$J=ml^2$$

$$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0$$

$$\omega=\sqrt{g/l}$$

$$\theta=\theta_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)$$

（3）复摆 $(\theta < 5^\circ)$

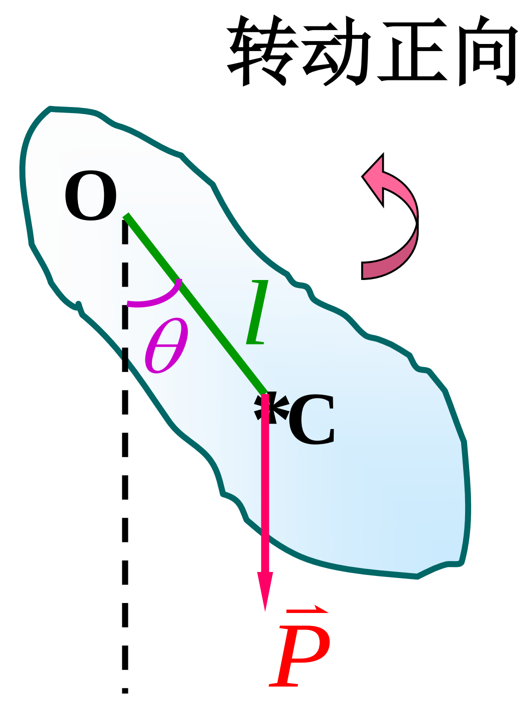
$$E = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{J}\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

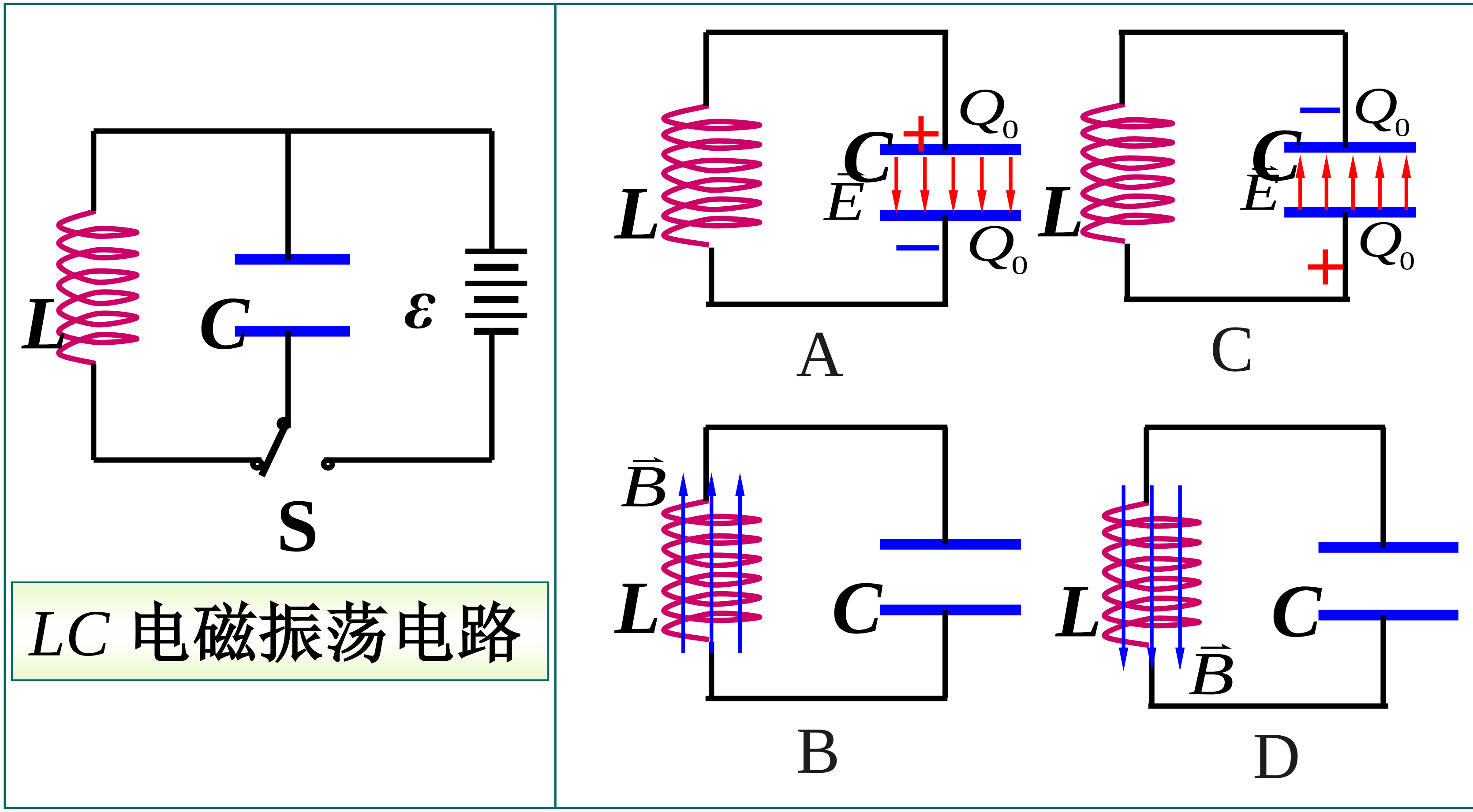
$$\omega = \sqrt{\frac{mgl_{CO}}{J_O}}$$

$$\theta = \theta_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi)$$



（C点为质心）

（4）9-7无阻尼自由电磁振荡p29



在无阻尼自由电磁振荡过程中，电场能量和磁场能量不断的相互转化，其总和保持不变.

$$E=\frac{1}{2}LI^2+\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$0=LI\dot{I}+\frac{Q}{C}\dot{Q}$$

$$\ddot{Q}+\frac{1}{LC}Q=0$$

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q=Q_0\cos(\omega t+\varphi)$$

$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-\omega Q_0\sin(\omega t+\varphi)=I_0\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

简谐运动的动力学特征

$$\boxed{\ddot{x}+\omega^{2}x=0}$$

弹簧振子 $\omega=\sqrt{k/m}$

单摆 $\omega=\sqrt{g/l}$

复摆 $\omega=\sqrt{\dfrac{mgl_{CO}}{J_{O}}}$

LC自由电磁振荡 $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

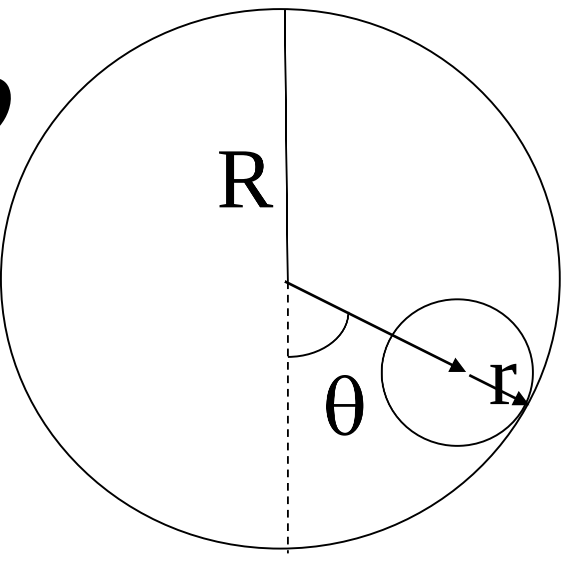
p.12例题

半径为r的匀质圆球，可沿半径为R的固定大球壳的内表面做纯滚动，如图所示。试求圆球绕平衡位置做微小运动的动力学方程及其周期。

分析：

$$v_C = (R-r)\dot{\theta} = r\omega$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2$$



$$E_p = mg(R-r)(1-\cos\theta)$$

物理学 第六版

能量解法:

$$E=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2+mg(R-r)(1-\cos\theta)$$

$$v_C=(R-r)\dot{\theta}=r\omega \qquad J_C=\frac{2}{5}mr^2$$

$$E=\frac{7}{10}m(R-r)^2\dot{\theta}^2+mg(R-r)(1-\cos\theta)$$

$$\frac{7}{5}(R-r)\ddot{\theta}+g\sin\theta=0 \qquad \theta<5^\circ\text{时},\sin\theta\approx\theta$$

$$\ddot{\theta}+\frac{5g}{7(R-r)}\theta=0 \qquad \omega=\sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$$

3、运动学特征

物理量(x)是时间的余弦 (或正弦)的函数

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\theta = \theta_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$Q = Q_0 \cos(\omega t + \varphi)$$