

第四章 线性系统的根轨迹法

第一节 根轨迹的基本概念

第二节 根轨迹绘制的基本法则

第三节 广义根轨迹

第四节 系统性能分析

第五节 控制系统复域设计

4.4 系统性能分析

开环传递函数:
$$G(s)H(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (T_i s + 1)} = K_r \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (s - p_i)}$$

$K = K_1 \cdot K_2$ 为系统的开环增益,

$K_r = K_{1r} \cdot K_{2r}$ 为开环系统的根轨迹增益,

$m = f + l$ 为开环系统的零点个数,

$n = q + h + \nu$ 为开环系统的极点个数。

开环系统前向通路
零点+反馈通路极点

闭环传递函数:
$$\Phi(s) = \frac{K_{1r} \prod_{j=1}^f (s - z_{Gj}) \prod_{i=1}^h (s - p_{Hi})}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (s - p_i) + K_r \prod_{j=1}^m (s - z_j)}$$

开环零点、极点和根轨迹增益

讨论:

- 1) 开环零、极点对闭环根轨迹的影响
- 2) 闭环零、极点对系统输出响应的影响

4.4 系统性能分析

一、附加开环零点对根轨迹及系统性能的影响

例 已知系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K_r}{s^2(s+a)} \quad (a>0)$

试用根轨迹法分析系统的稳定性。如果给该系统增加一个开环零点，试分析附加开环零点对根轨迹的影响。

解 (1)原系统的根轨迹： 不稳定

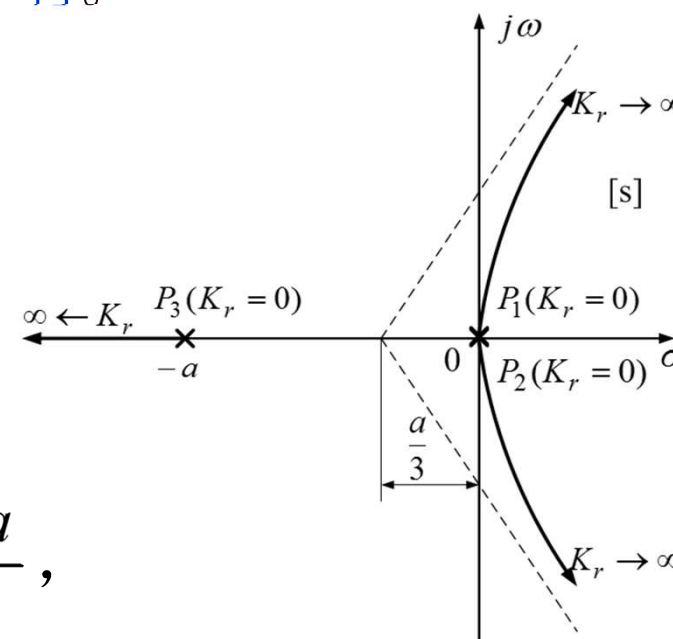
(2)给原系统增加一个负的开环实零点

点 $z_1 = -b \quad (b>0)$ ，则开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r(s+b)}{s^2(s+a)}$$

根轨迹渐近线与实轴的交点为 $\frac{b-a}{2}$ ，

$b>a$? $b<a$?

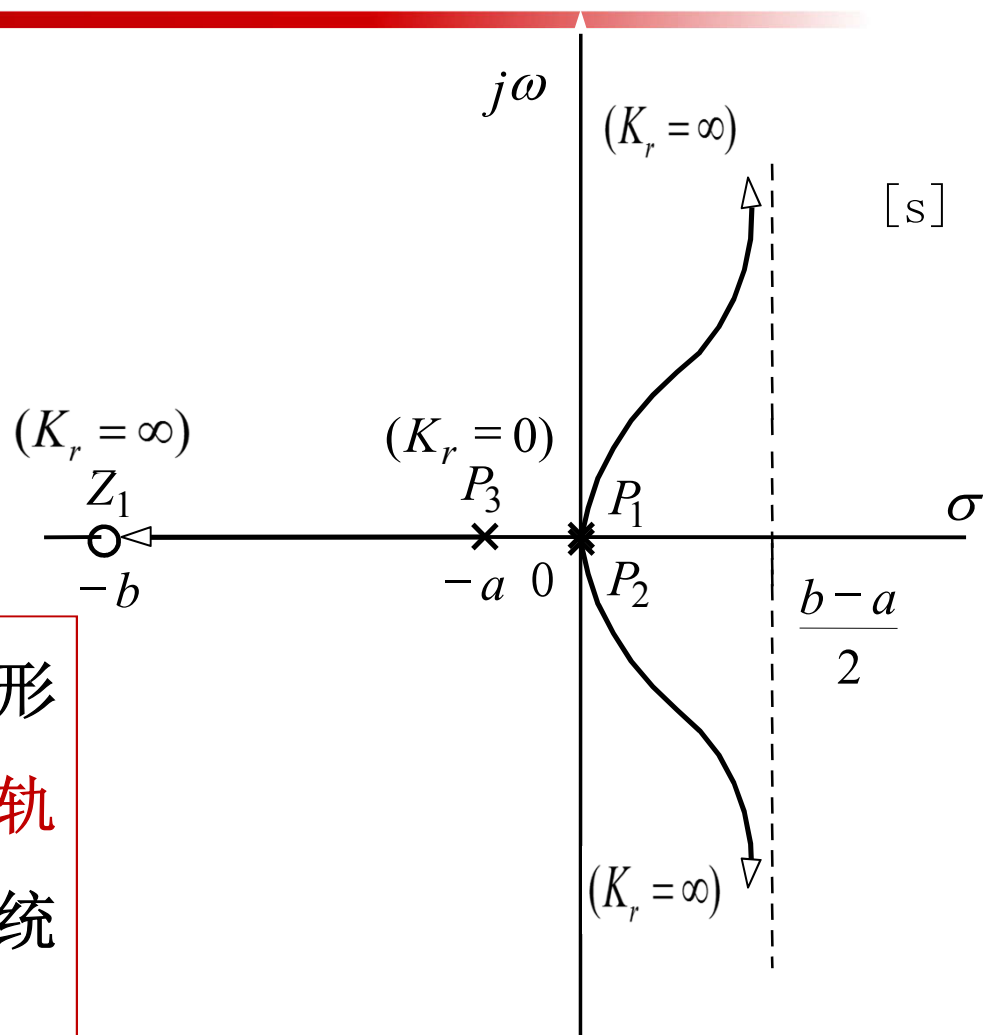


原系统的根轨迹

4.4 系统性能分析

1) 当 $b > a$ 时, 根轨迹的渐近线与实轴的交点为 $\frac{b-a}{2} > 0$, 根轨迹如图所示。

与原系统比较, 虽然根轨迹的形状发生了变化, 但仍**有两条根轨迹全部位于 s 平面右半部**, 系统**仍是不稳定的**。

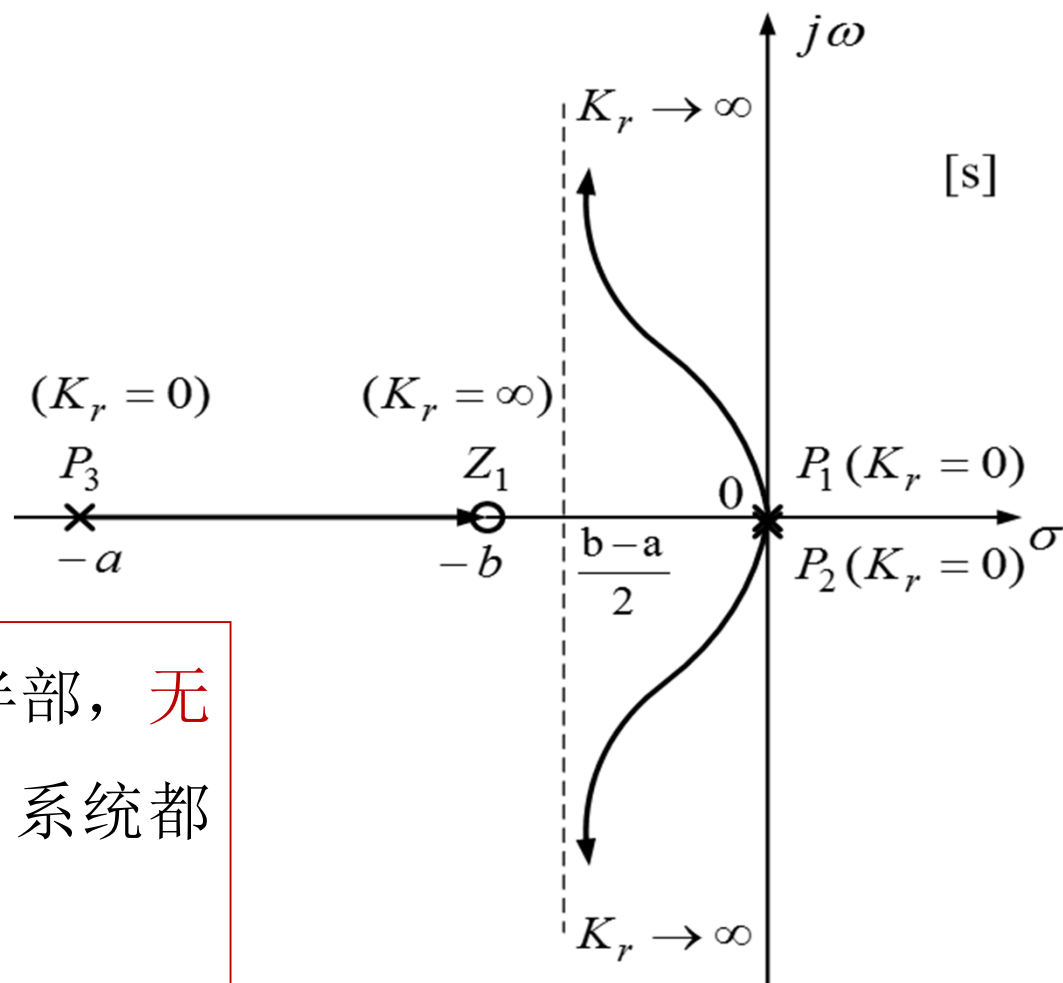


附加开环零点对根轨迹的影响 $b > a$

4.4 系统性能分析

2) 当 $b < a$ 时, 根轨迹渐近线与实轴的交点为 $\frac{b-a}{2} < 0$, 它们与实轴正方向的夹角分别为 90° 和 -90° 。

三条根轨迹均在 s 平面左半部, 无论根轨迹增益 K_r 为何值, 系统都是稳定的。



附加开环零点对根轨迹的影响 $b < a$

4.4 系统性能分析

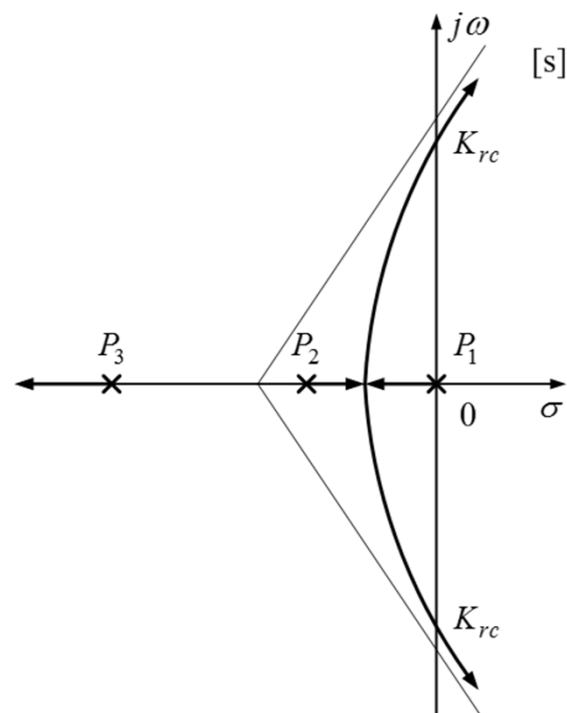
例 已知系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s - p_2)(s - p_3)}$

试分析附加开环零点对系统性能的影响。

$$p_3 < p_2 < 0$$

解 (1)原系统的根轨迹如右图所示

当系统开环根轨迹增益 $K_r > K_{rc}$ 时，
系统有两条根轨迹进入 s 平面右半平面，
系统成为不稳定系统。



原系统根轨迹

4.4 系统性能分析

(2)给原系统增加一附加负实零点 $z_1(z_1 < 0)$ ，系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r(s - z_1)}{s(s - p_2)(s - p_3)}$$

开环传递函数分子与分母的最高阶次分别为 $n=3$ ， $m=1$ ； $n-m=2$ 。

因此根轨迹渐近线与实轴正方向的夹角分别为 90° 和 -90° ，
两条渐近线垂直于实轴，它们与实轴的交点坐标

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n - m}$$

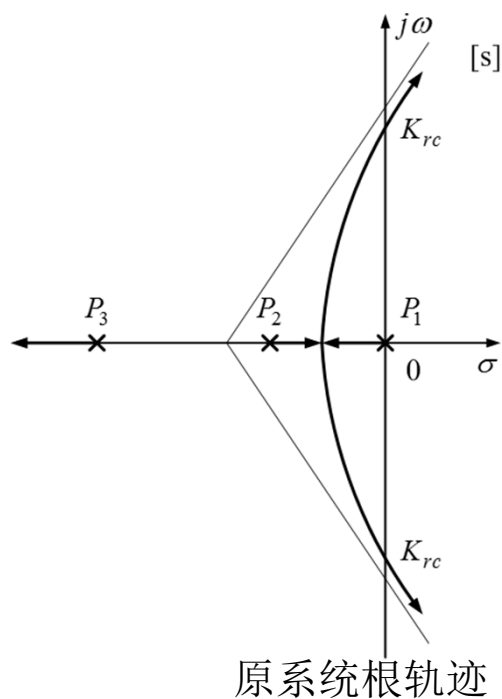
位置视附加零点的取值而改变，分别讨论：

4.4 系统性能分析

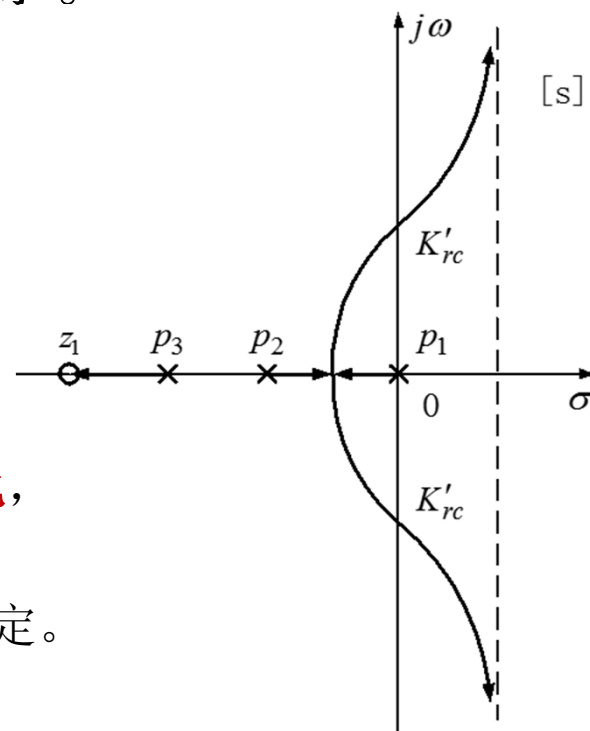
(1) 当 $z_1 < p_2 + p_3 < 0$ 时 ($p_1 = 0$)，渐近线与实轴的交点

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n - m} > 0$$

渐近线位于 s 平面右半部，根轨迹如图 a 所示。



两条根轨迹形状发生了变化，
仍进入了 s 平面右半部。
当 $K_r > K'_{rc}$ 时，系统不稳定。



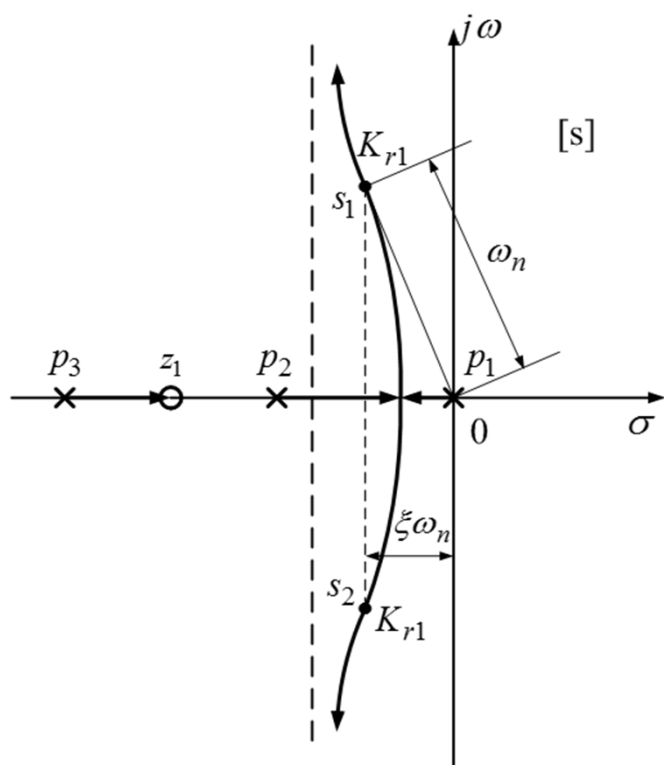
不同附加开环零点对根轨迹的影响 a

4.4 系统性能分析

(2) 当 $p_3 < z_1 < p_2 < 0$ 时，渐近线与实轴的交点

$$p_3 + p_2 < z_1 + p_2 < z_1$$

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n - m} < 0$$



渐近线位于s平面左半部，根轨迹如图b所示。

此时系统的三条根轨迹全部位于s平面左半部，除 $K_r=0$ 外，无论 K_r 为何值，系统都是稳定的。

不同附加开环零点对根轨迹的影响 b

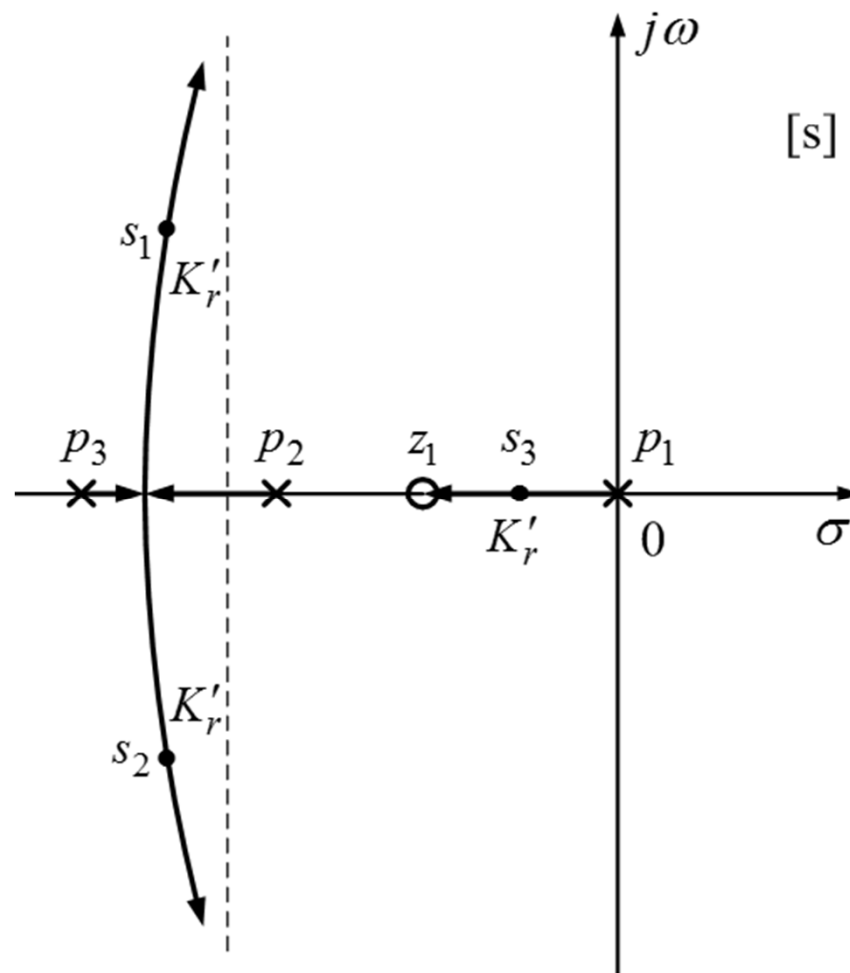
4.4 系统性能分析

(3) 当 $p_3 < p_2 < z_1 < 0$ 时, 渐近线与实轴的交点

$$p_3 + p_2 < z_1 + p_2 < z_1$$

渐近线与实轴的交点小于零, 根轨迹如图c所示。

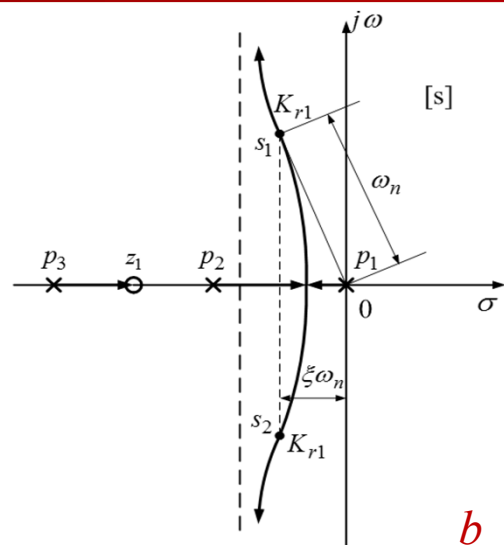
除 $K_r=0$ 外, 系统稳定。



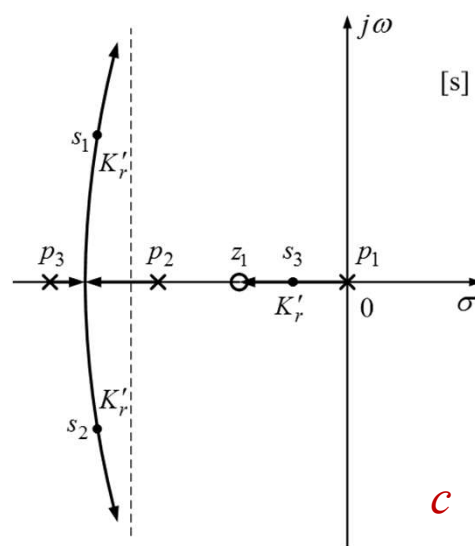
不同附加开环零点对根轨迹的影响 c

4.4 系统性能分析

比较图b和图c



b



c

- 图b的渐近线离虚轴的距离更近。同为稳定，但图c的稳定裕度更大。
- 从简化系统以便于分析瞬态性能角度看，图b优于图c。
原因在于：图b中容易找到一对满足主导极点条件的共轭复数极点 $s_{1,2}$ ，此时系统可简化成一个二阶系统，其闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \Phi(s) = \frac{s_1 \cdot s_2}{(s - s_1)(s - s_2)}$$
- 图c中， s_1 、 s_2 是共轭复数极点，但不是主导极点， s_3 是闭环系统主导极点，系统不能简化成二阶系统。
- 如果 s_3 到虚轴的距离比 s_1 、 s_2 到虚轴的距离小五倍以上，可将系统简化为由 s_3 决定的一阶系统（要考虑零点影响），动态过程可能为单调的，响应速度较慢。

4.4 系统性能分析

负实数开环零点的作用：

(1) 将 s 平面上的根轨迹向左“拉”的作用，且附加零点愈靠近虚轴，“拉力”愈强。因此选择合适的附加零点有可能将系统的根轨迹从平面的右半部全部“拉”到 s 平面左半部，有利于改善系统的稳定性。

(2) 适当选择附加零点的大小，不仅可改善系统的稳定性，还可改善系统的动态性能和简化系统分析。

总体原则：附加开环零点相对原有开环极点的位置选配适当，同时改善稳态性能和动态性能。

4.4 系统性能分析

二、附加开环极点对根轨迹及系统性能的影响

- 增加开环极点会使系统的阶次升高，一般来说不希望如此。
- 但为了改善系统的某项性能指标（如频带宽度或减小稳态误差），附加开环极点也是一种有效途径。

例 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s^2 + 2s + 2)(s + a)} \quad (a > 0)$$

其中 $p_4 = -a$ 为附加开环极点，试分别绘制原系统（无附加开环极点）和 $a=0.5$ 、 $a=2$ 和 $a=6$ 时系统的根轨迹图。

4.4 系统性能分析

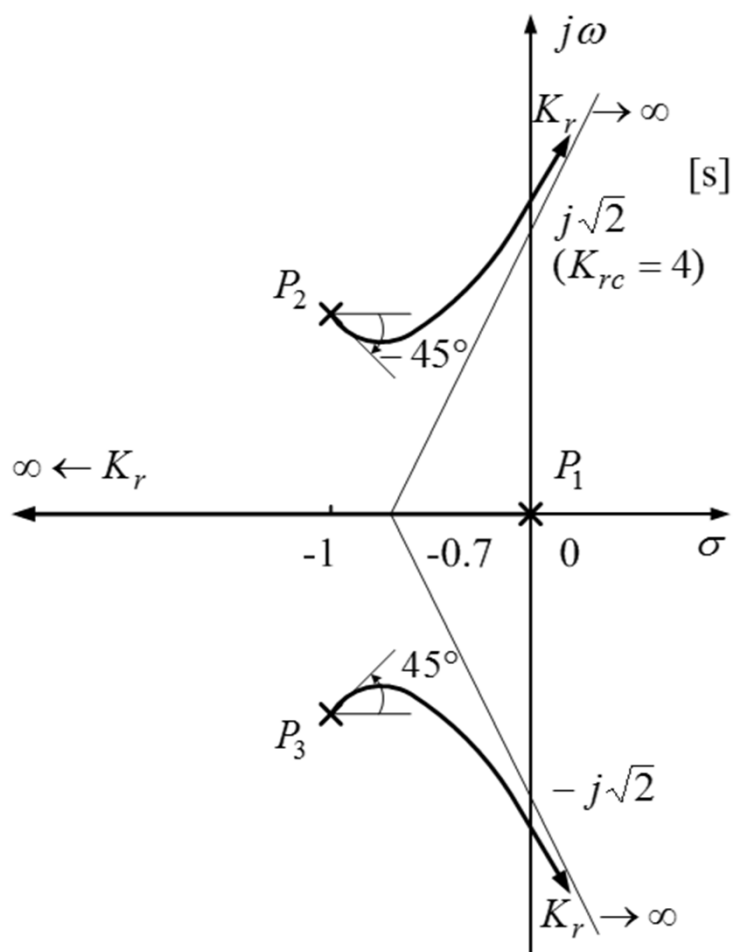
解 根据系统的开环传递函数和绘制根轨迹的基本规则，将无附加开环极点的**原系统**和**不同附加开环极点**（不同 a 值）所对应的根轨迹的有关数据的计算结果列入表中其对应的根轨迹图分别如图（a）、（b）、（c）、（d）所示。

项目 \ a	无附加开环极点	a=0.5	a=2	a=6
起 点 ($K_r = 0$) ($n = 3$ 或 4)	$p_1 = 0$ $p_2 = -1 + j$ $p_3 = -1 - j$	$p_1 = 0$ $p_2 = -1 + j$ $p_3 = -1 - j$ $p_4 = -0.5$	$p_1 = 0$ $p_2 = -1 + j$ $p_3 = -1 - j$ $p_4 = -2$	$p_1 = 0$ $p_2 = -1 + j$ $p_3 = -1 - j$ $p_4 = -6$
终 点 ($K_r \rightarrow \infty$) ($m = 0$)	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$

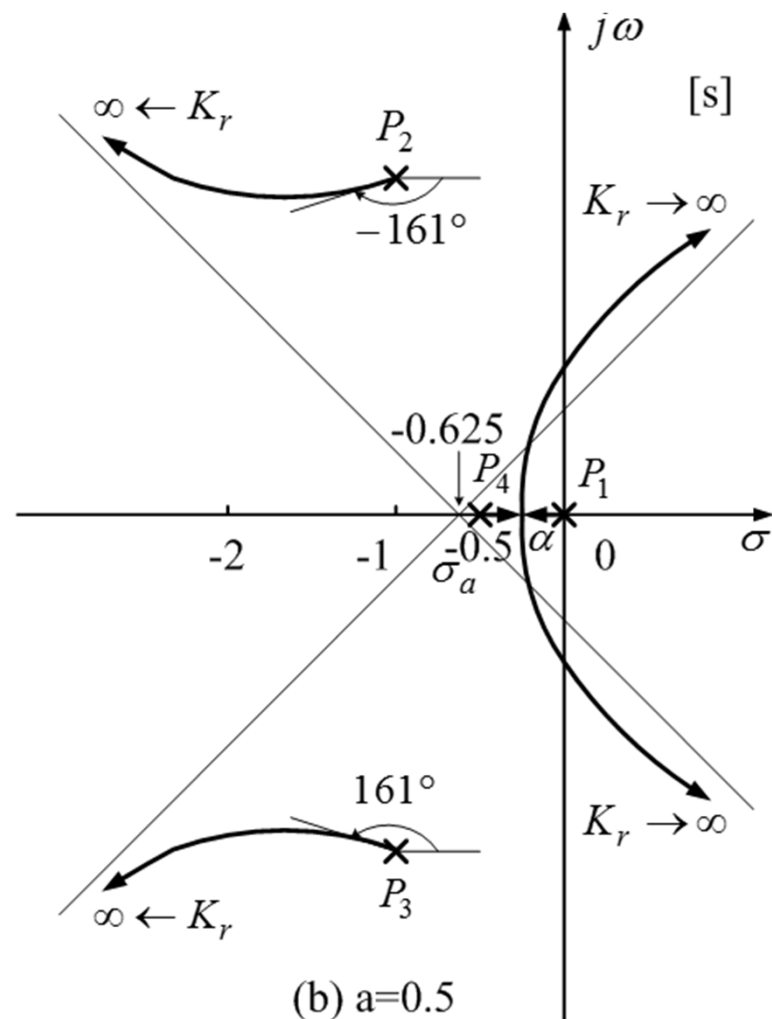
4.4 系统性能分析

渐近线 ($n-m=$ 3或4)	交点: $\sigma_a = -0.7$ 交角: $\varphi_a =$ $\pm 60^\circ, 180^\circ$	交点: $\sigma_a = -0.625$ 交角: $\varphi_a =$ $\pm 45^\circ, \pm 135^\circ$	交点: $\sigma_a = -1$ 交角: $\varphi_a =$ $\pm 45^\circ, \pm 135^\circ$	交点: $\sigma_a = -2$ 交角: $\varphi_a =$ $\pm 45^\circ, \pm 135^\circ$
根轨迹与实 轴的分离点	无	$d = -0.255$	$d = -1$	$d = -4.62$
实轴上的 根轨迹	$0 \rightarrow -\infty$	$0 \rightarrow -0.5$	$0 \rightarrow -2$	$0 \rightarrow -6$
初始角	$\theta_{p_2} = -45^\circ$ $\theta_{p_3} = +45^\circ$	$\theta_{p_2} = -161.6^\circ$ $\theta_{p_3} = +161.6^\circ$	$\theta_{p_2} = -90^\circ$ $\theta_{p_3} = +90^\circ$	$\theta_{p_2} = -56.3^\circ$ $\theta_{p_3} = +56.3^\circ$
根轨迹与虚 轴的交点	$\omega_c = \pm\sqrt{2}$ $K_{rc} = 4$	$\omega_c = \pm j0.632$ $K_{rc} = 2.6$	$\omega_c = \pm j1$ $K_{rc} = 5$	$\omega_c = \pm j1.22$ $K_{rc} = 18.75$

4.4 系统性能分析



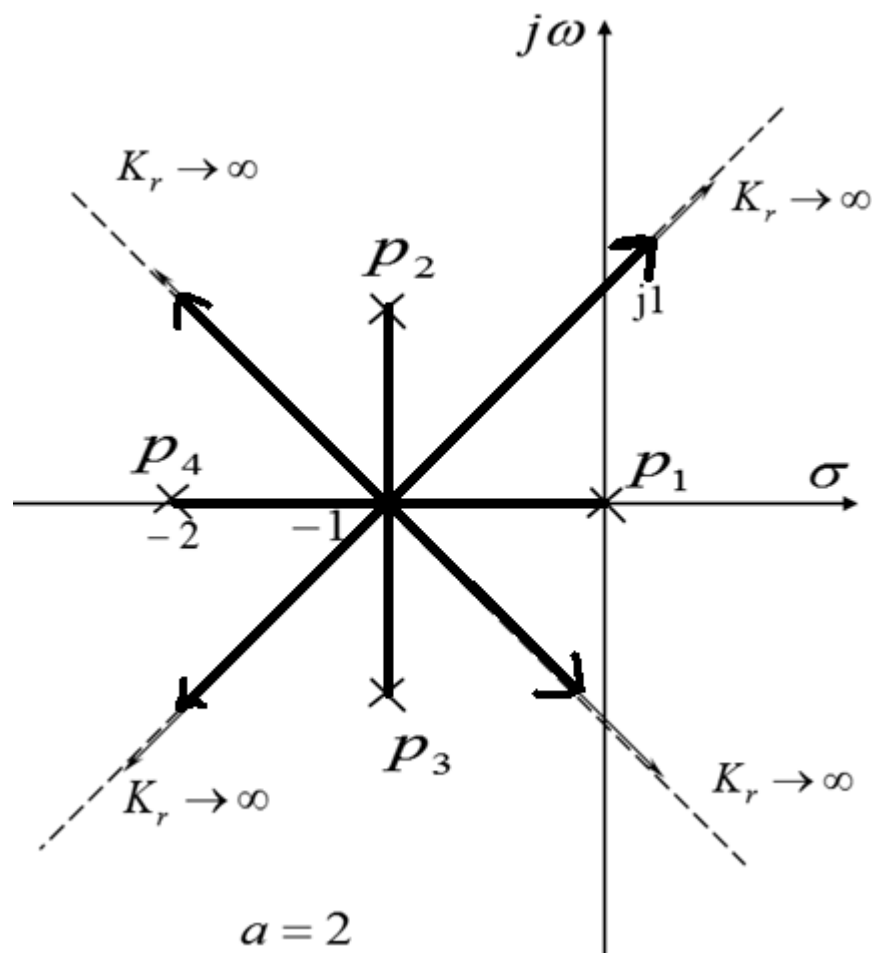
(a) 无附加开环极点



(b) $a=0.5$

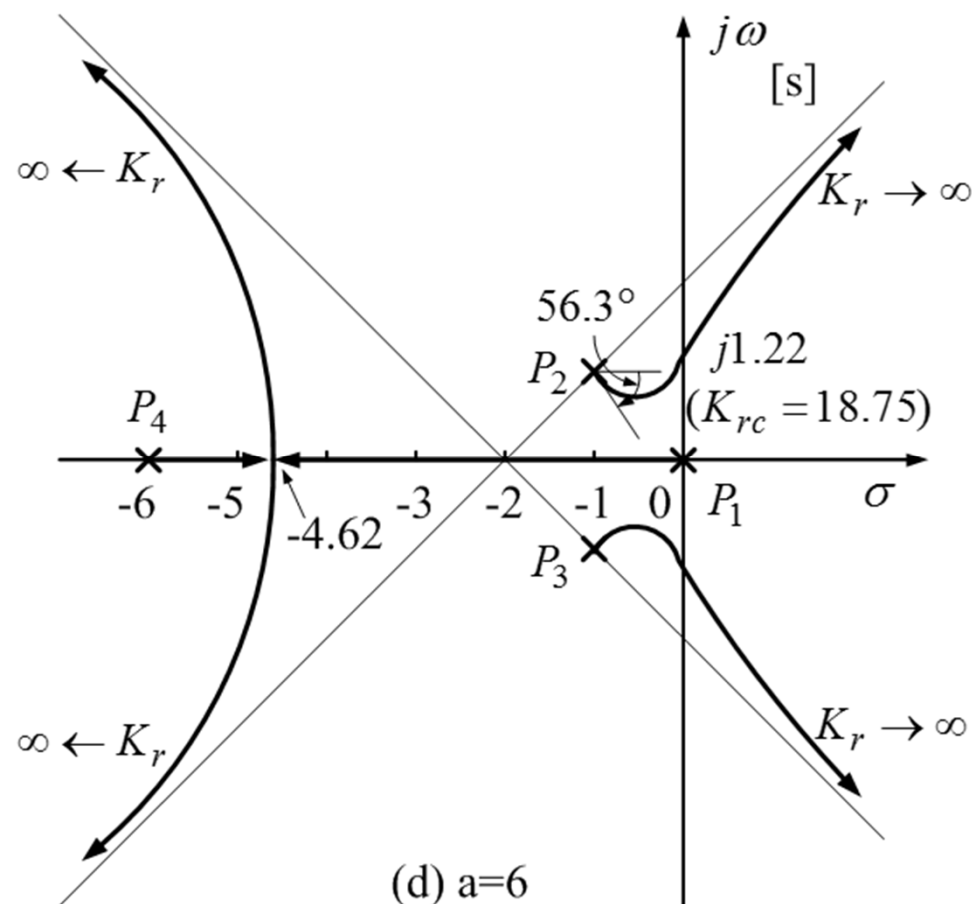
附加开环极点对根轨迹的影响 (b)

4.4 系统性能分析



(c)

附加开环极点对根轨迹的影响



(d)

4.4 系统性能分析

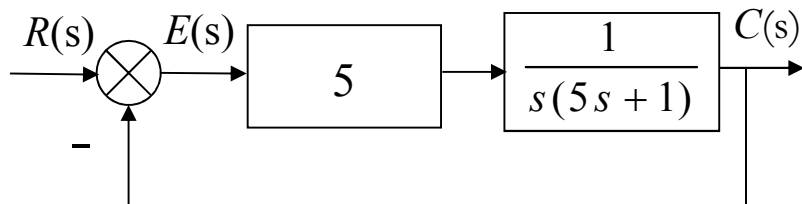
附加开环极点的作用：

- (1) 附加开环极点的大小不同（即不同的 a 值）对根轨迹的形状会产生很大的影响。
- (2) 开环极点在 s 平面上位置的微小变化，有可能引起根轨迹形状的重大变化。

-
- 附加开环零点和极点的对闭环系统根轨迹形状有较大影响，进而影响闭环系统的瞬态和稳态性能，因此对系统的分析和设计提出要求。
 - 附加闭环零点和极点直接影响闭环系统传递函数，改变系统输出响应。
-

4.4 系统性能分析

三、闭环零点对系统输出响应的影响



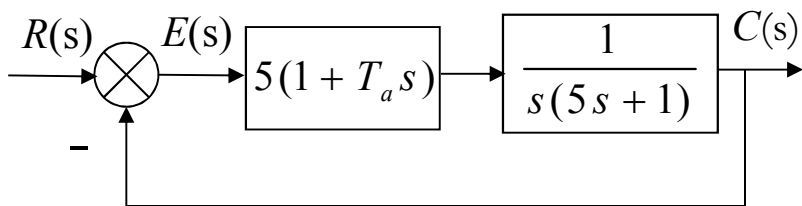
(a) 比例控制

开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{5}{s(5s+1)}$$

闭环传递函数

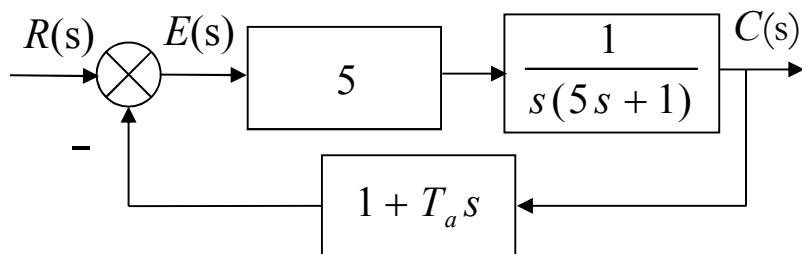
$$\Phi_a(s) = \frac{5}{s(5s+1)+5}$$



(b) 比例微分控制

$$G(s)H(s) = \frac{5(1+T_a s)}{s(5s+1)}$$

$$\Phi_b(s) = \frac{5(1+T_a s)}{s(5s+1)+5(1+T_a s)}$$



(c) 测速反馈控制

$$G(s)H(s) = \frac{5(1+T_a s)}{s(5s+1)}$$

$$\Phi_c(s) = \frac{5}{s(5s+1)+5(1+T_a s)}$$

闭环特征方程相同 零点不同

$$5s^2 + s + 5T_a s + 5 = 0$$

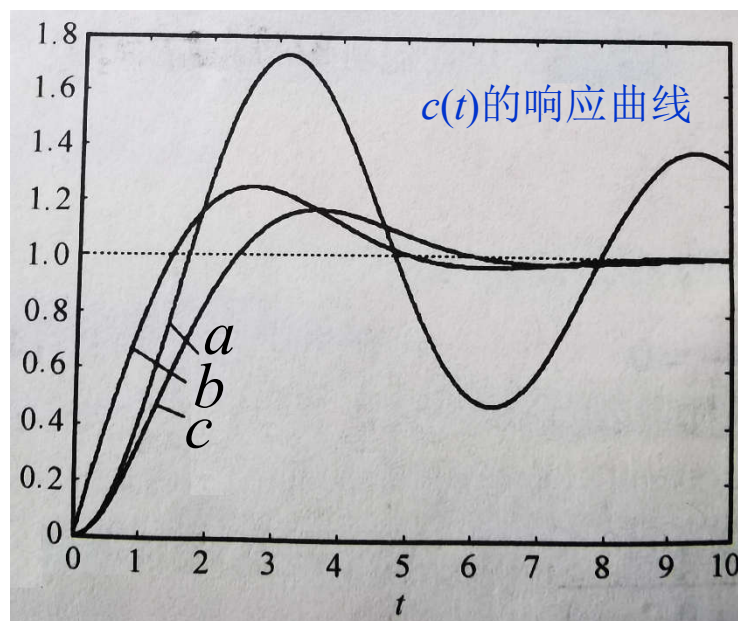
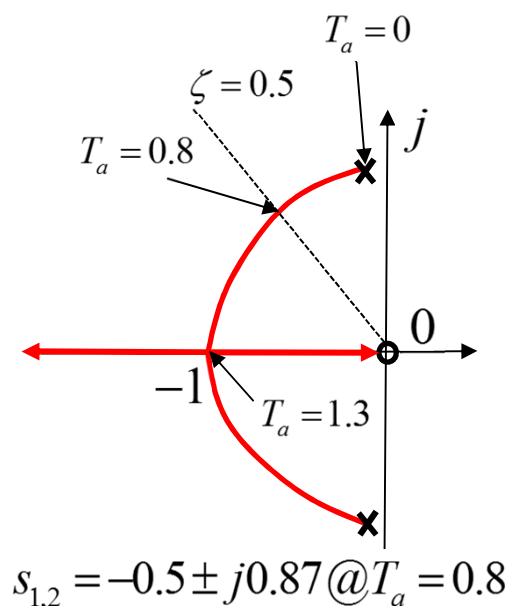
4.4 系统性能分析

$$5s^2 + s + 5T_a s + 5 = 0$$

$$s^2 + 0.2s + T_a s + 1 = 0$$

$$1 + \frac{T_a s}{s^2 + 0.2s + 1} = 0$$

$$z_1 = 0 \quad p_{1,2} = -0.1 \pm j0.995$$



➤ 闭环特征方程相同，输出响应的差异由闭环零点有无造成的。

➤ 传递函数的零点不形成自由运动的模态，但影响各模态在响应中所占的比重(系数)，因而影响响应曲线的形状。

闭环特征方程相同的前提下， b 和 c 曲线相比：

—— b . 闭环零点的作用

闭环零点对调节时间的影响不确定

b . 比例微分控制根据误差变化率提前控制，上升时间短，响应快，阻尼比小。

c . 测速反馈控制增强反馈作用，超调量最小，响应慢，阻尼比大。

4.4 系统性能分析

四、 闭环零点与极点共同作用下的输出响应

- (1) 主导极点是对整个时间响应过程起主要作用的闭环极点。
- (2) 相距很近（闭环零、极点之间的距离比它们本身的模值小一个数量级）的闭环零、极点称为偶极子，只要偶极子不是十分接近坐标原点，他们对系统动态性能的影响很小。
- (3) 接近坐标原点的偶极子对系统动态性能的影响必须考虑。

4.4 系统性能分析

例 已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

试根据系统的根轨迹分析系统的稳定性，计算闭环主导极点具有阻尼比 $\zeta = 0.5$ 时系统的动态性能指标。

解 (1) 先根据系统的开环传递函数和绘制根轨迹的基本规则绘制出系统的根轨迹图。

系统的特征方程是 $s(s+1)(s+2)(s+3) + K_r = 0$

$$\text{或 } s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K_r = 0$$

4.4 系统性能分析

由规则一、二知该系统有四条连续且对称于实轴的根轨迹，起点分别是系统的四个开环极点，即 $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = -2$, $p_4 = -3$ ；且四条根轨迹都趋向无穷远处。

由规则三可求出四条渐近线与实轴的交点为-1.5，它们与实轴正方向的夹角分别是 $\pm 45^\circ$ 和 $\pm 135^\circ$ 。

由规则四知实轴上的根轨迹是由0至-1线段和由-2至-3线段。

由规则五可求出根轨迹与实轴的两个交点（分离点）

$$2d^3 + 9d^2 + 11d + 3 = 0 \quad d_1 = -0.38 \quad d_2 = -2.62 \quad d_3 = -1.5$$

4.4 系统性能分析

由劳斯判据求根轨迹与虚轴的交点，先根据特征方程列出劳斯表

$$\begin{array}{ccc} s^4 & 1 & 11K_r \\ s^3 & 6 & 6 \\ s^2 & 10 & K_r \\ s^1 & \frac{60-6K_r}{10} & \\ s^0 & K_r & \end{array}$$

由 s^1 行的首项系数求得 $K_{rc}=10$ 。

用 $K_{rc}=10$ 和 $s=j\omega$ 代入 s^2 行辅助方程得到根轨迹与虚轴的交点为 $\omega_c=\pm 1$ 。

绘制出根轨迹的大致图形

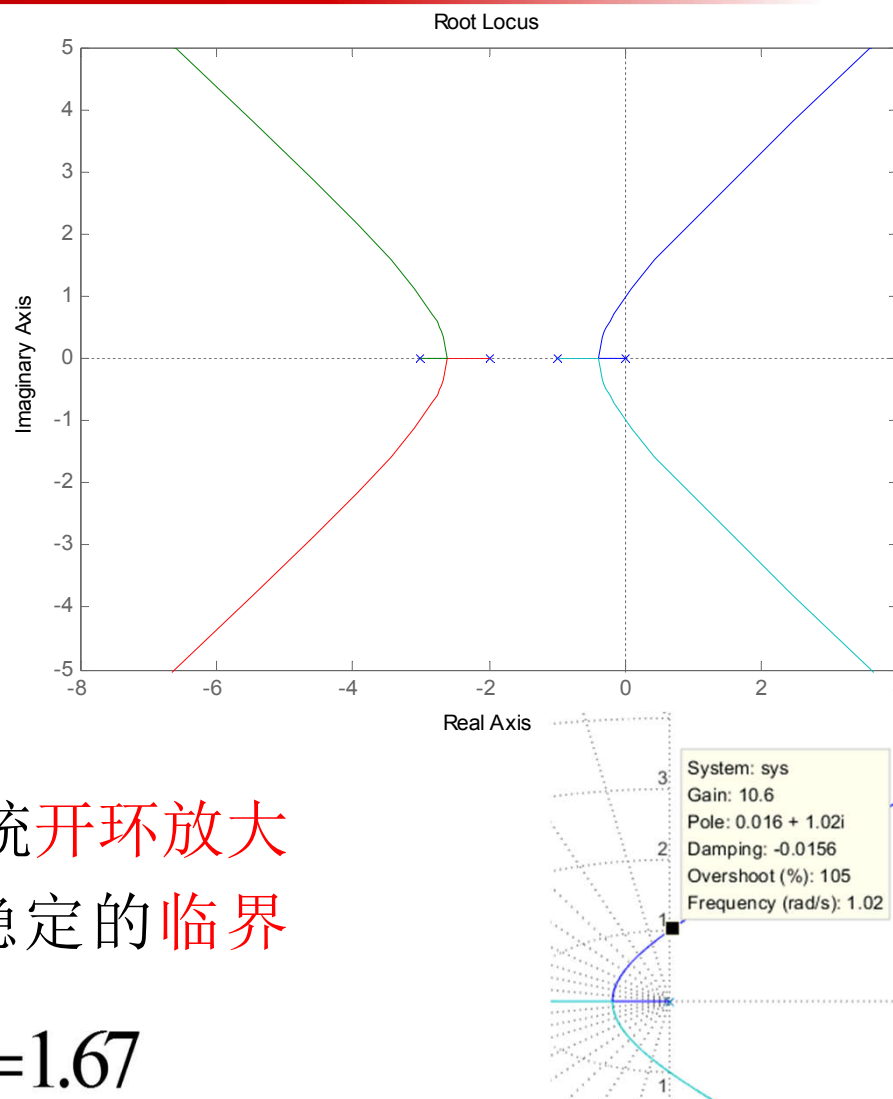
4.4 系统性能分析

(2) 系统性能定性分析

由根轨迹图知，有两条从 s 平面左半部穿过虚轴进入 s 平面右半部，它们与虚轴的交点 $\omega_c = \pm 1$ ，且交点处对应的临界开环根轨迹增益 $K_{rc} = 10$ 。

由临界开环根轨迹增益 K_{rc} 与系统开环放大系数 K 之间的关系可求出系统稳定的临界开环放大系数

$$K_c = 10/6 = 1.67$$



4.4 系统性能分析

(3) 系统动态性能指标

首先，求出满足阻尼比 $\zeta = 0.5$ 时系统的主导极点 s_1 、 s_2 的位置（假定 s_1 、 s_2 满足主导极点的条件）。

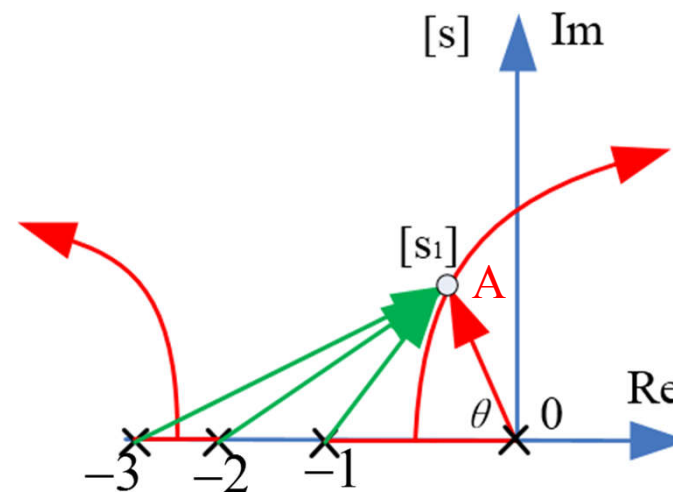
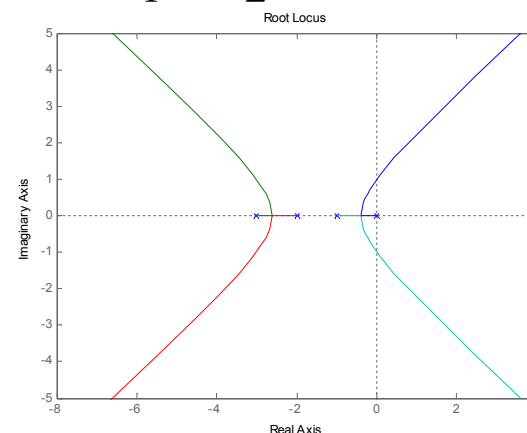
方法：作等阻尼比线oA

使oA与实轴负方向的夹角

$$\theta = \cos^{-1} \zeta = \cos^{-1} 0.5 = 60^\circ$$

等阻尼比线oA与根轨迹的交点 s_1 即为满足阻尼比 $\zeta = 0.5$ 时系统的一个闭环极点（即系统特征方程的一个根）。

用作图法或相角条件求特征根



4.4 系统性能分析

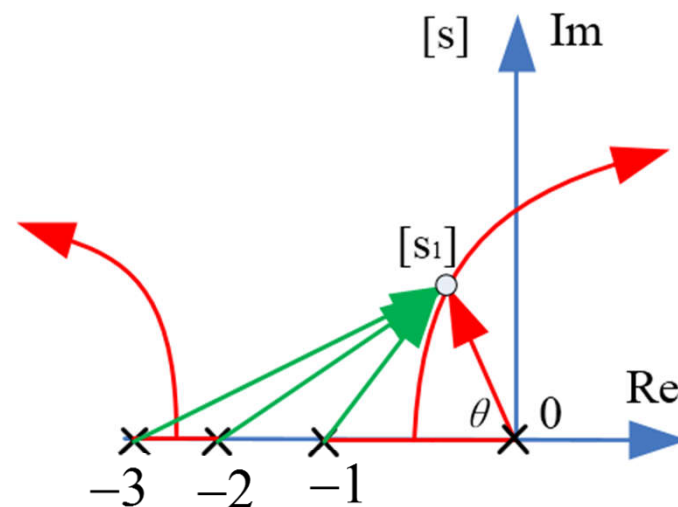
利用相角条件求特征根

$$-\angle(s_1 - 0) - \angle(s_1 + 1) - \angle(s_1 + 2) - \angle(s_1 + 3) = 180^\circ$$

$$\theta = 60^\circ \quad s_1(-x, \sqrt{3}x)$$

$$-120^\circ - \arctan \frac{\sqrt{3}x}{1-x} - \arctan \frac{\sqrt{3}x}{2-x} - \arctan \frac{\sqrt{3}x}{3-x} = 180^\circ$$

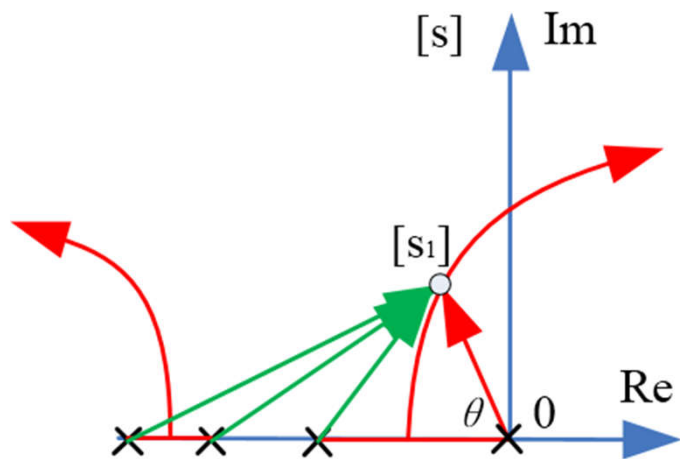
$$\tan(\theta_1 \pm \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 \pm \tan \theta_2}{1 \mp \tan \theta_1 \tan \theta_2} \quad s_1 = -0.3 + j0.52 \quad s_2 = -0.3 - j0.52$$



由幅值条件求出闭环极点 s_1 所对应的系统开环根轨迹增益 K_{r_1} :

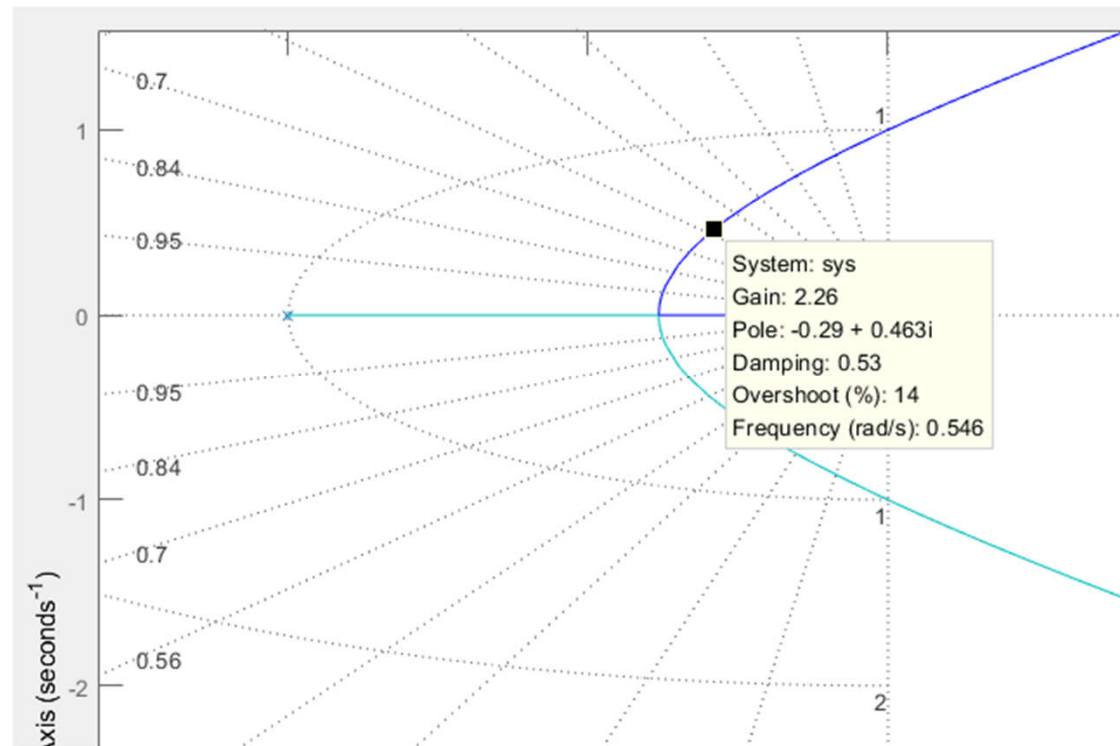
$$K_{r_1} = |s_1| |s_1 + 1| |s_1 + 2| |s_1 + 3| = 2.58$$

4.4 系统性能分析



$$s_1 = -0.3 + j0.52$$

$$K_{r_1} = 2.58$$



4.4 系统性能分析

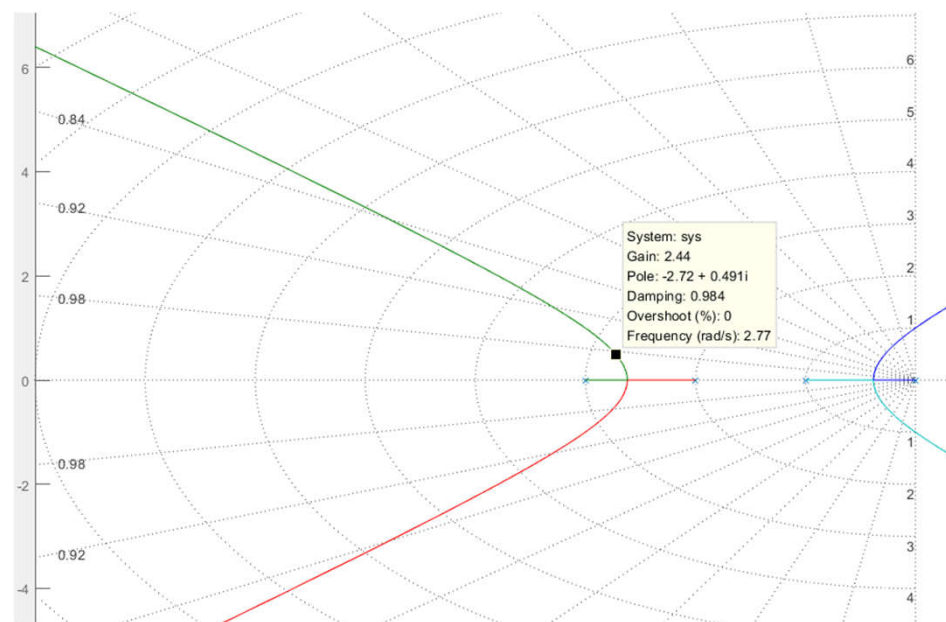
由根和系数之间关系得到另外两个闭环极点 s_3 、 s_4 ，它们也是一对共轭复数极点

韦达定理

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 (a \neq 0)$$

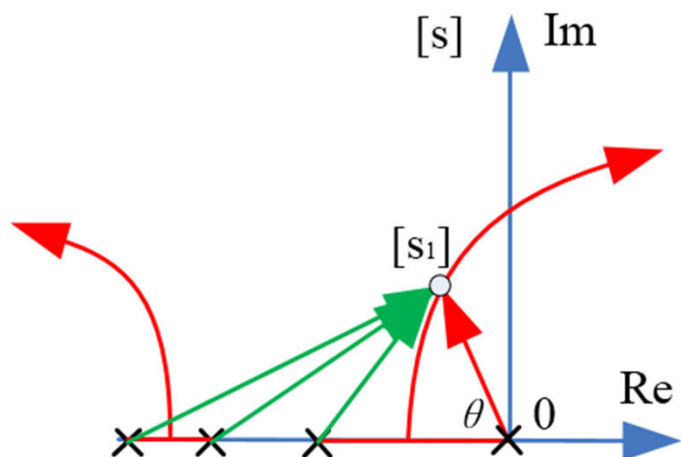
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -b/a \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = c/a \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -d/a \\ x_1x_2x_3x_4 = e/a \end{cases}$$

$$s_{3,4} = -2.7 \pm j0.5$$



满足主导极点的条件？

4.4 系统性能分析



$$s_1 = -0.3 + j0.52$$

$$s_{3,4} = -2.7 \pm j0.5$$

$$\frac{\text{Re}[s_{3,4}]}{\text{Re}[s_{1,2}]} = \frac{-2.7}{-0.3} = 9$$

共轭复数极点 s_3, s_4 与虚轴的距离是共轭复数极点 s_1, s_2 与虚轴的距离的九倍，且闭环极点 s_1, s_2 附近无闭环零点，说明 s_1, s_2 满足主导极点的条件。

4.4 系统性能分析

该系统可近似成由闭环主导极点构成的一个二阶系统，其闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{s_1 \cdot s_2}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{0.36}{s^2 + 0.6s + 0.36}$$

$$s_1 = -0.3 + j0.52$$

$$s_2 = -0.3 - j0.52$$

此时，对应的系统开环放大系数

$$K = \frac{K_{r_1}}{6} = \frac{2.58}{6} = 0.43$$

4.4 系统性能分析

求出系统的各项动态指标如下：

调节时间

$$t_s = \frac{3 + \ln \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{\zeta \omega_n} = \frac{3 + \ln \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}}}{0.6 \times 0.5} = 10.5(\text{秒})$$

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta \omega_n} (\Delta = 5\%, 0 < \zeta < 0.8) = \frac{3.5}{0.6 \times 0.5} = 11.67(\text{秒})$$

超调量

$$\sigma_p \% = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi} = e^{-\frac{0.5}{\sqrt{1-0.5^2}}\pi} = 16.3\%$$

峰值时间

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{0.6 \sqrt{1-0.5^2}} = 6.04(\text{秒})$$

参考P181 例4-8

4.4 系统性能分析

闭环系统零点和极点共同作用下的输出响应总结：

(1) 稳定性 —— 闭环极点均在 s 左半平面，系统稳定，且与闭环零点无关。

(2) 稳态性能

由开环传函和根轨迹分别确定型别和开环增益，再由静态误差系数法计算稳态误差。

(3) 运动形式

若闭环系统无零点且闭环极点均为实数极点，系统输出响应一定是单调的。

若闭环系统极点均为复数极点，系统输出响应一般是振荡的。

(4) 超调量

超调量取决于闭环复数主导极点的衰减率 σ 与 ω_d 的比值：
$$\frac{\sigma}{\omega_d} = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

且与其它闭环零点、极点接近坐标原点的程度有关。

(5) 调节时间

若闭环复数极点离虚轴最近，则取决于最靠近虚轴的闭环复数极点的实部绝对值 $\zeta\omega_n$ 。

若实数极点离虚轴最近，且它附近没有实数零点，则决定于该实数极点的模值。

4.4 系统性能分析

(6) 实数零点、极点的影响

闭环零极点减小系统阻尼，峰值时间提前，超调量增大。

@在闭环特征方程相同的前提下

闭环极点增大系统阻尼，峰值时间滞后，超调量减小。

} 离原点越近，作用越强。

(7) 偶极子

如果零极点之间的远离比它们本身的模值小一个数量级，则构成偶极子。

远离原点的偶极子，其影响可以忽略；接近原点的偶极子，其影响必须考虑。

(8) 主导极点

最靠近虚轴而附近又无闭环零点的某些闭环极点对系统性能影响最大，称为主导极点。

主导极点的实部比其它零极点的实部大3~6倍，则其它零极点可忽略。

用主导极点简化前后，保持 $\Phi(0)$ 不变——稳态不变。

用主导极点代替全部闭环极点时，响应曲线的形状误差仅出现在起始段，而主要决定性能指标的曲线中、后段基本不变。

本章结束

总结

1. 根轨迹基本概念 
2. 根轨迹的基本规则  
3. 参数根轨迹、零度根轨迹、非最小相位系统
4. 应用根轨迹法分析控制系统性能 

作业

4-3 (3) , 4-4 (1) , 4-11 (2) ,
4-12 (1) , 4-16 , 4-17