第三章 线性系统的时域分析法

第一节 系统时间响应的性能指标

第二节 一阶系统的时域分析

第三节 二阶系统的时域分析

第四节 高阶系统的时域分析

第五节 线性系统的稳定性分析

第六节 线性系统的稳态误差计算

第七节 控制系统时域设计

七、减小或消除稳态误差的措施

为了减小系统在输入信号和扰动作用下的稳态误差

1）增大系统开环增益，或增大扰动作用点之前系统的前向通道增益；

2）在系统前向通道或主反馈通道设置（增加）串联积分环节；

注意：

1）开环放大系数不能任意增大，否则系统将可能不稳定；

2）串联的积分环节一般不超过2；

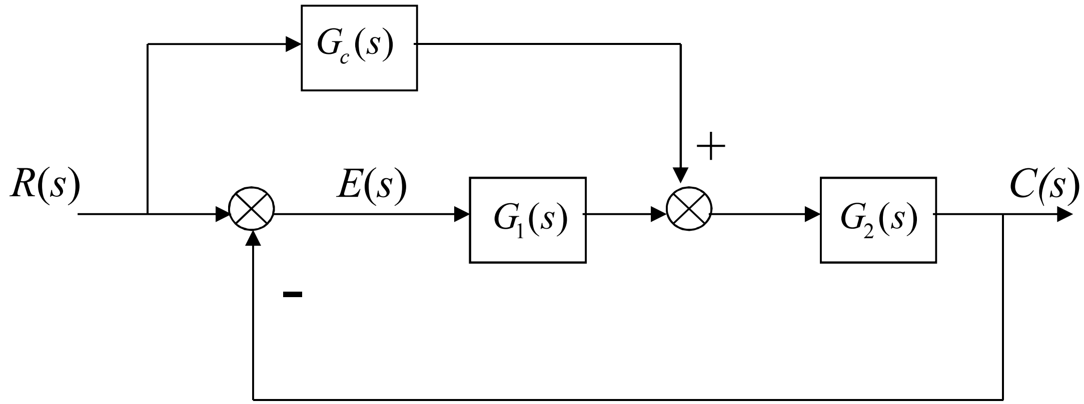
七、减小或消除稳态误差的措施

其它方法?

3）采用串级控制，主回路作为恒值控制，内回路（副回路）作为随动控制，对进入副回路的扰动具有较强抑制能力。

4）采用复合控制方法，加入前馈通路，构成前馈+反馈，主要抑制低频强扰动。

在图示系统中，为了消除由$R(s)$引起的稳态误差，可在原反馈控制的基础上，从给定输入处引出前馈量经补偿装置 $G_c(s)$ 加到系统中。



按给定输入补偿的复合控制

此时系统误差信号的拉氏变换为

$$E(s)=R(s)-C(s)\ =R(s)-G_2(s)[G_1(s)E(s)+G_c(s)R(s)]$$

整理得

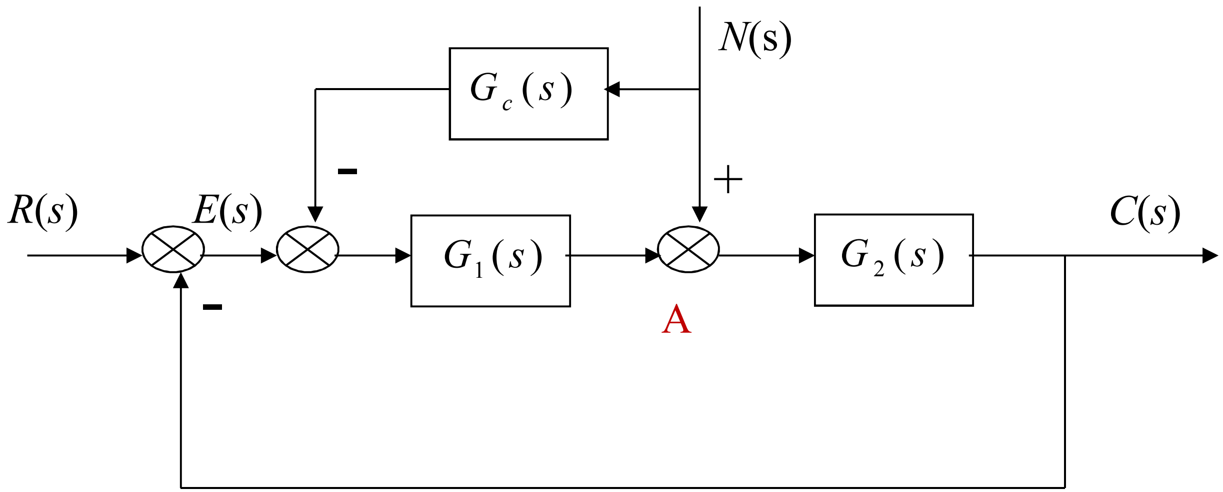
$$E(s)=\frac{[1-G_2(s)G_c(s)]}{1+G_1(s)G_2(s)}\cdot R(s)$$

如果选择补偿装置的传递函数为

$$G_c(s)=\frac{1}{G_2(s)}$$

则系统的给定稳态误差为零。

在图所示系统中，为**消除由$N(s)$引起的稳态误差**，可在原反馈控制的基础上，**从扰动输入引出前馈量**经补偿装置 $G_c(s)$ 加到系统中。



按扰动输入补偿的复合控制

若设$R(s)=0$，则 $E(s) = -C(s)$

$$C(s) = G_2(s)[N(s) - G_1(s)G_c(s)N(s) - G_1(s)C(s)]$$

经整理得 $$C(s)=\frac{G_2(s)[1-G_1(s)G_c(s)]}{1+G_1(s)G_2(s)}\cdot N(s) \quad =-E(s)$$

如果选择补偿装置的传递函数为 $$G_C(s)=\frac{1}{G_1(s)}$$

则输出不受扰动$N(s)$的影响，故系统的扰动稳态误差为零。

从结构上看，当满足 $G_C(s)=\dfrac{1}{G_1(s)}$ 时，扰动信号经两条通道到达A点，两个分支信号正好大小相等，符号相反，因而实现了对扰动的全补偿。

本章结束

作业：3-4，3-7，3-12(1)，3-14，
3-15(1)，3-16(2)，3-18

重要知识点

1）一阶、二阶系统单位阶跃响应分析 ★★★★

2）劳斯判据 ★★★★

3）稳态误差（两种定义，不同型别和输入情况下的稳态误差结果）★★★★

第四章 线性系统的根轨迹法

第一节　根轨迹的基本概念

第二节　根轨迹绘制的基本法则

第三节　广义根轨迹

第四节　系统性能分析

第五节　控制系统复域设计

- 阻尼比不同，闭环特征方程的根的分布不同
- 闭环特征方程的根与系统哪些参数相关

有没有更好的分析自动控制系统性能的方法？

- 根轨迹法是一种图解法，根据系统的开环零、极点分布，用作图方法简便地确定闭环系统的特征根与系统参数的关系，进而对系统的特性进行定性分析和定量计算。
- 根轨迹法是经典控制理论中对系统进行分析和综合的基本方法之一，1984年，伊文思。
- 本章主要介绍根轨迹的概念，绘制根轨迹的基本规则和用根轨迹分析自动控制系统性能的方法。

4.1 根轨迹的概念

一、根轨迹图

根轨迹图是开环系统（传递函数）某一参数由零变化到无穷大时闭环系统特征方程的根（即闭环极点）在s平面上的变化轨迹。

例　已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K_r}{s(s+2)}$$

分析随系统参数 K_r 的变化系统闭环特征方程的根在s平面上的分布。

解　系统的闭环传递函数$\Phi(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\dfrac{K_r}{s^2+2s+K_r}$

系统的特征方程：$s^2+2s+K_r=0$　　$s_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-K_r}$

4.1 根轨迹的概念

设K_r的变化范围是〔0, ∞），　$s_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-K_r}$

当$K_r=0$ 时，$s_1=0,s_2=-2$ ；

当$0<K_r<1$时，s_1与 s_2为不相等的两个负实根；

当$K_r=1$ 时，$s_1=s_2=-1$ 为等实根；

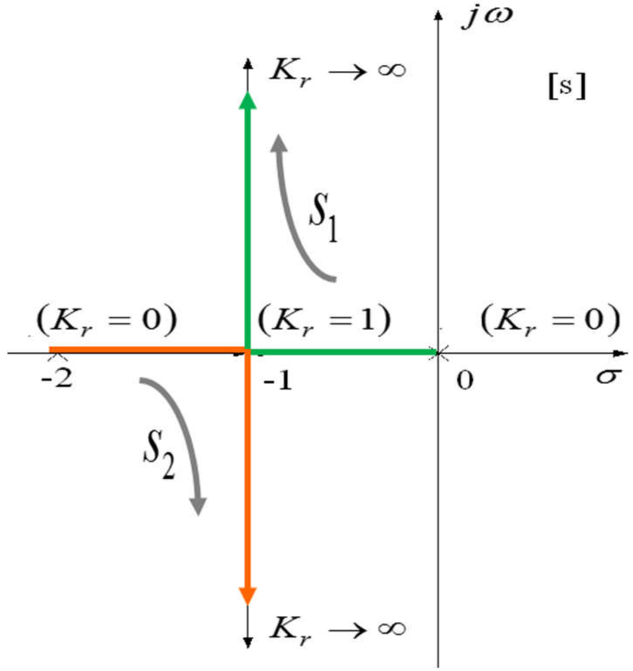
当1<Kr<∞时，$s_{1,2}=-1\pm j\sqrt{K_r-1}$为一对共轭复根，其实部都等于-1，虚部随$Kr$值的增加而增加；

当$K_r\to\infty$时，s_1、s_2的实部都等于-1，是常数，虚部趋向无穷远处。

开环系统参数K_r从零变到无穷时，绘制系统特征方程的根在S平面上变化的轨迹。

4.1 根轨迹的概念

1. 黄色和绿色线称为系统的根轨迹
2. 根轨迹上的箭头表示随着参数值的增加，根轨迹的变化趋势。
3. 标注的数值表示与闭环极点位置相应的增益数值。



根轨迹清晰地描绘了闭环极点与增益K_r的关系。

二、根轨迹与系统性能

1. 稳定性——越过虚轴
2. 稳态性能——型别、误差
3. 动态性能——阻尼程度

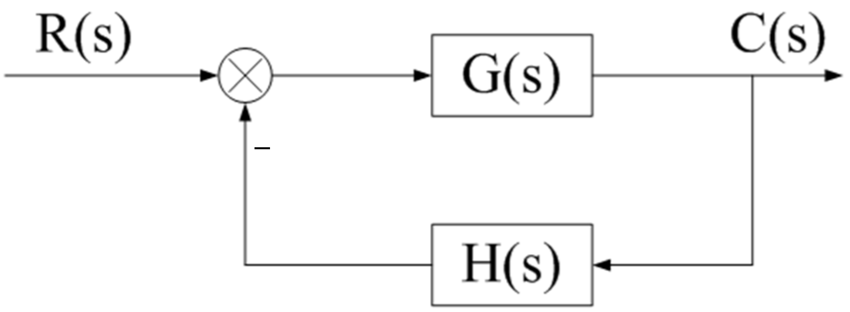
高阶系统如何解决？寻求图解法

4.1 根轨迹的概念

三、开环零、极点与闭环零、极点之间的关系

通常系统的开环零、极点是已知的，因此建立开环零、极点与闭环零、极点之间的关系，有助于闭环系统根轨迹的绘制。

设控制系统如下图所示，其闭环传递函数为



$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

4.1 根轨迹的概念

前向通路传递函数$G(s)$和反馈通路传递函数$H(s)$分别为

$$G(s)=K_1\frac{\prod_{j=1}^{f}(\tau_{Gj}s+1)}{s^{\nu}\prod_{i=1}^{q}(T_{Gi}s+1)}=K_{1r}\frac{\prod_{j=1}^{f}(s-z_{Gj})}{s^{\nu}\prod_{i=1}^{q}(s-p_{Gi})}$$

$$H(s)=K_2\frac{\prod_{j=1}^{l}(\tau_{Hj}s+1)}{\prod_{i=1}^{h}(T_{Hi}s+1)}=K_{2r}\frac{\prod_{j=1}^{l}(s-z_{Hj})}{\prod_{i=1}^{h}(s-p_{Hi})}$$

K_1 为前向通路增益，K_{1r} 为前向通路根轨迹增益； z为已知的开环零点

K_2 为反馈通路增益，K_{2r} 为反馈通路根轨迹增益。 p为已知的开环极点

4.1 根轨迹的概念

$$G(s)=K_{1r}\frac{\prod_{j=1}^{f}(s-z_{Gj})}{s^{v}\prod_{i=1}^{q}(s-p_{Gi})}$$

系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=K\frac{\prod_{j=1}^{m}(\tau_j s+1)}{s^{v}\prod_{i=1}^{n-v}(T_i s+1)}=K_r\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{s^{v}\prod_{i=1}^{n-v}(s-p_i)}$$

$K=K_1\cdot K_2$ 为系统的开环增益

$K_r=K_{1r}\cdot K_{2r}$ 为开环系统的根轨迹增益

$m=f+l$ 为开环系统的零点数

$n=v+q+h$ 为开环系统的极点数

2）开环系统前向通路零点+反馈通路极点

直接得到

系统的闭环传递函数可表示为：

$$\Phi(s)=\frac{K_{1r}\boxed{\prod_{j=1}^{f}(s-z_{Gj})\prod_{i=1}^{h}(s-p_{Hi})}}{\boxed{s^{v}\prod_{i=1}^{n-v}(s-p_i)+K_r\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}}$$

1）开环系统前向通路根轨迹增益

3）开环零点、极点和根轨迹增益

4.1 根轨迹的概念

$$\Phi(s)=\frac{K_{1r}\prod_{j=1}^{f}(s-z_{Gj})\prod_{i=1}^{h}(s-p_{Hi})}{s^{\nu}\prod_{i=1}^{n-\nu}(s-p_i)+K_r\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}$$

$$\frac{\text{前根增*前零*反极}}{\text{开极+开根增*开零}}$$

1、闭环系统根轨迹增益等于开环系统前向通路根轨迹增益。

2、闭环零点由开环前向通路零点和反馈通路极点所组成。

3、闭环极点与开环零点、极点以及开环根轨迹增益Kr均有关。

根轨迹法的基本任务：由已知的系统开环零、极点的分布及开环根轨迹增益，通过图解的方法找出闭环系统的极点。

4.1 根轨迹的概念

系统的开环根轨迹增益 K_r 与开环增益 K 的关系

系统的开环增益 K（或开环放大倍数）定义为

$$K = \lim_{s\to 0} s^{\nu} G(s)H(s)$$

式中 ν 是开环传递函数中含积分环节的个数

整理得

$$K = \lim_{s\to 0} s^{\nu} G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} K_r \frac{\prod_{j=1}^{m}(s - z_j)}{\prod_{i=1}^{n-\nu}(s - p_i)} = K_r \frac{\prod_{j=1}^{m}(-z_j)}{\prod_{i=1}^{n-\nu}(-p_i)}$$

开环系统的根轨迹增益 K_r 与系统的开环增益 K 仅相差一个比例常数，这个比例常数只与开环传递函数中的零点和极点有关。

4.1 根轨迹的概念

系统开环传递函数为 $$G(s)H(s)=\frac{K_r}{s(s+2)}$$

其开环增益为 $$K=\lim_{s\to 0} sG(s)H(s)=\frac{K_r}{2}$$

开环根轨迹增益 K_r 与开环增益 K 间的关系为 $K_r=2K$ ，它们之间仅相差一个比例常数2。

4.1 根轨迹的概念

四、根轨迹方程

根轨迹是系统的开环根轨迹增益 K_r 由零变到无穷大时，闭环系统特征方程的根在s平面上运动的轨迹，故系统的特征方程是绘制根轨迹的依据。

负反馈系统的特征方程为 $1+G(s)H(s)=0$ $\quad G(s)H(s)=-1$

根轨迹是系统所有闭环极点的集合，即每一点s都是闭环特征方程的根，所以根轨迹上的每一点都应满足：

$$G(s)H(s)=-1$$ 根轨迹方程

4.1 根轨迹的概念

根轨迹方程是一个向量方程，用模和相角的形式表示

$$G(s)H(s) = -1 = 1\,e^{j(2k+1)\pi} \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

满足系统特征方程的幅值条件和相角条件为

幅值条件： $|G(s)H(s)| = 1$

相角条件： $\angle G(s)H(s) = (2k+1)\pi \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

$$G(s)H(s) = K_r \frac{\prod_{j=1}^{m}(s - z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

幅值条件： $K_r \dfrac{\prod_{j=1}^{m}|s - z_j|}{\prod_{i=1}^{n}|s - p_i|} = 1$

4.1 根轨迹的概念

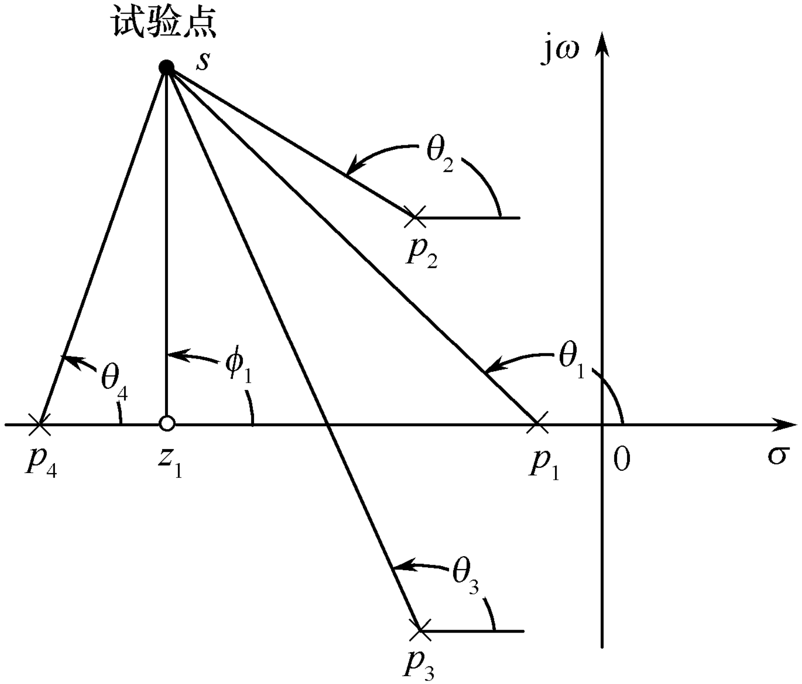
$$G(s)H(s)=K_r\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

$k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$

相角条件：$\sum_{l=1}^{m}\angle(s-z_l)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)=(2k+1)\pi$

由零、极点指向s点的线段与实轴正方向的夹角

相角条件形象表示，设 $G(s)H(s)=\dfrac{K_r(s-z_1)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)(s-p_4)}$



1）先在复平面上标出开环极点：$p1,p2,p3,p4$和开环零点$z1$。

2）对试验点s，如果它在根轨迹上，就应当满足相角条件 ：

$$\phi_1-\theta_1-\theta_2-\theta_3-\theta_4=(2k+1)\pi$$

$$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

4.1 根轨迹的概念

综上分析，可以得到如下结论：

(1) 相角条件与系统开环根轨迹增益K_r值的大小无关。即在s平面上，**所有满足相角条件**点的集合构成系统的**根轨迹图**。即相角条件是绘制根轨迹的主要依据。——相角条件是绘制根轨迹的充要条件

(2) 幅值条件与系统开环根轨迹增益K_r值的大小有关。即K_r值的变化会改变系统闭环极点在s平面上的位置。

(3) 在系统参数全部确定的情况下，凡能满足相角条件和幅值条件的s值，就是对应给定参数的特征根，或系统的闭环极点。

(4) 相角条件和幅值条件只与系统的开环传递函数有关，因此，已知系统的开环传递函数可绘制出闭环系统的根轨迹图。

4.2 根轨迹绘制的基本法则

一、绘制根轨迹的基本规则

常规根轨迹（或一般、普通）：以开环根轨迹增益K_r为可变参数绘制的根轨迹。绘制常规根轨迹的基本规则主要有8条：

1）根轨迹的起点与终点；

2）根轨迹的分支数、对称性和连续性；

3）根轨迹的渐近线；@n-m条

4）根轨迹在实轴上的分布；

5）根轨迹的分离点与分离角；

6）根轨迹的起始角和终止角；@复数零极点

7）根轨迹与虚轴的交点。

8）根之和

4.2 根轨迹绘制的基本法则

规则一　　根轨迹的起点(Kr=0)和终点(Kr= ∞)

根轨迹方程：

$$K_r \frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} = -1$$

闭环极点　开环极点　闭环极点　开环零点

$$\prod_{i=1}^{n}\left(s-p_i\right)+K_r\prod_{j=1}^{m}\left(s-z_j\right)=0$$

当Kr=0时，必须有 $s_i = p_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 。此时，系统的闭环极点与开环极点相同(重合)，把开环极点称为根轨迹的起点，它对应于开环根轨迹增益Kr=0。

当Kr=∞时，必须有 $s_j = z_j (j = 1, 2, \cdots, m)$。此时，系统的闭环极点与开环零点相同(重合)，把开环零点称为根轨迹的终点，它对应于开环根轨迹增益Kr=∞。

4.2 根轨迹绘制的基本法则

零极点数量匹配三种情况：

$$K_r \frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} = -1 \Rightarrow K_r = \frac{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}{\prod_{j=1}^{m}|s-z_j|} \text{ 或 } \frac{\prod_{j=1}^{m}|(s-z_j)|}{\prod_{i=1}^{n}|(s-p_i)|} = \frac{1}{K_r}$$

1．当$m=n$时，根轨迹的起点与终点均有确定的值。

2．当$m<n$时，m条根轨迹终止于开环零点(称为有限零点)，n-m条根轨迹终止于无穷远点(称为无限零点)。

3．当$m>n$时，n条根轨迹起始于开环极点(称为有限极点)，m-n条根轨迹来自于无穷远点(称为无限极点)。“实际物理系统中虽不会出现，但在参数根轨迹中有可能出现在等效开环传递函数中。”

结论：始于开环极点（$Kr=0$），终于开环零点（$Kr\to\infty$）。

4.2 根轨迹绘制的基本法则

规则二 根轨迹的分支数、连续性和对称性

$$K_r\prod_{j=1}^{m}\left(s-z_j\right)+\prod_{i=1}^{n}\left(s-p_i\right)=0$$

- 根轨迹的分支数（条数），等于系统特征方程根的数量（m和n中大者）。
- 系统开环根轨迹增益K_r(实变量）与复变量s有一一对应的关系，当K_r（0，∞）变化时，系统特征方程根也是连续的，根轨迹是连续曲线。
- 实际的物理系统的参数都是实数，若特征方程有复数根，一定是对称于实轴的共轭复根，因此根轨迹总是对称于实轴的。

结论：根轨迹是m或n条连续且对称于实轴的曲线。

4.2 根轨迹绘制的基本法则

规则三　根轨迹的渐近线

当开环极点数n大于开环零点数m时，系统有n-m条根轨迹终止于s平面的无穷远处，这n-m条根轨迹分支沿着一组渐近线趋向无穷远处。渐近线有n-m条，且它们交于实轴上的一点。

渐近线与实轴的交点位置 σ_a

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}$$

渐近线与实轴正方向的交角 φ_a

$$\varphi_a = \frac{2k+1}{n-m}\pi \qquad (k=0,1,2,\cdots;n-m-1)$$

根轨迹渐近线是n-m条与实轴交点为 σ_a，交角为 φ_a 的一组射线。

渐近线就是s很大时的根轨迹，因此渐近线也对称于实轴。

4.2 根轨迹绘制的基本法则

系统开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K_{\mathrm{r}}}{s(s+2)}$$

开环极点数n=2, 开环零点数m=0, n-m =2

两条渐近线在实轴上的交点位置为 $\sigma_{\mathrm{a}}=\dfrac{-2}{2}=-1$

它们与实轴正方向的交角分别为$\dfrac{\pi}{2}(k=0)$ 和 $\dfrac{3\pi}{2}(k=1)$

两条渐近线正好与 $K_r \geq 1$ 时的根轨迹重合。

4.2 根轨迹绘制的基本法则

例　已知系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K_r(s+2)}{s^2(s+1)(s+4)}$

画出该系统根轨迹的渐近线。

解　对于该系统有n=4，m=1，n−m=3；三条渐近线与实轴交点位置为

$$\sigma_a=\frac{-1-4+2}{3}=-1$$

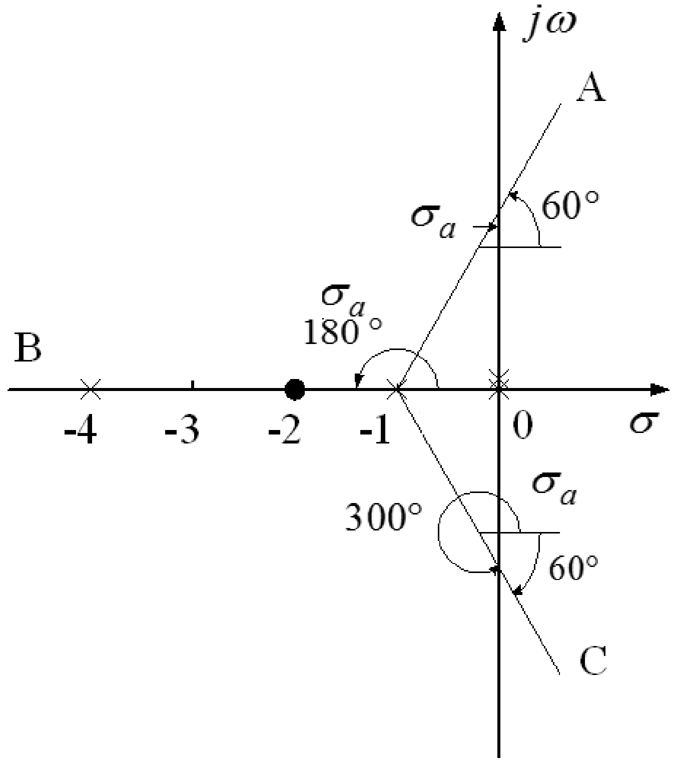
与实轴正方向的交角：

$$\frac{\pi}{3}(k=0)$$

$$\pi(k=1)$$

$$-\frac{\pi}{3}(k=2)$$

渐近线如图



4.2 根轨迹绘制的基本法则

规则四　根轨迹在实轴上的分布

若实轴上某线段右侧的开环实数零、极点的个数之和为奇数，则**该线段是实轴上的根轨迹**。

例　设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K_{\mathrm{r}}(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)(s-z_4)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)(s-p_4)(s-p_5)}$$

其中，p_1、p_2、p_3、z_1、z_2 为实极点和实零点，p_4、p_5、z_3、z_4为共轭复数极、零点。

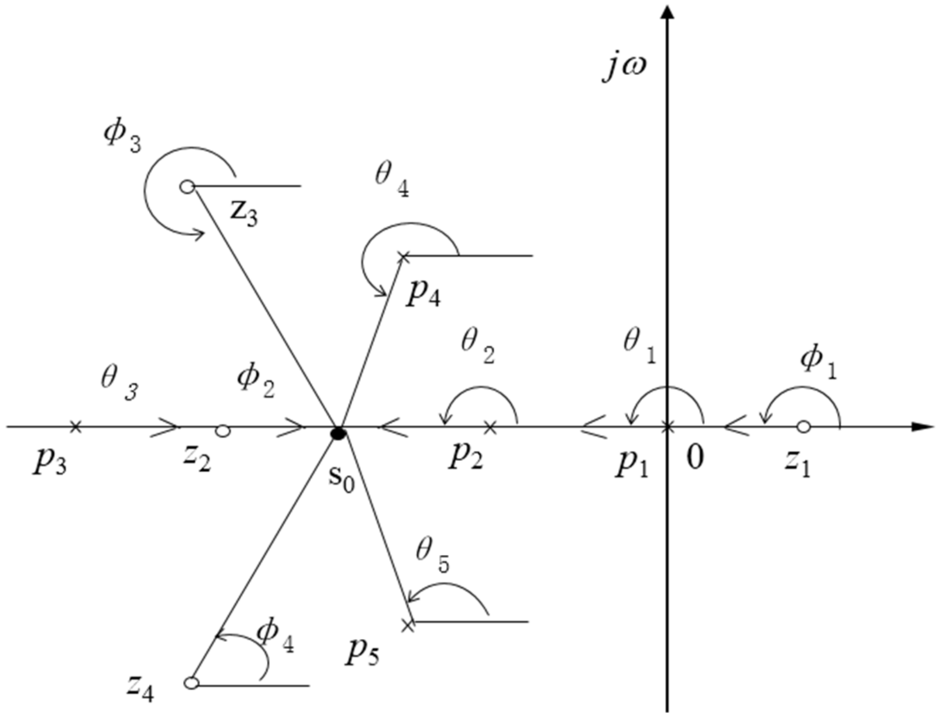
零极点在s平面上的分布如图，试分析实轴上的根轨迹与开环零点和极点的关系。

4.2 根轨迹绘制的基本法则

实轴上的根轨迹必须满足绘制根轨迹的相角条件，即

$$\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)=(2k+1)\pi$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$



实轴上的根轨迹

选择s_0作为试验点。

开环极点到s_0点的向量的相角为

$\theta_i(i=1,2,3,4,5)$

——指向s_0

开环零点到s_0点的向量的相角为

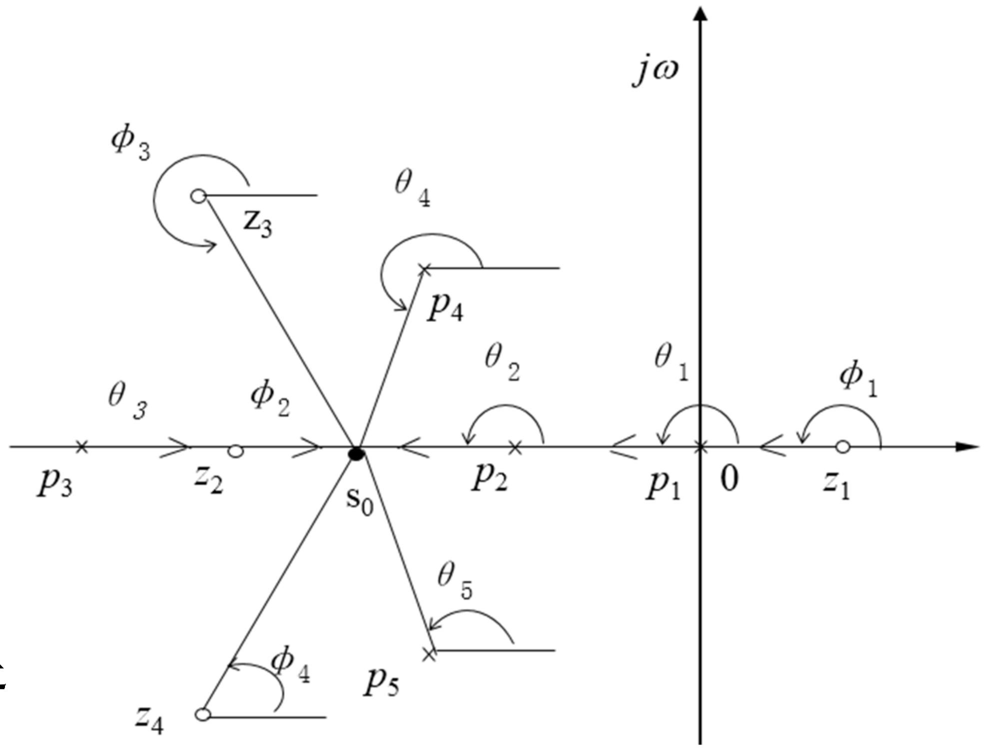
$\varphi_j(j=1,2,3,4)$

确定实轴上的根轨迹时，不考虑复数开环零、极点对相角的影响。

4.2 根轨迹绘制的基本法则

- 实轴上s_0点左侧的开环极点p_3和开环零点z_2构成的向量的夹角均为零度；
- 实轴上s_0点右侧的开环极点p_1 、p_2和开环零点z_1构成的向量的夹角均为180°。
- 若s_0为根轨迹上的点，必满足

$$\sum_{j=1}^{4}\phi_j-\sum_{i=1}^{5}\theta_i=(2k+1)\pi$$



实轴上的根轨迹

结论：只有s_0点右侧实轴上的开环实数极点和零点的个数之和为奇数时，才满足相角条件。

本次课结束

重要知识点

1）扰动抑制措施 ★★

2）根轨迹的基本概念、意义。★

3）绘制常规根轨迹的原则 ★★★