

- §3-1 引 言
- §3-2 一阶系统的时域响应
- §3-3 二阶系统的时域响应
- §3-4 高阶系统的时域响应
- §3-5 控制系统的稳定性
- §3-6 控制系统的稳态误差

分析和设计控制系统的首要任务是建立系统的数学模型。一旦获得合理的数学模型，就可以采用不同的**分析方法**来分析系统的性能。

经典控制理论中常用的工程方法有

- 时域分析法
- 根轨迹法
- 频率特性法

分析内容

- ❖ 瞬态性能
- ❖ 稳态性能
- ❖ 稳定性

在时间域内研究系统在**典型输入信号**的作用下，其**输出响应**随时间变化规律的方法。对于任何一个稳定的控制系统，输出响应含有**瞬态分量**和**稳态分量**。

瞬态分量 由于输入和初始条件引起的，随时间的推移而趋向消失的响应部分，它提供了系统在过度过程中的各项动态性能的信息。

稳态分量 是过渡过程结束后,系统达到平衡状态，其输入输出间的关系不再变化的响应部分，它反映了系统的稳态性能或误差。

- 时域分析法的物理概念清晰，准确度较高，在**已知系统结构**和**参数**并建立了系统的微分方程后，使用时域分析法比较方便。
- 不过若用它来设计和校正系统，根据系统性能指标的要求来选定系统的结构和参数，却存在一定的困难。

为了研究控制系统的**输出响应**，必须了解输入信号的变化形式。在工程实际中，有些系统的输入信号是已知的（如**恒值系统**），但对有些控制系统来说，常常不能准确地知道其输入量是如何变化的（如**随动系统**）。

因此，为了方便系统的分析和设计，使各种控制系统有一个进行比较的基础，需要选择一些典型**试验信号**作为系统的输入，然后比较各种系统对这些输入信号的**响应**。

常用的试验信号在第二章已经介绍，它们是**阶跃函数、斜坡函数、抛物线函数、脉冲函数及正弦函数**。

这些函数都是简单的时间函数，并且易于通过实验产生，便于数学分析和试验研究。

如果控制系统的实际输入大部分是随时间逐渐增加的信号，则选用**斜坡函数**较合适；如果作用到系统的输入信号大多具有突变性质时，则选用**阶跃函数**较合适。

需要注意的是，不管采用何种典型输入型号，对**同一系统**来说，其过渡过程所反应出的**系统特性**应是统一的。这样，便有可能在同一基础上比较各种控制系统的性能。

- 此外，在选取试验信号时，除应尽可能简单，以便于分析处理外，还应选择那些能使系统工作在**最不利**的情况下的输入信号作为**典型实验信号**。
- 本章主要讨论控制系统在**阶跃函数**、**斜坡函数**、**脉冲函数**等输入信号作用下的**输出响应**。

§3-2 一阶系统的时域响应

9

由一阶微分方程描述的系统称为**一阶系统**，典型闭环控制一阶系统如图**3-1**所示。其中 是积分环节，**T**为它的时间常数。

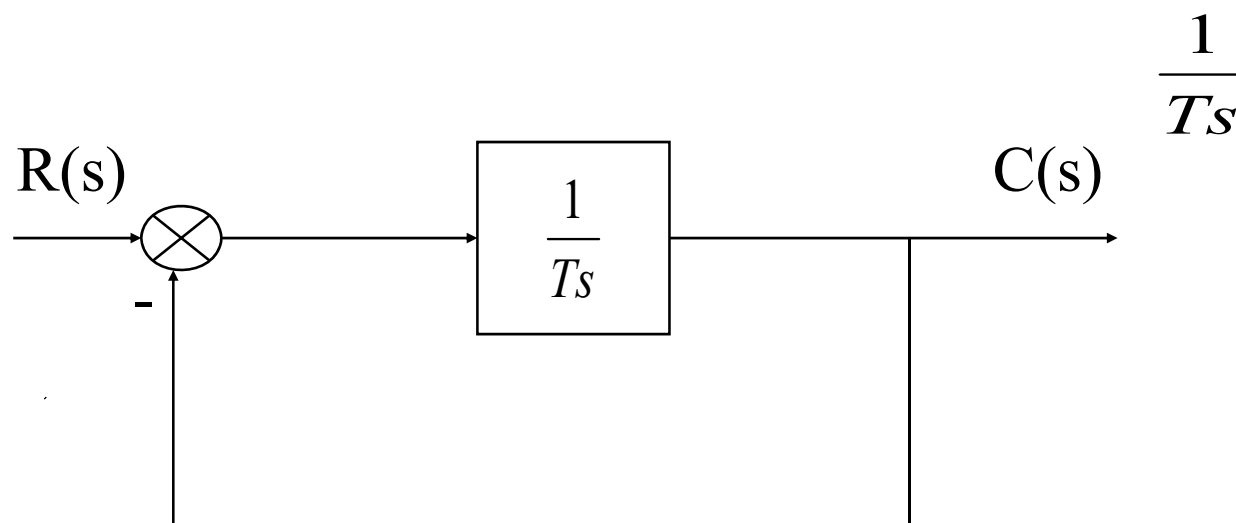


图3-1 一阶系统的结构图

系统的传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (3-1)$$

可见，典型的一阶系统是一个**惯性环节**，而**T**也是闭环系统的**惯性时间常数**。

系统输入、输出之间的关系为

$$C(s) = \Phi(s).R(s) = \frac{1}{Ts + 1} R(s)$$

对应的微分方程为

$$T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$$

在**零初始条件**下，利用**拉氏反变换**或**直接求解微分方程**，可以求得一阶系统在典型输入信号作用下的输出响应。

一、单位阶跃响应

设系统的输入为单位阶跃函数 **$r(t) = 1(t)$** ，其拉氏变换为：

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

则输出的拉氏变换为：

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

对上式进行拉氏反变换，求得单位阶跃响应为：

$$C(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0) \quad (3-2)$$

上式表明，当初始条件为**零**时，一阶系统单位阶跃响应的变化曲线是一条单调上升的**指数曲线**，式中的**1**为稳态分量， $-e^{-\frac{t}{T}}$ 为瞬态分量，当 $t \rightarrow \infty$ 时，瞬态分量衰减为**零**。

在整个工作时间内，系统的响应都不会超过起**稳态值**。由于该响应曲线具有**非振荡特征**，故也称为**非周期响应**。

一阶系统的单位阶跃响应曲线如图3-2所示。

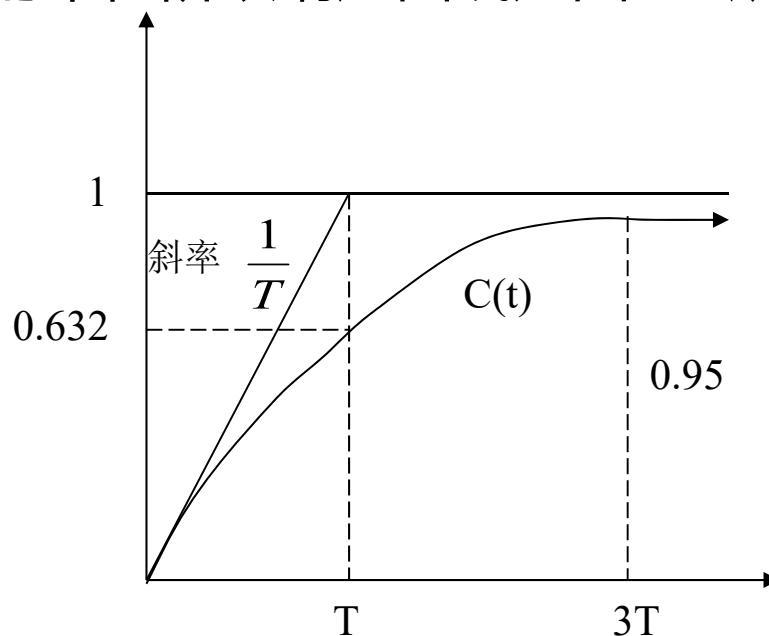


图3-2 一阶系统的单位阶跃响应

图3-2中指数响应曲线的初始 ($t=0$ 时) 斜率为 $\frac{1}{T}$

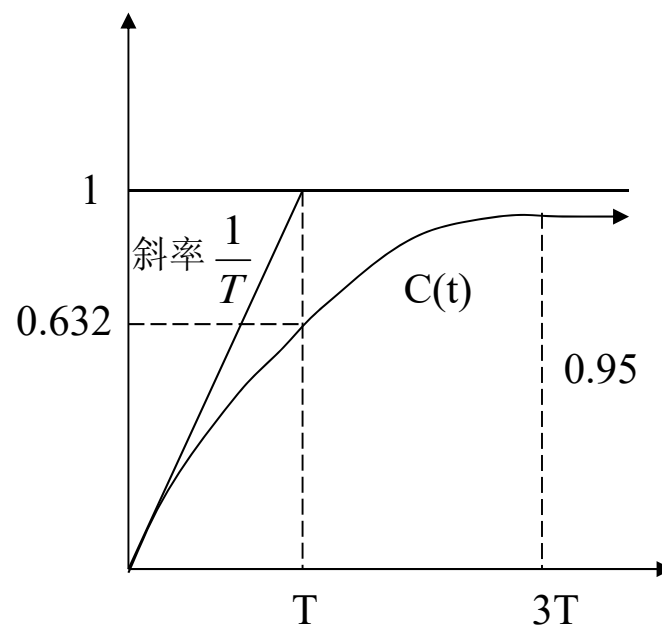


图3-2 一阶系统的单位阶跃响应

因此，如果系统保持初始响应的变化速度不变，则当 $t=T$ 时，输出量就能达到稳态值。

实际上，响应曲线的斜率是不断下降的，经过 T 时间后，输出量 $C(T)$ 从零上升到稳态值的63.2%。经过 $3T \sim 4T$ 时， $C(t)$ 将分别达到稳态值的95% ~ 98%。

可见，时间常数 T 反应了系统的响应速度， T 越小，输出响应上升越快，响应过程的快速性也越好。

由式 (3-2) 可知，只有当 t 趋于无穷大时，响应的瞬态过程才能结束，在实际应用中，常以输出量达到稳态值的 **95%** 或 **98%** 的时间作为系统的响应时间（即调节时间），这时输出量与稳态值之间的偏差为 **5%** 或 **2%**。

- 系统单位阶跃响应曲线可用实验的方法确定，将测得的曲线与图 3-2 的曲线作比较，就可以确定该系统是否为一阶系统或等效为一阶系统。
- 此外，用实验的方法测定一阶系统的输出响应由零值开始到达稳态值的 63.2% 所需的时间，就可以确定系统的时间常数 T 。

二、单位斜坡响应

设系统的输入为单位斜坡函数 **$r(t)=t$** ，其拉氏变换为： $R(s)=\frac{1}{s^2}$

则输出的拉氏变换为： $C(s)=\frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + \frac{1}{T}}$

$$C(t) = t - T + Te^{-\frac{t}{T}} = t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (t \geq 0) \quad (3-3)$$

式中， **$t-T$** 为稳态分量， $Te^{-\frac{t}{T}}$ 为瞬态分量，当 $t \rightarrow \infty$ 时，瞬态分量衰减到零。一阶系统的单位斜坡响应曲线如图**3-3**所示。

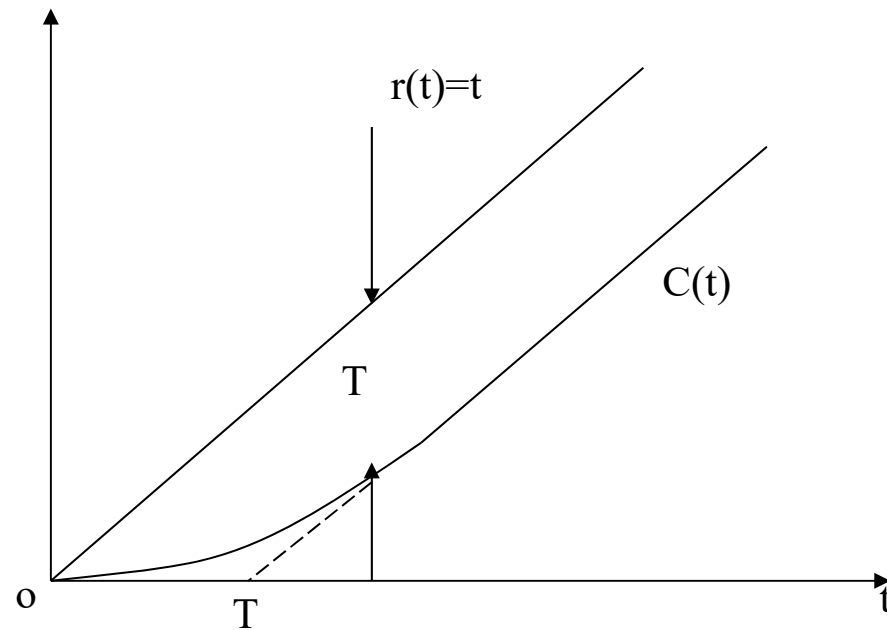


图3-3 一阶系统的单位斜坡响应

显然，系统的响应从 $t=0$ 时开始跟踪输入信号而单调上升，在达到稳态后，它与输入信号同速增长，但它们之间存在跟随误差。即

$$e(t) = r(t) - c(t) = T(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

且 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = T$

可见，当 t 趋于无穷大时，误差趋近于 T ，因此系统在进入稳态以后，在任一时刻，输出量 $c(t)$ 将小于输入量 $r(t)$ 一个 T 的值，时间常数 T 越小，系统跟踪斜坡输入信号的稳态误差也越小。

三、单位脉冲响应

设系统的输入为单位脉冲函数其拉氏变换为 $R(s) = 1$, 则输出响应的拉氏变换为 $C(s) = \frac{1}{T} e^{-\frac{s}{T}}$ ($t \geq 0$) (3-4)

对上式进行拉氏变换, 求得单位脉冲响应为

由此可见, 系统的单位脉冲响应就是系统闭环传递函数的拉氏变换。一阶系统的单位脉冲响应曲线如图3-4所示。

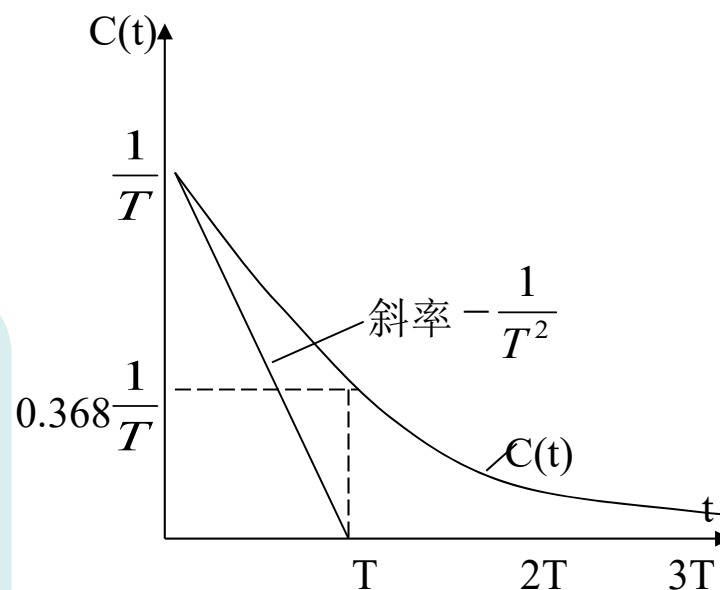


图3-4 一阶系统的脉冲响应

一阶系统的单位脉冲响应是单调下降的指数曲线，曲线的初始斜率为 $-\frac{1}{T^2}$ ，输出量的初始值为 $\frac{1}{T}$ 。

当 t 趋于 ∞ 时，输出量 $c(\infty)$ 趋于零，所以它不存在稳态分量在实际中 $\frac{1}{T}$ 一般认为在 $t=3T \sim 4T$ 时过度过程结束，故系统过度过程的快速性取决于 T 的值， T 越小系统响应的快速性也越好。

由上面的分析可见，一阶系统的特性由参数**T**来表述，响应时间为 **(3-4) T**；在**t=0**时，单位阶跃响应的斜率和单位脉冲响应的幅值均为 $\frac{1}{T}$ ；单位斜坡响应的稳态误差为**T**。**T**值越小，系统响应的快速性越好，精度越高。

§2-3中已经指出，按照脉冲函数，阶跃函数、斜坡函数的顺序，前者是后者的导数，而后者是前者的积分。

■ 比较一阶系统对上述信号的输出响应可以发现，脉冲响应、阶跃响应、斜坡响应之间也存在同样的对应关系。这表明，系统对某种输入信号导数的响应，等于对该输入信号响应的导数。

□ 反之，系统对某种输入信号积分的响应，等于系统对该输入信号响应的积分。这是线性定常系统的一个重要特征，它不仅适用于一阶线性定常系统，也适用于高阶线性定常系统。

■ 因此，在后面的分析中，我们将主要研究系统的单位阶跃响应。

由二阶微分方程描述的系统称为**二阶系统**。在控制工程实践中，二阶系统应用极为广泛，此外，许多高阶系统在一定的条件下可以近似为二阶系统来研究，因此，详细讨论和分析二阶系统的特征具有极为重要的实际意义。

设一个二阶系统的结构图如图3-5所示。

系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts^2 + s + K} \quad (3 - 5)$$

其中

K 为系统的开环放大系数， T 为时间

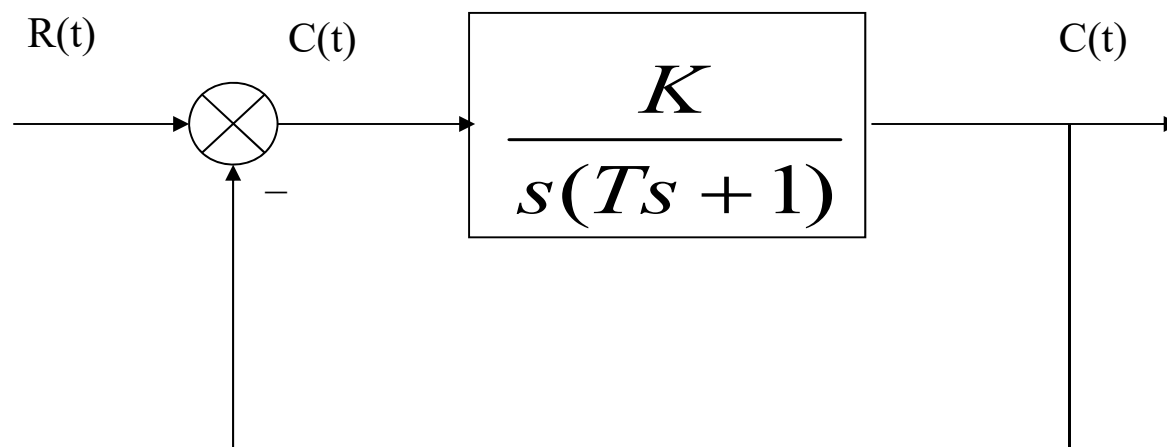


图3-5 二阶系统结构图

与式 (3-5) 相对应的微分方程为 $T \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + \frac{dc(t)}{dt} + Kc(t) = Kr(t)$

可见，该系统是一个二阶系统。为了分析方便，将系统的传递函数改写成如下形式：

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-6)$$

式中 $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}}$ 称为无阻尼自然振荡角频率，（简称为无阻尼自然频率）， $\zeta = \frac{1}{2\sqrt{TK}}$ 称为阻尼系数（或阻尼比）。

系统的闭环特征方程为 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ (3-7)

它的两个根为 $s_{1,2} = P_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$ (3-8)

二阶系统特征根（即闭环极点）的形式随着阻尼比 ζ 取值的不同而不同。

1.二阶系统的阶跃响应

设系统的输入为单位阶跃函数，则系统输出响应的拉氏变换表达式为

$$C(s) = \Phi(s) \cdot R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} \quad (3-9)$$

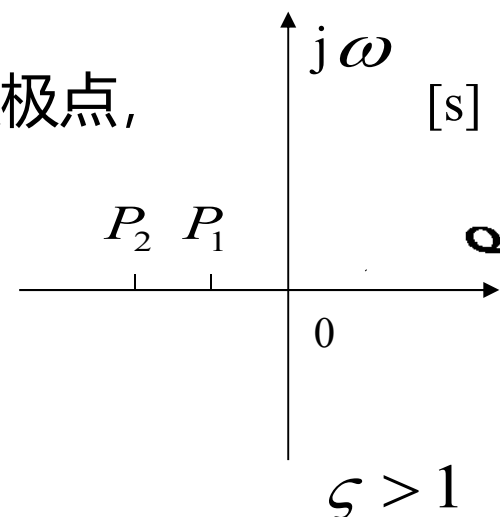
对上式取拉氏反变换，即可求得二阶系统的单位阶跃响应

(一) 过阻尼 ($\zeta > 1$) 的情况

当 $\zeta > 1$ 时, 系统具有两个不相等的负实数极点,

$$P_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$P_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$



它们在S平面上的位置如图3-6所示。 图3-6 过阻尼时极点分布

此时, (3-9) 可写成

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2}$$

式中 $A_0 = [C(s) \cdot s]_{s=0} = 1$

$$A_1 = [C(s) \cdot (s - p_1)]_{s=p_1} = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot p_1}$$

$$A_2 = [C(s) \cdot (s - p_2)]_{s=p_2} = \frac{-\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot p_2}$$

将 A_0 、 A_1 、 A_2 代入式 (3-10) , 并进行拉氏反变换, 得

$$C(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2} \right) \quad (t \geq 0) \quad (3-11)$$

式(3-11)表明, 系统的单位阶跃响应由稳态分量和瞬态分量组成, 其稳态分量为**1**, 瞬态分量包含两个衰减指数项, 随着**t**增加, 指数项衰减, 响应曲线单调上升, 其响应曲线如图**3-7**所示。

当 $\zeta \gg 1$ 时, 闭环极点 p_2 比 p_1 距虚轴远的多, 故 $e^{p_2 t}$ 比 $e^{p_1 t}$ 衰减快的多。

因此，可以忽略 p_2 对系统输出的影响，从而把二阶系统近似看作一阶系统来处理。

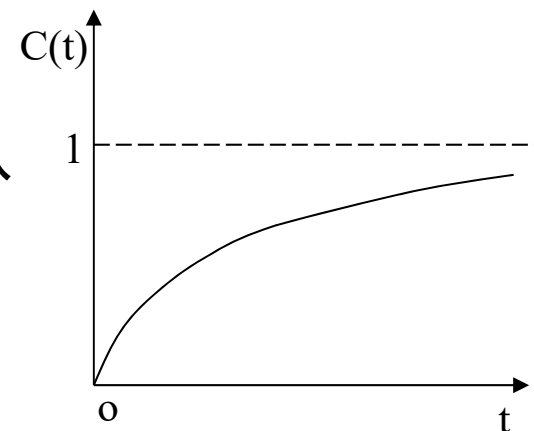


图3-7 过阻尼响应

在工程上，当 $\zeta \geq 1.5$ 时，这种近似处理方法具有足够的准确度。

通常，称阻尼比 $\zeta > 1$ 时二阶系统的运动状态为过阻尼状态。

(二)欠阻尼 ($0 < \zeta < 1$) 的情况

当 $0 < \zeta < 1$ 时, 系统具有一对共轭复数极点, 且在S平面的左半部分, 即

$$p_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

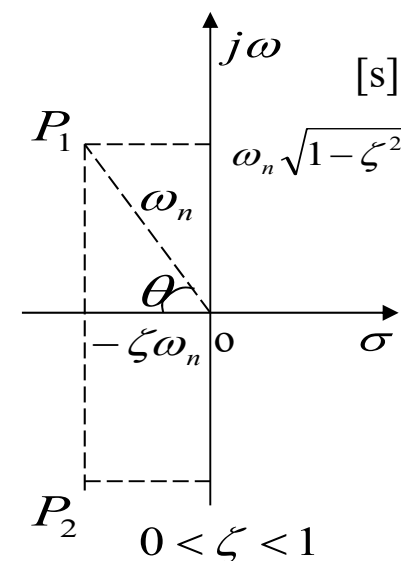


图3-8 欠阻尼时的极点分布

它们在S平面上的位置如图3-8所示。此时, 式 (3-9) 可写成

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

$$= \frac{A_0}{s} + \frac{A_1 s + A_2}{(s + \zeta \omega_n)^2 + \omega_d^2} \quad (3-12)$$

式中 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$, 称为阻尼自振频率。

$$\text{求得 } A_0 = 1 \quad A_1 = -1 \quad A_2 = -2\zeta\omega_n$$

将它们代入式 **(3-12)** 并将式中的第二项分成两项得

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

因为

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$

$$C(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} (\sqrt{1 - \zeta^2} \cos \omega_d t + \zeta \sin \omega_d t)$$

令 $\sin \theta = \sqrt{1-\zeta^2}$, $\cos \theta = \zeta$ 其中 θ 角如图3-8所示。于是有

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \quad t \geq 0 \quad (3-14)$$

$$\text{式中 } \theta = \arctg \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \quad \theta = \arccos \zeta$$

系统的稳态响应为**1**，瞬态分量是一个随时间**t**的增大而衰减的正弦振荡过程。

振荡的角频率为 ω_n , 它取决于阻尼比 ζ 和无阻尼自然频率 ω_d 。衰减速度取决于 $\zeta\omega_n$ 的大小。此时系统工作在欠阻尼状态。

输出响应如图3-9所示。

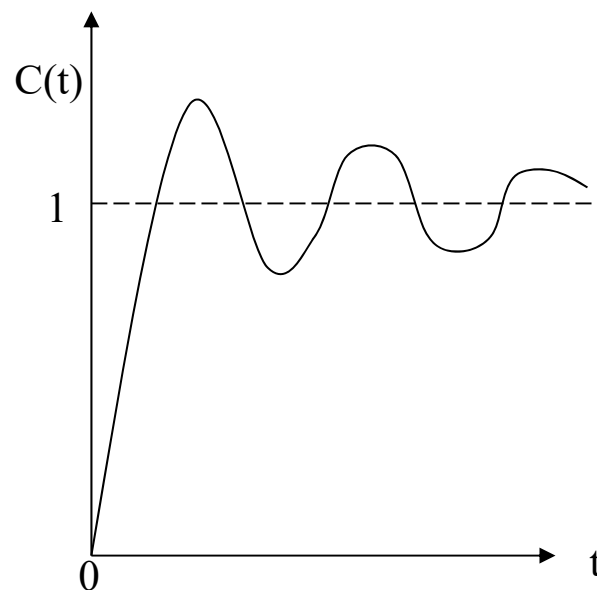


图3-9 欠阻尼响应

(三) 临界阻尼 ($\zeta=1$) 的情况

当 $\zeta=1$ 时, 系统具有两个相等的负实数极点, $p_{1,2} = -\omega_n$,
如图**3-10**所示。此时有

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s + \omega_n} + \frac{A_2}{(s + \omega_n)^2} \quad (3 - 15)$$

$$A_0 = [C(s) \cdot s]_{s=0} = 1$$

$$A_1 = \left\{ \frac{d}{ds} [C(s)(s + \omega_n)^2] \right\}_{s=-\omega_n} = -1$$

$$A_2 = [C(s) \cdot (s + \omega_n)^2]_{s=-\omega_n} = -\omega_n$$

将 A_0, A_1, A_2 代入式 (3-15) , 并进行拉氏反变换, 得

$$\begin{aligned} C(t) &= 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t} \\ &= 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

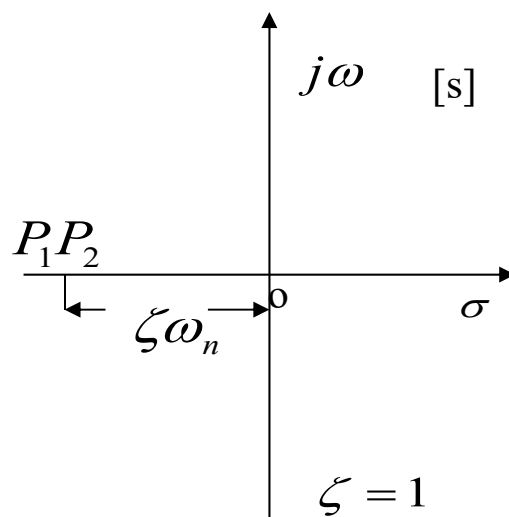


图3-10 临界阻尼时极点的分布

该式表明，当 $\zeta = 1$ 时，系统的输出响应由零开始单调上升，最后达到稳态值**1**，其响应曲线如图**3-11**所示。

$\zeta = 1$ 是输出响应的单调和振荡过程的分界，通常称为临界阻尼状态。

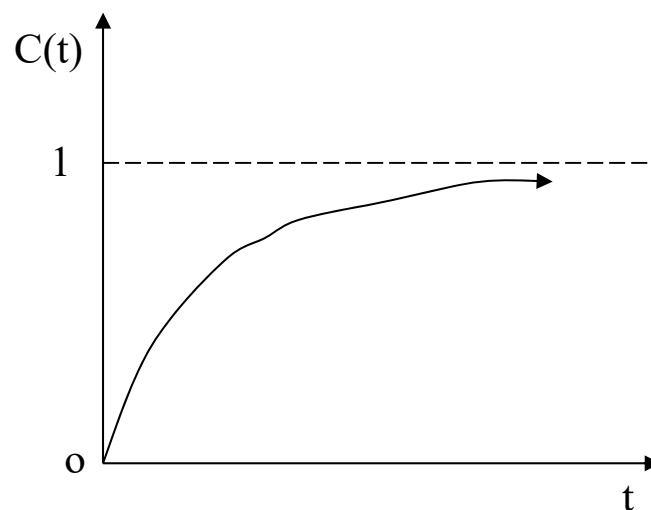


图3-11 临界阻尼响应

(四) 无阻尼 ($\zeta = 0$) 的情况

当 $\zeta = 0$ 时, 系统具有一对共轭纯虚数极点 $p_{1,2} = \pm j\omega_n$

$\zeta = 0$, 它们在 **S** 平面上的位置如图**3-12 (a)** 所示。将代入式 **(3-13)** 得

$$C(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

可见, 系统的输出响应是无阻尼的等幅振荡过程, 其振荡频率为 ω_n 。响应曲线如图**3-12 (b)** 所示。

综上所述，不难看出频率 ω_n 和 ω_d 的物理意义。

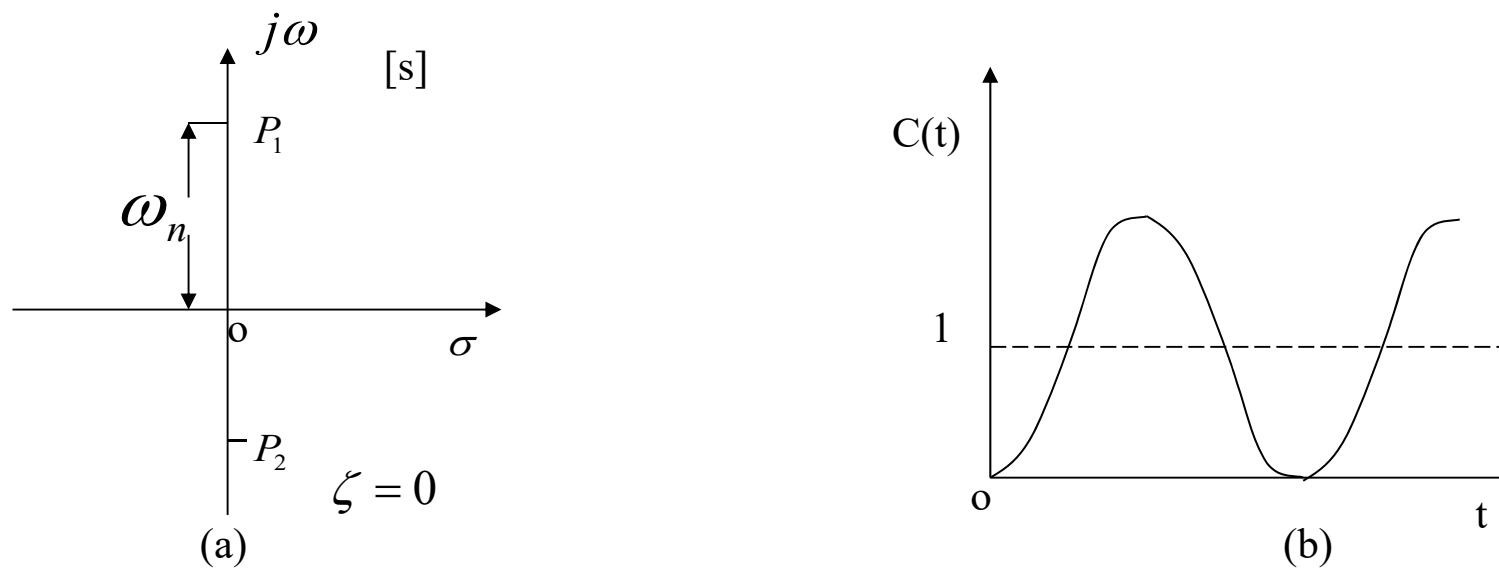


图3-12 无阻尼时的极点分布和响应

ω_n ——无阻尼自然振荡频率，此时系统输出为等幅振荡

ω_d ——阻尼振荡频率。系统输出为衰减正弦振荡过程。

当 $\zeta < 0$,系统具有实部为正的极点,输出响应是发散的，此时系统已无法正常工作。

根据上面的分析可知，在不同的阻尼比时，二阶系统的响应具有不同的特点。

因此阻尼比 ζ 是二阶系统的重要特征参数。

若选取 $\omega_n t$ 为横坐标，可以作出不同阻尼比时二阶系统单位阶跃响应曲线，

如图3-13所示，此时曲线只和阻尼比 ζ 有关。由图可见， ζ 越小，响应特性振荡得越厉害，随着

ζ 增大到一定程度后，响应特性变成单调上升的。

从过渡过程持续的时间看，当系统无振荡时，以临界阻尼时过渡过程的时间最短，此时，系统具有最快的响应速度。

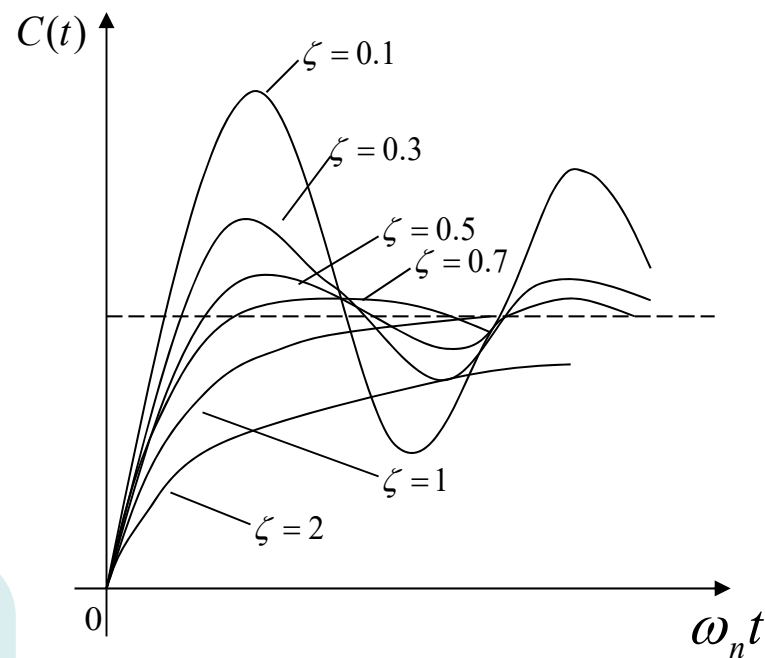


图3-13 二阶系统的阶跃响应

当系统在欠阻尼状态时，若阻尼比 ζ 在**0.4~0.8**之间，则系统的过度过程时间比临界阻尼时更短，而且此时的振荡特性也并不严重。

一般希望二阶系统工作在 $\zeta = \mathbf{0.4 \sim 0.8}$ 的欠阻尼状态下，在工程实际中，通常选取 $\zeta = 1/\sqrt{2}$ 作为设计系统的依据。

2. 二阶系统瞬态性能指标

在实际应用中，控制系统性能的好坏是通过系统的单位阶跃响应的特征量来表示的。为了定量地评价二阶系统的控制质量，必须进一步分析

ζ 和 ω_n 对系统单位阶跃响应的影响，并定义二阶系统单位阶跃响应的一些特征量作为评价系统的性能指标。

除了一些不允许产生振荡的系统外，通常希望二阶系统工作在 $\zeta = 0.4 \sim 0.8$ 的欠阻尼状态下。

此时，系统在具有**适度振荡特性**的情况下，能有**较短的过渡过程**时间，因此下面有关性能指标的定义和定量关系的推导，主要是针对**二阶系统**的欠阻尼工作状态进行的。控制系统的单位阶跃响应一般来说是与初始条件有关的，为了便于比较各种系统的控制质量，通常**假设系统的初始条件为零**。

系统在欠阻尼情况下的单位阶跃响应为

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \quad (t \geq 0) \quad (3-18)$$

对应的响应曲线如图3-14所示下面就根据式 (3-18) 和图3-14所示曲线来定义系统的瞬态性能指标, 同时讨论性能指标与特征量之间的关系。

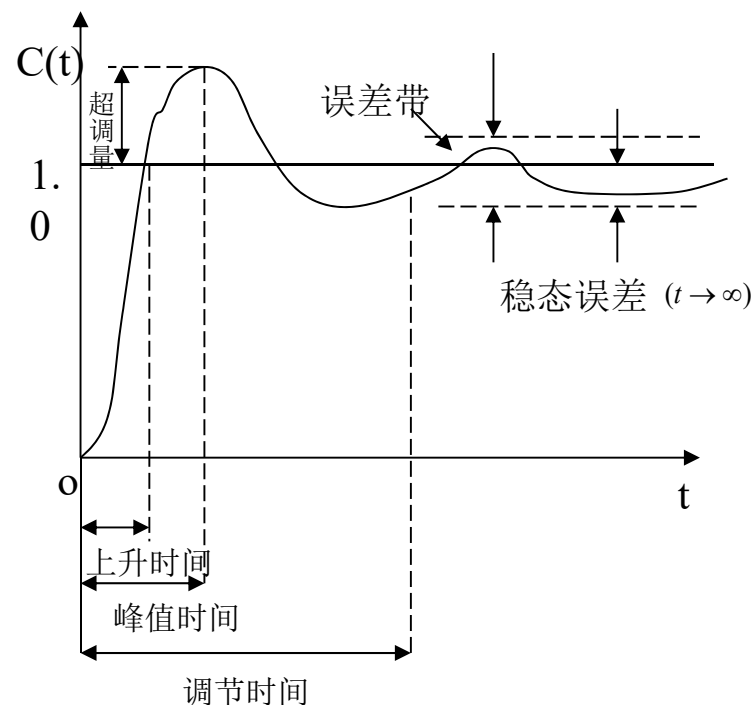


图3-14 二阶系统瞬态性能指标

1、上升时间

响应曲线从零开始上升，第一次到达稳态值所需的时间，称为上升时间。根据上述定义，当时， $t = t_r$ ， $C(t_r) = 1$ ，由式 (3-18) 可得

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_r + \theta) = 0$$

$$\text{即 } \sin(\omega_d t_r + \theta) = 0$$

$$\text{所以 } \omega_d t_r + \theta = k\pi \quad (k=0,1,2,\dots)$$

由于上升时间 t_r 是 $\mathbf{C(t)}$ 第一次到达稳态值的时间, 故取 $\mathbf{k=1}$, 所以

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3-19)$$

由式(3-19)可以看出, 当 ω_n 一定时, 阻尼比 ζ 越大, 上升时间 t_r 越长。

2、峰值时间 t_p

响应曲线 $C(t)$ 从零开始到达第一个峰值所需时间，称为峰值时间。

由定义，将式 (3-18) 对时间求导，并令其等于零，即 $\left. \frac{dC(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = 0$

得
$$\zeta \omega_n \sin(\omega_d t_p + \theta) - \omega_d \cos(\omega_d t_p + \theta) = 0$$

经变换可得
$$\operatorname{tg}(\omega_d t_p + \theta) = \frac{\omega_d}{\zeta \omega_n} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \operatorname{tg} \theta$$

所以
$$\omega_d t_p + \theta = k\pi + \theta$$

即
$$\omega_d t_p = k\pi \quad (k=1, 2, \dots)$$

因为峰值时间 t_p 是 $\mathbf{C(t)}$ 到达第一个峰值的时间,所以

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3-20)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3-20)$$

可见, 当 ζ 一定时, ω_n 越大, t_p 越小, 反应速度越快。当 ζ 一定时 ω_n 越小, t_p 也越大。

由于 ω_d 是闭环极点虚部的数值, ω_d 越大, 则闭环极点到实轴的距离越远, 因此, 也可以说峰值时间 t_p 与闭环极点到实轴的距离成反比。

3、超调量 σ_p

在响应过程中，输出量 **C (t)** 超出其稳态值的最大差量与稳态值之比称为超调量。

超调量可表示为
$$\sigma_p = \frac{C(t_p) - C(\infty)}{C(\infty)} \times 100\%$$

式中 $C(t_p)$ 为输出量的最大值， $C(\infty)$ 为输出量的稳态值。将式 **(3-20)** 代入式 **(3-18)** 求得输出量的最大值为

$$C(t_p) = 1 - \frac{e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\pi + \theta)$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta = -\sqrt{1 - \zeta^2}$$

所以 $C(t_p) = 1 + e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

根据超调量的定义, 并考虑到 $C(\infty) = 1$,

求得

$$\sigma_p = \frac{C(t_p) - C(\infty)}{C(\infty)} \times 100\% = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \quad (3-21)$$

该式表明, σ_p 只是 ζ 的函数, 而与 ω_n 无关, ζ 越小, 则 σ_p 越大。

当二阶系统的阻尼比 ζ 确定后, 即可求得对应的超调量 σ_p 。

反之, 如果给出了超调量的要求值, 也可求得相应的阻尼比的数值。一般当 $\zeta = 0.4 \sim 0.8$ 时, 相应的超调量

$$\sigma_p = 25 \sim 1.5\%$$

σ_p 与 ζ 关系曲线如图3-15所示。

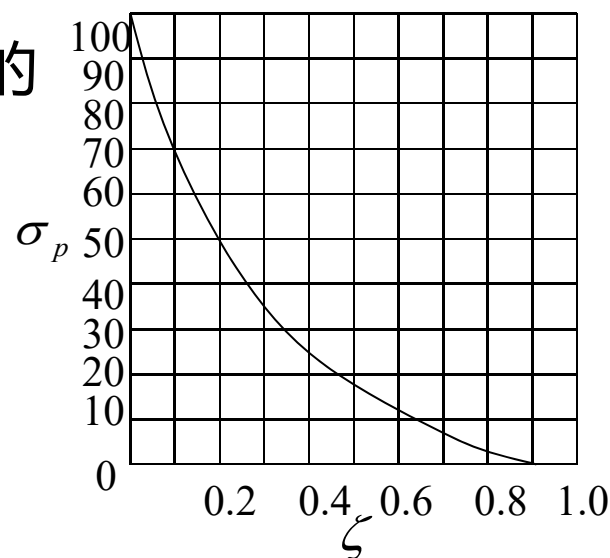


图3-15 欠阻尼二阶系统超调与阻尼比关系曲线

4、调节时间 t_s

响应曲线到达并停留在稳态值的 $\pm 5\%$ (或 $\pm 2\%$) 误差范围内所需的最小时间称为调节时间 (或过渡过程时间)。

根据调节时间的定义应有下式成立 $|C(t) - C(\infty)| \leq \Delta \cdot C(\infty) \quad (t \geq t_s)$

式中 $\Delta = 0.05$ (或 0.02) 将式 (3-18) 及 $C(\infty) = 1$ 代入上式得

$$\left| \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \right| \leq \Delta \quad (t \geq t_s)$$

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \leq \Delta \quad (t \geq t_s)$$

由此可求得 $t_s \geq \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln \frac{1}{\Delta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{\zeta\omega_n} \left(\ln \frac{1}{\Delta} + \ln \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right)$

若取 $\Delta = 0.05$, 则得

$$t_s \geq \frac{3 + \ln \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{\zeta\omega_n} \quad (3-22)$$

若取 $\Delta = 0.02$, 则得

$$t_s \geq \frac{4 + \ln \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{\zeta\omega_n} \quad (3-23)$$

在 $0 < \zeta < 0.9$ 时, 上面两式可分别近似为 $t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$ 和 $t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$

该式表明, 调节时间 t_s 近似与 $\zeta\omega_n$ 成反比。

由于 $\zeta\omega_n$ 是闭环极点实部的数值, $\zeta\omega_n$ 越大, 则闭环极点 to 虚轴的距离越远, 因此, 可以近似地认为调节时间 t_s 与闭环极点到虚轴的距离成反比。

在设计系统时, ζ 通常由要求的超调量所决定, 而调节时间 t_s 则由自然振荡频率 ω_n 所决定。

也就是说, 在不改变超调量的条件下, 通过改变 ω_n 的值可以改变调节时间。

5. 振荡次数N

响应曲线在 $0 \sim t_s$ 时间内波动的次数称为振荡次数。

根据定义，振荡次数 $N = \frac{t_s}{T_d}$

式中 $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$ 称为系统的阻尼振荡周期。

若取 $\Delta = 0.05$ $t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$ $N = \frac{1.5\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta}$

若取 $\Delta = 0.02$ $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$ $N = \frac{2\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta}$

振荡次数只与阻尼比 ζ 有关。阻尼比 ζ 和无阻尼自振频率 ω_n 是二阶系统两个重要特征参数，它们对系统的性能具有决定性的影响。

当保持 ζ 不变时，提高 ω_n 可使 t_r 、 t_p 、 t_s 下降，从而提高系统的快速性，同时保持 σ_p 和 N 不变。

当保持 ω_n 不变时, 增大 ζ 可使 σ_p 和 t_s 下降 ($0 < \zeta < 0.8$), 但使 t_r 和 t_p 上升, 显然在系统的振荡性能和快速性之间是存在矛盾的, 要使二阶系统具有满意的动态性能, 必须选取合适的阻尼比和无阻尼自振荡率。

通常可根据系统对超调量的限制要求选定 ζ , 然后在根据其它要求来确定 ω_n 。

例3-1 设控制系统 如图3-16所示。其中 (a) 为无速度反馈系统, (b) 为带速度反馈系统, 试确定是系统阻尼比为0.5时 K_t 的值, 并比较系统 (a) 和 (b) 阶跃响应的瞬态性能指标。

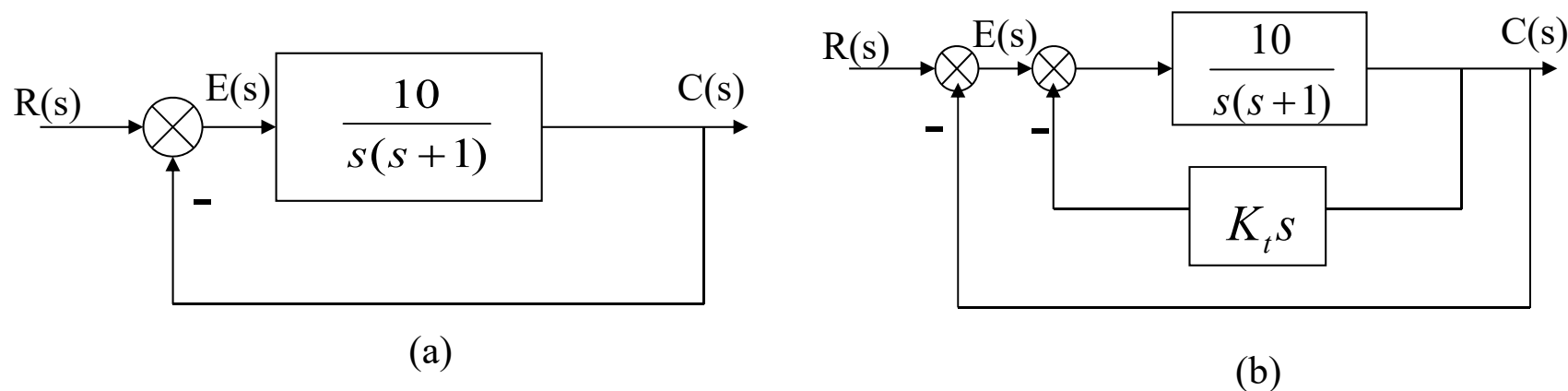


图3-16 例一系统结构图

解 系统 (a) 的闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{10}{s^2 + s + 10}$

将上式与式 (3-6) 相比较得 $2\zeta\omega_n = 1$ $\omega_n^2 = 10$

解得 $\zeta = 0.158$ $\omega_n = 3.16$

根据式 (3-19)、(3-20)、(3-21)、(3-24)、
(3-25) 计算上升时间

$$t_r = \frac{\pi - \arccos \zeta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = 0.55 \text{ (秒)}$$

峰值时间 $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 1.01 \quad (\text{秒})$

超调量 $\sigma_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 60.4\%$

调节时间 $t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = 6 \quad (\text{秒}) \quad (\Delta = 0.05)$

振荡次数 $N = \frac{1.5\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta} \approx 3 \quad (\text{次}) \quad (\Delta = 0.05)$

系统 **(b)** 的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{10}{s^2 + (1 + 10K_t)s + 10}$$

若描述系统的微分方程**高于二阶**，则该系统为**高阶系统**。在控制工程中，大多数控制系统都是高阶系统。从理论上讲，高阶系统也可以直接由传递函数求出它的时域响应，然后按上述二阶系统的分析方法来确定系统的瞬态性能指标。

但是，高阶系统的分布计算比较困难，同时，在工程设计的许多问题中，过分讲究精确往往是不必要的，甚至是无意义的。

因此，工程上通常把高阶系统适当地**简化成低阶系统**进行分析。

下面简单地介绍高阶系统时域响应的确定方法及研究高阶系统性能的思路和途径。

设高阶系统的**闭环传递函数**为

$$\Phi(s) = \frac{b_m s^m + b_{m+1} s^{m+1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

假设系统所有零点、极点互不相同，且极点中q个实数极点和r对复数极点，零点中只有实数极点，则系统**单位阶跃响应**的拉氏变换为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{K_r \prod_{j=1}^m (s - Z_j)}{\prod_{i=1}^q (s - P_i) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2)} \bullet \frac{1}{s}$$

式中 $n=q+2r$

将上式展开成部分分式，得

$$C(s) = \frac{A_0}{s} + \sum_{i=1}^q \frac{A_i}{s - P_i} + \sum_{k=1}^r \frac{B_k (s + \zeta_k \omega_{nk}) + C_k \omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2}$$

式中 A_0 、 A_i 、 B_k 和 C_k 都是进行部分分式展开时所确定的常数。

对上式进行拉氏反变换，求得系统在**零初始条件下**的单位阶跃响应为

$$C(t) = A_0 + \sum_{i=1}^q A_i e^{p_i t} + \sum_{k=1}^r B_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \cos(\omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} \times t) \\ + \sum_{k=1}^r C_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \sin(\omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} \times t) \quad (t \geq 0) \quad (3-27)$$

由此可见，高阶系统的时域响应是由稳态值和一些惯性环节及振荡环节的瞬态响应分量所组成。

各瞬态分量在过渡过程中所起作用的大小，将取决于它们的指数 P_i 、 $\zeta_k \omega_{nk}$ 的值和相应项的系数 A_i 、 B_k 、 C_k 的大小。

如果系统**所有极点**都分布在S平面的**左半部分**，即所有极点**均具有负实部**，那么当 **t 趋于无穷大** 时，式中的指数项都趋于零，系统的**响应达到稳态值**。

由式 (3-27) 可以看出, 在瞬态过程中, 某衰减项的指数 $|P_i|$ 或 $\zeta_k \omega_{nk}$ 的值越大, 则该项衰减越快, 反之亦然。

而 $|P_i|$ 和 $\zeta_k \omega_{nk}$ 就是系统的极点 to 虚轴的距离, 因此, 如果分布在 S 平面左半部分的极点离虚轴越远, 则它对应的分量衰减越快。显然, **对系统过渡过程影响最大的, 是那些离虚轴最近的极点。**

各衰减项的系数不仅与相应的极点在S平面中的位置有关，而且还与零点的位置有关：

- **极点**的位置**距原点越远**，则相应分量的系数越小，该分量**对系统过渡过程的影响就越小**。
- 如果**某极点与零点很靠近**，则相应分量的系数也很小，这对零极点**对系统过渡过程的影响也将很小**。

因此，高阶系统的瞬态特性主要由系统传递函数中那些靠近虚轴而又远离零点的极点来决定。

如果高阶系统有一个极点（或一对共轭复数极点）**离虚轴最近**，且其**附近又无零点**存在，而其他所有极点与虚轴的距离都在此极点与虚轴的距离的五倍以上，则可近似的认为系统的瞬态特性由这个（或这对）极点来确定，而其它极点的影响可以忽略不计，这个（或这对）极点就称为高阶系统的**主导极点**。

高阶系统的主导极点常常是共轭复数极点，因此高阶系统可以常用**主导极点构成的二阶系统**来**近似**。相应的性能指标可按二阶系统的各项指标来估计。

在设计高阶系统时，常利用主导极点的概念来选择系统参数，使系统具有预期的一对共轭复数主导极点，这样，就可以近似的用二阶系统的性能指标来设计系统。

在控制系统的分析研究中，最重要的问题是系统的稳定性问题。不稳定的系统在受到外界或内部的一些因素扰动时，会使被控制量偏离原来的平衡工作状态，并随时间的推移而发散。因此，不稳定的系统是无法正常工作的。

在这一节中将讨论**稳定性的定义**，稳定的**充要条件**及**判别稳定性的基本方法**。

一、稳定的概念和定义

在自动控制理论中，有多种稳定性的定义，这里只讨论其中最常用的一种，即**渐近稳定性**的定义。

稳定与不稳定系统的示例

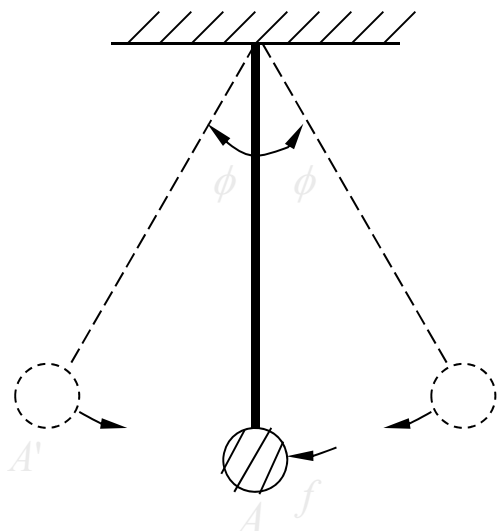


图3-17 摆运动示意图

图3-17为稳定的系统。

图3-18为不稳定系统。

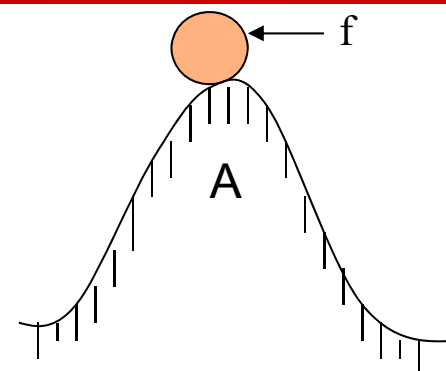


图3-18 不稳定系统

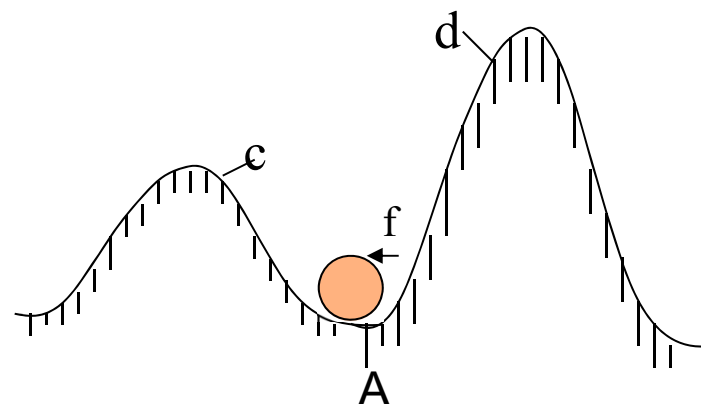


图3-19 小范围稳定系统

图3 - 19中，小球超出了C、D范围后系统就不再是线性的，故可以认为该系统在**线性范围内**是稳定的。

二.稳定的充要条件

稳定性是系统在扰动消失后，自身具有的一种恢复能力，它是系统的一种固有特性，这种特性只取决于系统的结构和参数，与外作用无关。

线性定常系统的稳定性的定义：如果线性定常系统受到扰动的作用，偏离了原来的平衡状态，而当扰动消失后，系统又能够逐渐恢复到原来的平衡状态，则称该系统是渐进稳定的（简称为稳定）。否则，称该系统是不稳定的。

在下面的讨论中，如果系统的数学模型是建立在小偏差线性化的基础上，则认为**系统中各信号的变化均不超出其线性范围**。此时，该系统采用上述的稳定性的定义。

根据上述稳定性的定义，可以用 $\delta(t)$ 函数作为扰动来讨论系统的稳定性。

设线性定常系统在初始条件为零时，输入一个理想单位脉冲 $\delta(t)$ ，这相当于系统在零平衡状态下，受到一个扰动信号的作用，如果当 t 趋于 ∞ 时，系统的输出响应 $C(t)$ 收敛到原来的零平衡状态，即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 0$$

该系统就是稳定的。

根据这个思路分析系统稳定的充要条件。

设系统的**闭环传递函数**为

$$\Phi(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

特征方程为
$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

如果特征方程的所有根互不相同，且有q个实数根 和r对共轭复数根 $-\zeta_k \omega_{nk} \pm j \omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta^2}$ ，则在单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的作用下，系统输出量的拉氏变换可表示为

$$C(s) = \frac{K_r \prod_{j=1}^m (s - Z_j)}{\prod_{i=1}^q (s - P_i) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2)} \bullet 1$$

将上式用部分分式法展开并进行拉氏反变换得

$$C(t) = \sum_{i=1}^q A_i e^{P_i t} + \sum_{k=1}^r e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} (B_k \cos \omega_{dk} t + C_k \sin \omega_{dk} t) \quad (3-28)$$

式中

$$\omega_{dk} = \omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta^2}$$

式 (3-28) 表明

□ 当系统特征方程的根都具有负实部时，则各瞬态分量都是衰减的，且有 $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 0$ ，此时系统是稳定的。

□ 如果特征根中有一个或一个以上具有正实部，则该根对应的瞬态分量是发散的，此时有 $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) \rightarrow \infty$ ，系统是不稳定的。

- 如果特征根中具有一个或一个以上的零实部根，而其余的特征根均有负实部，则 $C(t)$ 趋于常数或作等幅振荡，这时系统处于稳定和不稳定的临界状态，常称之为**临界稳定状态**。对于大多数实际系统，当它处于临界状态时，也是不能正常工作的，所以临界稳定的系统在工程上属于不稳定系统。

线性定常系统稳定的充分必要条件：闭环系统特征方程的所有根都具有负实部，或者说闭环传递函数的所有极点均位于 S 平面的左半部分（不包括虚轴）。

三. 劳斯稳定判据

由以上讨论可知，**控制系统的稳定的充要条件是其特征方程的根均具有负实部**。因此，为了判别系统的稳定性，就要求出系统特征方程的根，并检验它们是否都具有负实部。但是，这种求解系统特征方程的方法，对低阶系统尚可以进行，而对高阶系统，将会遇到较大的困难。

因此，人们希望寻求一种不需求解的特征方程而能判别系统稳定性的间接方法，而**劳斯判据**就是其中的一种。

劳斯判据**利用特征方程的各项系数进行代数运算，得出全部特征根具有负实部的条件**，以此作为判别系统是否稳定的依据，因此，这种判据又称为代数稳定判据。

至于分析系统稳定性的其它方法如奈氏判据、根轨迹图分析法、伯德图分析法等，将在以后的各章中分别予以介绍。

1、稳定的必要条件

设系统的特征方程为

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (3-29)$$

式中 $a_n > 0$ (当 $a_n < 0$ 时, 可将方程两边同乘以-1)。若该方程的特征根为 p_i ($i=1,2,\dots,n$), 该 n 个根可以是实数也可以是复数, 则式 (3-29) 可改写成为

$$s^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} s^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} s + \frac{a_0}{a_n} = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) = 0$$

将上式展开

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = -(P_1 + P_2 + \cdots + P_n)$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = P_1 P_2 + P_1 P_3 + \cdots + P_2 P_3 + P_2 P_4 + \cdots + P_{n-1} P_n$$

.....

$$\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n P_1 \cdot P_2 \cdots P_n$$

由此可见，如果特征方程的根 p_1, p_2, \cdots, p_n 都具有负实部，则式 (3-29) 的所有系数 a_1, a_2, \cdots, a_n 必然都大于零。故**系统稳定的必要条件是其特征方程的各项系数均为正**，即 $a_i > 0$ ($i=0,1,2,\dots,n$)

- 根据**必要条件**，在判别系统的稳定性时，可事先检查系统特征方程的系数是否都大于零，若**有任何系数是负数或等于零**，则系统是**不稳定**的。
- 但是，当特征方程满足稳定的必要条件时，并不意味着系统一定是稳定的，为了进一步确定系统的稳定性，可以使用劳斯判据。

2、劳斯判据

- 应用劳斯判据分析系统的稳定性时，可按下述方法进行。将系统的特征方程写成如下标准形式

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (a_0 > 0)$$

➤ 将方程各项**系数**组成**劳斯表**

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4
\vdots					
s^2	e_1	e_2			
s^1	f_1				
s^0	g_1				

➤ 计算劳斯表的各系数

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

.....

b_i

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4
\vdots					
s^2	e_1	e_2			
s^1	f_1				
s^0	g_1				

系数的计算一直进行到其余的b值**全部等于零**为止。

用同样的前两行系数交叉相乘的方法，可以计算c，d，...e，f，g各行的系数。

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_{n-7} - a_{n-1} b_4}{b_1}$$

... ..

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

... ..

这个计算过程一直进行到n+1行为止。为了简化运算，可以用一个**正整数**去乘或除其一项，这将**不改变**稳定性的结论。

劳斯稳定判据

(1) 劳斯表第一列所有系数均不为零的情况

如果劳斯表中**第一列的系数**都具有**相同的符号**，则系统是**稳定的**，否则系统是不稳定的。且**不稳定根的个数**等于劳斯表中**第一列系数符号改变的次数**。

例 3-3 已知系统的特征方程为

$$s^5 + 6s^4 + 14s^3 + 17s^2 + 10s + 2 = 0$$

试用劳斯判据分析系统的稳定性。

特征方程: $s^5 + 6s^4 + 14s^3 + 17s^2 + 10s + 2 = 0$

解 列劳斯表

s^5	1	14	10
s^4	6	17	2
s^3	$\frac{6 \times 14 - 1 \times 17}{6} = \frac{67}{6}$		$\frac{6 \times 10 - 1 \times 2}{6} = \frac{58}{6}$
s^2	$\frac{\frac{67}{6} \times 17 - 6 \times \frac{58}{6}}{\frac{67}{6}} = \frac{791}{67}$		$\frac{\frac{67}{6} \times 2 - 6 \times 0}{\frac{67}{6}} = 2$
s^1	$\frac{\frac{791}{67} \times \frac{58}{6} - \frac{67}{6} \times 2}{\frac{791}{67}} = \frac{6150}{791}$		
s^0	2		

劳斯表第一列的系数符号相同，故系统的是稳定的。

由于**判别系统是否稳定只与**劳斯表中**第一列系数的符号有关**，而把劳斯表中某一行系数同乘以一个正数不会改变第一列系数的符号，所以为简化运算，常把劳斯表的**某一行同乘以一个正数**后，再继续运算。本例中，劳斯表可按如下方法计算：

s^5	1	14	10	
s^4	6	17	2	
s^3	67	58		(同乘以6)
s^2	791	134		(同乘以67)
s^1	36900			(同乘以791)
s^0	134			

由于第一列系数的符号相同，故系统稳定，结论与前面一致。

例3 - 4 已知系统的特征方程为

$$s^4 + 2s^3 + s^2 + s + 1 = 0$$

试用劳斯判据判断系统的稳定性。

解 列劳斯表如下

s^4	1	1	1
s^3	2	1	0
s^2	$(2*1 - 1*1)/2 = 1/2$		$(2*1 - 1*0)/2 = 1$
s^1	$(1*1 - 2*2)/1 = -3$		
s^0	$(-3*2 - 1*0)/-3 = 2$		

由于劳斯表第一列的系数**变号两次**，一次由1/2变为-3，另一次由-3变为2，故特征方程**有两个根在S平面右半部分**，系统是**不稳定的**。

(2) 劳斯表某行的第一列系数等于零，而其余各项不全为零的情况

当劳斯表**某一行**的**第一列系数为零**，而**其余项不全为零**，
可用一个很小的正数 ε 代替第一列的零项，然后按照通常方法计算劳斯表中的其余项。

例 3-5 已知系统的特征方程为

$$s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 5 = 0$$

试判别系统的稳定性。

特征方程: $s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 5 = 0$

解: 由特征方程列出劳斯表

s^4	1	2	5
s^3	1	2	0
s^2	$0 \approx \varepsilon$	5	
s^1	$(2\varepsilon - 5) / \varepsilon$		
s^0	5		

当 ε 的取值**足够小时**, $(2\varepsilon - 5)/\varepsilon = 2 - 5/\varepsilon$ 将取负值, 故劳斯表**第一列系数变号两次**, 由劳斯判据可知, 特征方程**有两个根具有正实部**, 系统是**不稳定**的。对于这种情况, 也可以用 **$(s+1)$ 因子乘以原特征方程**, 然后按新的特征方程计算劳斯表。

例如在上例中用 $(s+1)$ 乘以原特征方程得

$$(s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 5)(s+1) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 7s + 5 = 0$$

劳斯表为

s^5	1	3	7
s^4	2	4	5
s^3	2	9	(同乘以2)
s^2	-10	10	
s^1	11		
s^0	10		

显然，劳斯表第一列系数变号两次，其结论与前面是一致的。

(3) 劳斯表某行所有系数均为零的情况

如果劳斯表中**某一行**（如第K行）**各项为零**，这说明在S平面内**存在以原点为对称的特征根**。

例如 $P = \pm\sigma$, $P = \pm j\omega$, $P = \pm\sigma \pm j\omega$ 等等。显然，系统是不稳定的。此时，为了确定根的分布情况，可按下列步骤处理：

* 利用**第K-1行的系数**构成**辅助方程**。

- * 求**辅助方程对s的导数**，将其**系数代替原全部为零的K行**，继续计算劳斯表。
- * 特征方程中以原点为对称的根可由辅助方程求得。

例 3-6 已知系统的特征方程为

$$s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16 = 0$$

分析系统的稳定性。

特征方程: $s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16 = 0$

解 列劳斯表如下

s^6	1	8	20	16
s^5	2	12	16	
s^4	2	12	16	
s^3	0	0	0	

由上表看出, s^3 行的各项全为零, 为了求出 $s^3 \sim s^0$ 各行, 由 s^4 行的各项系数构成辅助方程。

$$A(s) = 2s^4 + 12s^2 + 16 = 0$$

将辅助方程对s求导得

$$\frac{dA(s)}{ds} = 8s^2 + 24s = 0$$

用上式各项系数作为 s^3 行的各系数继续计算劳斯表得

s^6	1	8	20	16
s^5	2	12	16	
s^4	2	12	16	
s^3	8	24		
s^2	6	16		
s^1	8/3			
s^0	16			

由于劳斯表第一列系数符号都相同，因此，可以确定**没有特征方程根分布在S平面的右半部分**。但由于 s^3 行的各项均为零，这表明**系统有共轭虚根**，所以系统是**不稳定的**，共轭虚根可由辅助方程求得，即由

$$2s^4 + 12s^2 + 16 = 0$$

或
$$s^4 + 6s^2 + 8 = 0$$

解得
$$s_{1,2} = \pm j2 \quad s_{3,4} = \pm j2$$

综上所述，应用劳斯表判据分析系统的稳定性时，一般可以按如下顺序进行：

1、确定系统**是否满足稳定的必要条件**。当特征方程的系数不满足 $a_i > 0 (i=0,1,2,\dots,n)$ 时，系统是不稳定的。

2、**当**特征方程的系数**满足** $a_i > 0 (i=0,1,2,\dots,n)$ **时**，计算劳斯表。当劳斯表的**第一列系数都大于零时**，系统是**稳定**的。如果第一**列出现小于零的系数**，则系统是不**稳定**的。

3、若计算劳斯表时出现情况（2）和（3），此时为确定系数极点的分布情况，可按情况（2）和（3）的方法处理。

运用劳斯判据，不仅可以判定系统是否稳定，还可以用来分析系统参数的变化对稳定性产生的影响，从而给出使系统稳定的参数范围。

例 3-7 已知系统的结构图如图3-20所示。当 $\zeta = 0.2$ 时, $\omega_n = 86.6$ 试确定K为何值时, 系统稳定。

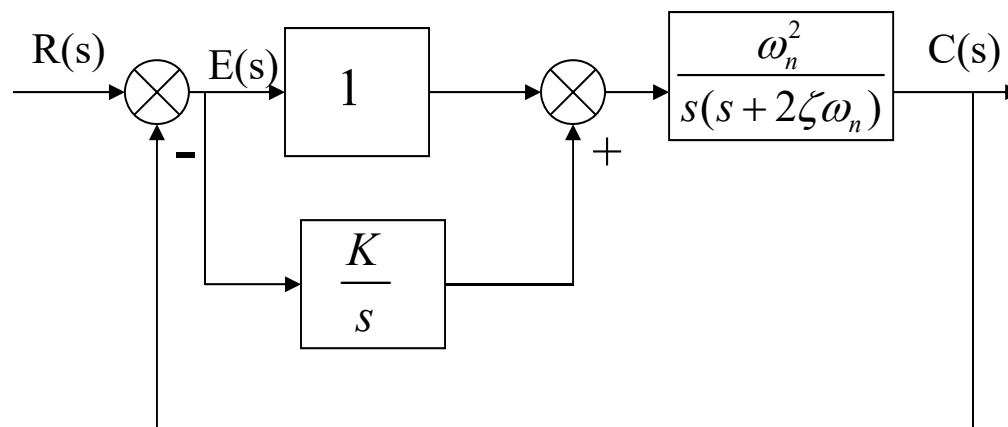


图3-20 例3-7系统结构图

解 图3-20的**开环传递函数**为

$$G(s) = \frac{\omega_n^2 (s + k)}{s^2 (s + 2\zeta\omega_n)}$$

其**闭环传递函数**为

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2 (s + k)}{s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 s + K\omega_n^2}$$

特征方程为

$$s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 s + K\omega_n^2 = 0$$

将 $\zeta = 0.2$, $\omega_n = 86.6$ 代入特征方程得

$$s^3 + 34.6s^2 + 7500s + 7500K = 0$$

由特征方程列劳斯表

s^3	1	7500
s^2	34.6	7500K
s^1	$\frac{346 \times 7500 - 7500K}{34.6}$	
s^0	7500K	

要使系统稳定，必须满足

$$7500k > 0 \quad \frac{34.6 \times 7500 - 7500K}{34.6} > 0$$

解不等式得

$$K > 0, \quad K < 34.6$$

因此，要使不等式稳定，参数K的取值范围是

$$0 < K < 34.6$$

例 3-8 已知系统的结构图如图3-21所示，求系统临界稳定时的放大系数及它与参数 T_1 、 T_2 、 T_3 之间的关系。

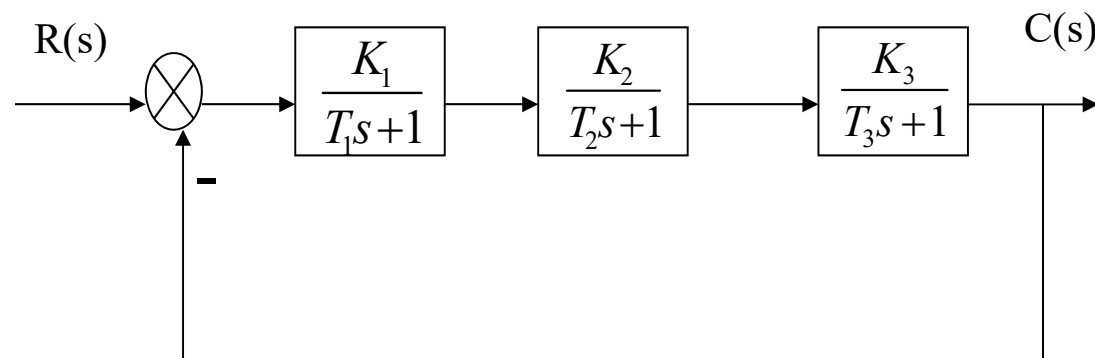


图3-21 例3-8系统结构图

解 系统的**开环传递函数**为

$$G(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$$

其中 $K = K_1K_2K_3$ ，为系统的**开环放大系数**。系统的**闭环传递函数**为

$$\Phi(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1) + K}$$

特征方程为

$$(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1) = 0$$

即

$$T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) s^2 + (T_1 + T_2 + T_3) s + K + 1 = 0$$

由特征方程列劳斯表

s^3	$T_1 T_2 T_3$	$T_1 + T_2 + T_3$
s^2	$T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3$	$K + 1$
s^1	$\frac{(T_1 + T_2 + T_3)(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) - T_1 T_2 T_3 (K + 1)}{T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3}$	
s^0	$K + 1$	

要使系统稳定，必须满足

$$T_1 T_2 T_3 > 0$$

$$T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 > 0$$

$$T_1 + T_2 + T_3 > 0$$

$$\frac{(T_1 + T_2 + T_3)(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) - T_1 T_2 T_3 (K + 1)}{T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3} > 0$$

$$K + 1 > 0$$

通常，系统的时间常数及放大系数都大于零，因此，要使系统稳定必须满足

$$(T_1 + T_2 + T_3)(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) - T_1 T_2 T_3 (K + 1) > 0$$

或

$$(K + 1) < (T_1 + T_2 + T_3) \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) > 0$$

当系统**临界稳定**时

$$K_c = (T_1 + T_2 + T_3) \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) - 1$$

由此可见, T_1 、 T_2 、 T_3 中只要有一个足够小, 则 K_c 就可以增大, 决定 K_c 大小的, 实际上并不是各时间常数的绝对值, 而是其相对值, 即决定于各时间常数的比值。

上式变为

$$K_c = 2 + \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_1}{T_3} + \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_2}{T_3} + \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_3}{T_2}$$

由此可见，当 $T_1 = T_2 = T_3$ 时， $K_c = 8$ ，若取 $T_2 = T_3$ ， $T_1 = 10T_2$ ，则 $K_c = 24.2$ ，所以把时间常数错开，可使系统的临界放大系数增大。有些文献上称之为“错开原理”。

在系统的分析中，**劳斯判据可以根据系统特征方程的系数来确定系统的稳定性**，同时还能给出系统的某些参数的取值范围。

但是，它的应用也具有一定的局限性，通常它**只能提供系统绝对稳定性的结论**，而不能指出系统是否具有满意的动态过程。此外，当系统不稳定时，它**不能提供改善系统稳定性的方法和途径**。

系统的稳态分量**反映系统跟踪控制信号的准确度或抑制扰动信号的能力**，用**稳态误差**来描述。

在系统的分析、设计中，稳态误差是一项重要的性能指标，它与系统本身的结构、参数及外作用的形成有关，也与元件的不灵敏、零点漂移、老化及各种传动机械的间隙、摩擦等因素有关。本章只讨论由于系统结构、参数及外作用等因素所引起的稳态误差。

➤ 给定稳态误差（由给定输入引起的稳态误差）

对于**随动系统**，给定输入变化，要求系统输出量以一定的精度跟随输入量的变化，因而**用给定稳态误差来衡量**系统的稳态性能。

➤ 扰动稳态误差（由扰动输入引起的稳态误差）

对**恒值系统**，给定输入通常是不变的，需要分析输出量在扰动作用下所受到的影响，因而**用扰动稳态误差来衡量**系统的稳态性能。

本章介绍稳态误差的概念和计算方法，研究稳态误差的规律性以及减小或消除稳态误差的途径。

一、稳态误差的定义

系统的**误差 $e(t)$** 一般定义为**输出量的希望值与实际值之差**。

对图3-22所示的典型系统，其误差定义有两种形式：

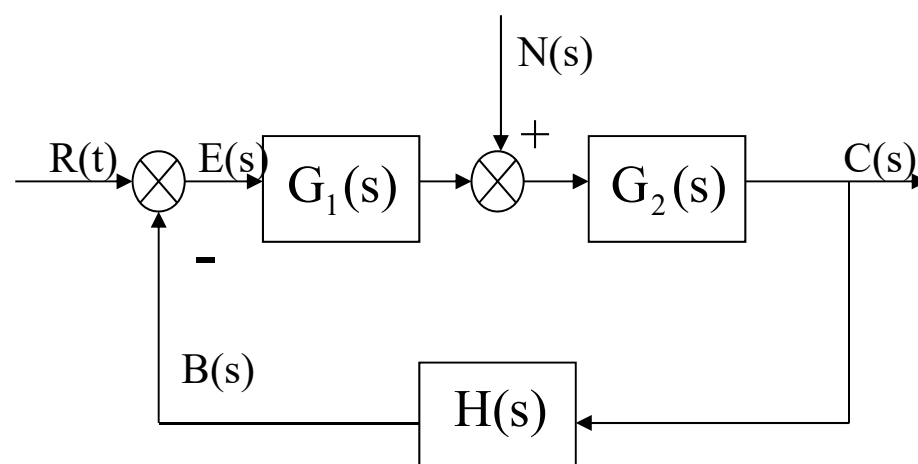


图3-22 反馈系统结构图

$$(1) \quad e(t) = C_r(t) - C(t)$$

式中， $C_r(t)$ 为系统输出量的希望值， $C(t)$ 为输出量的实际值。

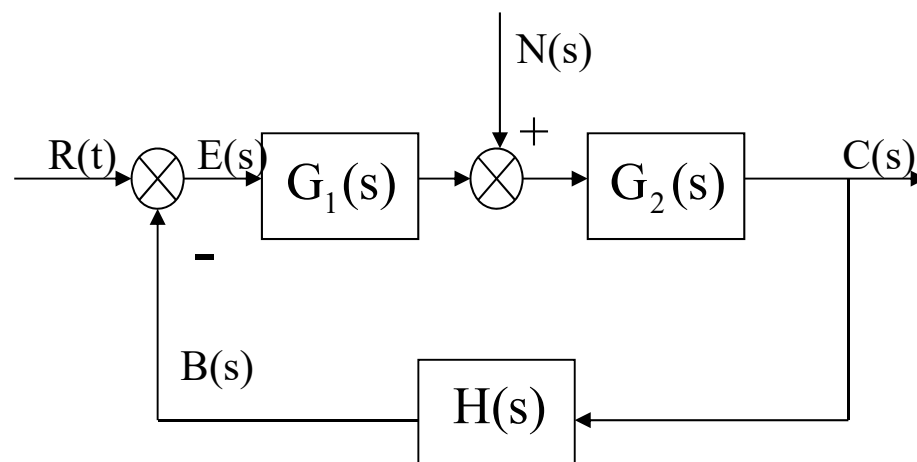


图3-22 反馈系统结构图

$$(2) \quad e(t) = r(t) - b(t)$$

其中，系统输出量的希望值是给定输入 $r(t)$ ，而输出量的实际值为系统主反馈信号 $b(t)$ 。通常 $H(s)$ 是测量装置的传递函数，故此时误差就是给定输入与测量装置的输出量之差。

第一种形式的误差是**从系统输出端来定义**的，它在性能指标提法中经常使用，**但在实际系统中无法测量**，因而，一般只有数学意义。

而第二种形式的误差是**从系统的输入端来定义**的，它在系统中是**可以测量**的，因而**具有实用性**。

对于单位反馈系统，要求输出量 $C(t)$ 的变化规律与给定输入 $r(t)$ 的变化规律完全一致，所以给定输入 $r(t)$ 也就是输出量的希望值 $C_r(t)$ ，即 $C_r(t) = r(t)$ 。此时，上述两种定义统一为

$$e(t) = r(t) - c(t) \quad (3-31)$$

对于单位反馈系统，误差的两种定义形式是一致的。

对于非单位反馈系统，若设第（1）种形式的误差为 $E'(s)$ ，第（2）种形式的误差为 $E(s)$ ，则不难证明 $E(s)$ 与 $E'(s)$ 之间存在如下关系

$$E'(s) = \frac{E(s)}{H(s)}$$

可见，两种定义对非单位反馈系统是存在差异的，但**两种定义下的误差之间具有确定的关系**，即误差 $E'(s)$ 可以直接或间接地由 $E(s)$ 来确定。从本质上看，它们**都能反映控制系统的控制精度**。在下面的讨论中，我们将采用第二种误差定义。

$E(t)$ 通常也称为系统的**误差响应**，它**反映了系统在输入信号和扰动信号作用下整个工作过程中的精度**。误差响应中也**包含有瞬态分量和稳态分量**两个部分，如果所研究的系统是稳定的，那么当时间 t 趋于无穷大时，瞬态分量趋近于零，剩下的只是稳态分量。

稳态误差的定义：稳态系统误差信号的稳态分量称为系统的稳态误差，以 e_{ss} 表示。

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (3-32)$$

二、输入作用下的稳态误差

在图3-22所示系统中，如果不计扰动输入的影响，可以求得系统的给定稳态误差。此时，系统的结构图可简化为图3-23。

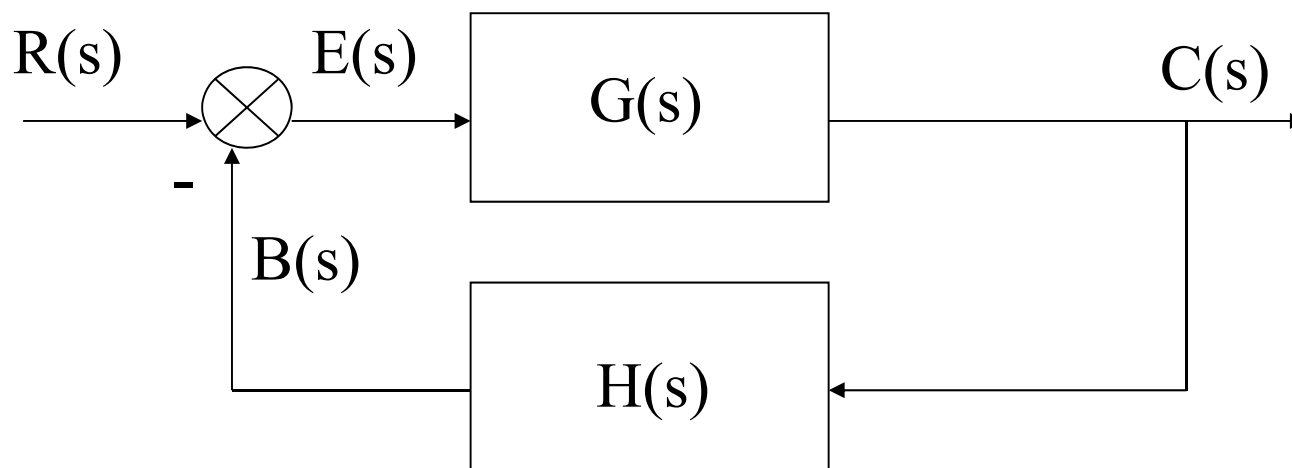


图3-23 给定输入作用下系统结构图

由图3-23可知

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \cdot R(s)$$

由误差的定义可知

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - B(s) = R(s) - H(s)C(s) \\ &= \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \cdot R(s) = \Phi_{er}(s)R(s) \end{aligned}$$

式中

$$\Phi_{er}(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

称为给定输入作用下系统的**误差传递函数**。

应用拉氏变换的终值定理可以方便地求出系统的稳态误差。

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3-33)$$

式 **(3-33)** 是确定给定稳态误差的一个基本公式。它表明，在给定输入作用下，系统的稳态误差与系统的结构、参数和输入信号的形式有关，对于一个给定的系统，当给定输入的形式确定后，系统的**稳态误差**将**取决于以开环传递函数描述的系统结构**。

为了分析稳态误差与系统结构的关系，可以根据开环传递函数 $G(s)H(s)$ 中串联的积分环节来规定控制系统的类型。

设系统的**开环传递函数**为

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n-v} (T_i s + 1)} \quad (3-34)$$

式中

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} s^v G(s)H(s)$$

称为系统的开环放大环节或开环增益。

式 (3-34) 分母中的 s^ν 表示开环传递函数在 origin 处有重极点，或者说有 ν 个积分环节串联。当 $\nu = 0, 1, 2, \dots$ 时，分别称系统为0型、1型、2型……系统。**分类是以开环传递函数中串联的积分环节数目为依据**的，而 $C(s)H(s)$ 中其它零、极点对分类没有影响。

下面分析系统在不同典型输入信号作用下的稳态误差。

1、 单位阶跃输入时的稳态误差

对于单位阶跃输入, $R(s)=1/s$,由式 (3-33) 求得系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)}$$

令

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$$

称 K_p 为稳态位置误差系数。

稳态误差可表示为

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (3-35)$$

因此，在单位阶跃输入下，给定稳态误差决定于系统的位置稳态误差。

对于0型系统, $\nu = 0$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} = K$$

对于1型系统（或高于1型的系统）, $\nu \geq 1$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (T_i s + 1)} = \infty$$
$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

可见，由于**0型系统**中没有积分环节，它对阶跃输入的稳态误差为一定值，**误差的大小与系统的开环放大系数K成反比**，K越大， e_{ss} 越小，**只要K不是无穷大，系统总有误差存在。**

对实际系统来说，通常是允许存在稳态误差的，但不允许超过规定的指标。为了降低稳态误差，可在稳定条件允许的前提下，增大系统的开环放大系数，**若要求系统对阶跃输入的稳态误差为零，则必须选用1型或高于1型的系统。**

2、单位斜坡输入时的稳态误差

对于单位斜坡输入 $R(s) = \frac{1}{s^2}$ ，此时系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)}$$

令

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$$

称 K_v 为稳态速度误差系数。

于是稳态误差可表示为

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \quad (3-36)$$

因此，在单位斜坡输入下，**给定稳态误差决定于速度误差系数。**

对于0型系统， $\nu = 0$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} = 0$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty$$

对于1型系统, $\nu = 1$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s \prod_{i=1}^{n-1} (T_i s + 1)} = K$$
$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}$$

对于2型系统 (或高于2型的系统) ,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^\nu \prod_{i=\nu}^{n-\nu} (T_i s + 1)} = \infty$$
$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

上面的计算表明，在单位斜坡输入作用下：

- 0型系统的稳态误差为 ∞ ；
- 1型系统的稳态误差为一定值，且误差与开环放大系数成反比。
为了使稳态误差不超过规定值，可以增大系统的K值；
- 2型或高于2型系统的稳态误差总为零。

因此，对于单位斜坡输入，要使系统的稳态误差为一定值或为零，必需 $v \geq 1$ ，也即系统必须有足够积分环节。

3、单位抛物线输入时的稳态误差

对于单位抛物线输入 $R(s) = \frac{1}{s^3}$, 此时系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)}$$

令

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$$

称 K_a 为稳态加速度误差系数。

于是稳态误差可表示为

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

对于0型系统, $\nu = 0$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} = 0$$

于是稳态误差可表示为

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

对于1型系统, $\nu = 1$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s \prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} = 0$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

对于2型系统, $\nu = 2$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^2 \prod_{i=1}^{n-2} (T_i s + 1)} = K$$
$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{K}$$

对于3型系统 (或高于3型的系统) , $\nu \geq 3$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{\prod_{i=1}^{n-\nu} (T_i s + 1)} = \infty$$
$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = 0$$

上面的计算表明，在单位抛物线输入作用下：

- 0型和1型系统的稳态误差为 ∞ ;
- 2型系统的稳态误差为一定值，且误差与开环放大系数成反比。
- 3型或高于3型系统的稳态误差总为零。但是，此时要使系统稳定则比较困难。

在各种典型输入信号作用下，不同类型系统的给定稳态误差如表3-1所示。

系统类别	静态误差系数			阶跃输入 $r(t)=R\cdot I(t)$	斜坡输入 $r(t)=R\ t$	加速度输入 $r(t)=\frac{Rt^2}{2}$
γ	K_p	K_γ	K_a	$e_{ss} = \frac{R}{1 + K_p}$	$e_{ss} = \frac{R}{K_\gamma}$	$e_{ss} = \frac{R}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{R}{1 + K}$	∞	∞
I	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$	∞
II	∞	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$
	∞	∞	∞	0	0	0

表3-1 输入信号作用下的稳态误差

若给定的**输入信号不是单位信号时**，则**将系统对单位信号的稳态误差成比例的增大**，就可以得到相应的稳态误差。若给定**输入信号是上述典型信号的线性组合**，则系统相应的**稳态误差就由叠加原理求出**。

例如，若输入信号为

$$r(t) = A + Bt + \frac{1}{2}Ct^2$$

则系统的总稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p} + \frac{B}{K_v} + \frac{C}{K_a}$$

综上所述，**稳态误差系数** K_p 、 K_v 和 K_a **描述了系统对减小和消除稳态误差的能力**，因此，它们是系统稳态特性的一种表示方法。

提高开环放大系数 K 或增加开环传递函数中的积分环节数，都可以达到减小或消除系统稳态误差的目的。但是，这两种方法都受到系统稳定性的限制。

因此，**对于系统的准确性和稳定性必须统筹兼顾、全面衡量。**

此外，由以上讨论可知，

当 $\nu = 1$ 时，系统相对 $R(s) = \frac{A}{s}$ 的稳态误差为零；

当 $\nu = 2$ 时，系统相对 $R(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2}$ 的稳态误差为零；

当 $\nu = 3$ 时，系统相对 $R(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3}$ 的稳态误差为零；

因此，当开环系统含有 ν 个串联积分环节时，称系统对给定输入 $r(t)$ 是 ν 阶无差系统，而 ν 称为**系统的无差度**。

例 3-9 设图3-24所示系统的输入信号 $r(t)=10+5t$ ，试分析系统的稳定性并求出其稳态误差。

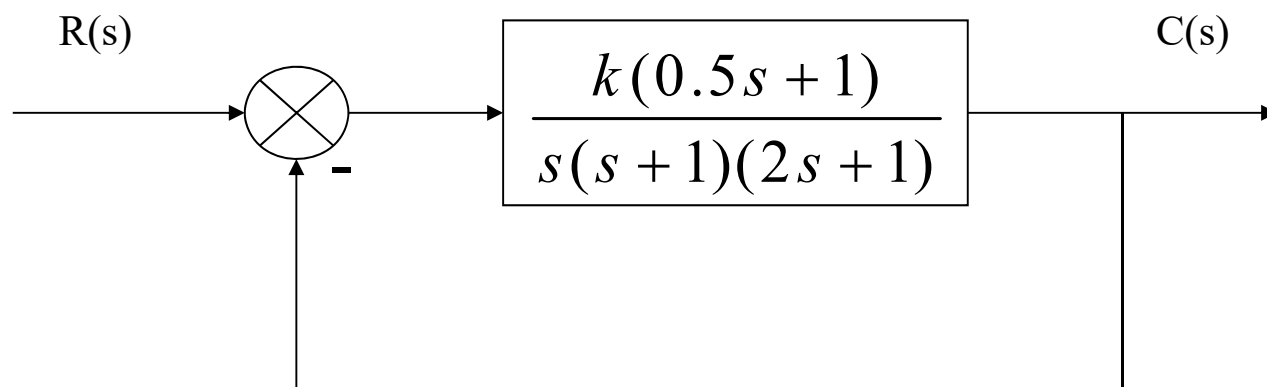


图3-24 例3-9系统结构图

解 由图3-24求得系统的特征方程为

$$2s^3 + 3s^2 + (1 + 0.5K)s + K = 0$$

由特征方程列劳斯表

s^3	2	$1 + 0.5K$
s^2	3	K
s^1	$\frac{3(1 + 0.5K) - 2K}{3}$	
s^0	K	

要使系统稳定，必须

$$K > 0, \quad 1 + 0.5K > 0, \quad 3(1 + 0.5K) - 2K > 0$$

解得 $K > 0$, $K > -2$, $K < 6$

所以, 当 $0 < K < 6$ 时, 系统是稳定的。

由图3-24可知, 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(0.5s + 1)}{s(s + 1)(2s + 1)}$$

系统的稳态误差系数分别为

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(0.5s + 1)}{s(s + 1)(2s + 1)} = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K(0.5s + 1)}{s(s + 1)(2s + 1)} = K$$

所以，系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{10}{1 + K_p} + \frac{5}{K_v} = \frac{5}{K}$$

上述结果表明，**系统的稳态误差与K成反比，K值越大，稳态误差越小**，但K值的增大受到稳定性的限制，当 $K > 6$ 时，系统将不稳定。

下面根据线性系统的叠加原理，以图3-25所示系统来讨论由扰动输入所产生的稳态误差。按照前面给出的误差信号的定义可得扰动输入引起的误差为

$$E(s) = R(s) - B(s) = -H(s)C(s)$$

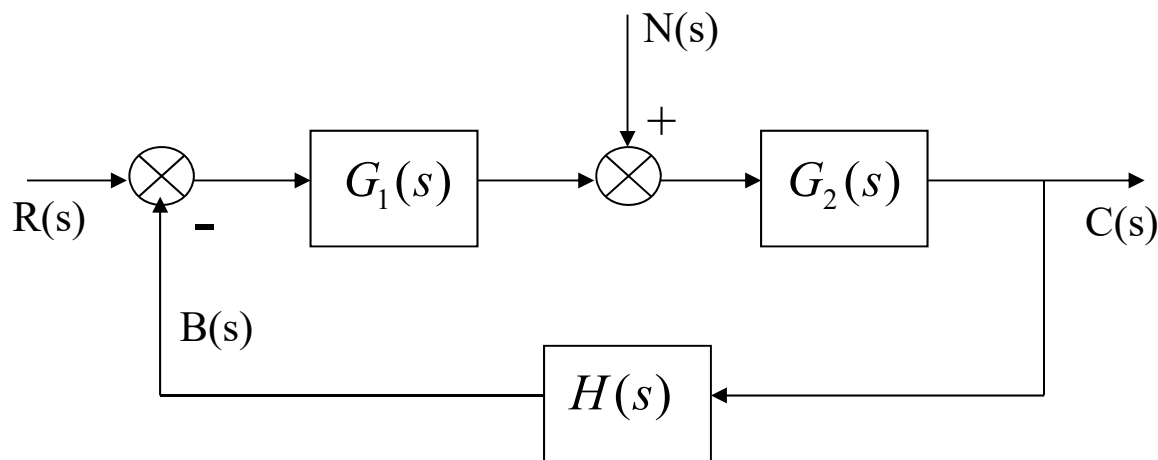


图3-25 扰动输入作用下系统结构图

而此时系统的输出为

$$C(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot N(s)$$

所以

$$E(s) = -\frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot N(s) = \Phi_{en}(s) \cdot N(s)$$

式中

$$\Phi_{en}(s) = -\frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

称为扰动输入作用下系统的误差传递函数。

此时，系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{sG_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot N(s)$$

例 3-10 设控制系统如图3-26所示, 其中 $G_1(s) = \frac{K_1}{1 + T_1 s}$, $G_2(s) = \frac{K_2}{s(1 + T_2 s)}$, 给定输入 $r(t) = R_r(s) \cdot 1(t)$, 扰动输入 $n(t) = R_n(t) \cdot 1(t)$ (R_r 和 R_n 均为常数), 试求系统的稳态误差。

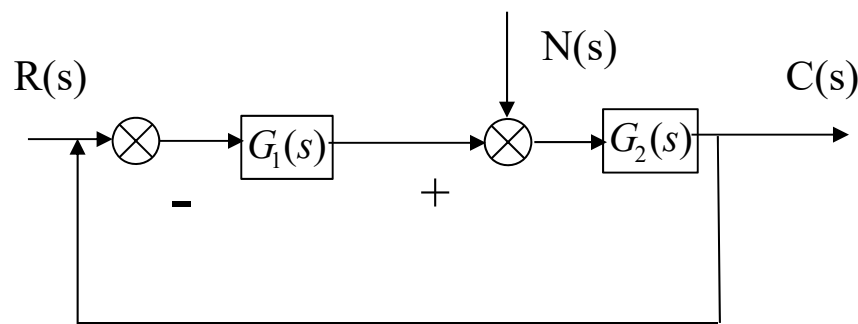


图3-26 例3-10系统结构图

解： 当系统同时受到给定输入和扰动输入的作用时，其稳定误差为给定稳态误差和扰动稳态误差的叠加。

令 $n(t)=0$ 时，求得给定输入作用下的误差传递函数为

$$\Phi_{er}(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

所以给定误差为

$$\begin{aligned} e_{ssr} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot R(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(1 + T_1s)(1 + T_2s)}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s) + K_1K_2} \cdot \frac{R_r}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

令 $r(t)=0$ 时，求得扰动输入作用下的误差传递函数为

$$\Phi_{en}(s) = -\frac{G_2(s)}{1 + G(s)G_2(s)}$$

所以扰动稳态误差为

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{sG_2(s) \cdot N(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{s \cdot K_2(1 + T_1s)}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s) + K_1K_2} \cdot \frac{R_n}{s} = -\frac{R_n}{K_1}$$

由上式计算可以看出， $r(t)$ 和 $n(t)$ 同是阶跃信号，由于在系统中的作用点不同，故它们产生的稳态误差也不相同。此外，由扰动稳态误差的表达式可见，**提高系统前向通道中扰动信号作用点之前的环节的放大系数（即 K_1 ），可以减小系统的扰动稳态误差。**

该系统总的稳态误差为

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn} = -\frac{R_n}{K_1}$$

为了分析系统中串联的积分环节对稳态误差的影响，我们假设

图3-26中

$$G_1(s) = \frac{K_1}{s(1 + T_1s)} \quad G_2(s) = \frac{K_2}{1 + T_2s}$$

给定输入和扰动输入保持不变。这时，系统的稳态误差可按上述相同的方法求出，即

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = 0$$

$$\begin{aligned} e_{ssn} &= \lim_{s \rightarrow 0} - \frac{s G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s)} \cdot N(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} - \frac{s^2 K_1 (1 + T_2 s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) + K_1 K_2} \cdot \frac{R_n}{s} = 0 \end{aligned}$$

系统的总误差为

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn} = 0$$

比较以上两次计算的结果可以看出，**若要消除系统的给定稳态误差，则系统前向通道中串联的积分环节都起作用。若要消除系统的扰动稳态误差，则在系统前向通道中只有扰动输入作用点之前的积分环节才起作用。**因此，若要消除由给定输入和扰动输入同时作用于系统所产生的稳态误差，则串联的积分环节应集中在前向通道中扰动输入作用点之前。

对于非单位反馈系统，当 $H(s)$ 为常数时，以上分析的有关结论同样适用。前面定义了相对于给定输入的无差度，同样也可以定义**相对于扰动输入的无差度**。当系统的 $G_1(s)$ 中含有 γ_1 个串联的积分环节时称系统相对于扰动输入是 γ_1 阶无差系统，而 γ_1 称为系统相对于扰动输入的**无差度**。

对本例中的前一种情况，系统对扰动输入的无差度为0，而后一种情况，系统对扰动的无差度是1。显然，当谈及一个系统的无差度时应指明系统对哪一种输入作用而言，否则，可能会得出错误的结论。

四、减小或消除稳态误差的方法

前面的讨论表明，为了减小系统的稳态误差，可以增加开环传递函数中的串联积分环节的数目或提高系统的开环放大系数。但是，串联的积分环节一般不超过2，而开环放大系数也不能任意增大，否则系统将可能不稳定，

为了进一步减小系统稳态误差，可以采用**加前馈控制的复合控制方法**，即从给定输入或扰动输入处**引出一个前馈控制量**，加到系统中去，通过适当选择补偿装置和作用点，就可以达到减小或消除稳态误差的目的。

在图3-27所示系统中，为了消除由 $r(t)$ 引起的稳态误差，可在原反馈控制的基础上，从给定输入处引出前馈量经补偿装置 $G_c(s)$ ，对系统进行开环控制。此时系统误差信号的拉氏变换式为

$$E(s) = R(s) - G_2(s)[G_1(s)E(s) + G_c(s)R(s)]$$

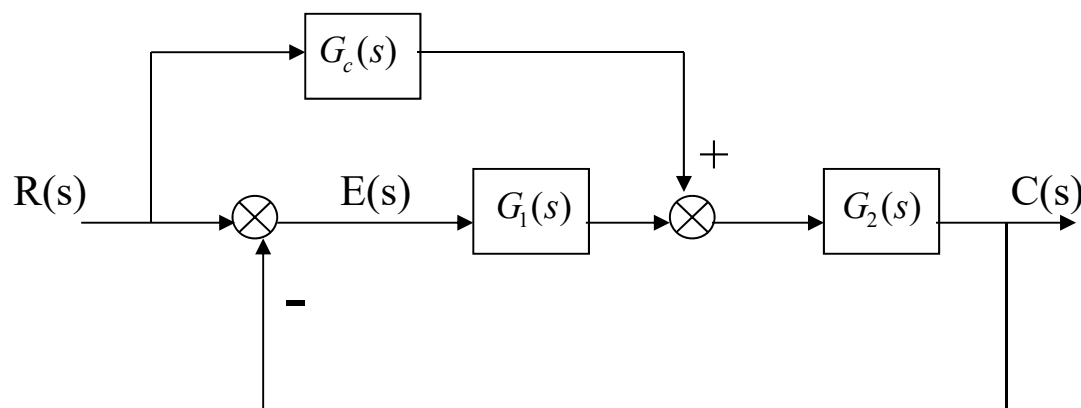


图3-27 按给定输入补偿的复合控制

经整理得

$$E(s) = \frac{[1 - G_2(s)G_c(s)]}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot R(s)$$

显然，如果选择补偿装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1}{G_2(s)}$$

则系统给定的稳态误差为零。

在图3-28所示系统中，为了**消除由 $n(t)$ 引起的稳态误差**，可在原反馈控制的基础上，**从扰动输入引出前馈量**经补偿装置 $G_c(s)$ 加到系统中，若设 $r(t)=0$ ，则系统的输出 $C(s)$ 就是系统的误差信号。系统输出的拉氏变换式为

$$C(s) = G_2(s)[N(s) - G_1(s)G_c(s)N(s) - G_1(s)C(s)]$$

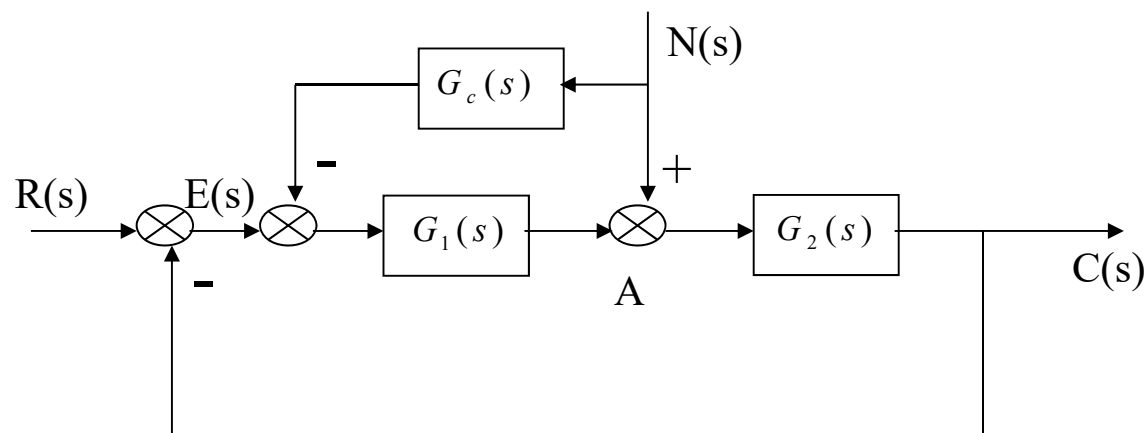


图3-28 按扰动输入补偿的复合控制

经整理得

$$C(s) = \frac{G_2(s)[1 - G_1(s)G_c(s)]}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot N(s)$$

显然，如果选择补偿装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1}{G_1(s)}$$

则可使输出不受扰动 $n(t)$ 的影响，故系统的扰动稳态误差为零。

从结构上看，当满足 $G_c(s) = \frac{1}{G_1(s)}$ 时，扰动信号经两条通道到达A点，两个分支信号正好大小相等，符号相反，因而实现了对扰动的全补偿。

由于物理上**可实现系统的传递函数总是满足分母的阶次大于或等于其分子的阶次**，要求构造出分子的阶次大于或等于其分母阶次的补偿装置，这通常是不可能的。此外，由于传递函数的元件参数随着时间的推移也会发生变化，这就使得全补偿条件不可能成立。所以，实际上只能实现近似补偿。

可以证明，**前馈控制加入前后，系统的特征方程保持不变**，因此，**系统的稳定性将不会发生变化**。