第三章 线性系统的时域分析法

3.1　系统时间响应的性能指标

结构建模——分析特性——综合校正

- 首要任务是建立系统的**数学模型**
- 基于数学模型可以采用不同的**分析方法**来分析系统的性能。

1. 分析方法

经典控制理论中常用的分析方法: 时域法　根轨迹法　频域法

3.1 系统时间响应的性能指标

时域分析法： 在时间域内，在典型输入信号的作用下，研究系统输出响应随时间变化规律的方法。

- 优点：物理概念清晰，准确度较高，在已知系统结构和参数并建立了系统的微分方程后，使用时域分析法比较方便。

- 缺点：进行系统设计和校正时，根据系统性能指标的要求选定系统的结构和参数，存在一定的困难。

2. 典型输入信号

- 输入信号的变化形式
  - 输入信号是已知的，如：恒值系统
  - 输入信号是未知的，如：随动系统
- 为了方便系统的分析和设计，使各种控制系统有一个进行比较的基础，需要选择一些典型试验信号作为系统的输入，比较各种系统对这些输入信号的响应。
- 常用的试验信号（函数）：**阶跃函数、斜坡函数、抛物线函数、脉冲函数及正弦函数。**

3.1 系统时间响应的性能指标

- 输入信号选择
  - 随时间逐渐增加的信号，则选用**斜坡函数**较合适；
  - 具有突变性质的输入信号，则选用**阶跃函数**较合适；
  - 有时还应考虑“系统工作在**最不利**的情况下”的输入信号。

- 同一系统：不管采用何种典型输入信号，其过渡过程所反应出的系统特性应是统一的。

- 不同系统：在相同输入基础上，比较各种控制系统的性能。

3.1 系统时间响应的性能指标

3. 动态过程与稳态过程

对于任何一个控制系统，在典型输入信号作用下，输出响应由动态过程和稳态过程组成。

- **动态过程** 在典型输入信号作用下，系统输出量从初始状态到最终状态的响应过程。
  - 表现：衰减、发散、等幅振荡
  - 原因：惯性、摩擦、其它等。
  - 要求：必须是衰减的，或稳定。
  - 动态：速度、阻尼等。
- **稳态过程** 在典型输入信号作用下，无限长时间后，系统输出量的表现形式。
  - 表　现：系统输出量复现输入量的程度，提供稳态信息。

4. 动态性能与稳态性能

衡量**稳定系统**的动态过程和稳态过程的性能指标:

1）稳态性能 通常在阶跃函数、斜坡函数或加速度函数作用下进行测定。

稳态误差：当时间趋于无穷时，系统输出量不等于 **输入量或输入量的确定函数**，则存在稳态误差，是系统控制精度或抗干扰能力的度量标准。

4. 动态性能与稳态性能

衡量**稳定系统**的动态过程和稳态过程的**性能指标**:

2）动态性能　一般指阶跃输入（比较严峻的条件）情况下的系统动态性能。

动态性能指标：在单位阶跃函数作用下，动态过程随时间的变化情况的指标，称为动态性能指标。

3.1 系统时间响应的性能指标

➢ 动态性能

- 上升时间t_r：响应从终值的10%上升到90%所需时间，对于有振荡的系统，从零第一次上升到终值所需时间。 Speed

- 峰值时间t_p：响应**超过终值**到达第一个峰值所需时间。Speed

- 调节时间ts：响应到达并保持在终值的±5%或±2%以内所需时间。Speed+damp

- 超调量σ %：响应的最大偏离量与终值的差与终值的比（百分数）。damp

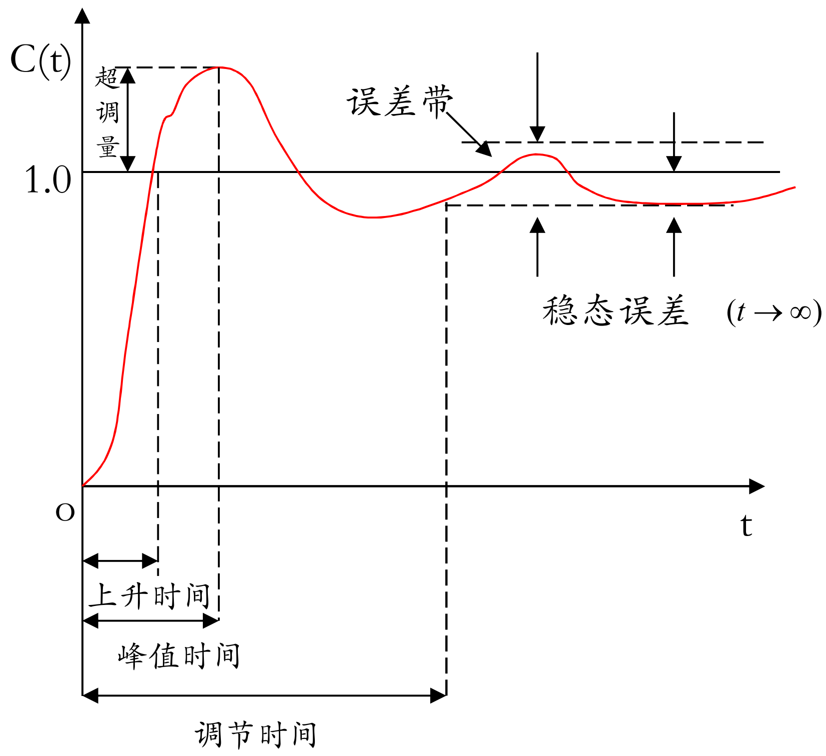


图3-0　单位阶跃响应曲线

3.2　一阶系统的时域分析

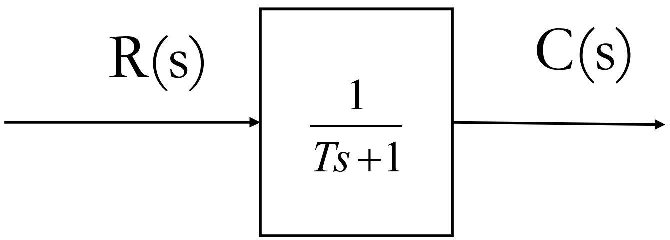
由一阶微分方程描述的系统称为**一阶系统**。

系统的微分方程：$T\dfrac{dc(t)}{d(t)}+c(t)=r(t)$

系统的传递函数（零初始条件）：$\Phi(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{1}{Ts+1}$

其中，T为时间常数。

一阶系统的结构图：



写成闭环形式：

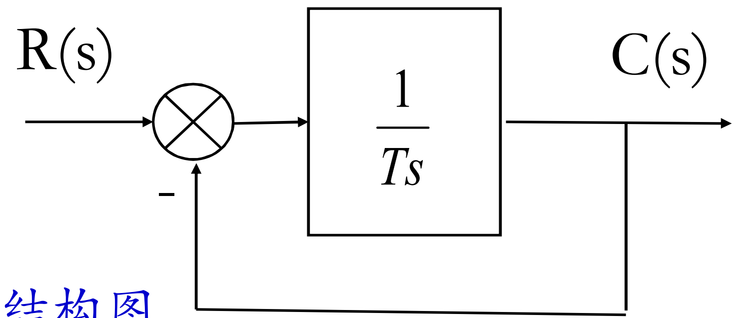


图3-1　一阶系统的结构图

3.2 一阶系统的时域分析

在零初始条件下，直接求解微分方程或利用拉氏反变换，可以求得一阶系统在典型输入信号作用下的输出的时域响应。

求解系统的微分方程，得到$C(t)$:
$$T\frac{dc(t)}{d(t)}+c(t)=r(t)$$

利用拉氏反变换，求输出响应$C(t)$：

$$C(s)=\Phi(s).R(s)=\frac{1}{Ts+1}R(s)$$

一、单位阶跃响应

设系统的输入为单位阶跃函数$r(t)$=1(t)，其拉氏变换为： $R(s)=\dfrac{1}{s}$

则输出的拉氏变换为：
$$C(s)=\frac{1}{Ts+1}.\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

对上式进行拉氏反变换，求得单位阶跃响应为:

$$C(t)=1-e^{-\frac{t}{T}} \qquad (t\geq 0)$$

- 式中的1为稳态分量，$-e^{-\frac{t}{T}}$为瞬态分量，当$t\to\infty$时，

瞬态分量衰减为零。

3.2 一阶系统的时域分析

➢ 当初始条件为零时，一阶系统单位阶跃响应的变化曲线?

$$C(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

一条非周期的单调上升的由T反映的指数曲线

1） 求不同时刻系统的输出

$e^{-1} \approx 0.368$ $e^{-3} \approx 0.05$

2） 响应曲线的斜率

$$\frac{dc(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

$$\frac{dc(t)}{dt}\Big|_{t=T} = 0.368\frac{1}{T}$$

$$\frac{dc(t)}{dt}\Big|_{t=\infty} = 0$$

响应曲线的**初始斜率为**$1/T$，且逐渐减小。

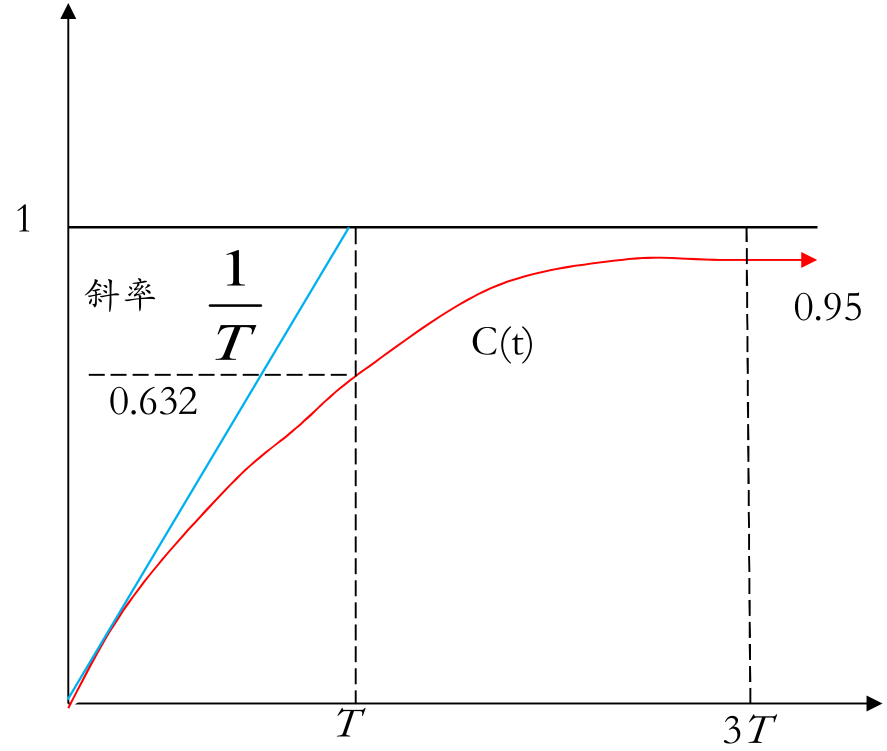


图3-2一阶系统的单位阶跃响应

3.2　一阶系统的时域分析

一阶系统的动态性能指标：

1） 上升时间t_r　$c(t)=1-e^{-\frac{t1}{T}}=0.1$　　$e^{-\frac{t1}{T}}=0.9$　　$-\frac{t1}{T}=\ln 0.9=-0.1$

$c(t)=1-e^{-\frac{t2}{T}}=0.9$　　$e^{-\frac{t2}{T}}=0.1$　　$-\frac{t2}{T}=\ln 0.9=-2.3$

$t_r=2.2T$

2） 调节时间t_s

$t_s=3T(\Delta=5\%)$

3） 峰值时间和超调量不存在

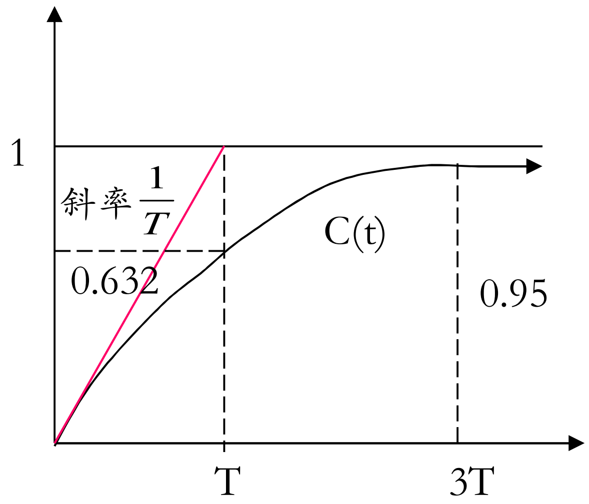


图3-2一阶系统的单位阶跃响应

3.2 一阶系统的时域分析

响应曲线变化规律1:

- 在整个工作时间内，系统的响应都不会超过稳态值（有限性）。
- 由于该响应曲线具有非振荡特征，又称为非周期响应、指数响应（单调性）。
- 指数响应曲线的斜率初始（t=0时）值为 $\frac{1}{T}$ ，斜率随时间的推移而下降至零。
- 如果系统保持初始响应的斜率不变，当t=T 时，输出量达到稳态值。
- 指数响应曲线的斜率不断下降，导致完成全部变化的时间无限长。
- 初始斜率特性是常用的确定一阶系统时间常数的方法（法一）。

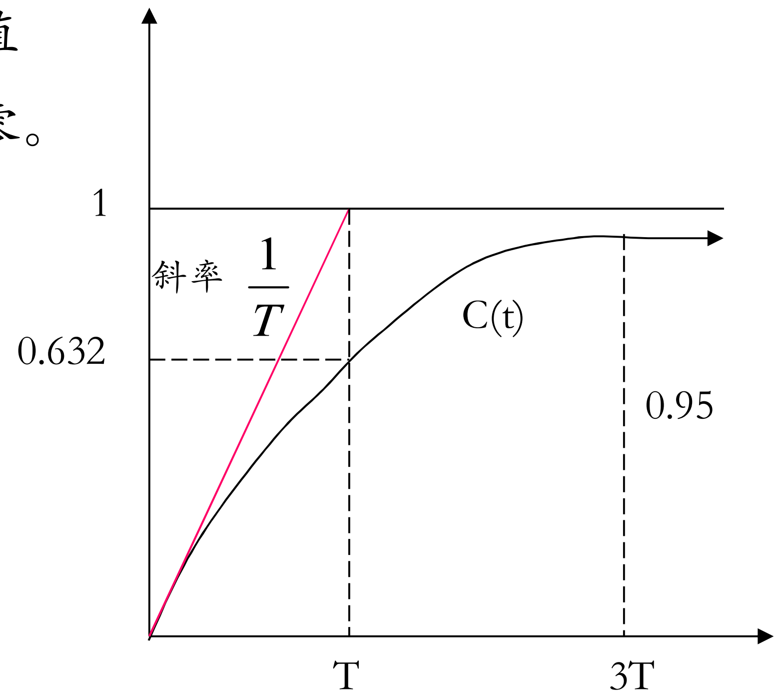


图3-2 一阶系统的单位阶跃响应

3.2 一阶系统的时域分析

响应曲线变化规律2:

- 不同时刻的系统输出量与时间常数 T 有一一对应的关系：经过T、$2T$、$3T$和$4T$ 时，输出量C（t）将分别达到稳态值的63.2%、86.5%、95%和98.2%。
- **基于上述规律可利用实验方法测定一阶系统的时间常数（法二）**，或判断是否属于一阶系统系统。*输出响应由零值开始到达稳态值的63.2%所需的时间就是系统的时间常数T。*
- 时间常数T反应了系统的响应速度（惯性）：T越小（惯性小），输出响应越快；T越大（惯性大），输出响应越慢。

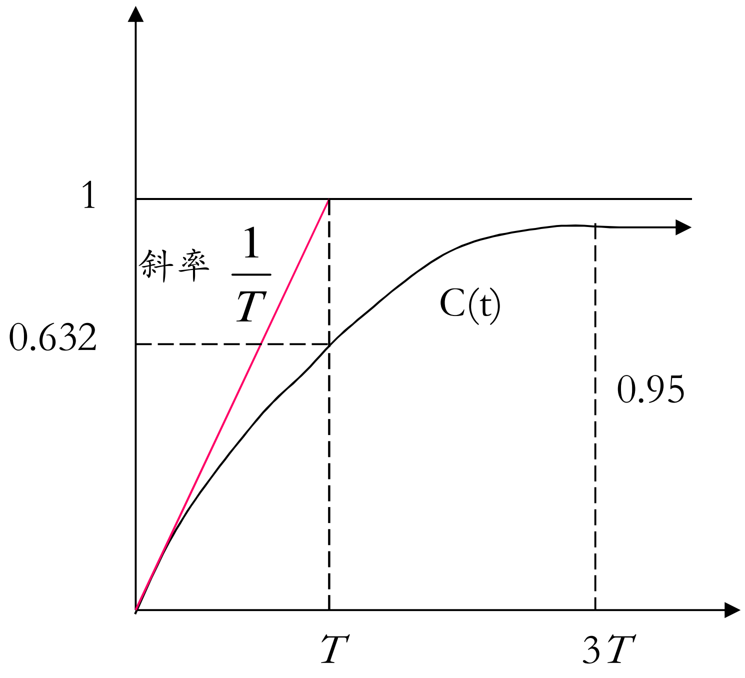


图3-2 一阶系统的单位阶跃响应

二、单位斜坡响应

设系统的输入为单位斜坡函数$r(t)=t$，其拉氏变换为：$R(s)=\dfrac{1}{s^2}$

则输出的拉氏变换为：$C(s)=\dfrac{1}{Ts+1}\cdot\dfrac{1}{s^2}\ =\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{T}{s}+\dfrac{T}{s+1/T}$

则输出响应：$C(t)=t-T+Te^{-\frac{t}{T}}=(t-T)+Te^{-\frac{t}{T}}\qquad (t\geqslant 0)$

式中，t -T为稳态分量，$Te^{-\frac{t}{T}}$ 为瞬态分量，当$t\to\infty$时，**瞬态分量衰减到零。**

斜坡函数

一阶系统的单位斜坡响应曲线: $C(t)=(t-T)+Te^{-\frac{t}{T}}$

$$C(t=0)=t-T+Te^{-\frac{t}{T}}|_{t=0}$$
$$=0-T+T$$
$$=0$$

$$C(t=\infty)=\infty-T+Te^{-\frac{t}{T}}|_{t=\infty}$$
$$=\infty-T+0$$
$$=\infty-T$$

$$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=0}=1-e^{-\frac{t}{T}}\Big|_{t=0}=0$$

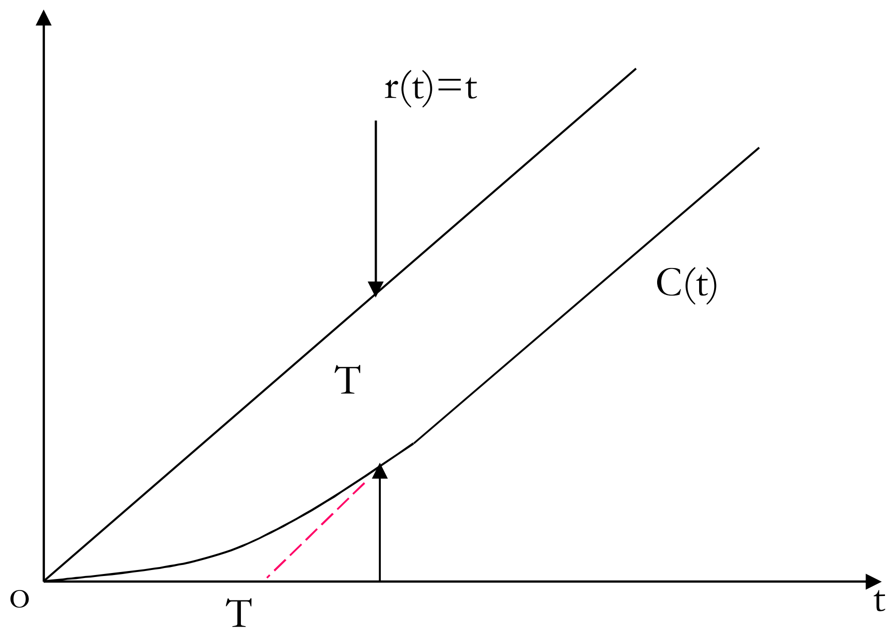


图3-3　一阶系统的单位斜坡响应

3.2 一阶系统的时域分析

响应曲线变化规律：

$$C(t)=(t-T)+Te^{-\frac{t}{T}}$$

- 一阶系统的单位斜坡响应的瞬态分量为衰减非周期函数，稳态分量是一个与输入斜坡函数斜率相同但时间滞后T的斜坡函数。
- 系统响应从$t=0$时开始跟踪输入信号而单调上升。
- 在达到稳态后，系统响应与输入信号同速增长，但它们之间存在跟随误差，即 $e(t)=r(t)-c(t)=T(1-e^{-\frac{t}{T}})$ 且 $\lim\limits_{t\to\infty} e(t)=T$
- 时间常数T越小，系统跟踪斜坡输入信号的稳态误差也越小。

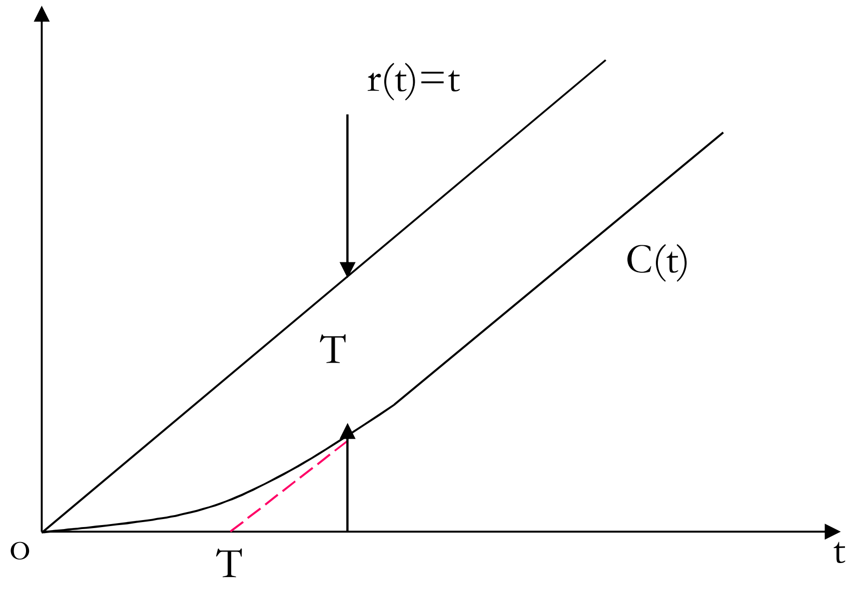


图3-3 一阶系统的单位斜坡响应

三、单位脉冲响应

设系统的输入为单位脉冲函数$r(t)=\delta(t)$，其拉氏变换为 $R(s)=1$

则输出响应的拉氏变换为

$$C(s)=\frac{1}{Ts+1}\cdot 1=\frac{1}{Ts+1}$$

输出响应的拉氏变换就是系统闭环传递函数的拉氏变换。

经拉氏逆变换后，得单位脉冲响应为 $C(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}} \quad (t\geqslant 0)$

三、单位脉冲响应

$$C(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}\quad (t\geqslant 0)$$

一阶系统的单位脉冲响应曲线:

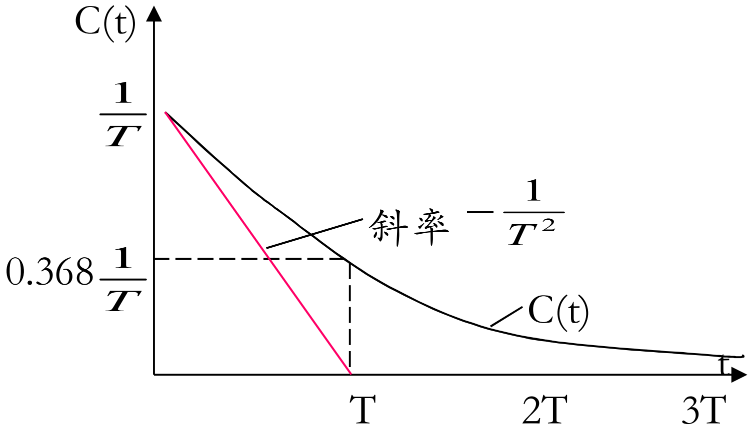


图3-4 一阶系统的脉冲响应

$$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{d(\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}})}{dt}\right|_{t=0}=-\frac{1}{T^2}$$

$$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=T}=-0.368\frac{1}{T^2}\qquad \left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=\infty}=0$$

3.2 一阶系统的时域分析

响应曲线变化规律：

- 一阶系统的单位脉冲响应是单调下降的指数曲线，曲线的初始斜率为$-\frac{1}{T^2}$，输出量的初始值为 $\frac{1}{T}$
- 当 t 趋于∞时，输出量$c(\infty)$趋于零，所以输出响应不存在稳态分量。
- 在实际中，一般认为在$t=3T\sim4T$时过渡过程结束。故系统过渡过程的快速性取决于T的值，T越小系统响应的越快。
- *当单位脉冲函数作用于被测系统，测量系统单位脉冲响应，可得被测系统的闭环传递函数。*

$$C(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$

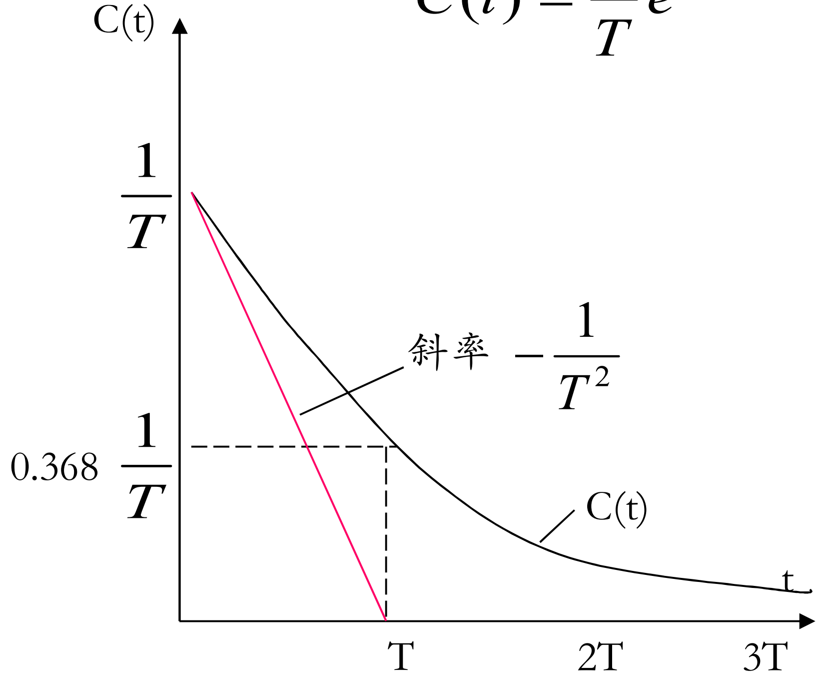


图3-4 一阶系统的脉冲响应

变化规律比较：

	输入信号	输出响应
脉冲函数	$\delta(t)$	$\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$
阶跃函数	$1(t)$	$1-e^{-\frac{t}{T}}$
斜坡函数	t	$t-T+Te^{-\frac{t}{T}}$
加速度函数	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{2}t^2-Tt+T^2-T^2e^{-\frac{t}{T}}$

- 输入：按照脉冲函数，阶跃函数、斜坡函数、加速度函数的顺序，前者是后者的导数，而后者是前者的积分。
- 响应：上述输出响应：脉冲响应、阶跃响应、斜坡响应和加速度响应之间也存在同样的对应关系。

3.2 一阶系统的时域分析

上述规律表明：

- 系统对某种输入信号导数的响应，等于系统对该输入信号响应的导数。
- 系统对某种输入信号积分的响应，等于系统对该输入信号响应的积分，积分常数由零初始条件确定。

	输入信号	输出响应
脉冲函数	$\delta(t)$	$\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$
阶跃函数	$1(t)$	$1-e^{-\frac{t}{T}}$
斜坡函数	t	$t-T+Te^{-\frac{t}{T}}$
加速度函数	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{2}t^2-Tt+T^2-T^2e^{-\frac{t}{T}}$

线性定常系统的上述重要特征不仅适用于一阶线性定常系统，也适用于高阶线性定常系统。在后面的分析中，我们**主要研究**系统的**单位阶跃响应**。

本次课结束

1)掌握系统时域分析的指标定义和描述。 ★

2)重点掌握一阶系统在阶跃输入下的时域响应特性。 ★★★

3)掌握一阶系统在不同输入下的时域响应特性。★★

4)掌握一阶系统在不同输入下的时域响应的特殊点、曲线、斜率等特征。 ★