

第二章 控制系统的数学模型

2-1 引言

2-2 微分方程的建立及线性化

2-3 传递函数

2-4 结构图

2-5 信号流图

引言

一、数学模型

1.定义：控制系统的输入和输出之间动态关系的数学表达式即为数学模型。数学模型是分析和设计自动控制系统的基础。

2.为什么要建立数学模型：我们需要了解系统的具体性能指标，只是定性地了解系统的工作原理和大致的运动过程是不够的，希望能够从理论上对系统的性能进行定量的分析和计算。要做到这一点，首先要建立系统的数学模型。它是分析和设计系统的依据。

引言

另一个原因

许多表面上看来似乎毫无共同之处的控制系统，其运动规律可能完全一样，可以用一个运动方程来表示，我们可以不单独地去研究具体系统而只分析其数学表达式，即可知其变量间的关系，这种关系可代表数学表达式相同的任何系统，因此需建立控制系统的数学模型。

比如机械平移系统和RLC电路就可以用同一个数学表达式分析，具有相同的数学模型。

引言

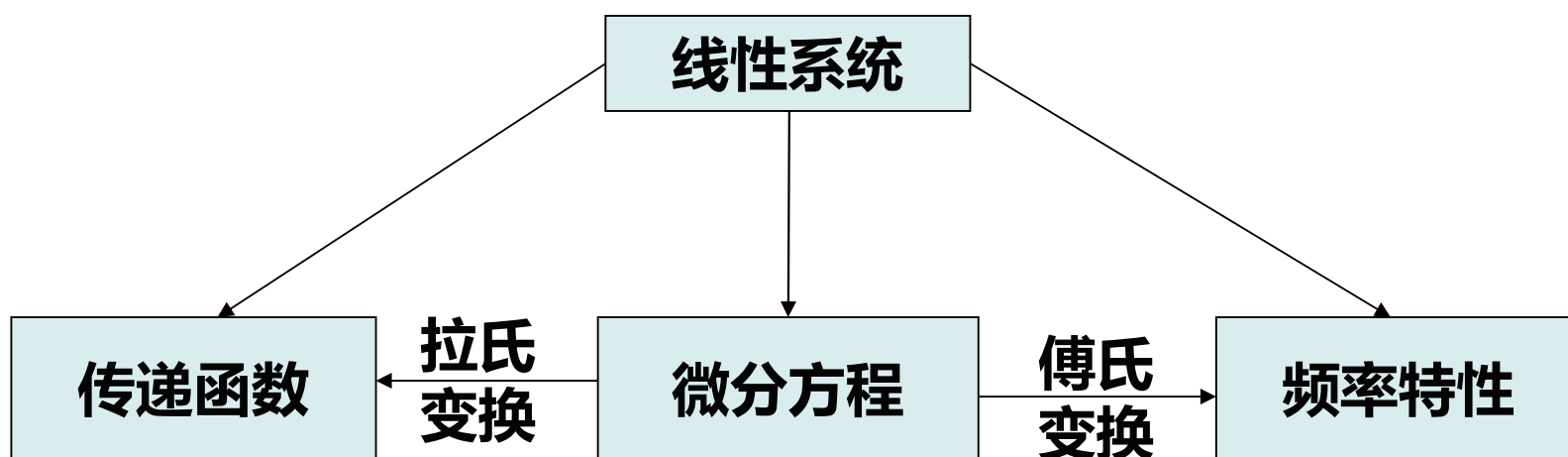
表示形式

➤ 微分方程

➤ 传递函数

➤ 频率系统

三种数学模型之间的关系



引言

同一个系统，可以选用不同的数学模型，研究时域响应时可以用传递函数，研究频域响应时则要用频率特性。

4.建立方法

目前工程上采用的方法主要是

a.分析计算法

分析计算法是**根据**支配系统的**内在运动规律**以及系统的**结构和参数**，**推导出**输入量和输出量之间的**数学表达式**，从而建立数学模型——适用于**简单**的系统。

引言

□ 微分方程的列写步骤

1) 确定系统的输入、输出变量;



2) 从输入端开始, 按照信号的传递顺序, 根据各变量所遵循的物理定理写出各微分方程;



3) 消去中间变量, 写出输入、输出变量的微分方程;

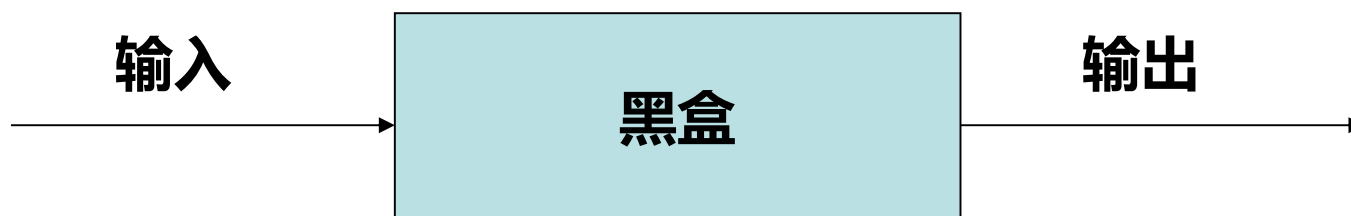


4) 变换成标准形式。

引言

b.工程实验法

工程实验法：它是利用系统的输入--输出信号来建立数学模型的方法。通常在对系统一无所知的情况下，采用这种建模方法。



但实际上有的系统还是了解一部分的，这时称为**灰盒**，可以**分析计算法与工程实验法**一起用，较准确而方便地建立系统的数学模型。

实际控制系统的数学模型往往是很复杂的，在一般情况下，常常可以忽略一些影响较小的因素来简化，但这就出现了一对矛盾，简化与准确性。不能过于简化，而使数学模型变的不准确，也不能过分追求准确性，使系统的数学模型过于复杂。

引言

二、线性系统

定义：如果系统的数学模型是**线性微分方程**，这样的系统就是线性系统。

线性元件：具有**迭加性**和**齐次性**的元件称为线性元件。

引言

非线性元件：不具有迭加性和齐次性的元件称为非线性元件。

- 如果元件输入为 $r(t)$ 、 $r_1(t)$ 、 $r_2(t)$ ，对应的输出为 $c(t)$ 、 $c_1(t)$ 、 $c_2(t)$
- 如果 $r(t) = r_1(t) + r_2(t)$ 时， $c(t) = c_1(t) + c_2(t)$ 满足迭加性
- 如果 $r(t) = a \cdot r_1(t)$ 时， $c(t) = a \cdot c_1(t)$ 满足齐次性

满足迭加性和齐次性的元件才是线性元件。

引言

线性系统重新定义：若组成系统的各元件均为线性元件，则系统为线性系统。

线性方程不一定满足迭加性和齐次性。

□ 例如 $y=kx$ 是线性元件

输入 $x_1 \rightarrow y_1$ ， 输出 $x_2 \rightarrow y_2$ ，

输入 $x_1 + x_2 \rightarrow$ 对应输出 $y_1 + y_2 \rightarrow$ 满足迭加性

若 k 为常数， $kx_1 \rightarrow ky_1 \rightarrow$ 满足齐次性

所表示的元件为线性元件

引言

- $y=kx+b$ (b 为常数 $\neq 0$) → 线性方程，所表示的元件不是线性元件。

为什么呢？

● 输入 $x_1 \rightarrow y_1$ 输出 $y_1 = kx_1 + b$

$x_2 \rightarrow y_2$ 输出 $y_2 = kx_2 + b$

输入 $x_1 + x_2$ 输出 $y = k(x_1 + x_2) + b$
 $= kx_1 + kx_2 + b \neq y_1 + y_2$ 不满足迭加性

k 为常数: $kx_1 \rightarrow$ 输出 $y = k(kx_1) + b = k^2x_1 + b$
 $ky_1 = k(kx_1 + b) = k^2x_1 + kb$

引言

$\therefore y \neq ky_1$ 不满足齐次方程。

\therefore 所表示的元件不是线性元件。

➤ 又例如：元件的数学模型为：

$$y'(t) + y(t) = x(t) \rightarrow \text{线性元件}$$

元件的数学模型为：

$$y'(t) + y(t) = x(t) + b \rightarrow \text{不是线性元件}$$

引言

- **重要特点：**对线性系统可以应用迭加性和齐次性，对研究带来了极大的方便。

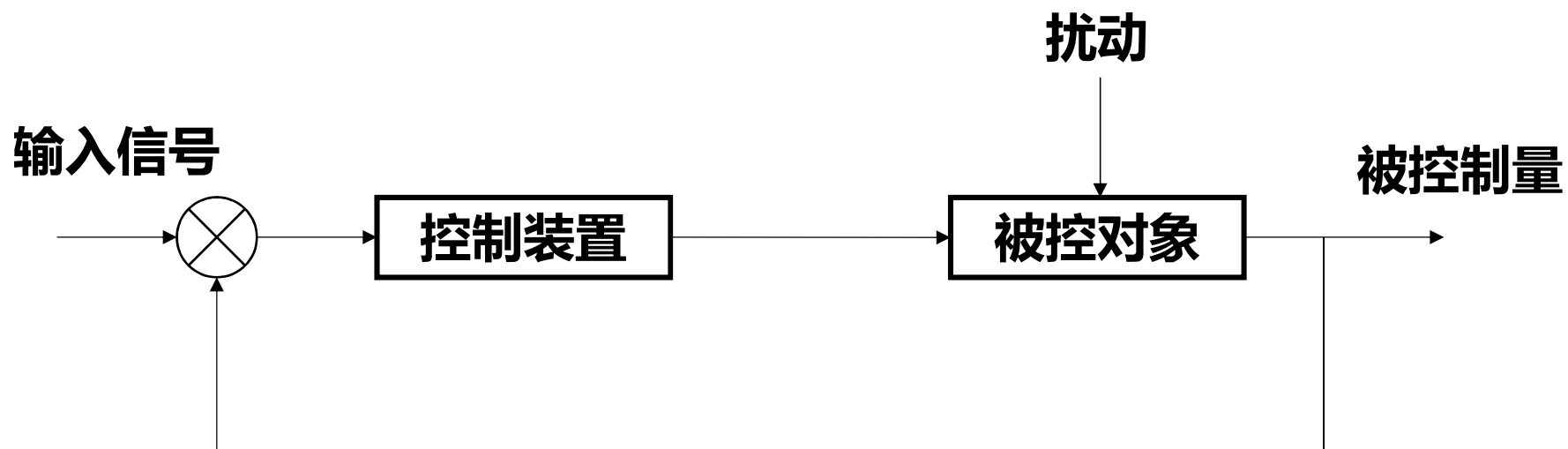
迭加性的应用

欲求系统在**几个**输入信号和干扰信号同时作用下的总响应，只要对这几个外作用**单独求响应**，然后**加起来**就是总响应。

齐次性表明

当外作用的数值增大若干倍时，其响应的数值也增加若干倍。这样，我们可以采用**单位典型外作用**（单位阶跃、单位脉冲、单位斜坡等）对系统进行分析——简化了问题。

引言



只有按**负反馈**原理组成的**闭环系统**才能实现**自动控制**的任务

图 1-7

2-2 微分方程的建立及线性化

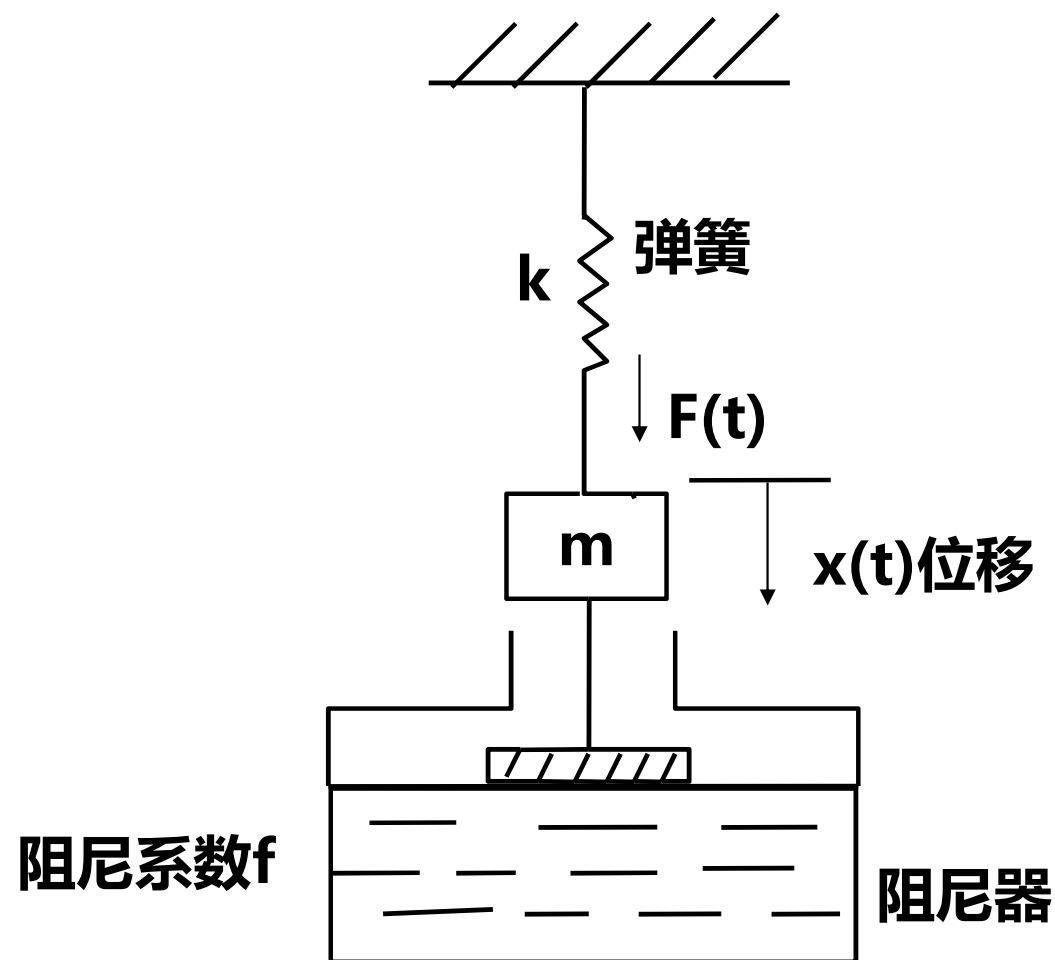
一、微分方程的建立

微分方程是控制系统最基本的数学模型，要研究系统的运动，必须列写系统的微分方程。

一个控制系统由若干具有不同功能的元件组成，首先要根据各个元件的物理规律，列写各个元件的微分方程，得到一个微分方程组，然后消去中间变量，即得控制系统总的输入和输出的微分方程。

微分方程的建立及线性化

□ 例1.机械平移系统 求在外力 $F(t)$ 作用下，物体的运动轨迹。

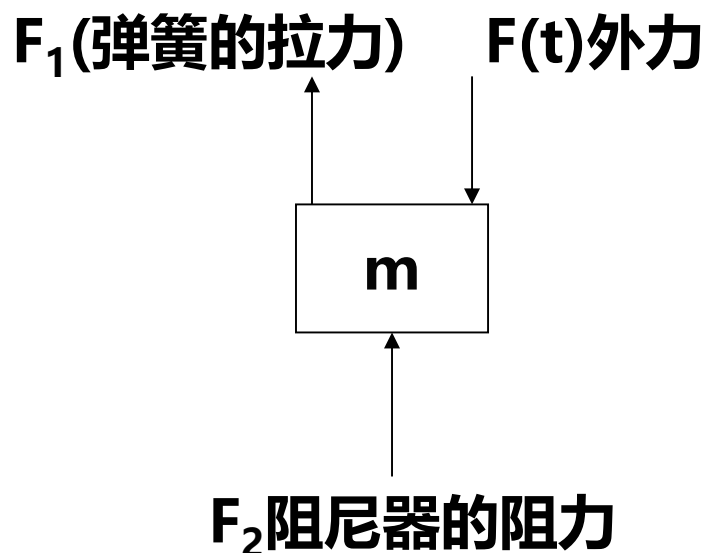


微分方程的建立及线性化

首先确定：输入 $F(t)$,输出 $x(t)$

其次：理论依据

- 1. **牛顿第二定律** 物体所受的合外力等于物体质量与加速度的乘积。
- 2. **牛顿第三定律** 作用力等于反作用力,现在我们单独取出 m 进行分析，这里不考虑重力的影响。



$$F_1 = kx(t)$$

$$F_2 = fx'(t)$$

$$\sum F = ma$$

微分方程的建立及线性化

$$a = x''(t) \therefore F(t) - F_1 - F_2 = ma$$

$$\text{代入上式得 } F(t) - kx(t) - fx'(t) = mx''(t)$$

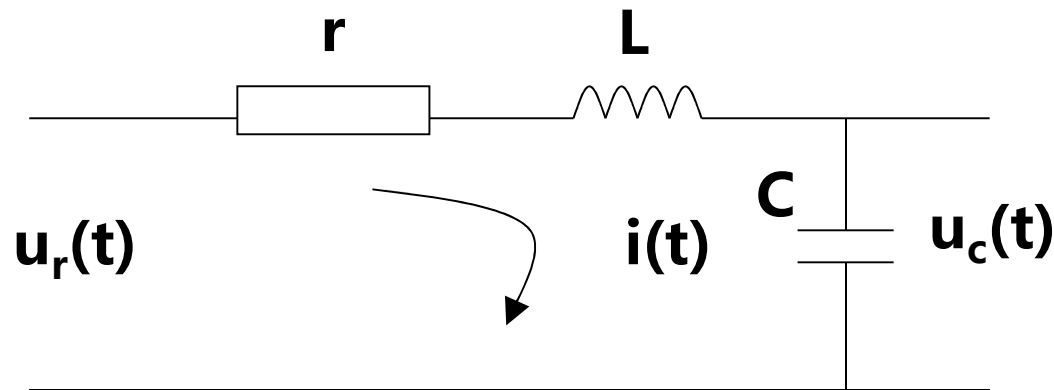
写微分方程时，常习惯于把输出写在方程的左边，输入写在方程右边，而且微分的次数由高到低排列。

\therefore 机械平移系统的微分方程为：

$$mx''(t) + fx'(t) + kx(t) = F(t)$$

微分方程的建立及线性化

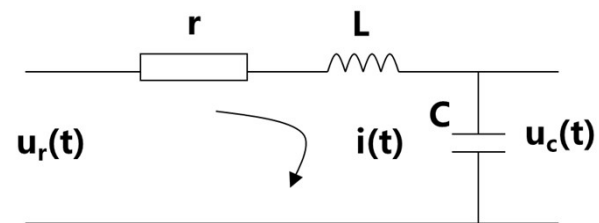
□ 例2.RLC电路：研究在输入电压 $U_r(t)$ 作用下，电容上电压 $U_c(t)$ 的变化。



例2 RLC电路图

微分方程的建立及线性化

依据：电学中的**基尔霍夫定律**



$$u_r(t) = ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + u_c(t), (1)$$

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt, (2) \text{ (两边求导)}$$

$$\therefore i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$$

由 (2) 代入 (1) 得：消去中间变量 $i(t)$

$$u_r(t) = rC \frac{du_c(t)}{dt} + LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + u_c(t)$$

微分方程的建立及线性化

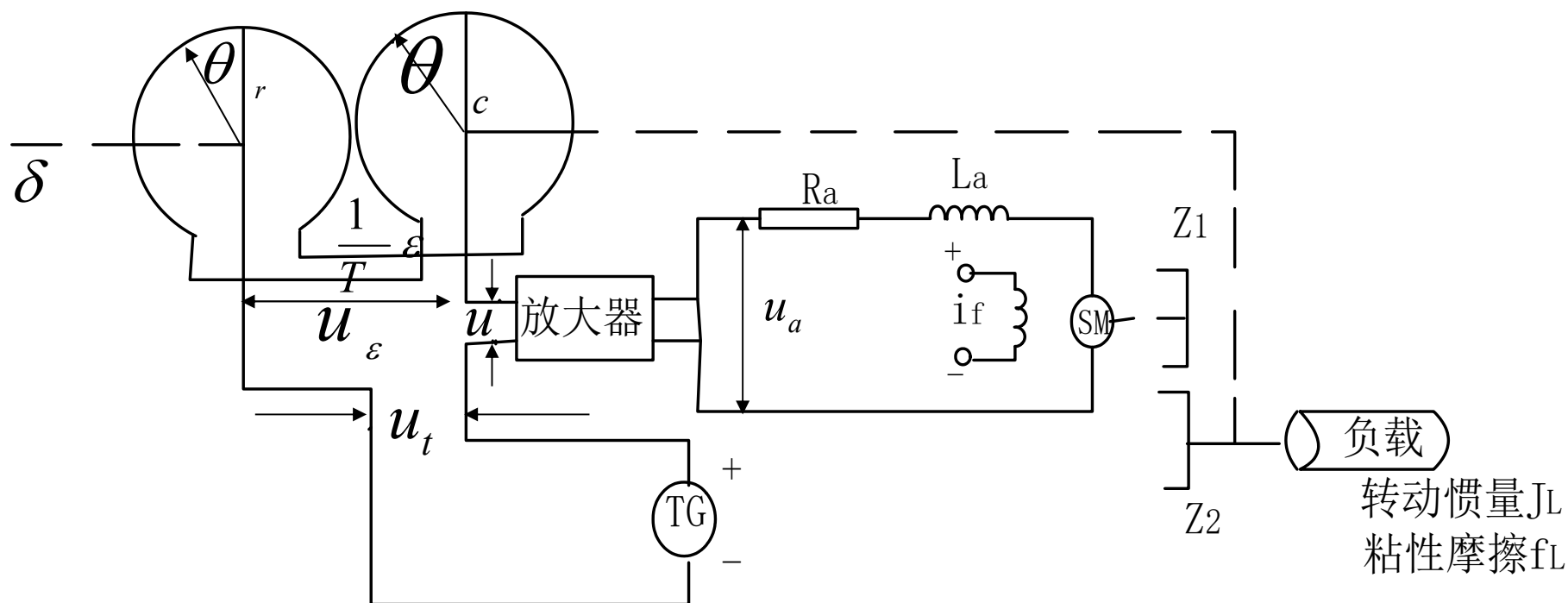
➤ 整理成规范形式

$$LCu_C''(t) + rCu_C'(t) + u_C(t) = u_r(t)$$

这两个式子很相似，故可用电子线路来模拟机械平移系统，这也证明了我们前面讲到的，看似**完全不同的系统**，**具有相同的运动规律**，可用相同的数学模型来描述。

微分方程的建立及线性化

□ 例3.位置随动系统的数学模型——微分方程



微分方程的建立及线性化

- 任务是控制机械负载，使其位置与输入手柄的位置相协调。

解：首先确定输入 θ_r 、输出 θ_c

(1) **电位器对**——也称为**电桥**，由完全相同的两个电位器对组成。

作用：用来检测输入 θ_r 与输出 θ_c 之间的角偏差，是控制系统中常用的误差检测器之一。

微分方程的建立及线性化

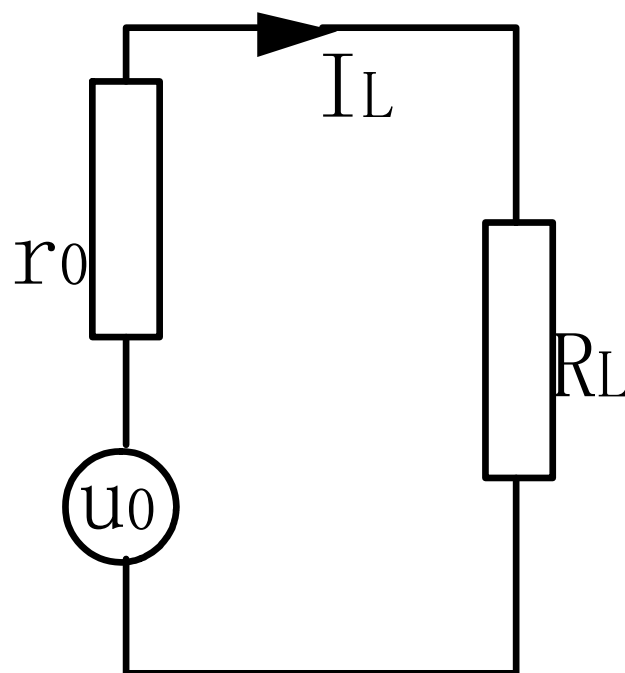
两个电位器的滑臂分别与输入手柄及负载轴相连，当输入轴的角位置 θ_r 与负载轴的角位置 θ_c 不相等时，出现角位置差：

$$\theta_{\varepsilon}(t) = \theta_r(t) - \theta_c(t)$$

此时电桥输出偏差电压 U_{ε} ， R_L 是电桥的负载。电位器对输入为 θ_{ε} ，输出为 U_{ε} 。列写电位器对的微分方程，也就是列写 θ_{ε} 与 U_{ε} 之间的函数关系。

微分方程的建立及线性化

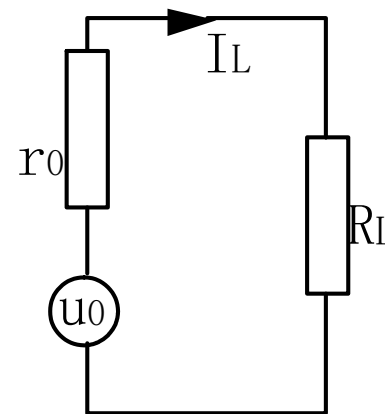
➤ 根据戴维南定理，电位器对的等效电路为：



微分方程的建立及线性化

- 等效发电机的电动势为

$$u_0(t) = k_\varepsilon \theta_\varepsilon(t)$$



是电位器的传递函数或灵敏度（伏/弧度）

- 于是负载支路的电流为

$$I_L(t) = \frac{u_0(t)}{R_L + r_0(t)}$$

微分方程的建立及线性化

➤ 电位器对的输出电压

$$u_{\varepsilon}(t) = I_L(t) R_L = \frac{u_0(t)}{R_L + r_0(t)} \cdot R_L = \frac{u_0(t)}{1 + \frac{r_0(t)}{R_L}}$$

一般情况下，电桥负载 R_L 比内阻 r_0 都要大10倍以上，这时认为 r_0/R_L 趋于0，那么电位器对的数学模型为

$$u_{\varepsilon}(t) = u_0(t) = k_{\varepsilon} \theta_{\varepsilon}(t)$$

说明：当负载阻抗很大时，电位器对的输出电压 U_{ε} 与两个电位器电刷之间的偏差角 θ_{ε} 成正比。

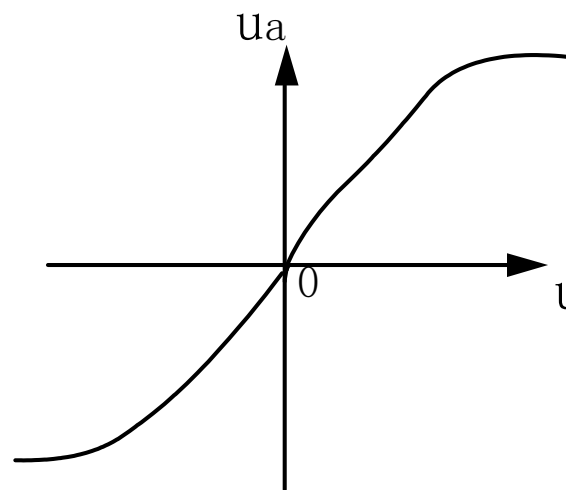
微分方程的建立及线性化

- ◆ **晶体放大器**（控制系统中常用的放大元件，包括电压放大和功率放大两部分）。

在本题中，放大器的输入电压为 u ，等于电位器对的输出电压 U_ε 与测速发电机的反馈电压 U_t 之差

$$u(t) = u_\varepsilon(t) - u_t(t)$$

- 输出电压为 U_a
- 晶体放大器的特性为：



微分方程的建立及线性化

由于随动系统总是工作在原点附近的小偏差范围内，故可以认为放大器工作在线性段，而大输入信号时出现的饱和非线性可以忽略，从而得到简化的数学模型：

$$u_a(t) = k_a u(t) \quad k_a \text{为放大器增益}$$

- ◆ **直流测速发电机**（是控制系统中常用的校正元件，常与电机同轴安装，用来测量电机轴的角速度）

它的输入是电机轴的角速度

$$\omega_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

它的输出是电压 $U_t(t)$ ，它与角速度成正比。

微分方程的建立及线性化

所以测速发电机的运动方程为：

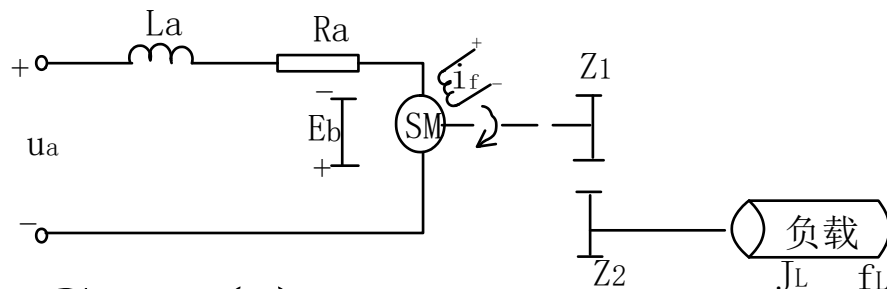
$$u_t(t) = k_t \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

k_t 为测速发电机的传递系数

◆ 电枢控制式直流电动机（它是控制系统中应用最广泛的执行元件）

它的输入电压为 u_a ，输出为电机轴的转角 θ_m 。

微分方程的建立及线性化



$$M_m(t) = C_m i_a(t)$$

C_m 为转矩系数 (牛·米/安)

由于电动机是带动减速器和负载一起转动的，因此列写电动机的运动方程时，必须考虑减速器，负载的转动惯量和粘性摩擦的影响。

➤ 电机轴上的力矩平衡方程式为

$$M_m(t) = J \frac{d^2 \theta_m(t)}{dt^2} + f \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

微分方程的建立及线性化

➤ J 是电机转子的转动惯量同减速器、负载的转动惯量折算的**等效转动惯量**。

➤ f 是电机转子的粘性摩擦系数+减速器、负载的粘性摩擦系数折算的**等效粘性摩擦系数**。

➤ 电枢是一个载流导体，转子旋转时切割了定子磁场的磁力线，于是电枢中就会产生感应电势 E_b ，因为与电枢电压方向相反，故称为**反向电势**，它与电机的转速成**正比**。

微分方程的建立及线性化

$$E_b(t) = k_b \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

k_b 是反电势系数（伏/（弧度/秒））

设电枢绕组的电阻和电感分别为 R_a 和 L_a ，根据基尔霍夫定律，电枢绕组的电压平衡方程式为：

$$u_a(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + E_b(t)$$

➤ 通常 L_a 很小，可以忽略不计,那么

$$u_a(t) = R_a i_a(t) + E_b(t)$$

微分方程的建立及线性化

代入式:

$$i_a(t) = \frac{M_m(t)}{C_m}$$

$$M_m(t) = J \frac{d^2 \theta_m(t)}{dt^2} + f \frac{d \theta_m(t)}{dt}$$

$$E_b(t) = k_b \frac{d \theta_m(t)}{dt}$$

得到:

$$\frac{R_a J}{C_m} \cdot \frac{d^2 \theta_m(t)}{dt^2} + \frac{f R_a}{C_m} \cdot \frac{d \theta_m}{dt} + k_b \cdot \frac{d \theta_m(t)}{dt} = u_a(t)$$

微分方程的建立及线性化

$$\therefore R_a J \frac{d^2 \theta_m(t)}{dt^2} + (fR_b + k_b C_m) \frac{d \theta_m(t)}{dt} = C_m u_a(t)$$

令 $k_m = \frac{C_m}{fR_a + k_b C_m}$ 为直流电动机的传递系数

$T_m = \frac{R_a J}{fR_a + k_b C_m}$ 为直流电动机的时间常数

所以直流电机的运动方程为

$$T_m \frac{d^2 \theta_m(t)}{dt^2} + \frac{d \theta_m(t)}{dt} = K_m u_a(t)$$

微分方程的建立及线性化

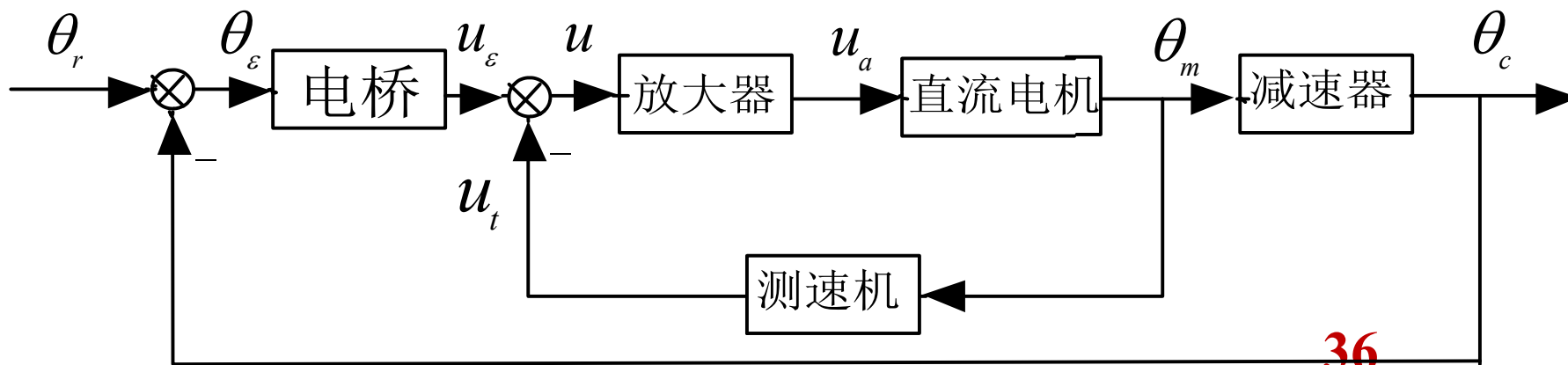
◆ **减速器** 设主动轮和从动轮的角速度和齿数分别为 w_m , z_1 和 w_c , z_2 , 显然一级减速器的减速比为:

$$i = w_m / w_c = z_1 / z_2$$

➤ 于是减速器的运动方程为：

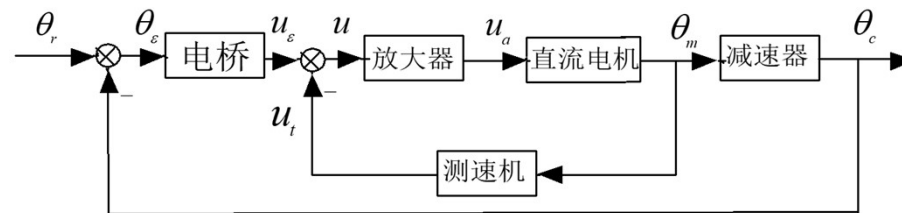
$$\theta_c(t) = \frac{1}{i} \theta_m(t)$$

位置随动系统的原理性方框图：



微分方程的建立及线性化

➤ 各元件微分方程



电桥 $u_{\varepsilon}(t) = k_{\varepsilon} \theta_{\varepsilon}(t)$

放大器 $u_a(t) = k_a u(t)$

测速机 $u_t(t) = k_t \frac{d\theta_m(t)}{dt}$

电机 $T_m \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + \frac{d\theta_m(t)}{dt} = k_m u_a(t)$

减速器 $\theta_c(t) = \frac{1}{i} \theta_m(t)$

$$\theta_{\varepsilon}(t) = \theta_r(t) - \theta_c(t)$$

$$u(t) = u_{\varepsilon}(t) - u_t(t)$$

微分方程的建立及线性化

➤ 消去中间变量得到描述位置随动系统运动的微分方程

$$\frac{d \theta_c t}{dt} + \frac{F}{J} \frac{d \theta_c t}{dt} + \frac{k}{J} \theta_c t = \frac{k}{J} \theta_r t$$

式中增益 $k_0 = \frac{k_\varepsilon k_a C_m}{i R_a}$

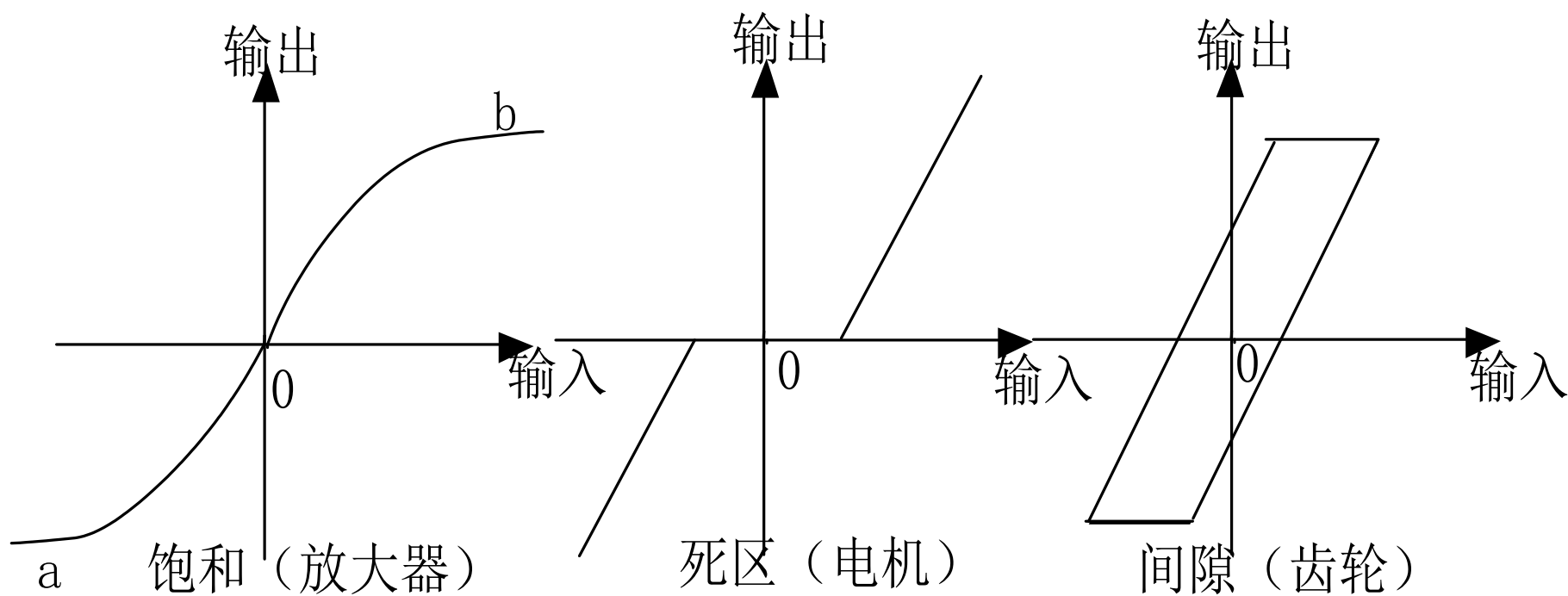
阻尼系数 $F = f + \frac{k_a C_m}{R_a} + \frac{k_a k_t C_m}{R_a}$

折算后电机轴上的总等效转动惯量 $J = J + \frac{J}{i^2}$

微分方程的建立及线性化

二、非线性元件的线性化

1. 几种常见的非线性



微分方程的建立及线性化

非线性微分方程的求解很困难。在一定条件下，可以近似地转化为线性微分方程，可以使系统的动态特性的分析大为简化。实践证明，这样做能够圆满地解决许多工程问题，有很大的实际意义。

2.线性化的方法

(1) **.忽略弱非线性环节**（如果元件的非线性因素较弱或者不在系统线性工作范围以内，则它们对系统的影响很小，就可以忽略）

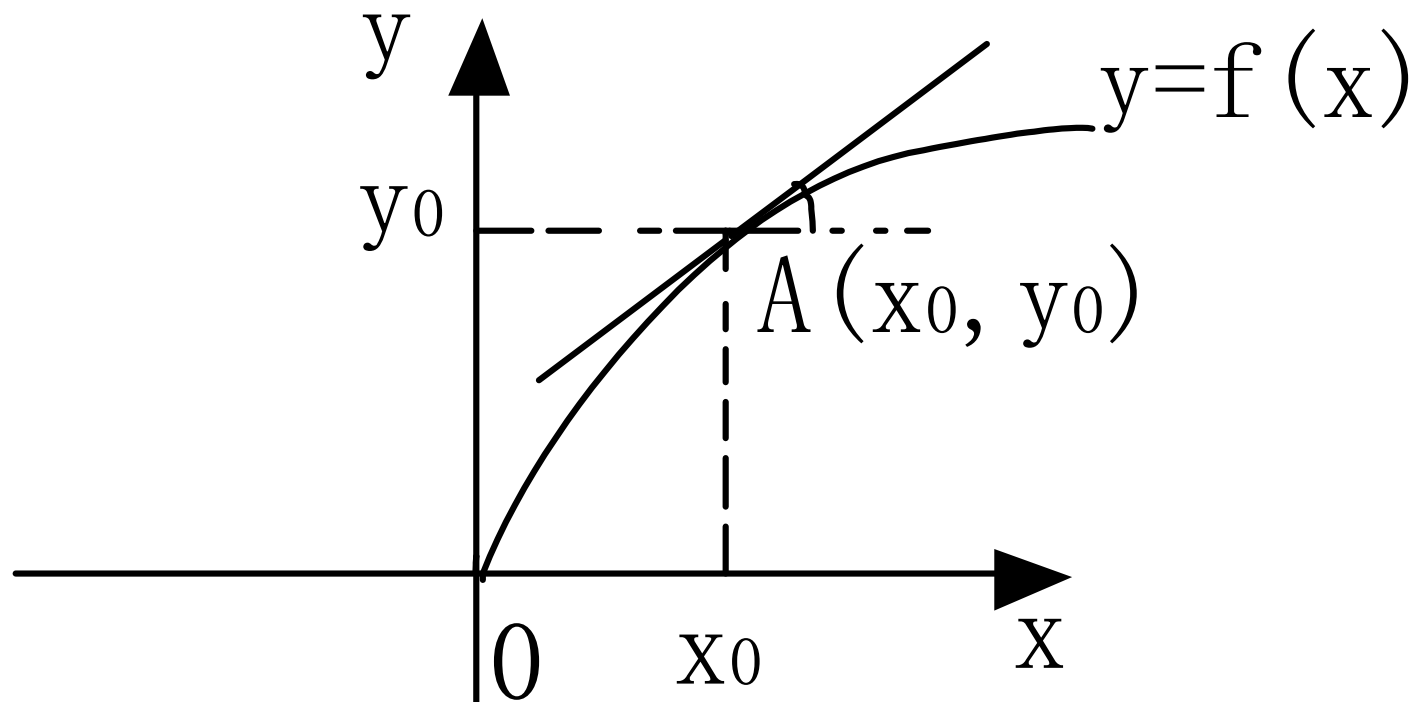
微分方程的建立及线性化

(2) .偏微法（小偏差法，切线法，增量线性化法）

偏微法基于一种假设，就是在控制系统的整个调节过程中，各个元件的输入量和输出量只是在平衡点附近作微小变化。

这一假设是符合许多控制系统实际工作情况的，因为对闭环控制系统而言，一有偏差就产生控制作用，来减小或消除偏差，所以各元件只能工作在平衡点附近。

微分方程的建立及线性化



饱和（放大器）

微分方程的建立及线性化

A(x₀,y₀)平衡点，函数在平衡点处连续可微，则可将函数在平衡点附近展开成泰勒级数：

$$y = f(x) = y_0 + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

忽略二次以上的各项，上式可以写成：

$$\Delta y = k \Delta x$$

$$\Delta y = y - y_0$$

$$\Delta x = x - x_0$$

$$k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0}$$

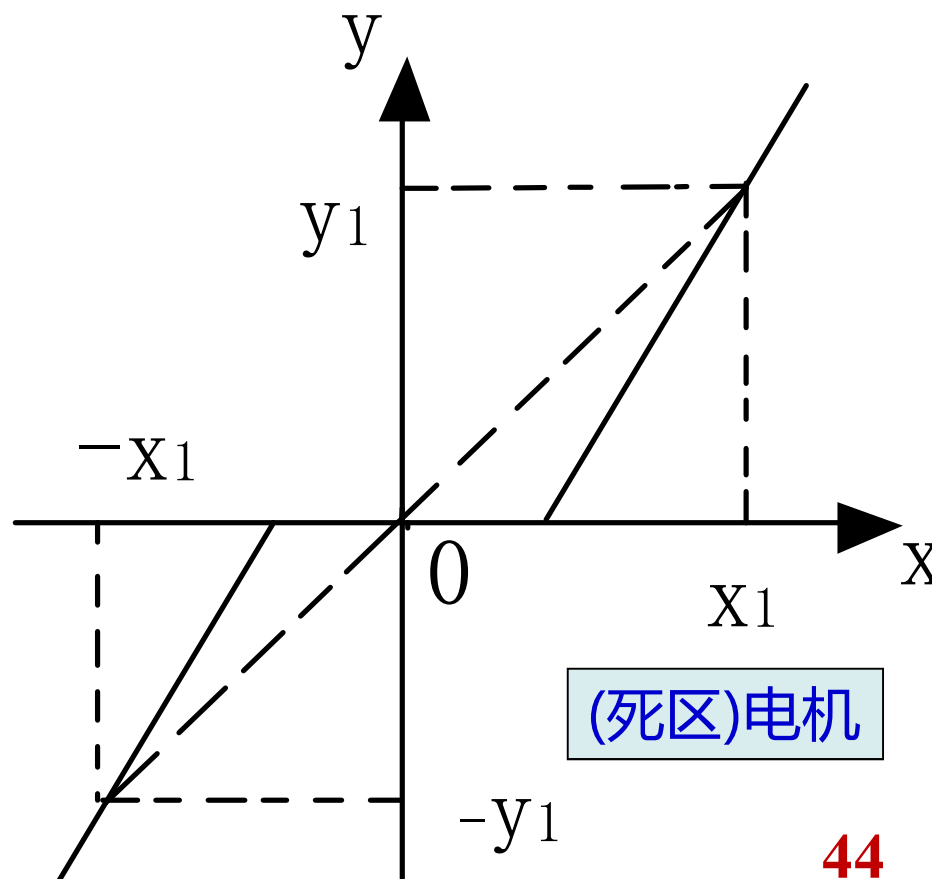
微分方程的建立及线性化

(3) .平均斜率法 如果一非线性元件输入输出关系如图所示

➤ 此时不能用偏微分法，可用平均斜率法得线性化方程为

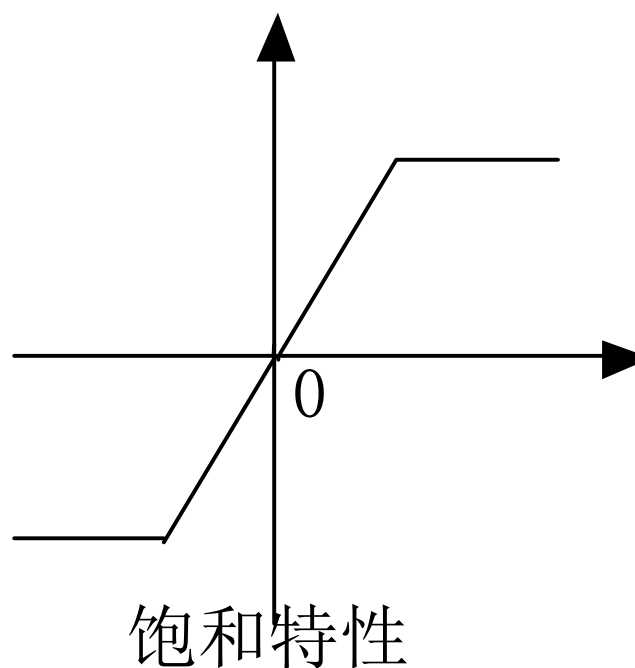
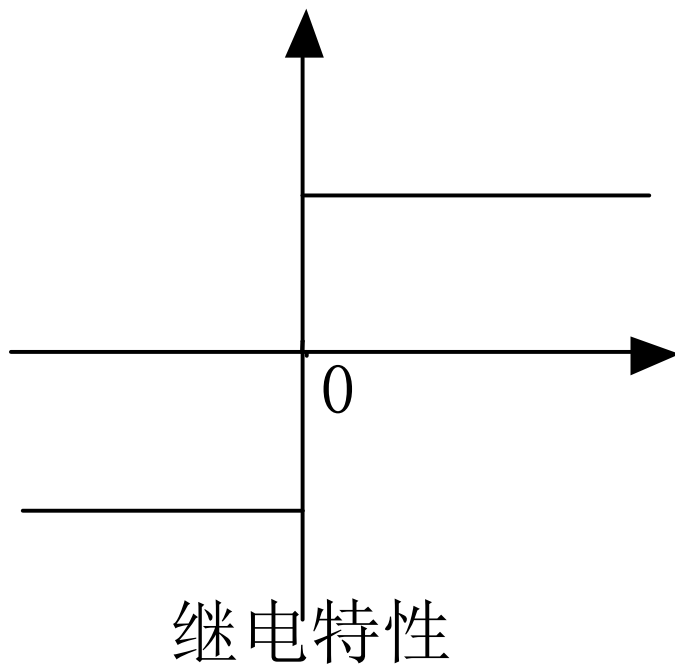
$$y = kx$$

$$k = \frac{y_1}{x_1}$$



微分方程的建立及线性化

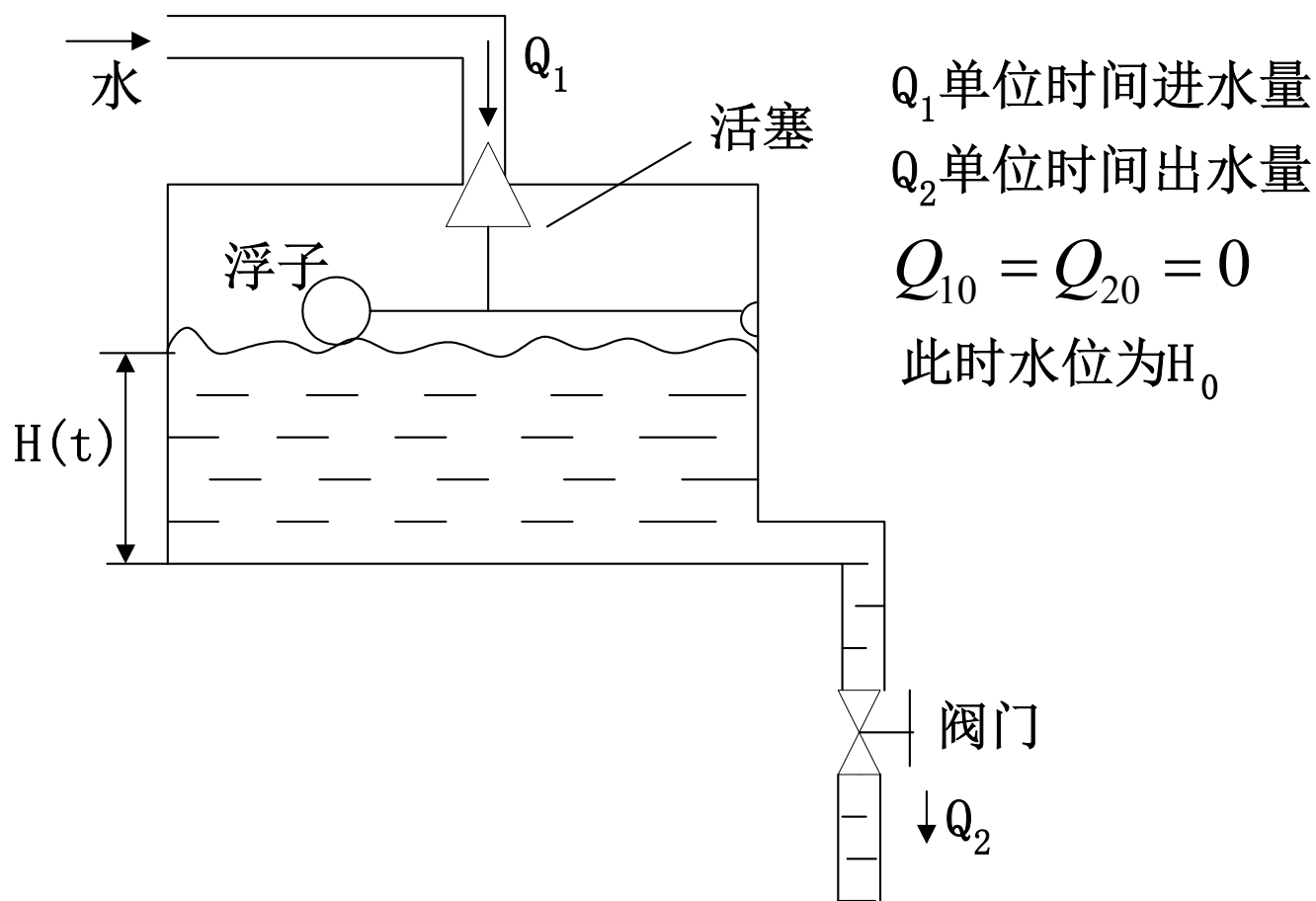
- **注意：**这几种方法只适用于一些非线性程度较低的系统，对于某些严重的非线性，如：



- 不能作线性化处理，一般用相平面法及描述函数法进行分析。

微分方程的建立及线性化

□ 例4：水位自动控制系统，输入量为 Q_1 ,输出量为水位 H ，求水箱的微分方程，水箱的横截面积为 C ， R 表示流阻。



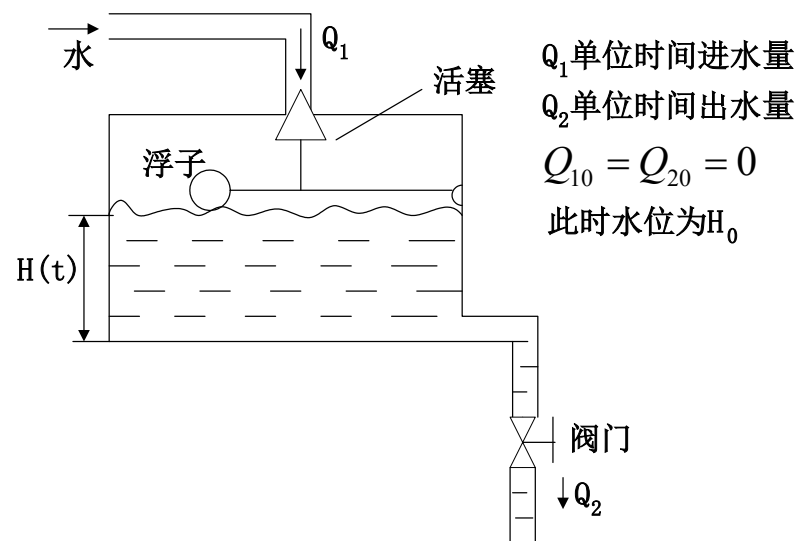
水位控制系统示意图

微分方程的建立及线性化

解：

dt时间中水箱内流体增加（或减少）
CdH应与水总量（ $Q_1 - Q_2$ ）dt相等。即：

$$CdH = (Q_1 - Q_2) dt$$



又据托里切利定理，出水量与水位高度平方根成正比，则有

$$Q_2 = \frac{\sqrt{H}}{R'}$$

其中 $\frac{1}{R'}$ 为比例系数。

微分方程的建立及线性化

显然这个式子为非线性关系，在工作点 (Q_{10}, H_{10}) 附近进行泰勒级数展开。取一次项得：

$$Q_2 = \frac{1}{2\sqrt{H_0}R'} \cdot H = \frac{H}{R},$$

$$R = 2\sqrt{H_0}R' \text{ 为流阻}$$

于是水箱的线性化微分方程为： $CdH = (Q_1 - Q_2) dt$

$$RC \frac{dH}{dt} + H = RQ_1$$

2-3 传递函数

一、拉氏变换

◆ 1.定义：设函数 $f(t)$ 当 $t \geq 0$ 时有定义，而且积分：

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

存在，则称 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，简称：拉氏变换。

记为 $F(s) = L[f(t)]$

$f(t)$ 称为 $F(s)$ 的拉氏逆变换，记为：

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

传递函数

◆ 2.常用函数的拉氏变换

➤ (1).求阶跃函数 $f(t)=A \cdot 1(t)$ 的拉氏变换。

$$F(s) = \int_0^{\infty} A e^{-st} dt = -\frac{A}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{s}$$

单位阶跃函数 $f(t)=1(t)$ 的拉氏变换为 $\frac{1}{s}$

➤ (2).求单位脉冲函数 $f(t)=\delta(t)$ 的拉氏变换。

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{\varepsilon \cdot s} e^{-st} \Big|_0^{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \cdot s} (1 - e^{-\varepsilon \cdot s}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \cdot s} (1 - 1 + \frac{\varepsilon \cdot s}{1!} - \frac{\varepsilon^2 s^2}{2!} + \dots) = 1 \end{aligned}$$

传递函数

(3) 例3.求指数函数 $f(t) = e^{-at}$ 的拉氏变换

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

几个重要的拉氏变换

f(t)				F(s)				f(t)				F(s)			
$\delta(t)$				1				f(t)	F(s)	f(t)	F(s)	f(t)	F(s)	f(t)	F(s)
								$\delta(t)$	1	$\sin \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$	$\delta(t)$	1	$\sin \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$
								1(t)	1/s	$\cos \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$	1(t)	1/s	$\cos \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$
								t	1/s ²	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	t	1/s ²	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
								e^{-at}	1/(s+a)	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	e^{-at}	1/(s+a)	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
1(t)				1/s				f(t)	F(s)	f(t)	F(s)	f(t)	F(s)	f(t)	F(s)
								$\delta(t)$	1	$\sin \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$	$\delta(t)$	1	$\sin \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$
								1(t)	1/s	$\cos \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$	1(t)	1/s	$\cos \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$
								t	1/s ²	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	t	1/s ²	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
								e^{-at}	1/(s+a)	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	e^{-at}	1/(s+a)	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
t				f(t)	F(s)	f(t)	F(s)	f(t)	F(s)	f(t)	F(s)	f(t)	F(s)		
				$\delta(t)$	1	$\sin \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$	$\delta(t)$	1	$\sin \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$	$\delta(t)$	1	$\sin \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$
				1(t)	1/s	$\cos \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$	1(t)	1/s	$\cos \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$	1(t)	1/s	$\cos \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$
				t	1/s ²	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	t	1/s ²	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	t	1/s ²	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
				e^{-at}	1/(s+a)	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	e^{-at}	1/(s+a)	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	e^{-at}	1/(s+a)	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
f(t)	F(s)	f(t)	F(s)	1/(s+a)				f(t)	F(s)	f(t)	F(s)	f(t)	F(s)	f(t)	F(s)
$\delta(t)$	1	$\sin \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$					$\delta(t)$	1	$\sin \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$	$\delta(t)$	1	$\sin \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$
1(t)	1/s	$\cos \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$					1(t)	1/s	$\cos \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$	1(t)	1/s	$\cos \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$
t	1/s ²	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$					t	1/s ²	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	t	1/s ²	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
e^{-at}	1/(s+a)	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$					e^{-at}	1/(s+a)	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	e^{-at}	1/(s+a)	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

传递函数

◆ 3.拉氏变换的基本性质

(1) 线性性质

$$L[af_1(t) + bf_2(t)] = aL[f_1(t)] + bL[f_2(t)]$$

原函数之和的拉氏变换等于各原函数的拉氏变换之和。

(2) 微分性质

若 $L[f(t)] = F(s)$, 则有 $L[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

$f(0)$ 为原函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 时的初始值。

传递函数

证：根据拉氏变换的定义有

$$\begin{aligned} L[f'(t)] &= \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt = s \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt + f(t)e^{-st} \Big|_0^{+\infty} \\ &= sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

原函数二阶导数的拉氏变换

$$\begin{aligned} L[f''(t)] &= sL[f'(t)] - f'(0) = s[sF(s) - f(0)] - f'(0) \\ &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

依次类推，可以得到原函数n阶导数的拉氏变换

$$L[f^n(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$$

传递函数

(3) 积分性质

若 $L[f(t)] = F(s)$, 则 $L[\int f(t)dt] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$

式中 $f^{-1}(0)$ 为积分, $\int f(x)dx$ 当 $t=0$ 时的值。

证：设 $h(t) = \int f(x)dx$ 则有 $h'(t) = f(t)$ 由上述微分定理，有

$$L[h'(t)] = sL[h(t)] - h(0)$$

$$\begin{aligned}\therefore L[h(t)] &= \frac{1}{s} L[h'(t)] + \frac{1}{s} h(0) = \frac{1}{s} L[f(t)] + \frac{1}{s} h(0) \\ &= \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} f^{-1}(0)\end{aligned}$$

传递函数

即：

$$L[\int f(t)dt] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

同理，对f(t)的二重积分的拉氏变换为

$$L[\int \int f(t)dt] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

若原函数f(t)及其各重积分的初始值都等于0则有

$$L[\int \int \cdots \int f(t)dt^n] = \frac{1}{s^n} F(s)$$

即原函数 f(t)的n重积分的拉氏变换等于其象函数除以 s^n 。

传递函数

(4) 终值定理: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

原函数的终值等于其象函数乘以s的初值。

证：由微分定理，有：

$$L[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

等式两边对s趋向于0取极限：

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \lim_{s \rightarrow 0} f'(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} f'(t) dt = f(t) \Big|_0^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) \\ \text{右边} &= \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)] = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0) \\ \therefore \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \end{aligned}$$

传递函数

注：若 $t \rightarrow \infty$ 时 $f(t)$ 极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 不存在，则不能用终值定理。
如对正弦函数和余弦函数就不能应用终值定理。

(5)初值定理： $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

证明方法同上。只是要将 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ 取极限。

(6)位移定理：

a.时域中的位移定理，若原函数在时间上延迟 τ ，则其象函数应乘以 $e^{-\tau \cdot s}$

$$L[f(t - \tau)] = e^{-\tau \cdot s} F(s)$$

传递函数

b.复域中的位移定理，象函数的自变量延迟a，原函数应乘以 e^{at}

即：

$$L[e^{at} f(t)] = F(s - a)$$

(7)时间比例尺定理:

原函数在时间上收缩（或展宽）若干倍，则象函数及其自变量都增加（或减小）同样倍数。即：

$$L[f(\frac{t}{a})] = aF(as)$$

证：

$$L[f(\frac{t}{a})] = \int_0^{\infty} f(\frac{t}{a}) e^{-st} dt$$

$$\text{令 } t/a = \tau, \text{ 则原式 } = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-sa\tau} a d\tau = aF(as)$$

传递函数

(8)卷积定理:

两个原函数的卷积的拉氏变换等于两个象函数的乘积。

即:

$$L\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

证明:

$$L\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] e^{-st} dt$$

$$\because \tau > t \text{ 时, } f_1(t-\tau) \cdot 1(t-\tau) = 0$$

$$\therefore \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \int_0^\infty f_1(t-\tau) \cdot 1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau$$

传递函数

$$\begin{aligned} & L \left[\int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \right] \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f_1(t - \tau) 1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty f_2(\tau) d\tau \int_0^\infty f_1(t - \tau) 1(t - \tau) e^{-st} dt \\ &\because \text{令 } t - \tau = \zeta, \text{ 则} \\ & L \left[\int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \right] \\ &= \int_0^\infty f_2(\tau) d\tau \int_0^\infty f_1(\zeta) e^{-s(\tau + \zeta)} d\zeta \\ &= \int_0^\infty f_2(\tau) e^{-s\tau} d\tau \int_0^\infty f_1(\zeta) e^{-s\zeta} d\zeta = F_2(s) F_1(s) \end{aligned}$$

即得证。

传递函数

二.拉氏反变换

1. 定义：从象函数 $F(s)$ 求原函数 $f(t)$ 的运算称为拉氏反变换。记为 $L^{-1}[F(s)]$ 。由 $F(s)$ 可按式求出：

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi \cdot j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (t > 0)$$

式中 C 是实常数，而且大于 $F(s)$ 所有极点的实部。

直接按上式求原函数太复杂，一般都用查拉氏变换表的方法求拉氏反变换，但 $F(s)$ 必须是一种能直接查到的原函数的形式。

若 $F(s)$ 不能在表中直接找到原函数，则需要将 $F(s)$ 展开成若干部分分式之和，而这些部分分式的拉氏变换在表中可以查到。

传递函数

例1:

$$F(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} \right)$$

$$\text{则 } f(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$$

例2: 求 $F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$ 的逆变换。

解:

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = t - 1 + e^{-t}$$

传递函数

例3:

$$F(s) = \frac{1}{s(s-1)^2} \text{的逆变换}$$

$$\text{解: } F(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s-1} + \frac{c}{(s-1)^2}$$

$$\text{则 } a(s-1)^2 + bs(s-1) + cs = 1$$

$$\text{对应项系数相等得} \quad a = 1, b = -1, c = 1$$

$$\therefore F(s) = \frac{1}{s} + \frac{-1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\therefore f(t) = 1 - e^t + te^t$$

传递函数

◆ 2. 拉式反变换：部分分式展开式的求法

$$F(s) = \frac{M(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (m < n)$$

情况一：F(s) 有不同极点,这时,F(s) 总能展开成如下简单的部分分式之和。

$$F(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - p_n}$$

式中 $p_i (i=1,2,\dots,n)$ 是 $D(s)=0$ 的根, c_i 是常数, $c_i = \left[\frac{M(s)}{D(s)} (s - p_i) \right]_{s=p_i}$

传递函数

例一：

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}$$

$$= \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s-2} + \frac{c_3}{s+3}$$

$$c_1 = \left[\frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)} \cdot (s+1) \right]_{s=-1} = -\frac{1}{6}$$

$$c_2 = \left[\frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)} \cdot (s-2) \right]_{s=2} = \frac{1}{15}$$

$$c_3 = \left[\frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)} \cdot (s+3) \right]_{s=-3} = \frac{1}{10}$$

$$\therefore F(s) = -\frac{1}{6} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{15} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{10} \frac{1}{s+3}$$

$$\therefore f(t) = -\frac{1}{6} e^{-t} + \frac{1}{15} e^{2t} + \frac{1}{10} e^{-3t}$$

传递函数

情况二：F(s)有共轭极点

例2：求解微分方程

$$y'' + 4y' + 5y = 0, y(0) = y'(0) = 1$$

则微分方程两边同时取拉氏变换（初始条件不为零）

$$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) + 4sF(s) - 4f(0) + 5F(s) = 0$$

$$\therefore F(s) = \frac{s+5}{s^2+4s+5} = \frac{s+5}{(s+2)^2+1} = \frac{s+2+3}{(s+2)^2+1}$$

$$= \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{3}{(s+2)^2+1}$$

$$\therefore y = e^{-2t} \cos t + 3e^{-2t} \sin t$$

传递函数

情况三：F(s)有重极点

假若F(s)有L重极点，而其余极点均不相同，那么：

$$F(s) = \frac{M(s)}{D(s)} = \frac{b_l}{(s - p_1)^l} + \frac{b_{l-1}}{(s - p_1)^{l-1}} + \dots + \frac{b_1}{s - p_1} \\ + \frac{c_{l+1}}{s - p_{l+1}} + \dots + \frac{c_n}{s - p_n}$$

$$\text{式中 } b_l = \left[\frac{M(s)}{D(s)} \cdot (s - p_1)^l \right]_{s=p_1}$$

$$b_{l-1} = \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{M(s)}{D(s)} \cdot (s - p_1)^l \right] \right\}_{s=p_1}$$

传递函数

$$\cdots \cdots, b_{l-i} = \frac{1}{i!} \left\{ \frac{d^i}{ds} \left[\frac{M(s)}{D(s)} (s - p_1)^l \right] \right\}_{s=p_1}$$

$$b_1 = \frac{1}{(l-1)!} \left\{ \frac{d^{l-1}}{ds} \left[\frac{M(s)}{D(s)} (s - p_1)^l \right] \right\}_{s=p_1}$$

系数 c_{l+1}, \cdots, c_n , 仍按以前的方法计算

$$c_j = \left[\frac{M(s)}{D(s)} (s - p_j) \right]_{s=p_j}$$

式中 $p_j (j = l+1, \cdots, n)$ 是 $D(s) = 0$ 的其余互异极点。

传递函数

例3： $y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 1, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$
求微分方程 .

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^3} = \frac{b_3}{(s+1)^3} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_1}{s+1} + \frac{c_4}{s}$$

$$b_3 = \left[\frac{1}{s(s+1)^3} (s+1)^3 \right]_{s=-1} = -1$$

$$b_2 = \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s(s+1)^3} (s+1)^3 \right] \right\}_{s=-1} = \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s} \right) \right]_{s=-1}$$

$$= (-s^{-2}) \Big|_{s=-1} = -1$$

传递函数

$$b_1 = \frac{1}{2!} (2s^{-3}) \Big|_{s=-1} = -1$$

$$c = \frac{1}{s(s+1)^3} s \Big|_{s=0} = 1$$

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{-1}{(s+1)^3} + \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{-1}{s+1}$$

$$\Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2} t^2 e^{-t} - te^{-t} - e^{-t}$$

传递函数

如果不记公式,可用以下方法求解

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^3} = \frac{a}{s} + \frac{b_1}{(s+1)^3} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_3}{s+1}$$

$$\therefore a(s+1)^3 + b_1s + b_2(s+1)s + b_3s(s+1)^2 = 1$$

$$\therefore as^3 + b_3s^3 + (3a + b_2 + 2b_3)s^2$$

$$+ (3a + b_1 + b_2 + b_3)s + a = 1$$

$$\therefore a = 1, b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = -1$$

也可得解。

传递函数

三、传递函数

◆ 1.定义:

零初始条件下，系统输出量的拉氏变换与输入量拉氏变换的比值叫该系统的传递函数，用G(s)表示。

设线性定常系统（元件）的微分方程是：

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n}{dt^n} c(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} c(t) + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} c(t) + a_n c(t) \\ &= b_0 \frac{d^m}{dt^m} r(t) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} r(t) + \cdots + b_{m-1} \frac{d}{dt} r(t) + b_m r(t) \end{aligned}$$

传递函数

$c(t)$ 为系统的输出， $r(t)$ 为系统输入，则零初始条件下，对上式两边取拉氏变换，得到系统传递函数为：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$N(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

$N(s) = 0$ 即是系统的特征方程。

分母中 s 的最高阶次 n 即为系统的阶次。

传递函数

$$G(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{b_0(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{a_0(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

$s = z_i (i=1, 2, \dots, m)$ 是 $M(s)=0$ 的根，称为传递函数的零点。

$s = p_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是 $N(s)=0$ 的根，称为传递函数的极点。

因为组成系统的元部件或多或少存在惯性，所以 $G(s)$ 的分母次数大于等于分子次数，即 $n \geq m$ 。若 $m > n$ ，我们就说这是物理不可实现的系统。

传递函数

◆2.性质

(1)传递函数与微分方程一一对应。

(2)传递函数表征了系统本身的动态特性。（传递函数只取决于系统本身的结构参数，而与输入和初始条件等外部因素无关，可见传递函数有效地描述了系统的固有特性。）

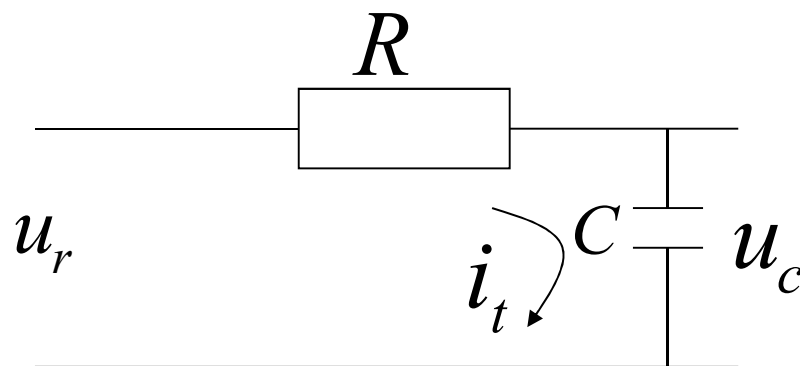
(3)只能描述线性定常系统与单输入单输出系统，且内部许多中间变量的变化情况无法反映。

(4)如果存在零极点对消情况，传递函数就不能正确反映系统的动态特性了。

(5)只能反映零初始条件下输入信号引起的输出，不能反映非零初始条件引起的输出。

传递函数

例1：RC电路如图所示



依据：基尔霍夫定律

$$u_r(t) = Ri(t) + u_c(t)$$

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$$

消去中间变量,

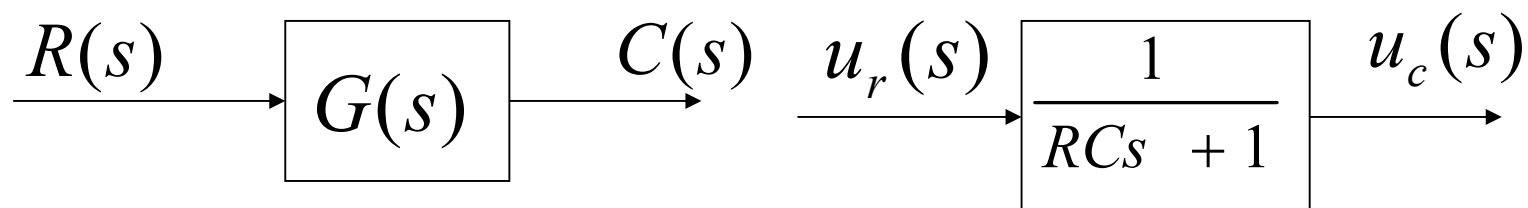
$$RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

传递函数

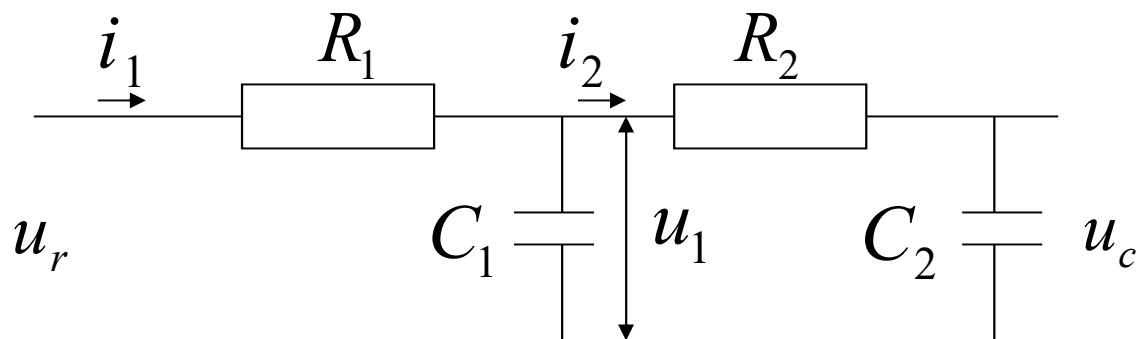
对上式进行零初始条件下的拉氏变换得：

$$G(s) = \frac{u_c(s)}{u_r(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

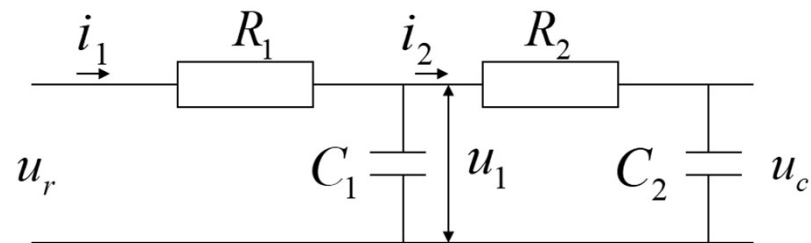
可用方框图表示



例2.双T网络



传递函数



解：方法一：根据基尔霍夫定理列出下列微分方程组：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_r(t) - u_1(t)}{R_1} = i_1(t) \\ u_1(t) = \frac{1}{C_1} \int [i_1(t) - i_2(t)] dt \\ \frac{u_1(t) - u_c(t)}{R_2} = i_2(t) \\ u_c(t) = \frac{1}{C_2} \int i_2(t) dt \end{array} \right.$$

传递函数

方程组两边取零初始条件下的拉氏变换得：

$$\frac{u_r(s) - u_1(s)}{R_1} = I_1(s)$$

$$u_1(s) = \frac{1}{C_1 s} \cdot [I_1(s) - I_2(s)]$$

$$\frac{u_1(s) - u_c(s)}{R_2} = I_2(s)$$

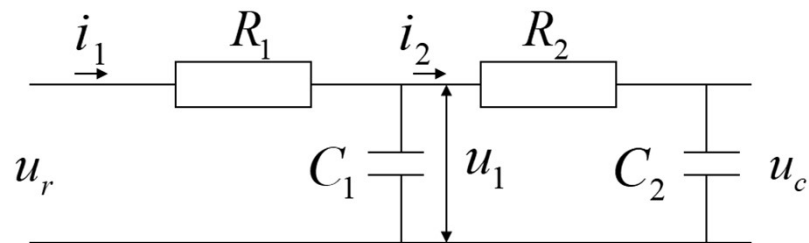
$$u_c(s) = \frac{1}{C_2 s} I_2(s)$$

消去中间变量后，得到传递函数：

$$\frac{u_c(s)}{u_r(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1}$$

传递函数

方法二：用复阻抗比：

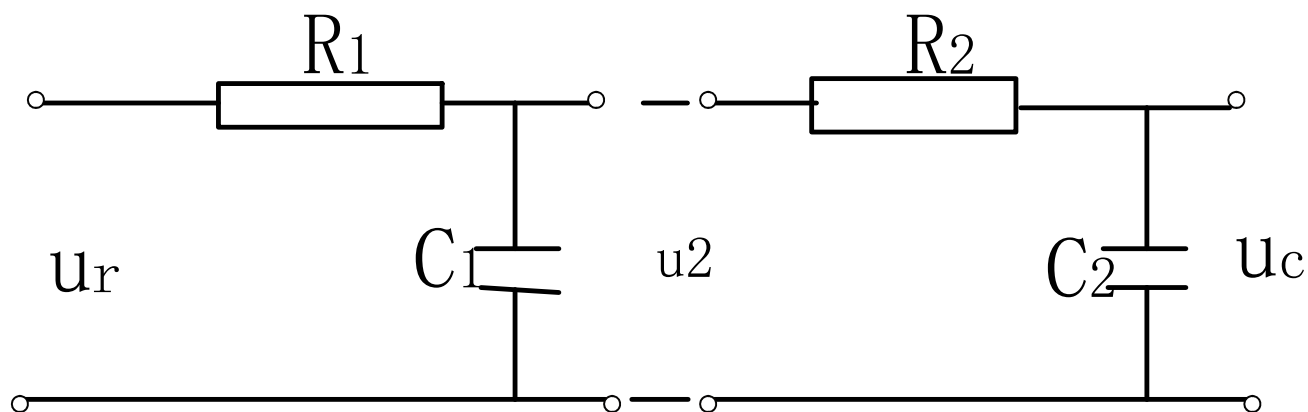


$$u_c(s) = \frac{u_r(s)}{R_1 + \frac{1}{sC_1} \parallel (R_2 + \frac{1}{sC_2})} \cdot \frac{\frac{1}{sC_1}}{\frac{1}{sC_1} + \frac{1}{sC_2} + R_2} \cdot \frac{1}{sC_2}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_c(s)}{u_r(s)} &= \frac{1}{R_1 + \frac{\frac{1}{sC_1} \cdot (R_2 + \frac{1}{sC_2})}{\frac{1}{sC_1} + R_2 + \frac{1}{sC_2}}} \cdot \frac{\frac{1}{sC_1}}{\frac{1}{sC_1} + \frac{1}{sC_2} + R_2} \cdot \frac{1}{sC_2} \\ &= \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1} \end{aligned}$$

传递函数

注意：双T网络不可看成两个RC网络的串联，即：



$$\frac{u_2(s)}{u_r(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 s + 1}, \quad \frac{u_c(s)}{u_2(s)} = \frac{1}{R_2 C_2 s + 1}$$

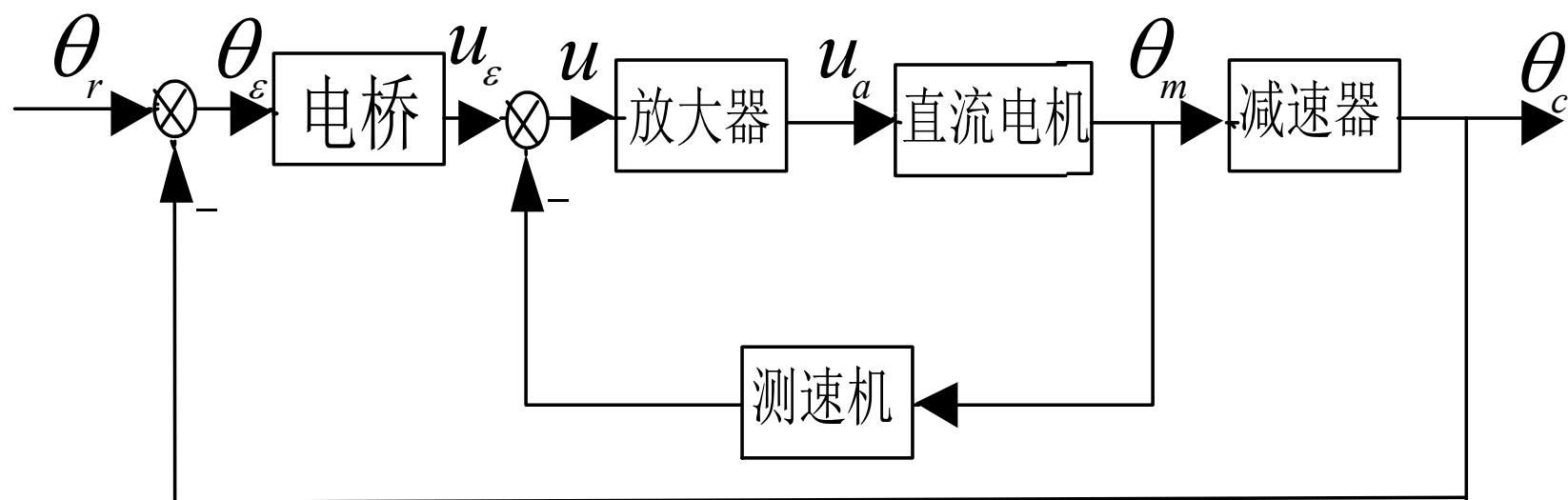
$$\text{得 } \frac{u_c(s)}{u_r(s)} = \frac{1}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}$$

传递函数

与双T网络相比少一个交叉项 $R_1 C_2 s$ ，这就是负载效应，因此双T网络不能孤立地分开，必须作为一个整体来求传递函数。当后一个RC网络接到 C_1 两端时， u_2 已不再是原来的 u_2 ，也就是说 R_1 中的电流= C_1 中的电流+ R_2 中电流，不再等于 C_1 中的电流。只有当第一个RC网络的负载阻抗为无穷大时，双T网络的传递函数才等于两个RC网络的串联。

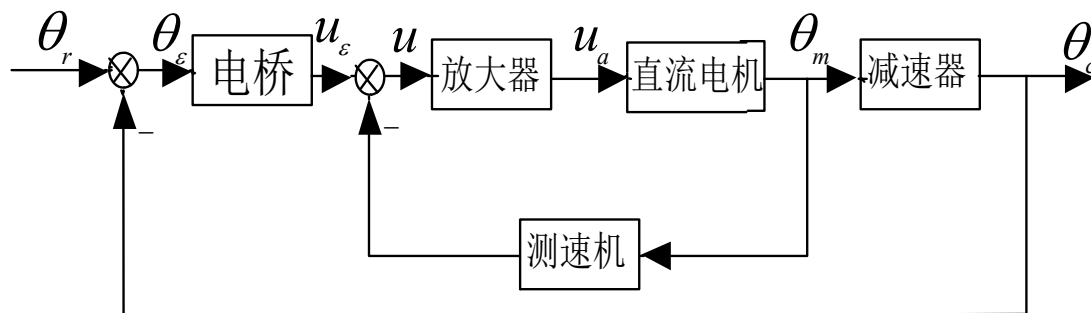
传递函数

例3：位置随动系统



传递函数

各元件微分方程:



电桥 $u_{\varepsilon}(t) = k_{\varepsilon} \theta_{\varepsilon}(t)$

放大器 $u_a(t) = k_a u(t)$

测速机 $u_t(t) = k_t \frac{d\theta_m(t)}{dt}$

电机 $T_m \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + \frac{d\theta_m(t)}{dt} = k_m u_a(t)$

减速器 $\theta_c(t) = \frac{1}{i} \theta_m(t)$

传递函数

零初始条件下的拉氏变换:

电桥 $u_{\varepsilon}(s) = k_{\varepsilon} \theta_{\varepsilon}(s)$

放大器 $u_a(s) = k_a u(s)$

测速机 $u_t(s) = k_t s \theta_m(s)$

电机 $(T_m s^2 + s) \theta_m(s) = k_m u_a(s)$

减速器 $\theta_c(s) = \frac{1}{i} \theta_m(s)$

传递函数

各元件传递函数:

电桥 $G_1(s) = \frac{u_\varepsilon(s)}{\theta_\varepsilon(s)} = k_\varepsilon$

放大器 $G_2(s) = \frac{u_a(s)}{u(s)} = k_a$

测速机 $G_3(s) = \frac{u_t(s)}{\theta_m(s)} = k_t s$

电机 $G_4(s) = \frac{\theta_m(s)}{u_a(s)} = \frac{k_m}{s(T_m s + 1)}$

减速器 $G_5(s) = \frac{\theta_c(s)}{\theta_m(s)} = \frac{1}{i}$

传递函数

由各元部件传递函数，消去中间变量，得系统的传递函数为：

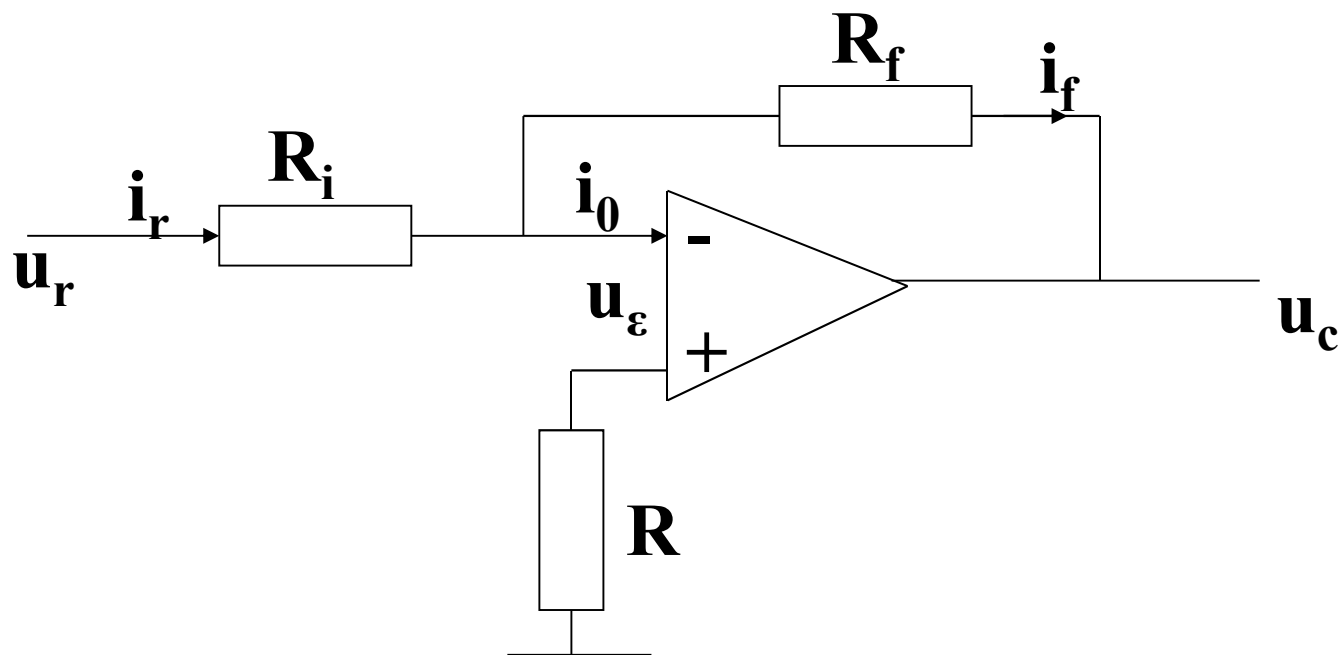
$$G(s) = \frac{\theta_c(s)}{\theta_r(s)} = \frac{\frac{k_0}{J}}{s^2 + \frac{F}{J}s + \frac{k_0}{J}}$$

$$\text{增益 } k_0 = \frac{k_\varepsilon k_a C_m}{i R_a}, \text{ 阻尼系数 } F = f + \frac{k_a C_m}{R_a} + \frac{k_a k_t C_m}{R_a}$$

$$\text{折算后电机轴上的总等效的转动惯量 } J = J_1 + \frac{J_2}{i_1^2}$$

传递函数

例4：求图2-18所示运算放大器的传递函数。图中 R_f 是反馈电阻， i_f 是反馈电流， R_i 是输入电阻， u_r 和 i_r 是输入电压和电流， u_c 是输出电压， i_0 是进入放大器的电流。



传递函数

运算放大器有同相(+)和反相(-)两个输入端。带负号的输入端为反相输入，此输入所产生的输出与输入极性相反。带正号的输入为同相输入，它所产生的输出极性不变。

两个输入有差分作用，即输出电压与两个输入端的电压差成正比。运算放大器常用的是反相输入端，它利用负反馈原理，把一部分与输入信号反相的输出信号送回输入端，同相输入端与 u_r 和 u_c 共地。

传递函数

运算放大器具有高增益 $k=10^5\sim 10^9$,而通常 u_c 小于10伏,因为 $u_\varepsilon = -u_c/k$,所以运算放大器的输入电压 u_ε 近似等于0,这种反相输入端电位为0的现象,是运算放大器的共同特点,叫做“虚地”,又因为运算放大器的输入阻抗很高,所以流入放大器的电流 i_0 也近似等于0。这个现象叫做“虚断”, $i_r=i_f$ 。

由此导出: $\frac{u_r - u_\varepsilon}{R_i} = \frac{u_\varepsilon - u_c}{R_f}$, 即 $\frac{u_r}{R_i} = -\frac{u_c}{R_f}$, 所以运算放大器的传递函数为: $\frac{u_c(s)}{u_r(s)} = -\frac{R_f}{R_i}$

这个结论可以推广为: 运算放大器的传递函数等于反馈复阻抗与输入复阻抗之比。

结构图

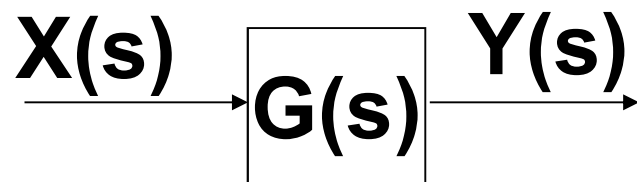
一、结构图的概念和组成

◆1.概念


将方框图中各时间域中的变量用其拉氏变换代替，各方框中元件的名称换成各元件的传递函数，这时方框图就变成了结构图。

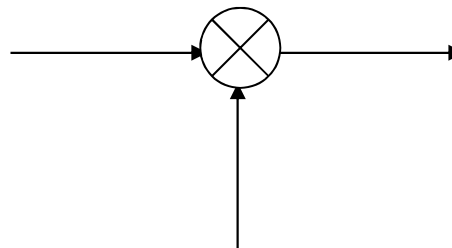
◆2. 组成

(1)方框：有输入信号，输出信号，传递线，方框内的函数为输入与输出的传递函数，一条传递线上的信号处处相同。



结构图：概念和组成

(2)比较点：  综合点，相加点
加号常省略
负号必须标出

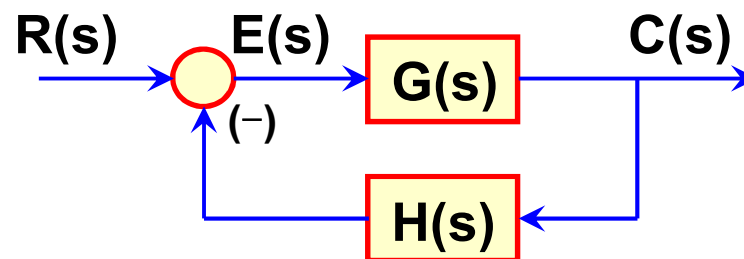


(3)引出点： 

一条传递线上的信号处处相等，引出点的信号与原信号相等。

结构图

二、结构图的绘制



信号线：表示信号传递通路与方向。

方框：表示对信号进行的数学变换。方框中写入元件或系统的传递函数。

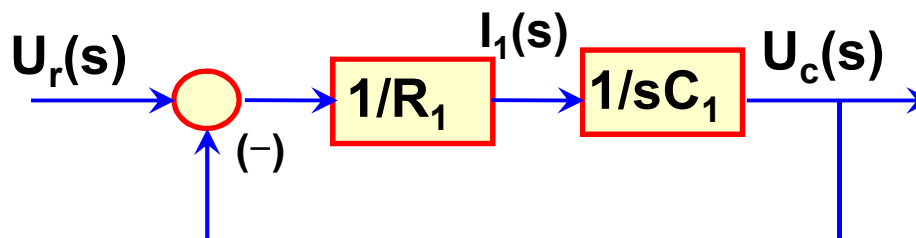
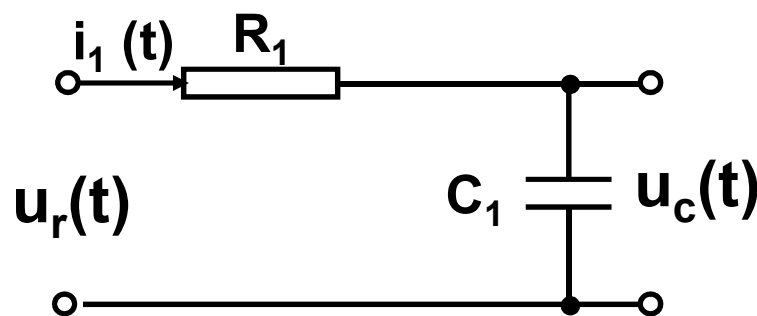
比较点：对两个以上的信号进行加减运算。“+”表示相加，“-”表示相减。

引出点：表示信号引出或测量的位置。同一位置引出的信号数值和性质完全相同。

例：绘出RC电路的结构图

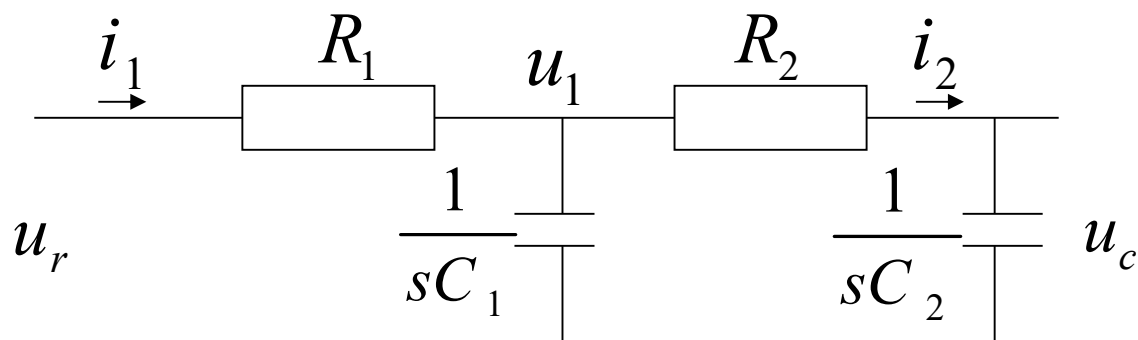
$$U_r(s) - U_c(s) = R_1 I_1(s)$$

$$U_c(s) = \frac{I_1(s)}{C_1 s}$$



结构图

例：绘制双T网络的结构图

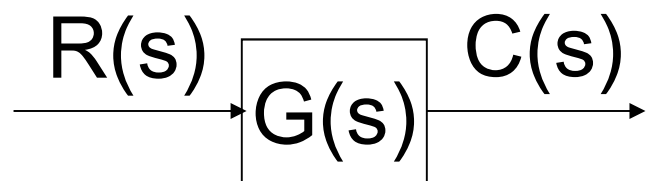


从左向右列方程组：

$$\begin{cases} I_1(s) = \frac{u_r(s) - u_1(s)}{R_1} \\ u_1(s) = [I_1(s) - I_2(s)] \cdot \frac{1}{sC_1} \\ I_2(s) = \frac{u_1(s) - u_c(s)}{R_2} \\ u_c(s) = I_2(s) \cdot \frac{1}{sC_2} \end{cases}$$

结构图

画图时:



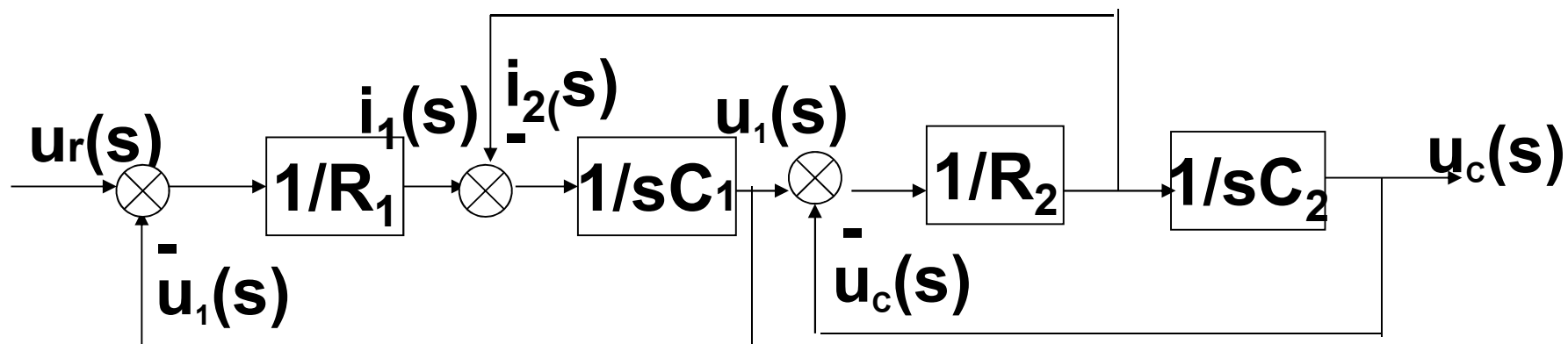
$$R(s) \cdot G(s) = C(s)$$

将上页方程改写如下相乘的形式:

$$\left\{ \begin{array}{l} [u_r(s) - u_1(s)] \cdot \frac{1}{R_1} = I_1(s) \\ [I_1(s) - I_2(s)] \cdot \frac{1}{sC_1} = u_1(s) \\ [u_1(s) - u_c(s)] \cdot \frac{1}{R_2} = I_2(s) \\ I_2(s) \cdot \frac{1}{sC_2} = u_c(s) \end{array} \right.$$

结构图

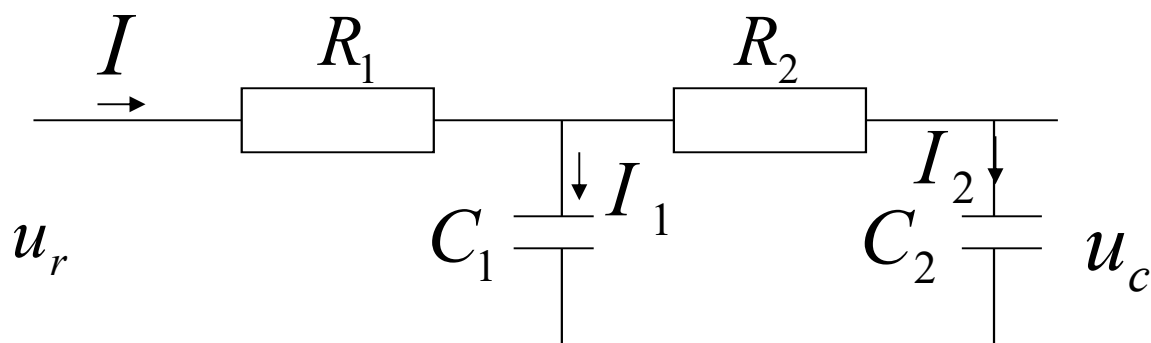
绘图： $u_r(s)$ 为输入，画在最左边。



这个例子不是由微分方程组——代数方程组——结构图，而是直接列写s域中的代数方程，画出了结构图。

结构图

若重新选择一组中间变量，会有什么结果呢？(刚才中间变量为 i_1, u_1, i_2 ，现在改为 I, I_1, I_2)

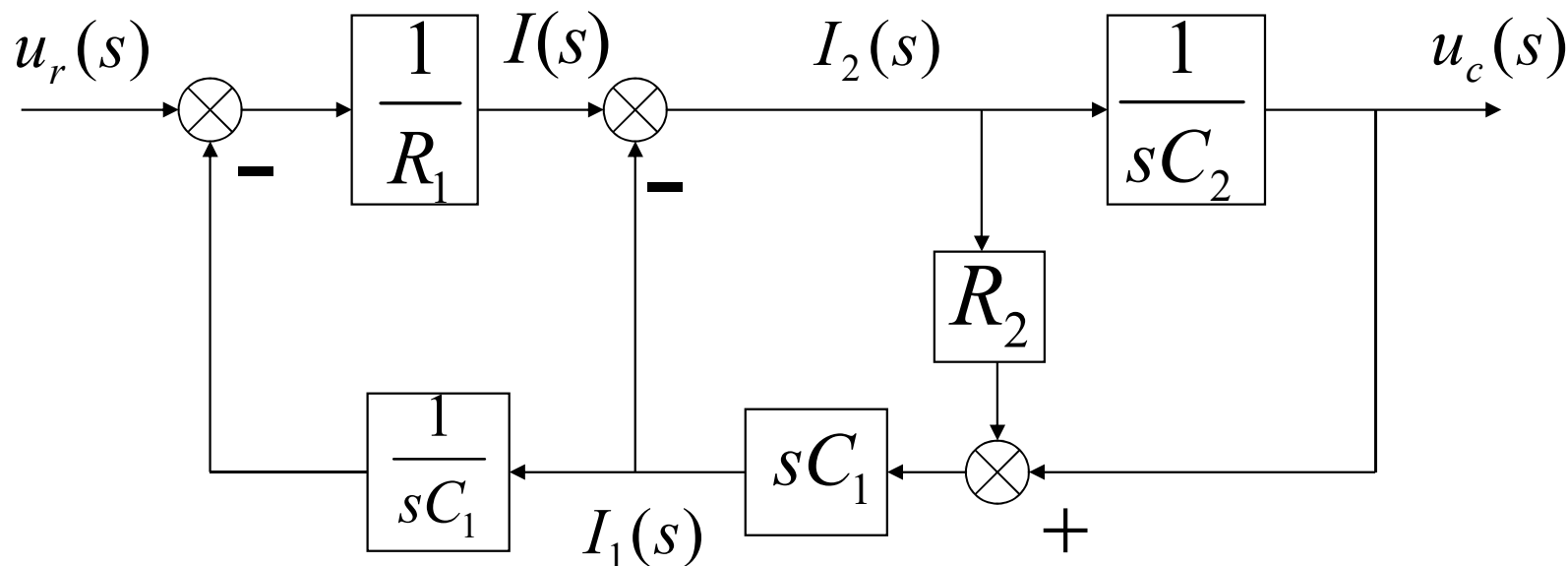


从右到左列方程：

$$\begin{cases} u_c(s) = I_2(s) \cdot \frac{1}{sC_2} \\ I_2(s) = I(s) - I_1(s) \\ I_1(s) = [u_c(s) + I_2(s) \cdot R_2] \cdot sC_1 \\ I(s) = [u_r(s) - I_1(s) \cdot \frac{1}{sC_1}] \cdot \frac{1}{R_1} \end{cases}$$

结构图

绘图



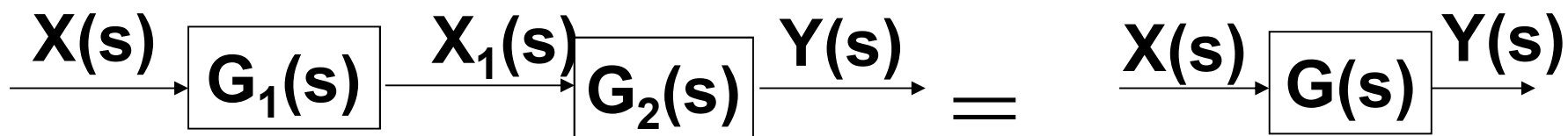
这个结构与前一个不一样， \therefore 选择不同的中间变量，结构图也不一样，但是整个系统的输入输出关系是不会变的。

$$G(s) = \frac{u_c(s)}{u_r(s)} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1}$$

结构图

三、结构图的等效变换

(1) 串联



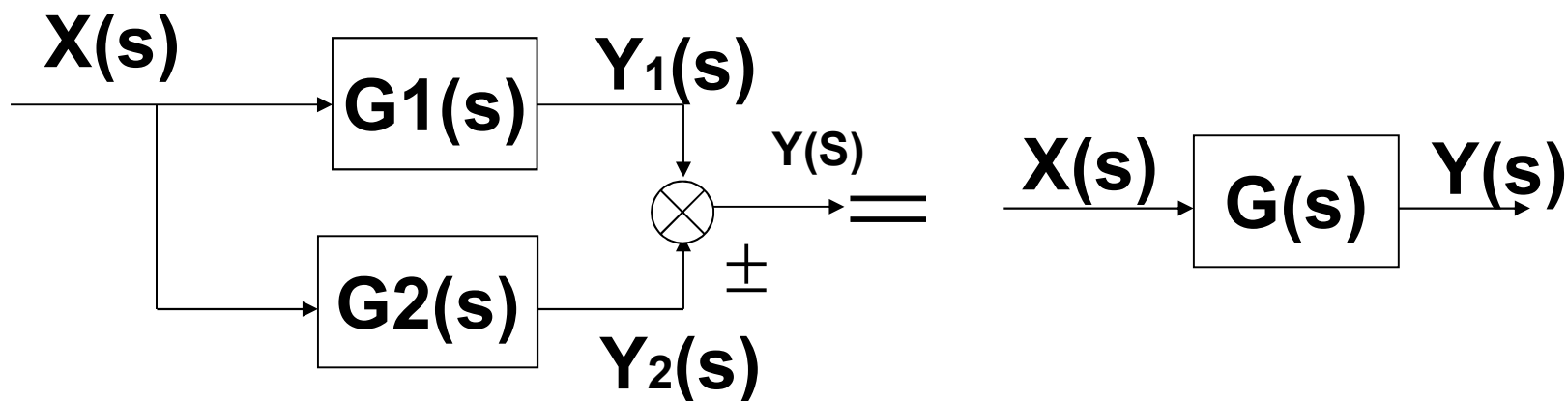
$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

证明: $\because \frac{x_1(s)}{x(s)} = G_1(s), \frac{y(s)}{x_1(s)} = G_2(s)$

$$\therefore \frac{y(s)}{x(s)} = G_1(s) G_2(s)$$

结构图

(2) 并联



$$G(s) = G_1(s) \pm G_2(s)$$

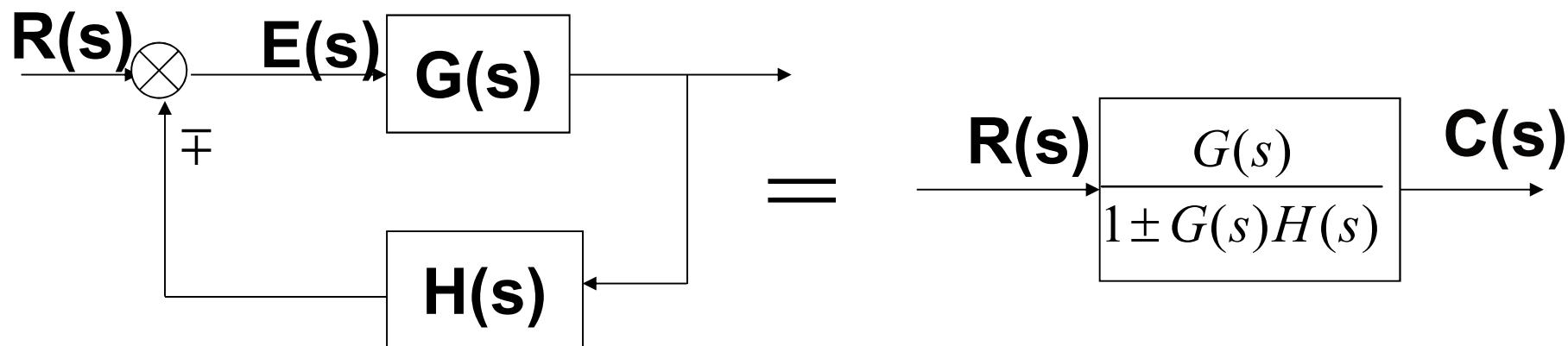
$$\text{证明: } y(s) = y_1(s) \pm y_2(s) = x(s)G_1(s) \pm x(s)G_2(s)$$

$$= x(s)[G_1(s) \pm G_2(s)] = x(s)G(s)$$

$$\therefore G(s) = G_1(s) \pm G_2(s)$$

结构图

(3)反馈



这是个单回路的闭环形式，反馈可能是负，可能是正，我们用消去中间法来证明。

$$C(s) = E(s)G(s), E(s) = R(s) \mp B(s)$$

$$B(s) = C(s)H(s)$$

结构图

$$\therefore C(s) = [R(s) \mp B(s)]G(s) = R(s)G(s) \mp C(s)H(s)G(s)$$

$$C(s)[1 \pm H(s)G(s)] = R(s)G(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \phi(s) = \frac{G(s)}{1 \pm H(s)G(s)}$$

以后我们均采用 $\Phi(s)$ 表示闭环传递函数，负反馈时， $\Phi(s)$ 的分母为 $1 +$ 回路传递函数，分子是前向通路传递函数。正反馈时， $\Phi(s)$ 的分母为 $1 -$ 回路传递函数，分子为前向通路传递函数。单位负反馈时，

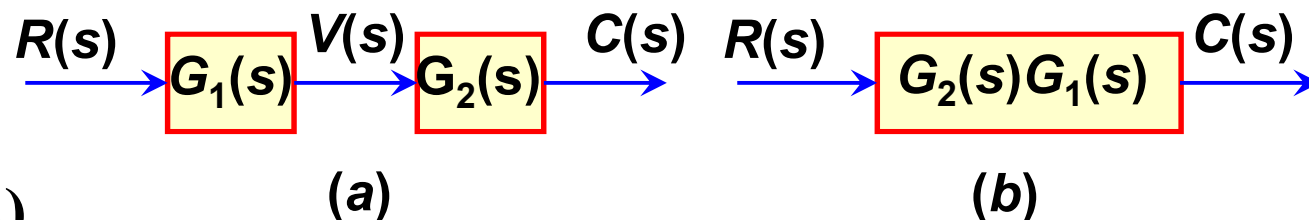
$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

结构图

四、结构图的简化

等效变换总结

- 串联方框的简化(等效):

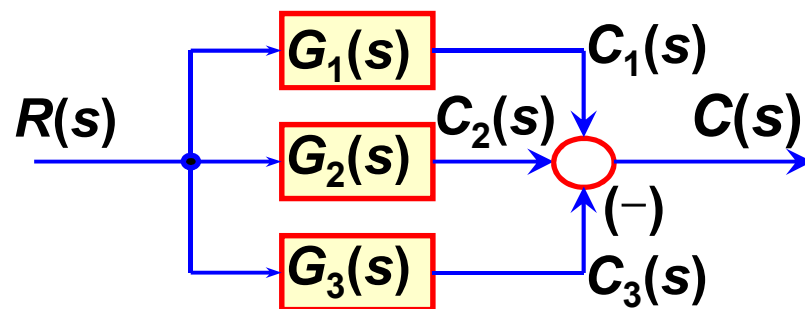


$$C(s) = G_2(s)V(s)$$

$$V(s) = G_1(s)R(s)$$

$$C(s) = G_2(s)G_1(s)R(s)$$

- 并联方框的简化 (等效):



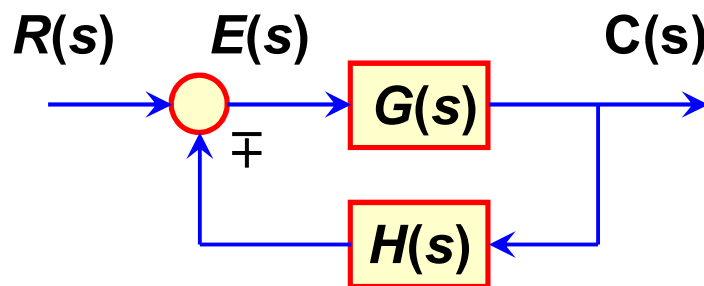
$$C(s) = C_1(s) + C_2(s) - C_3(s)$$

$$= [G_1(s) + G_2(s) - G_3(s)]R(s)$$

(b) 变换后

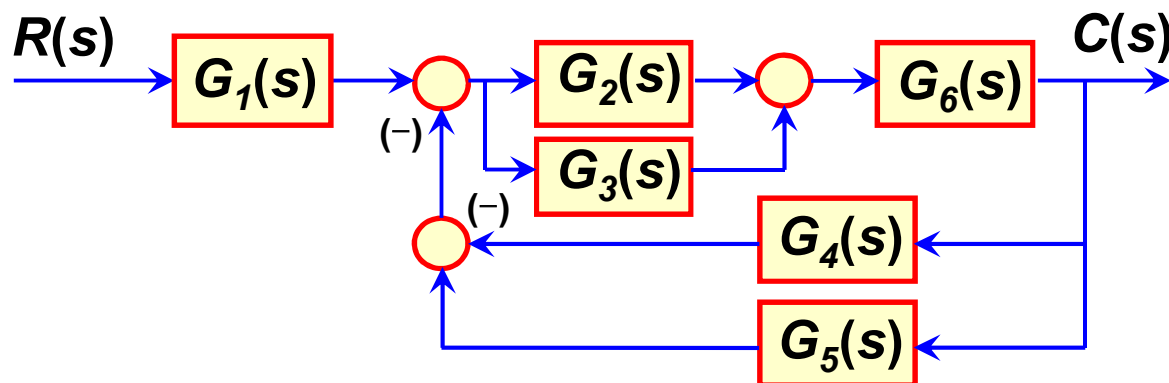
- 反馈连接方框的简化 (等效):

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)} R(s)$$



结构图

例:



$$G_{236} = (G_2 + G_3)G_6$$

$$G_{54} = G_5 - G_4$$

$$G = \frac{G_{236}}{1 + G_{236}G_{54}}G_1$$

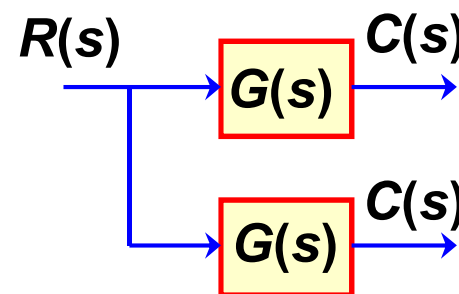
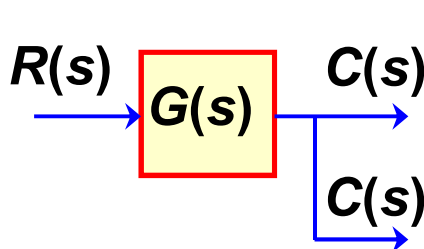
- 比较点和引出点的移动:

等效原则: 前向通道和反馈通道传递函数都不变。

- 引出点移动:

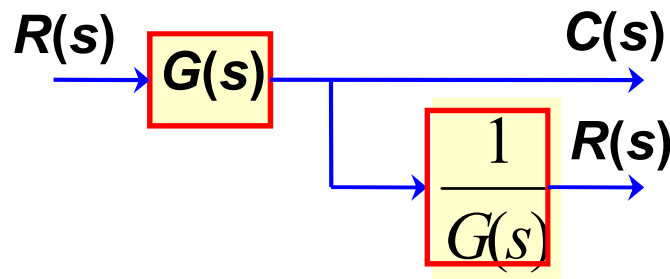
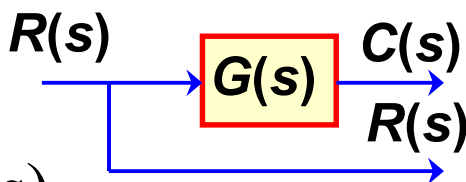
1. 引出点前移

$$C(s) = G(s)R(s)$$



2. 引出点后移

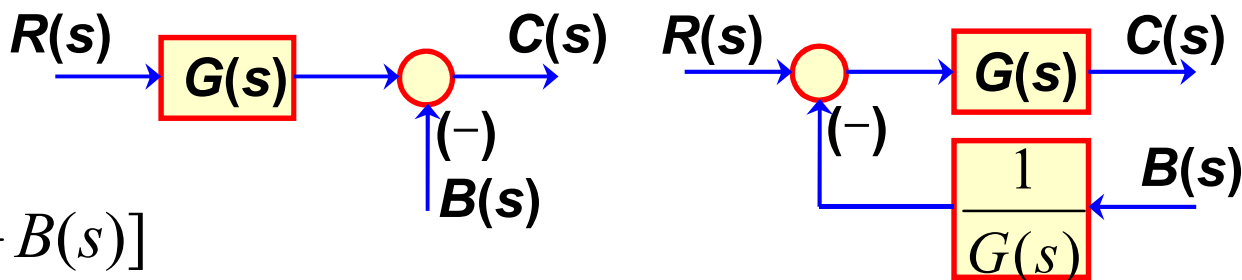
$$R(s) = \frac{1}{G(s)}G(s)R(s)$$



结构图 相加点移动:

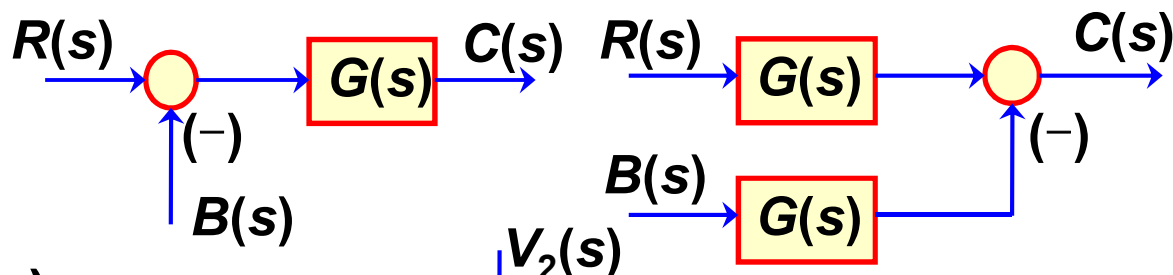
1. 相加点前移

$$\begin{aligned} C(s) &= G(s)R(s) - B(s) \\ &= G(s)\left[R(s) - \frac{1}{G(s)}B(s)\right] \end{aligned}$$



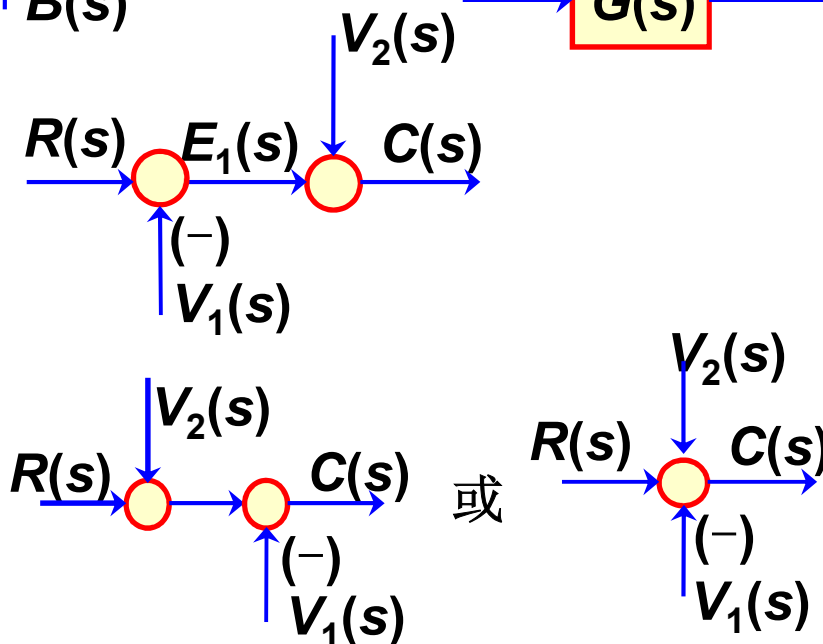
2. 相加点后移

$$\begin{aligned} C(s) &= G(s)[R(s) - B(s)] \\ &= G(s)R(s) - G(s)B(s) \end{aligned}$$

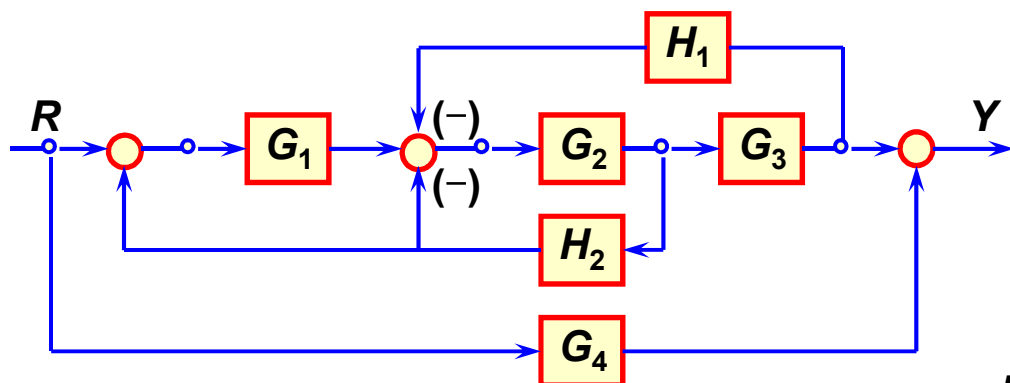


3. 交换或合并相加点

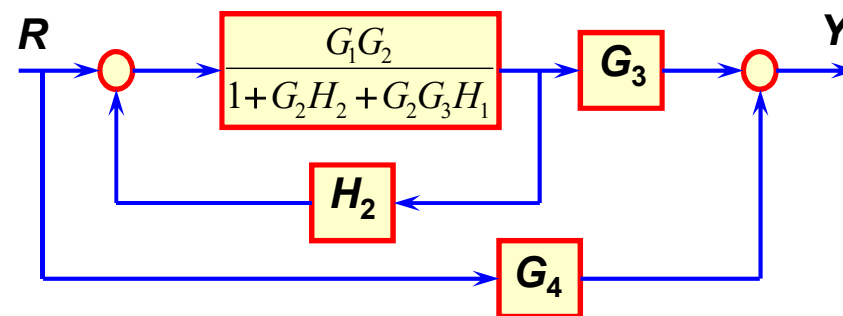
$$\begin{aligned} C(s) &= E_1(s) + V_2(s) \\ &= R(s) - V_1(s) + V_2(s) \\ &= R(s) + V_2(s) - V_1(s) \end{aligned}$$



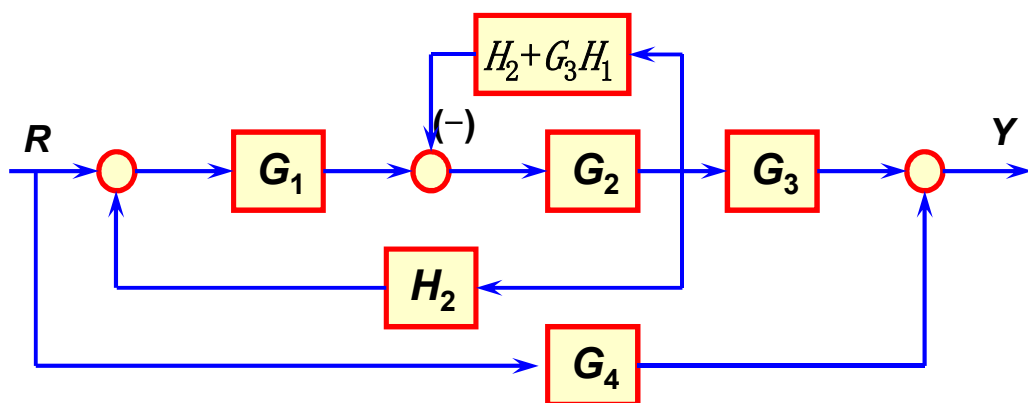
结构图 举例：



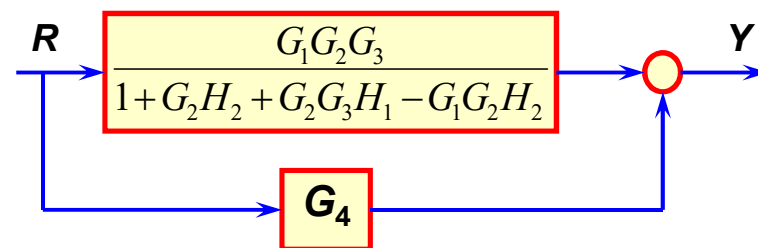
(1) 结构图化简方案 I



(b)



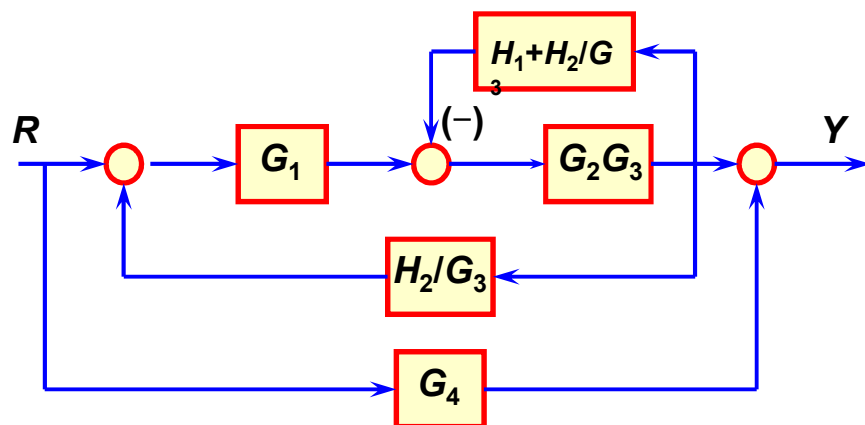
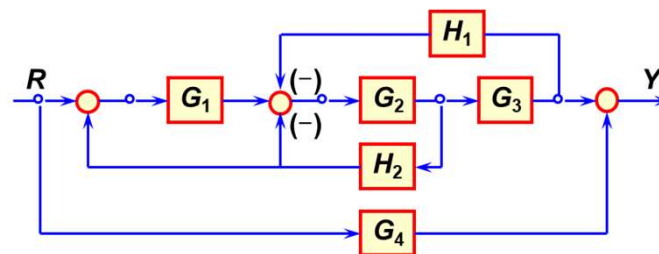
(a)



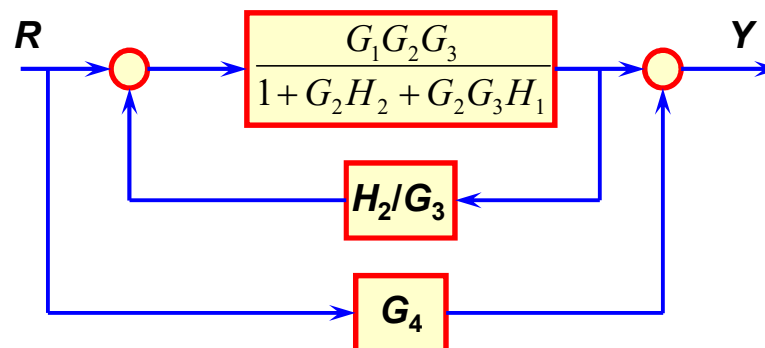
(c)

结构图 举例：

(2) 结构图化简方案 II

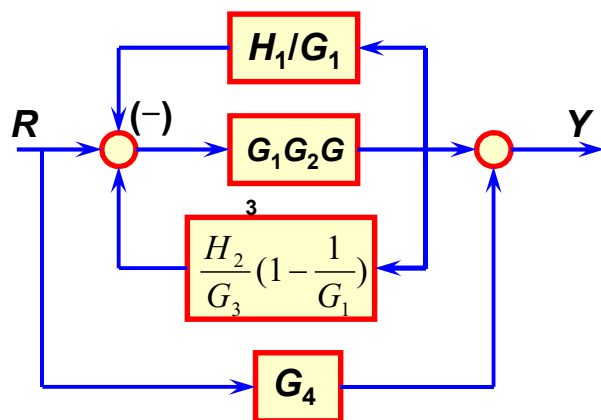


(a)

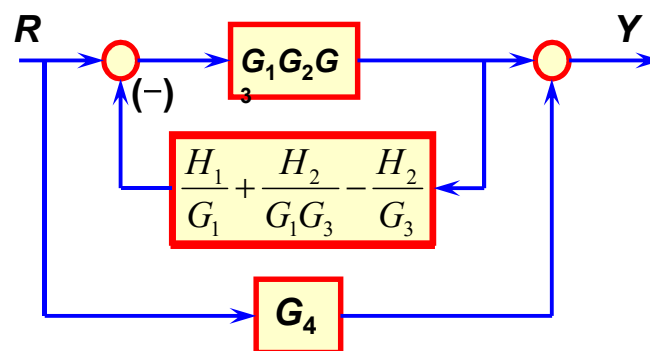


(b)

(3) 结构图化简方案 III



(a)



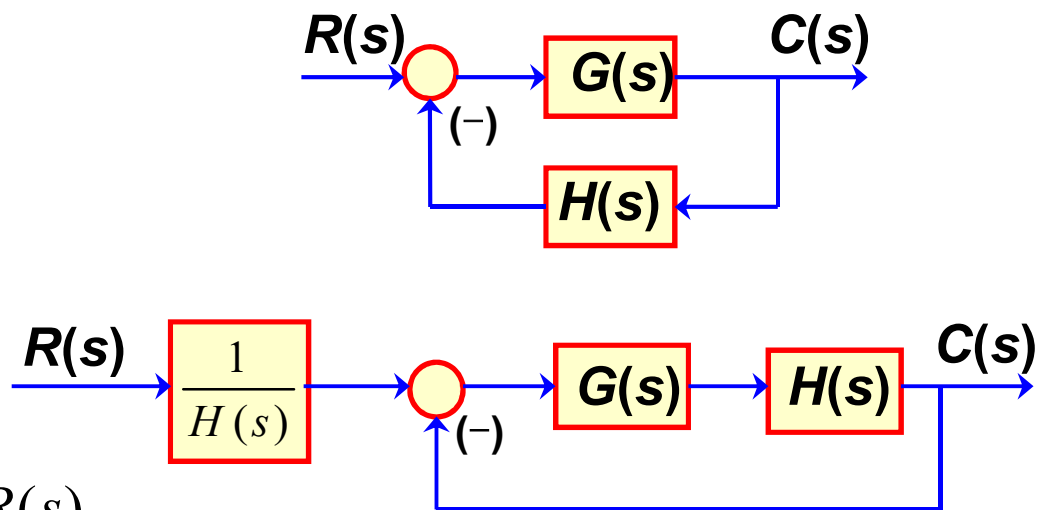
(b)

结构图

•其它等价法则

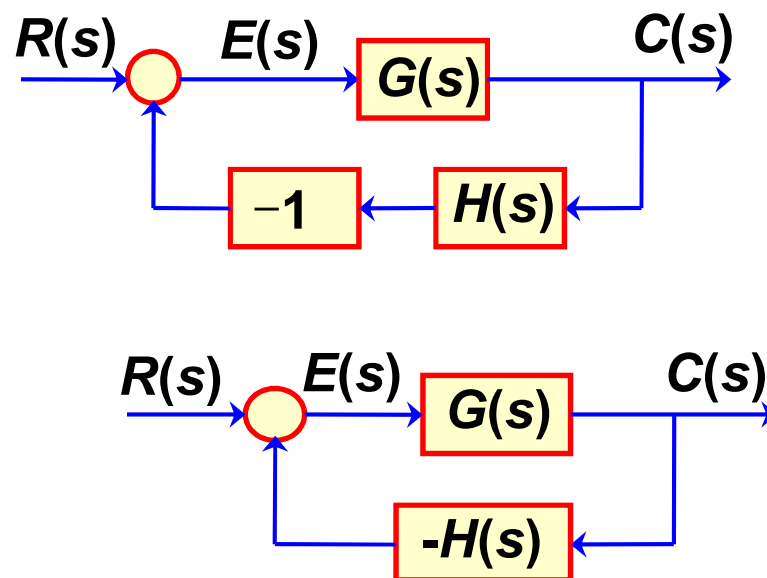
1. 等效为单位反馈系统

$$C(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{H(s)} R(s)$$



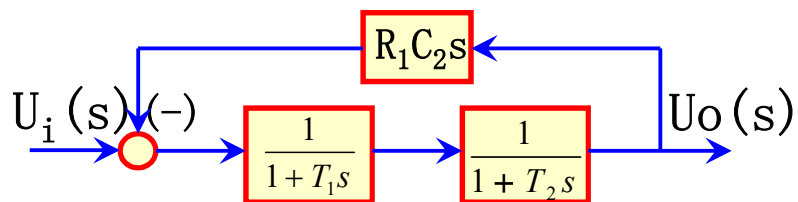
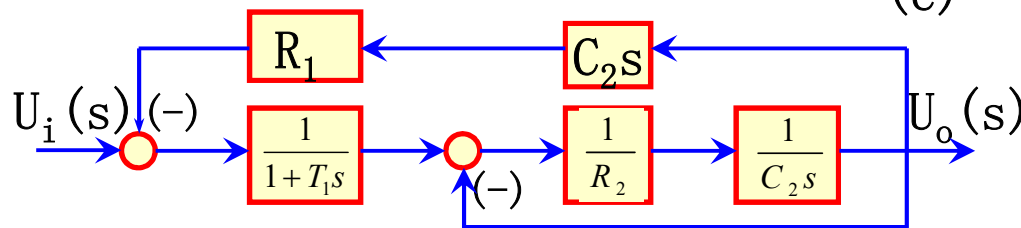
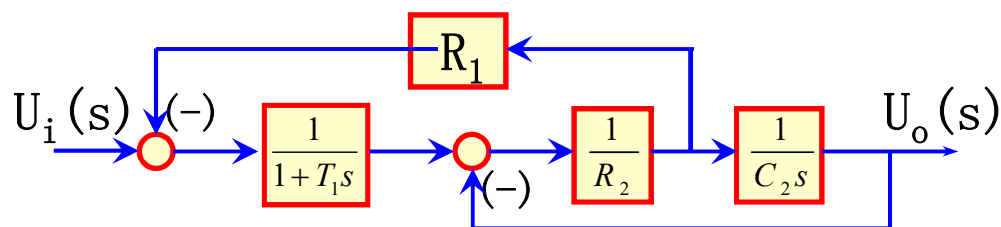
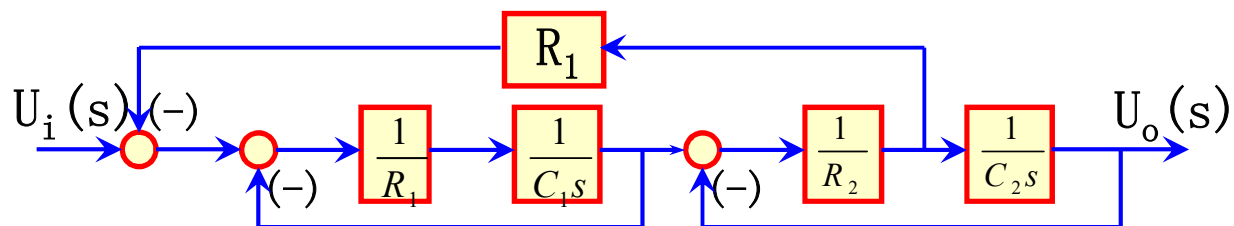
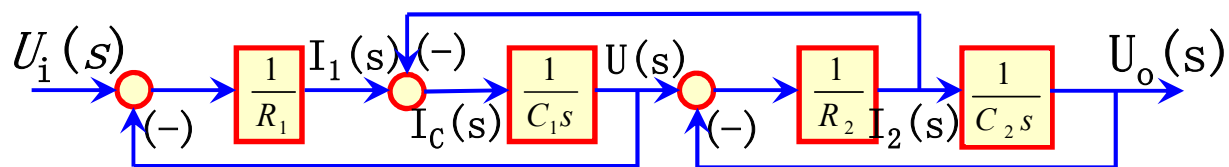
2. 负号可在支路上移动

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - H(s)C(s) \\ &= R(s) + (-1)H(s)C(s) \\ &= R(s) + [-H(s)]C(s) \end{aligned}$$



结构图

例：双RC网络的结构图简化



信号流图

一、术语介绍

(1) 节点

结构图中所有的引出点，比较点称节点。

(2) 前向通路

从输入到输出，并与任何一个节点相交不多于一次的通路，叫前向通路，前向通路中各传递函数的乘积，叫前向通路增益。

(3) 回路

起点和终点在同一节点，且与其他节点相交不多于一次的闭合通路叫单独回路，回路中所有传递函数的乘积叫回路增益。

(4) 不接触回路

相互间没有公共节点的回路称为不接触回路。

- **信号流图**是由节点和支路组成的一种信号传递网络。

□ 信号流图的**基本性质**:

- 1) **节点**标志系统的变量，节点标志的变量是所有流向该节点信号的代数和，用“**O**”表示；
- 2) **信号**在支路上沿箭头单向传递；
- 3) **支路**相当于乘法器，信号流经支路时，被乘以支路增益而变成另一信号；
- 4) 对一个给定系统，信号流图不是唯一的。

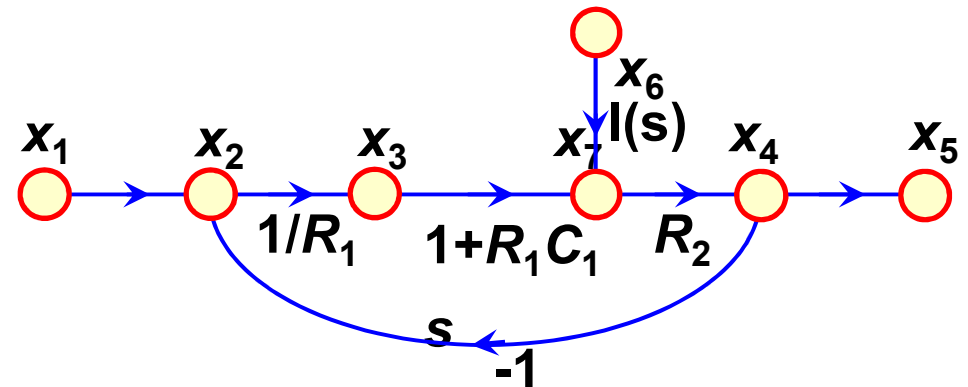
□ 信号流图中常用的名词术语:

- **源节点**（输入节点）:

在源节点上，只有信号输出支路而没有信号输入的支路，它一般代表系统的输入变量。

- **阱节点**（输出节点）:

在阱节点上，只有信号输入的支路而没有信号输出的支路，它一般代表系统的输出变量。



- **混合节点**：在混合节点上，既有信号输出的支路而又有信号输入的支路。
- **前向通路**：信号从输入节点到输出节点传递时，每个节点只通过一次的通路，叫前向通路。前向通路上各支路增益之乘积称前向通路总增益，一般用 P_k 表示。
- **回路**：起点和终点在同一节点，而且信号通过每一节点不多于一次的闭合通路称回路。回路上各支路增益之乘积称回路增益，一般用 L_a 表示。
- **不接触回路**：回路之间没有公共节点时，称它们为不接触回路。

信号流图的绘制

1. 由系统微分方程绘制信号流图

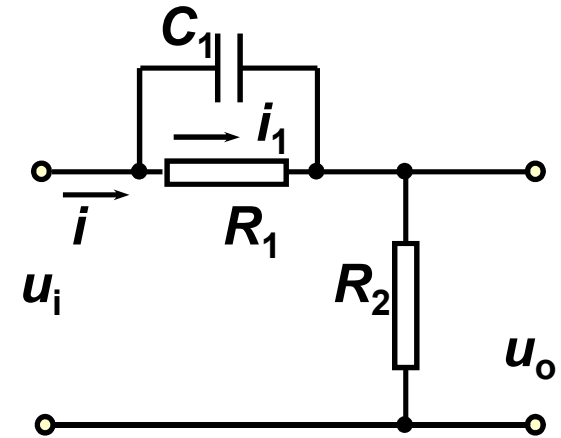
- 1) 将微分方程通过拉氏变换，得到 S 的代数方程；
- 2) 每个变量指定一个节点；
- 3) 将方程按照变量的因果关系排列；
- 4) 连接各节点，并标明支路增益。

例

$$i_1(t)R_1 + u_o(t) = u_i(t)$$

$$u_o(t) = i(t)R_2$$

$$i_1(t)R_1 = \frac{1}{C} \int (i - i_1) dt$$



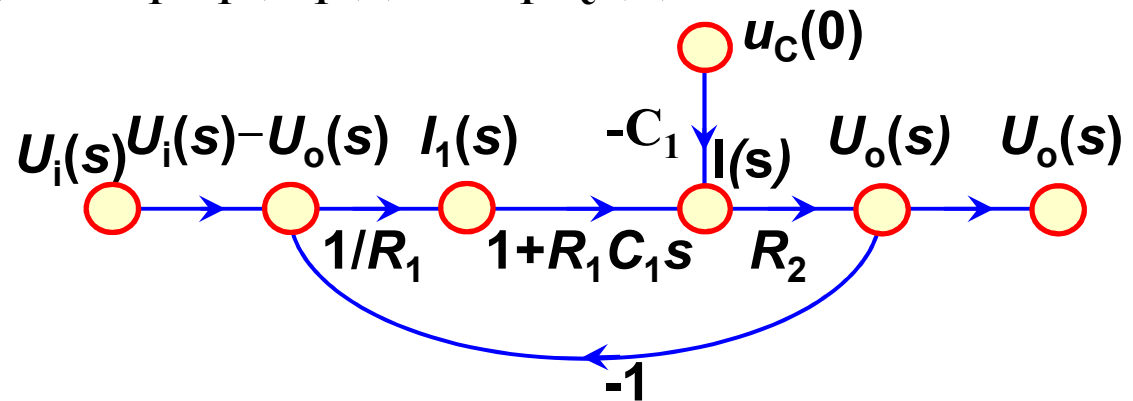
• 上式拉氏变换 $I_1(s)R_1 + U_o(s) = U_i(s)$

$$U_o(s) = I(s)R_2$$

$$I_1(s)R_1 = \frac{1}{C_1 s} [I(s) - I_1(s)] + \frac{u_c(0)}{s}$$

$$I(s) = I_1(s)R_1 C_1 s - C_1 u_c(0) + I_1(s)$$

$$= (1 + R_1 C_1 s) I_1(s) - C_1 u_c(0)$$

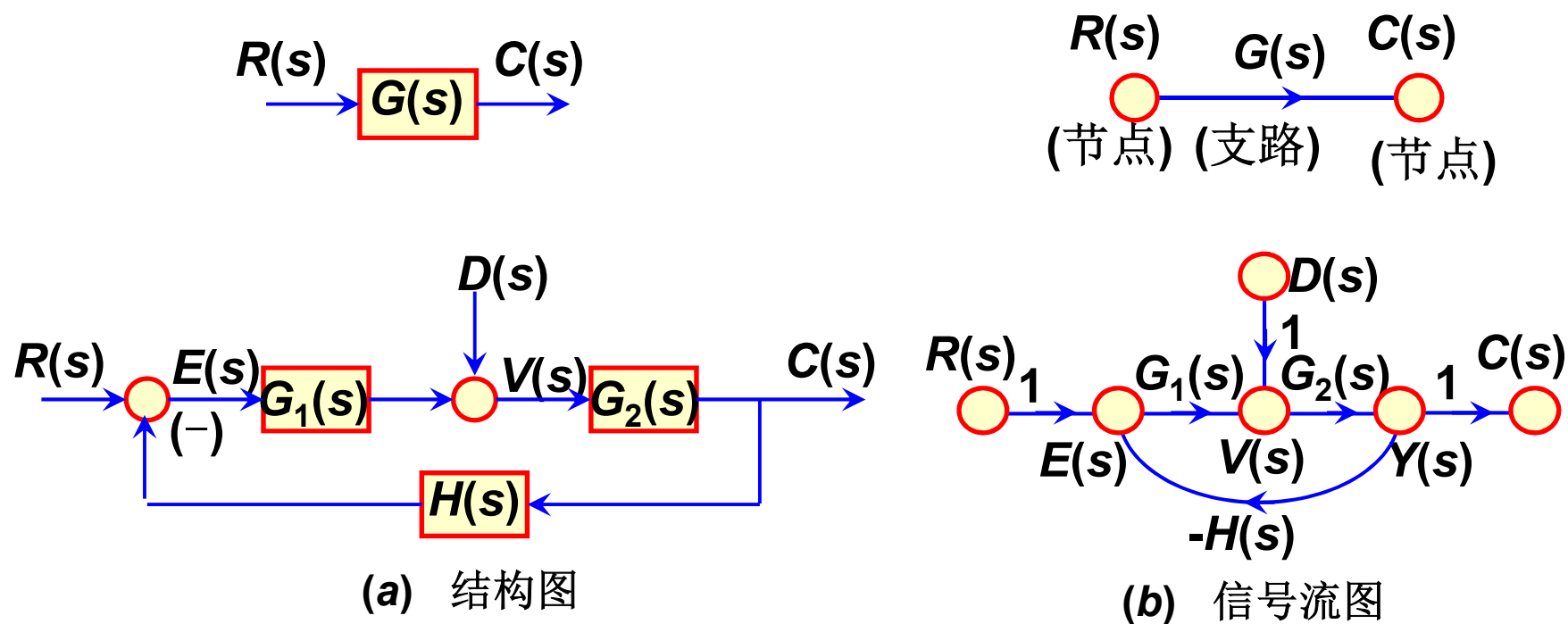


• 信号传递流程:

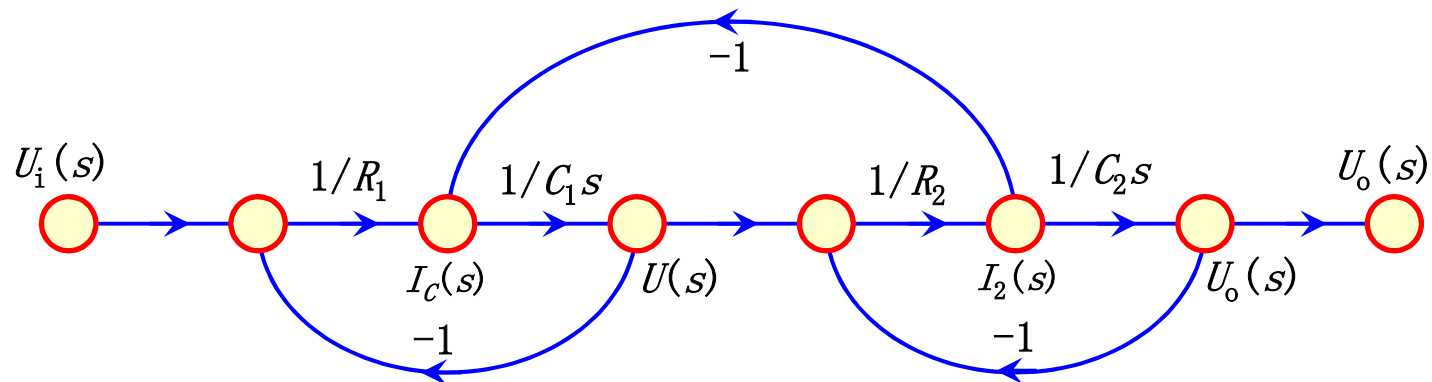
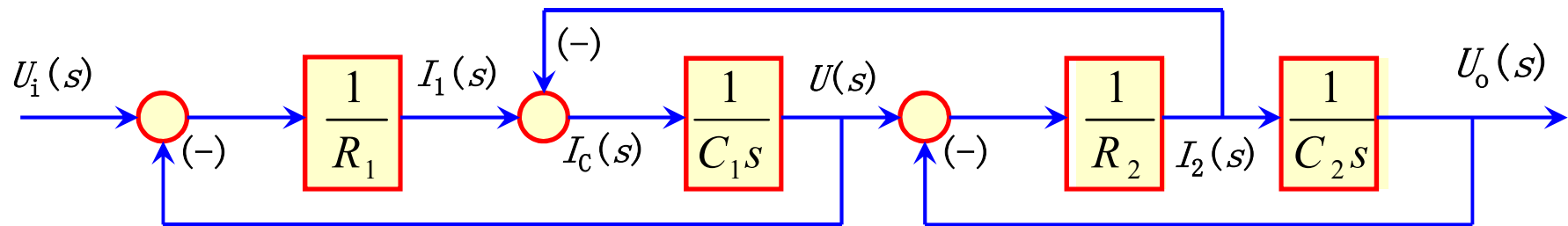
$$U_i(s) \rightarrow U_i(s) - U_o(s) \rightarrow I_1(s) \rightarrow I(s) \rightarrow U_o(s)$$

由系统结构图绘制信号流图

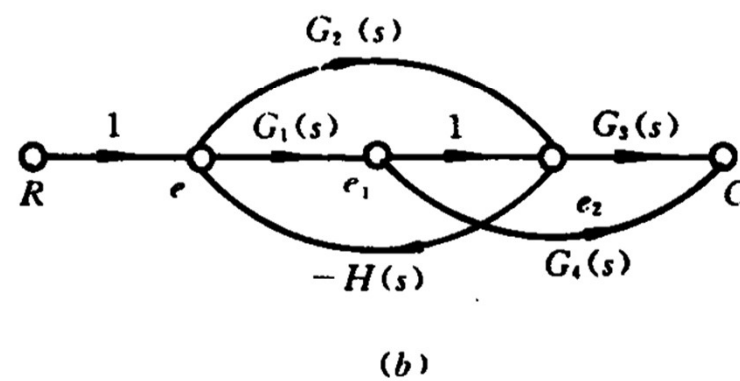
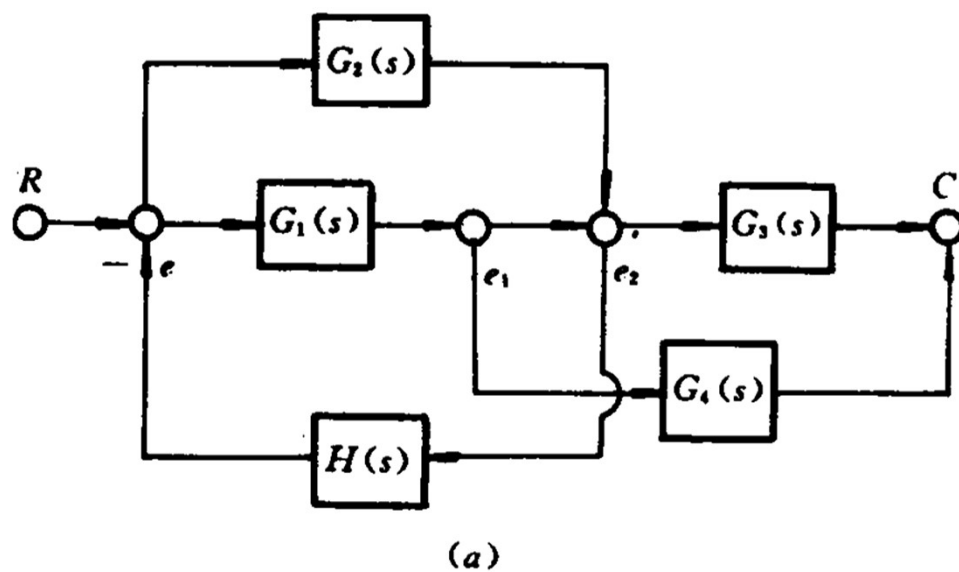
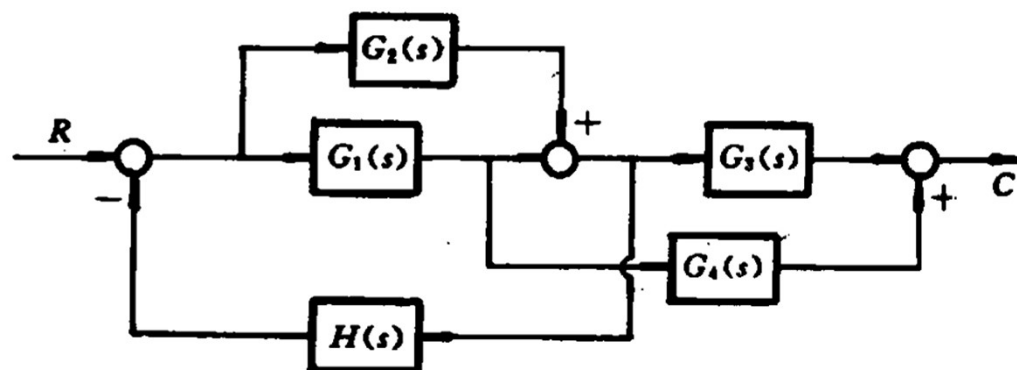
- 1) 用小圆圈标出传递的信号，得到节点。
 - 2) 用线段表示结构图中的方框，用传递函数代表支路增益。
- 注意信号流图的节点只表示变量的相加。



绘制结构图对应的信号流图



绘制结构图对应的信号流图



信号流图

二、梅逊公式

任一结构图中，某个输入对某个输出的传递函数为

$$P = \frac{\sum_1^n P_k \Delta_k}{\Delta}$$

式中：n 为前向通路的条数

P_k 为第k条前向通路增益

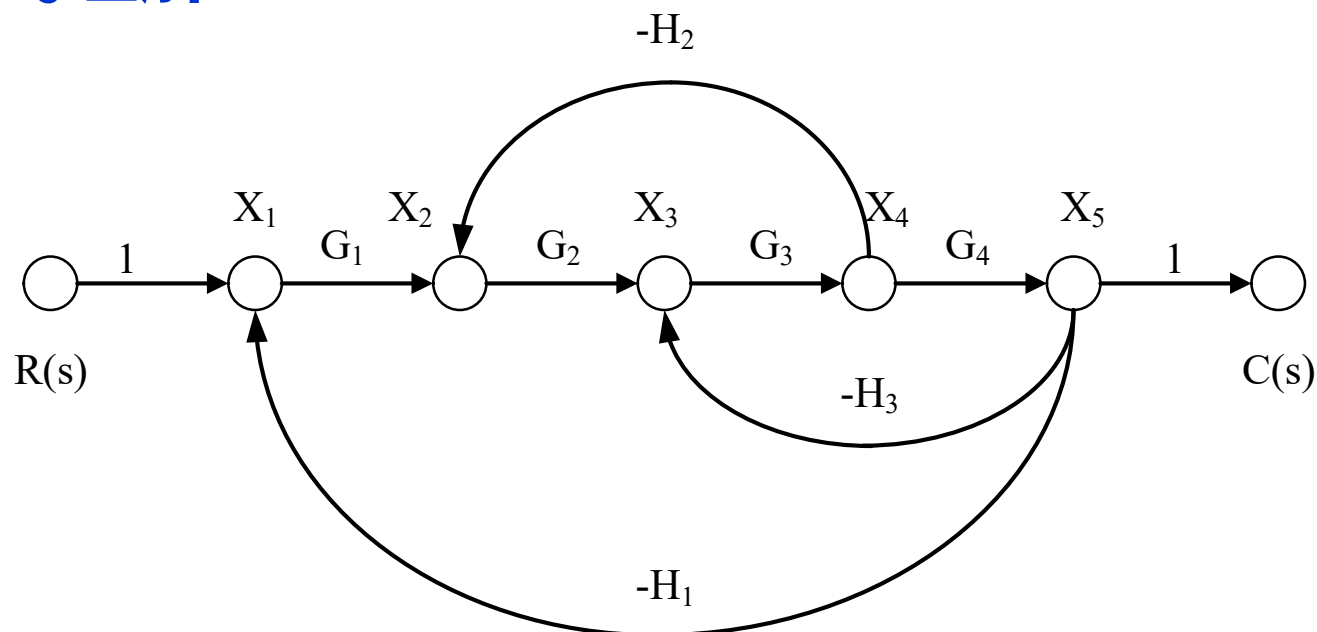
Δ 为系统特征式

$\Delta = 1 - (\text{所有单独回路增益之和}) + (\text{所有每两个互不接触回路增益乘积之和}) - (\text{所有三个互不接触回路增益乘积之和}) + \dots$

$$= 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \dots$$

Δ_k 为第k条前向通路特征式的余子式，即将第k条前向通路去掉，对余下的图再算一次 Δ 。

梅逊公式理解



$$X_1 = R(s) - H_1 X_5$$

$$X_2 = G_1 X_1 - H_2 X_4$$

$$X_3 = G_2 X_2 - H_3 X_5$$

$$X_4 = G_3 X_3$$

$$X_5 = G_4 X_4$$

$$C(s) = X_5$$



$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -H_1 \\ G_1 & 0 & 0 & -H_2 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & -H_3 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} R$$

X = **Q** **X** + **P** **R**

梅逊公式理解

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -H_1 \\ G_1 & 0 & 0 & -H_2 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & -H_3 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} R$$

$\mathbf{X} = \mathbf{Q} \mathbf{X} + \mathbf{P} R$

$\mathbf{X} = \mathbf{P}R / (\mathbf{I} - \mathbf{Q})$

$\mathbf{G}(s) = \mathbf{X}(5)/R$

```
syms G1 G2 G3 G4 H1 H2 H3;
```

```
Q(1,5)=-H1; Q(2,1)=G1; Q(2,4)=-H2;
```

```
Q(3,2)=G2; Q(3,5)=-H3;
```

```
Q(4,3)=G3;
```

```
Q(5,4)=G4;
```

```
P=[1;0;0;0;0];
```

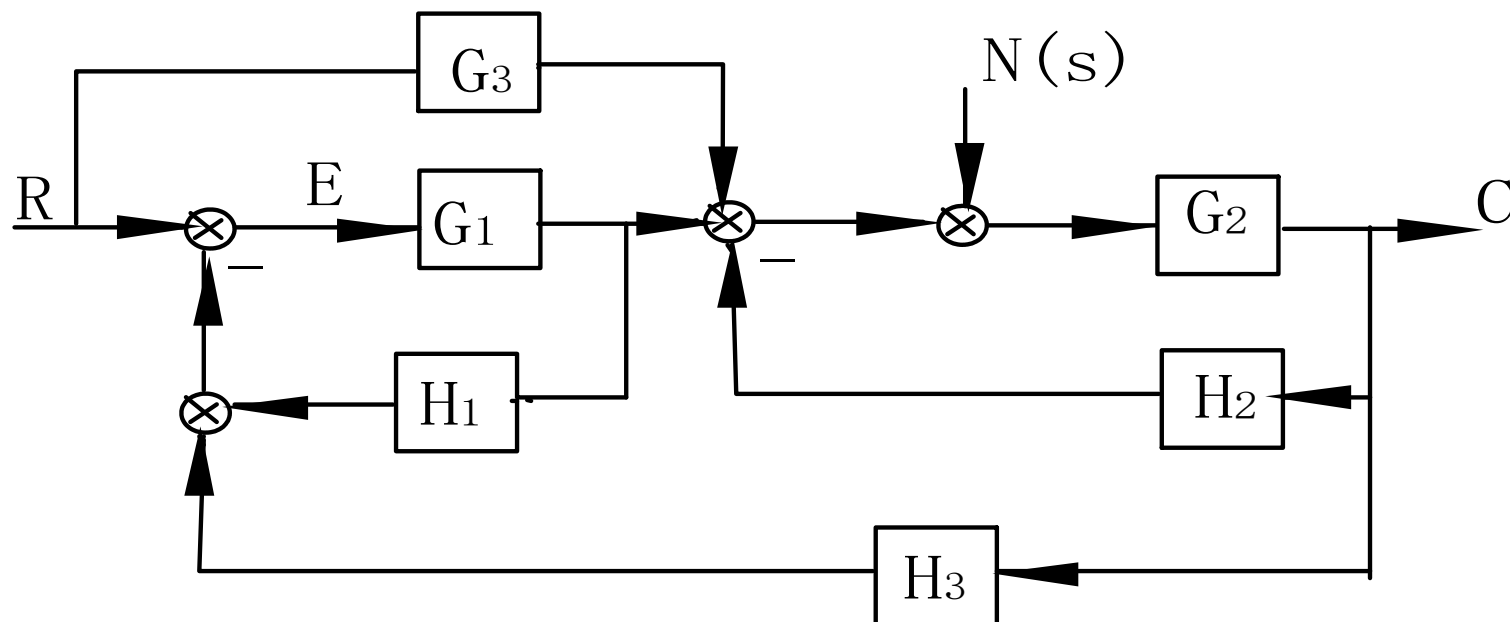
```
I=eye(size(Q));
```

```
W=(I-Q)\P;
```

```
W5=W(5);
```

```
W5 = (G1*G2*G3*G4)/(G2*G3*H2 +  
G3*G4*H3 + G1*G2*G3*G4*H1 + 1)
```

信号流图



(1) 本例 $C(s)/R(s)$ 的求法

$$L_1 = -G_1 H_1, L_2 = -G_2 H_2, L_3 = -G_1 G_2 H_3$$

两两互不接触回路有 $L_1 L_2$

信号流图

(1) 本例C(s)/R(s) 的求法

$$L_1 = -G_1 H_1, L_2 = -G_2 H_2, L_3 = -G_1 G_2 H_3$$

两两互不接触回路有 $L_1 L_2$

$$P_1 = G_1 G_2, \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_3 G_2, \Delta_2 = 1 - (-G_1 H_1)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 + G_3 G_2 (1 + G_1 H_1)}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_3 + G_1 G_2 H_1 H_2}$$

(2) 若以E(s) 为输出, R(s) 为输入, 传递函数E(s)/R(s)如下求取:

$$L_1 = -G_1 H_1, L_2 = -G_2 H_2, L_3 = -G_1 G_2 H_3$$

信号流图

两两互不接触回路仍为**L1L2**

无论输入输出是什么，回路是不变的，所以 Δ 不变

$$P_1 = 1, \Delta_1 = 1 + G_2 H_2$$

$$P_2 = -G_3 G_2 H_3, \Delta_2 = 1$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 + G_2 H_2 - G_3 G_2 H_3}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_3 + G_1 G_2 H_1 H_2}$$

信号流图

(3).若在G2输入端有一点干扰N(s),求C(s)/N(s)

因为传递函数是单输入单输出，所以求C(s)/N(s) 时令
R(s)=0.(当然求C(s)/R(s)时也要令N(s)=0)，则有

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2(1 + G_1 H_1)}{\Delta}$$

分母 Δ 与 $\frac{C(s)}{R(s)}, \frac{E(s)}{R(s)}$ 的均相同

信号流图

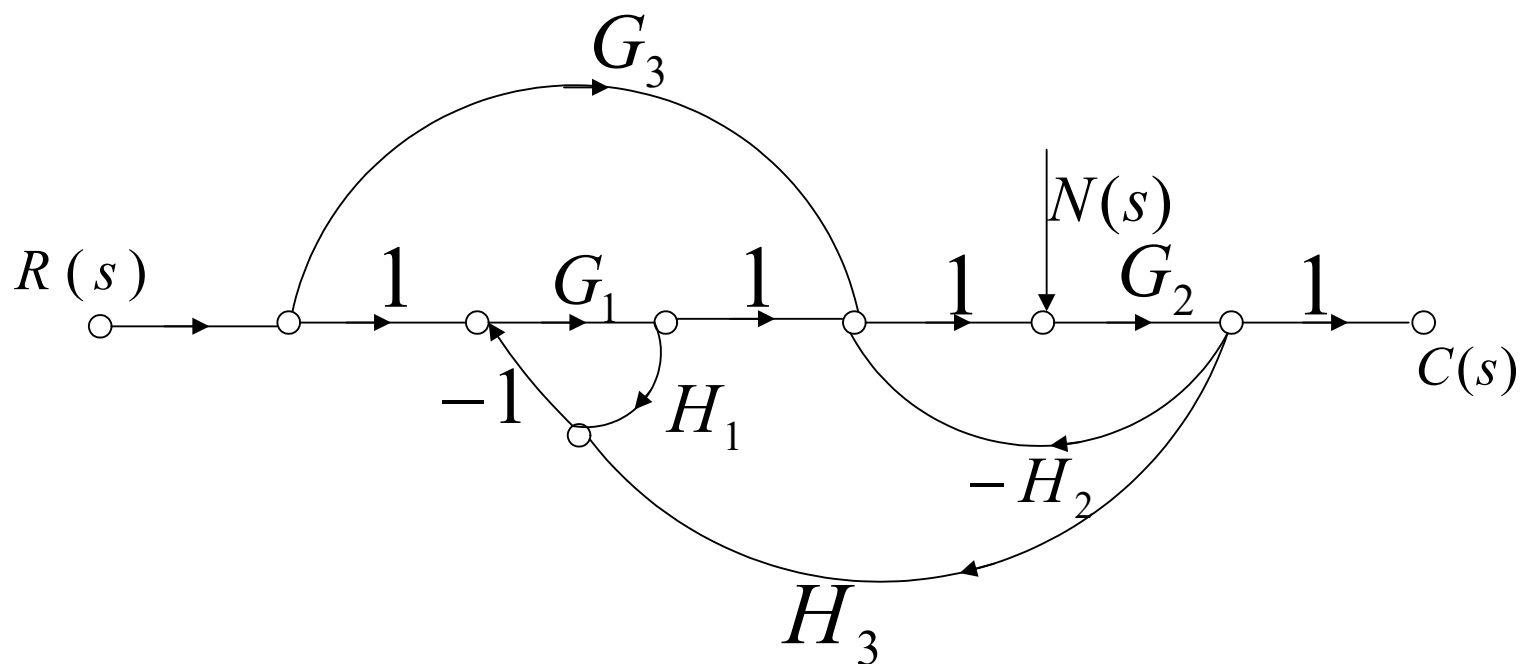
(4).若求 $R(s), N(s)$ 同时作用下的总输出, 则有

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} \cdot R(s) + \frac{C(s)}{N(s)} \cdot N(s) \\ &= \frac{[G_1 G_2 + G_3 G_2 (1 + G_1 H_1)] \cdot R(s) + (1 + G_1 H_1) \cdot N(s)}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_3 + G_1 G_2 H_1 H_2} \end{aligned}$$

信号流图

将结构图中各比较点，引出点都画成节点，各方框都去掉，方框中的传递函数写在各自的传递线上，即可将结构图变成信号流图。

上例中的信号流图为：



信号流图

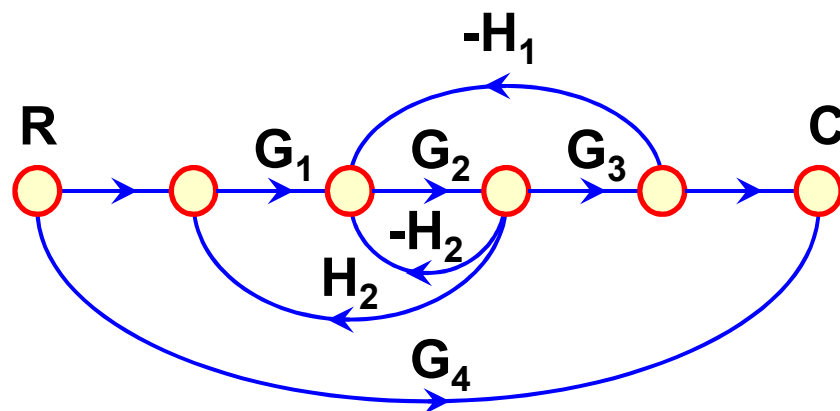
实际上有了结构图，我们就可用梅逊公式求传递函数，不必将其改为信号流图。如果没有结构图，只给出系统的微分方程组。

首先要在零初始条件下进行拉氏变换，变成 s 的代数方程组，然后对系统中的每一个变量指定一个节点，并按照实际系统中信号的因果关系从左到右顺序排列。

信号流图

最后根据系统的代数方程组，用标明支路增益的支路把各个节点正确地连接起来，便可绘出系统的信号流图。

例 已知系统信号流图，求传递函数。

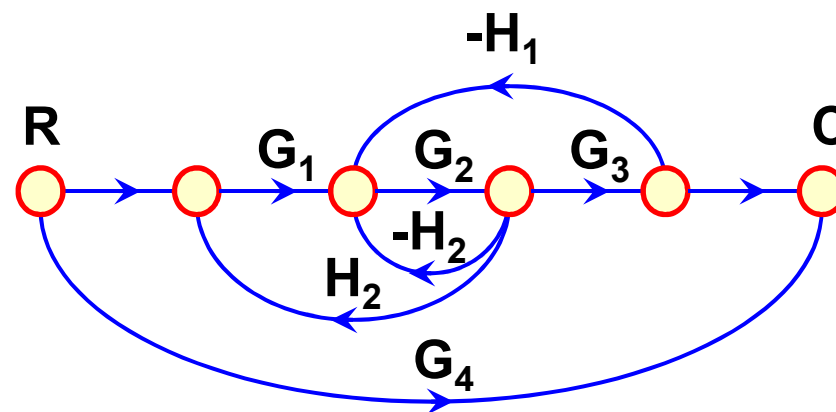


例 已知系统信号流图，求传递函数。

解： 三个回路： $L_1 = -G_2H_2$

$$L_2 = G_1G_2H_2$$

$$L_3 = -G_2G_3H_1$$



- 回路相互均接触，则：

$$\Delta = 1 - \sum L_a = 1 + G_2H_2 + G_2G_3H_1 - G_1G_2H_2$$

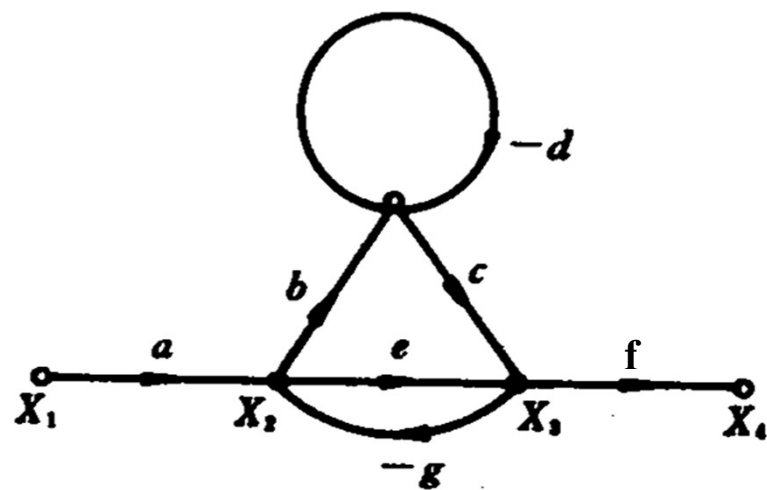
- 前向通路有两条：

$$P_1 = G_1G_2G_3, \quad \text{没有与之不接触的回路: } \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_4, \quad \text{与所有回路不接触: } \Delta_2 = \Delta$$

$$G(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k = \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_2H_2 + G_2G_3H_1 - G_1G_2H_2} + G_4$$

例 已知系统信号流图，求传递函数 X_4/X_1 及 X_2/X_1 。



例 已知系统信号流图，

求传递函数 X_4/X_1 及 X_2/X_1 。

解： 三个回路

$$\sum L_a = -d - eg - bcg$$

有两个互不接触回路

$$\sum L_b L_c = deg$$

则 $\Delta = 1 + d + eg + bcg + deg$

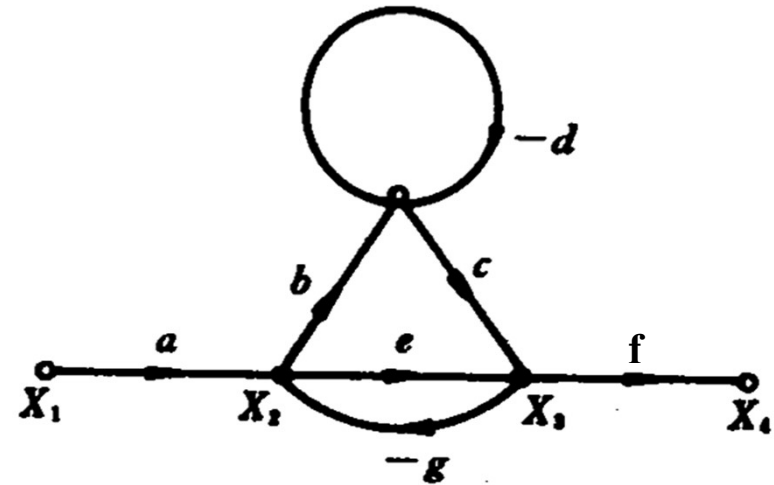
1. $X_1 \rightarrow X_4, p_1 = aef, p_2 = abcf$

$$\Delta_1 = 1 + d, \Delta_2 = 1$$

$$\frac{X_4}{X_1} = \frac{1}{\Delta} (p_1 \Delta_1 + p_2 \Delta_2) = \frac{aef(1+d) + abcf}{1+d+eg+bcg+deg}$$

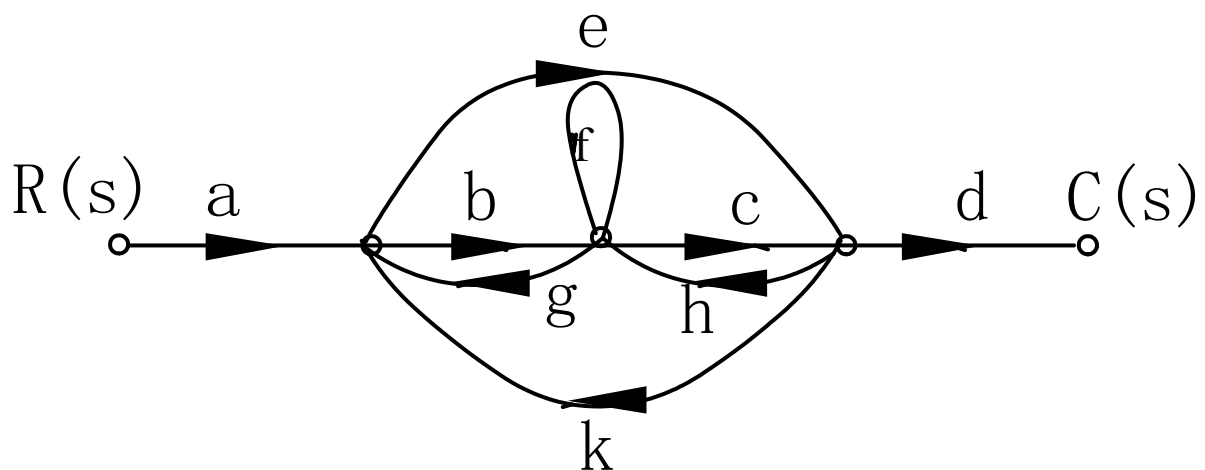
2. $X_1 \rightarrow X_2, p_1 = a, \Delta_1 = 1 + d$

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{1}{\Delta} p_1 \Delta_1 = \frac{a(1+d)}{1+d+eg+bcg+deg}$$



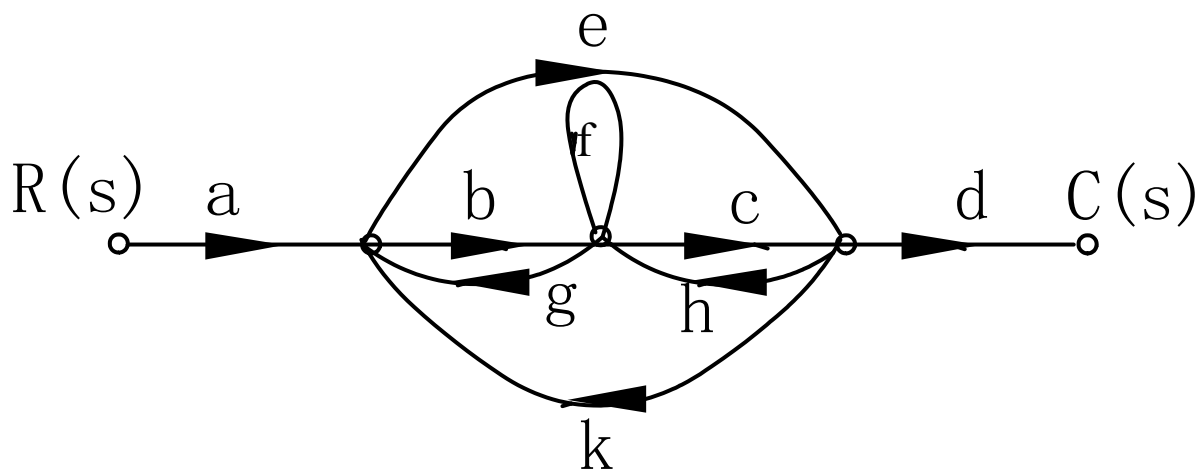
信号流图

例：求下图所示系统的传递函数



信号流图

例：求下图所示系统的传递函数



单独回路 $L_1 = bg$, $L_2 = bck$

$L_3 = ehg$, $L_4 = ek$, $L_5 = f$, $L_6 = ch$

两两互不接触回路 $L_4 L_5 = ekh$

$\therefore \Delta = 1 - bg - bck - ehg - ek - f - ch + ekh$

信号流图

$$P_1 = abcd, \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = ade, \Delta_2 = 1 - f$$

由梅逊公式
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{abcd + ade(1 - f)}{\Delta}$$