第五章 线性系统的频域分析法

5.3 频率域稳定判据

奈奎斯特(Nyquist)稳定判据　+　伯德(Bode)稳定判据

奈奎斯特(Nyquist)稳定判据

一种重要且实用的方法——奈奎斯特(Nyquist)稳定判据，是由H. Nyquist于1932年提出的 。

Nyquist稳定判据是利用开环系统幅相频率特性（奈氏图），判断闭环系统的稳定性。

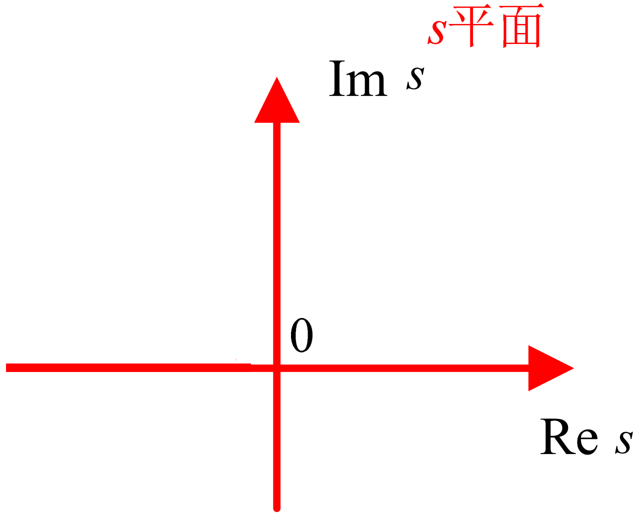
Nyquist稳定判据的数学基础是复变函数理论中的幅角原理，也称映射定理。

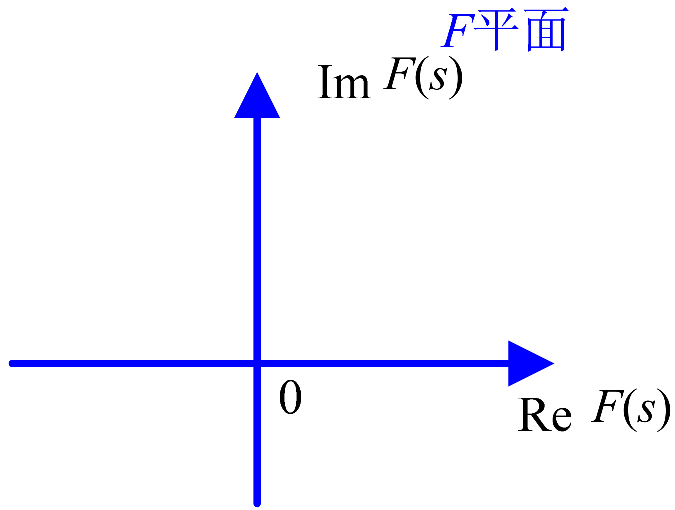
幅角原理用于控制系统稳定性判定要选择辅助函数和闭合曲线。

5.3 频率域稳定判据

一、奈奎斯特稳定判据的数学基础

(1) s平面与$F(s)$平面





(2)映射关系： s平面$\longrightarrow F(s)$平面　　　点$s \longrightarrow$ 映射点$F(s)$

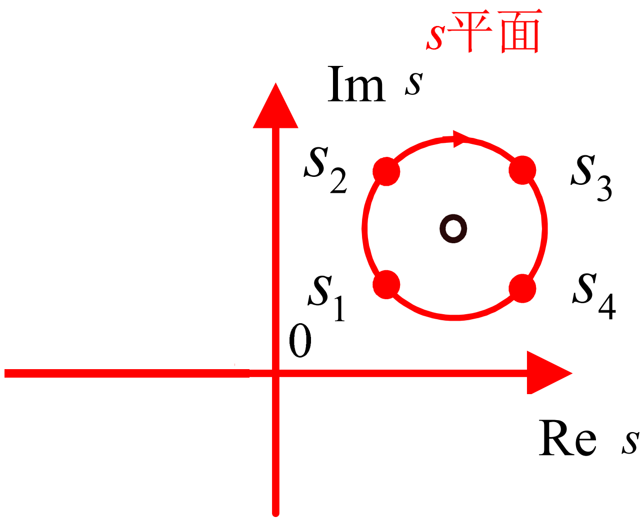
5.3 频率域稳定判据

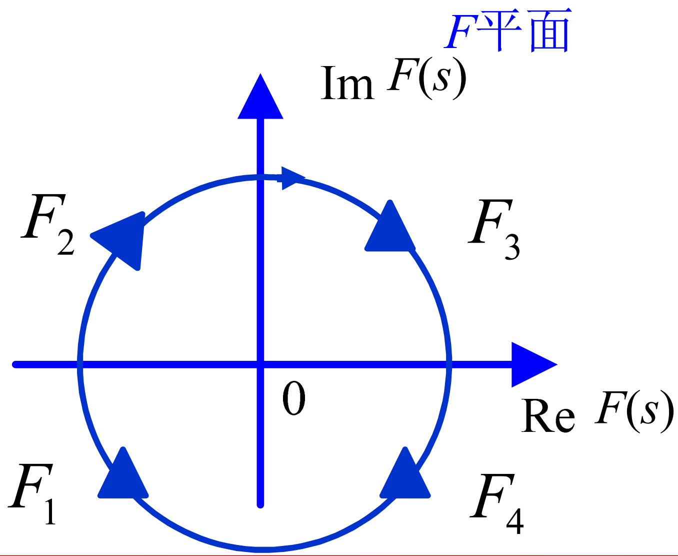
$$F(s)=s-z_1=s-(2+2j)$$

映射关系实例

$$s=\begin{cases} s_1: 1+j1 \\ s_2: 1+j3 \\ s_3: 3+j3 \\ s_4: 3+j1 \end{cases}$$

$$F(s)=\begin{cases} F_1: -1-j1 \\ F_2: -1+j1 \\ F_3: 1+j1 \\ F_4: 1-j1 \end{cases}$$



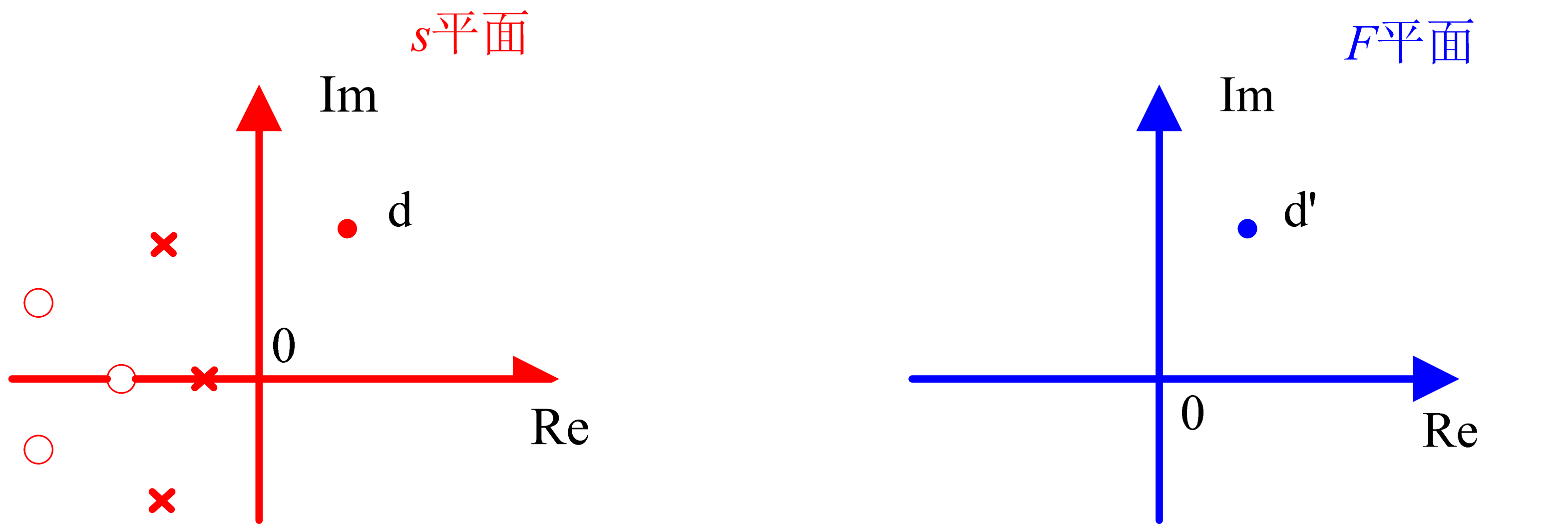


5.3 频率域稳定判据

1. 幅角原理

由复变函数的理论可知：

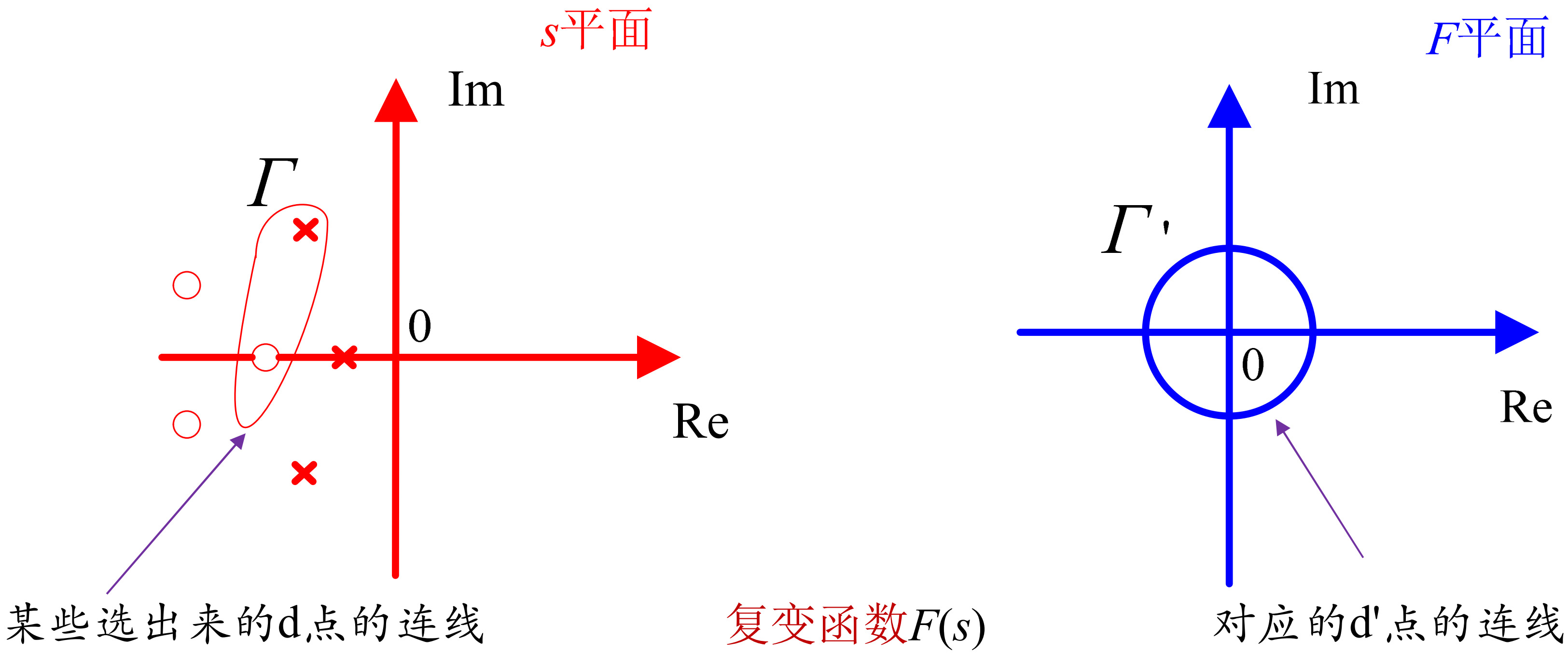
如果在s平面的指定区域内函数$F(s)$是非奇异的，则对应于此区域上的任何一点d，都可以通过$F(s)$的映射关系在$F(s)$平面内找到对应的一个点d'(称d'为d的象)。



奇异函数是指函数本身有不连续点（跳跃点）或其导数或积分有不连续点的一类函数。

5.3 频率域稳定判据

对于s平面内任何一条不通过$F(s)$奇异点的封闭曲线Γ，也可以通过$F(s)$的映射关系在$F(s)$平面内找到一条与之相对应的封闭曲线Γ'(称Γ'为Γ的象)。



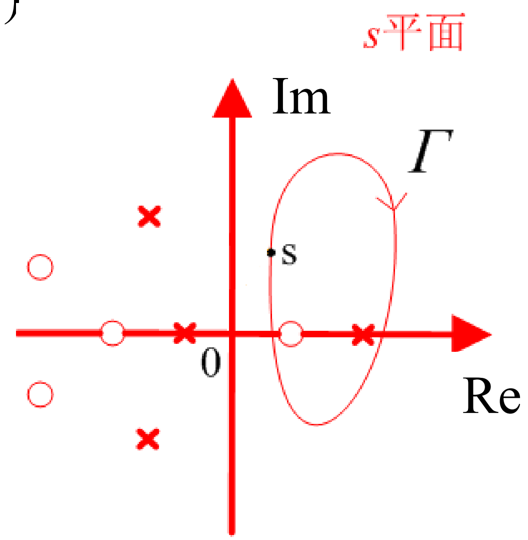
5.3 频率域稳定判据

假定复变函数表示为 $$F(s)=\frac{K_1(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

复变函数的相角可以表示为： $$\angle F(s)=\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)$$

相角:由z或p指向s的矢量与实轴正方向的夹角

相角变化量： $$\Delta\angle F(s)=\sum_{i=1}^{n}\Delta\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\Delta\angle(s-p_j)$$

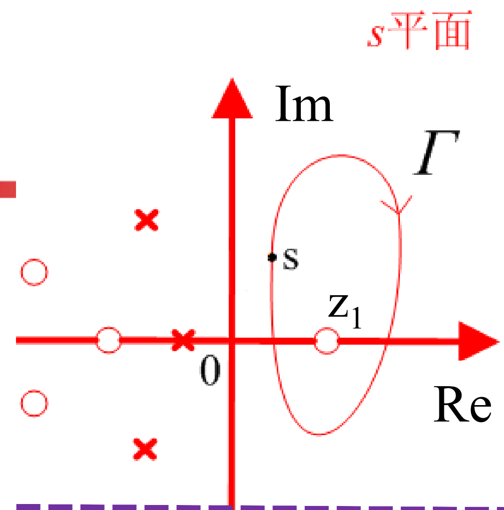


在s平面上任取一条封闭曲线Γ，且要求Γ曲线满足下列条件:

(1) 曲线Γ 不通过$F(s)$的奇点（即$F(s)$的零点和极点）；

(2) 曲线Γ 包围一个或多个$F(s)$的零点或极点。

5.3 频率域稳定判据

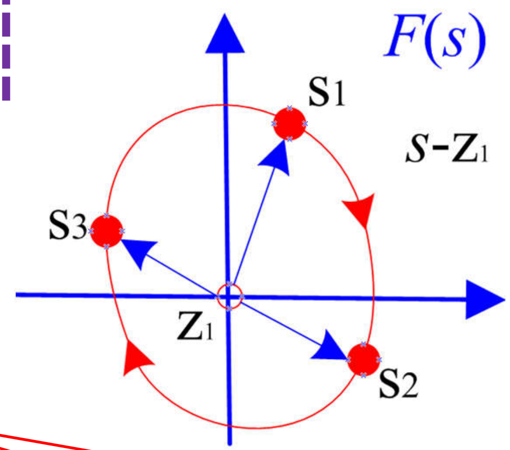


1） 简单情况：仅包围一个零点或极点

s平面

- 假定s平面上封闭曲线包围了$F(s)$的一个零点z_1，其它零极点都位于封闭曲线之外。

- 当s沿s平面上的封闭曲线Γ 顺时针移动1周时，



$F(s)$平面 ◻ 相量$(s - z_1)$的相角变化-2π。

◻ 其它各相量的相角变化为零。

$F(s)$相角总变化 $\Delta\angle F(s)=\Delta\angle(s-z_1)=-2\pi$

- 2π意味着在$F(s)$平面上映射的曲线沿顺时针方向围绕着原点旋转1周。

- 只包围一个极点p_1，对应在$F(s)$平面上映射的曲线沿逆时针方向围绕着原点旋转1周。（因为极点对应的角度前面有负号）

5.3 频率域稳定判据

2）复杂情况： 包围Z个零点

若s平面上的封闭曲线包围着$F(s)$的Z个零点，当s沿着s平面上的封闭曲线顺时针方向移动1周时，在$F(s)$平面上映射曲线将按顺时针方向围绕着坐标原点Z周。

3）复杂情况： 包围P个极点

若s平面上的封闭曲线包围着$F(s)$的P个极点。当s沿着s平面上的封闭曲线顺时针方向移动1周时，在$F(s)$平面上映射曲线将按逆时针方向围绕着坐标原点P周。

4）特殊情况： 不包围零点和极点

对于不被包围的零点和极点，当s沿着s平面上的封闭曲线移动时，对$F(s)$的相角没有影响。

5.3 频率域稳定判据

5）情况总结

当封闭曲线Γ上任一点 s 沿闭合曲线Γ 顺时针转动1周时，复变函数$F(s)$ 矢量总的相角变化量：

$$\Delta\angle \boldsymbol{F}(s)=\sum_{i=1}^{n}\Delta\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\Delta\angle(s-p_j)$$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{z}\Delta\angle(s-z_i)}_{\text{包围}}+\underbrace{\sum_{i=Z+1}^{n}\Delta\angle(s-z_i)}_{\text{不包围}}-\underbrace{\sum_{j=1}^{P}\Delta\angle(s-p_j)}_{\text{包围}}-\underbrace{\sum_{j=P+1}^{n}\Delta\angle(s-p_j)}_{\text{不包围}}$$

$$=Z(-2\pi)-P(-2\pi)=(P-Z)(2\pi)$$

P和Z分别是被封闭曲线Γ包围的复变函数$F(s)$的极点个数和零点个数。

5.3 频率域稳定判据

幅角原理 (映射定理):
$$\Delta\angle \boldsymbol{F}(s)=(P-Z)(2\pi)$$

设s平面上不通过$F(s)$任何奇异点的某条封闭曲线Γ，它包围了$F(s)$在s平面上的Z个零点和P个极点。当s在s平面上以顺时针方向沿封闭曲线Γ移动1周时，在F平面上对应于封闭曲线Γ的像Γ'将以逆时针方向围绕原点旋转R周。

(2π)

$$R=P-Z\ \begin{cases} R>0,\ \text{逆时针包围} \\ R<0,\ \text{顺时针包围} \\ R=0,\ \text{不包围} \end{cases}$$

2. 复变函数$F(s)$的选择——辅助函数

设系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)}$

则系统的闭环传递函数为 $\Phi(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\dfrac{G(s)}{1+\dfrac{B(s)}{A(s)}}=\dfrac{G(s)A(s)}{A(s)+B(s)}$

构造辅助函数 $F(s)=1+G(s)H(s)=1+\dfrac{B(s)}{A(s)}=\dfrac{A(s)+B(s)}{A(s)}$

辅助函数特点：1) 辅助函数$F(s)$的零点是闭环传递函数的极点，☆

$F(s)$的极点是开环传递函数的极点。

5.3 频率域稳定判据

开环传递函数表示为

$$G(s)H(s)=\frac{K_1(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)},n\geq m$$

辅助函数 $F(s)=1+G(s)H(s)=1+\dfrac{K_1(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$

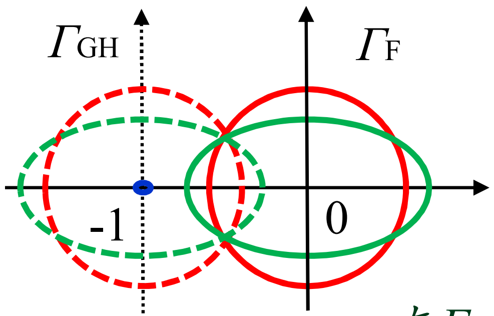
$$=\frac{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

辅助函数特点： 2) $F(s)$的零、极点数目相同，都为n。

5.3 频率域稳定判据

辅助函数特点:

3) $F(s)=1+G(s)H(s)$, s沿闭合曲线Γ运动1周所产生的两条映射闭合曲线Γ_F和Γ_{GH}只相差常数1，即闭合曲线Γ_F可由Γ_{GH}向实轴正方向平移一个单位长度获得，**Γ_F与Γ_{GH}可转换。**

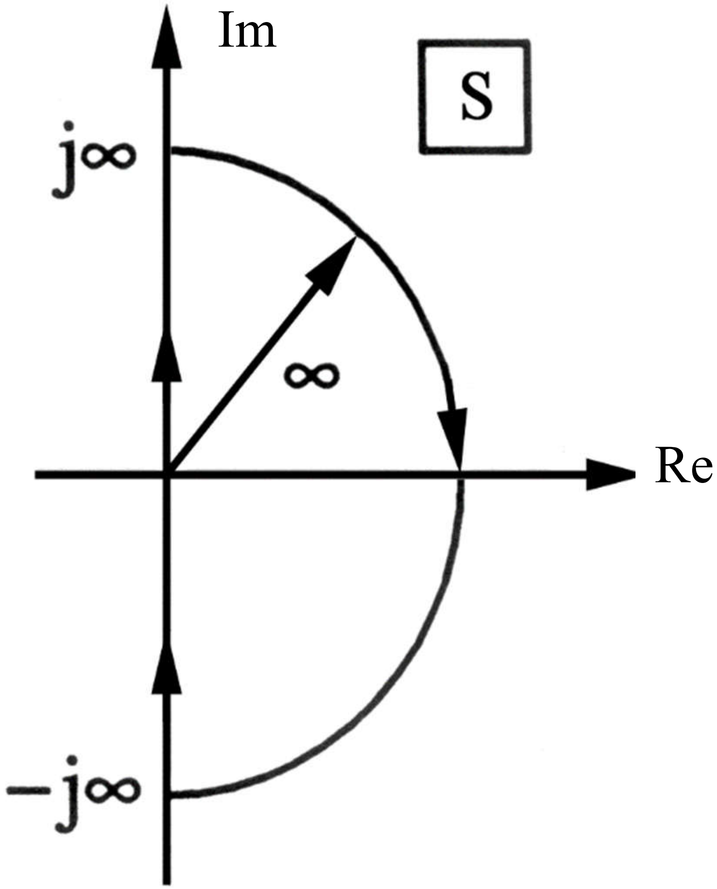


在Γ_F坐标系下标注坐标刻度

4) 闭合曲线Γ_F包围F平面原点的圈数等于闭合曲线Γ_{GH}包围F平面$(-1, j0)$点的圈数。

3. s平面的闭合曲线Γ的选择

为将幅角原理与控制系统稳定性分析联系起来，适当选择s平面的闭合曲线Γ。



s平面上的闭合曲线

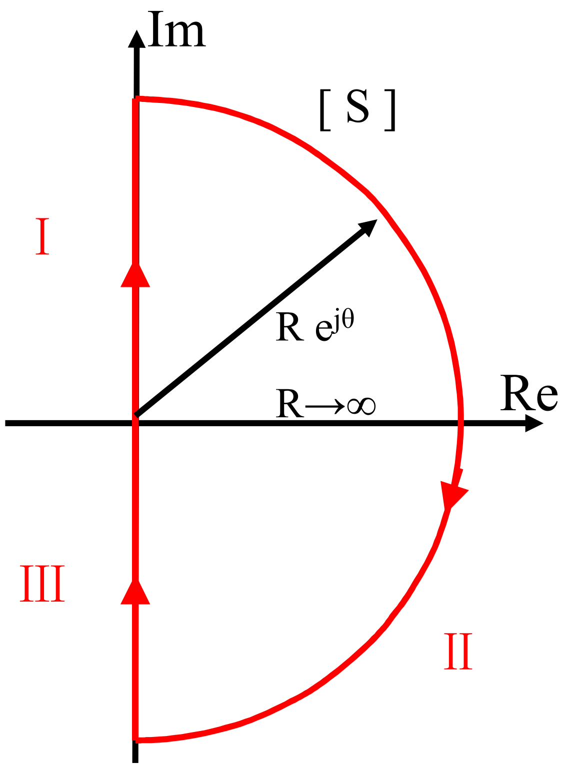
闭环系统的稳定性决定于系统闭环极点，即$F(s)$的零点。

稳定与否看s右半平面有无闭环极点，即$F(s)$在右半平面有无零点。

零点数Z=0， 则稳定！

5.3 频率域稳定判据

为了包含辅助函数$F(s)$位于s右半平面内的所有零点，将描述s变化的闭合曲线Γ扩展为整个右半平面。



闭合曲线Γ

由整个虚轴和半径为∞的右半圆组成。

试验点沿着上述轨迹按顺时针方向移动1周，该闭合曲线Γ是s的变化曲线。

在$F(s)$平面上的映射也是一条封闭曲线Γ_F，称为$F(s)$的映射曲线。

5.3 频率域稳定判据

闭合曲线Γ不能通过$F(s)$的零、极点，讨论虚轴上和有限位置。

（1）有限位置——取无限大半径总能避开

（2）虚轴上

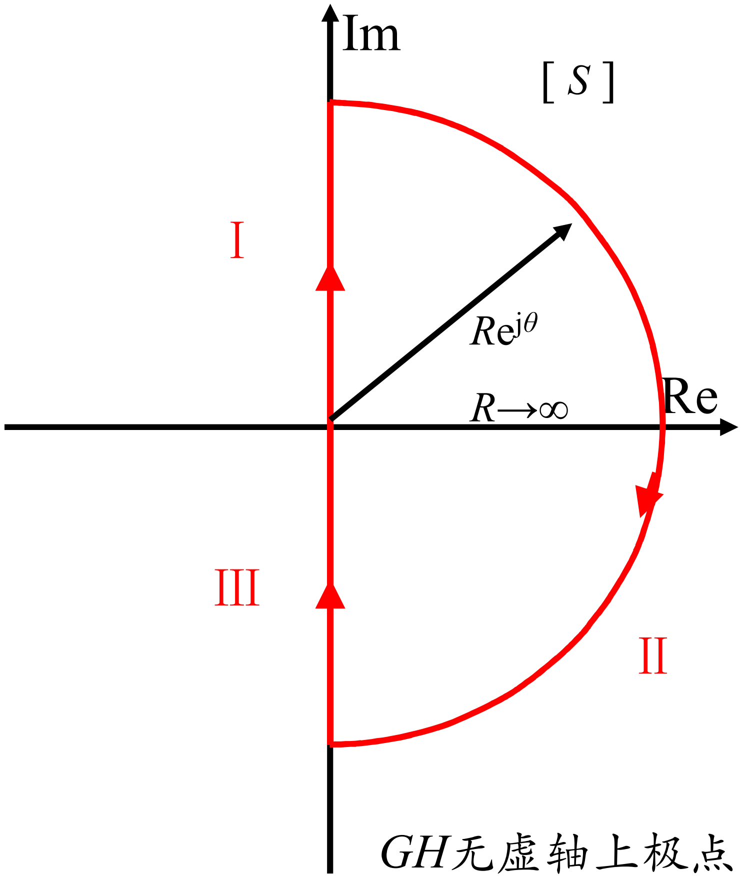
$$G(s)H(s)=\frac{B(s)}{A(s)} \qquad \Phi(s)=\frac{G(s)A(s)}{A(s)+B(s)} \qquad F(s)=\frac{A(s)+B(s)}{A(s)}$$

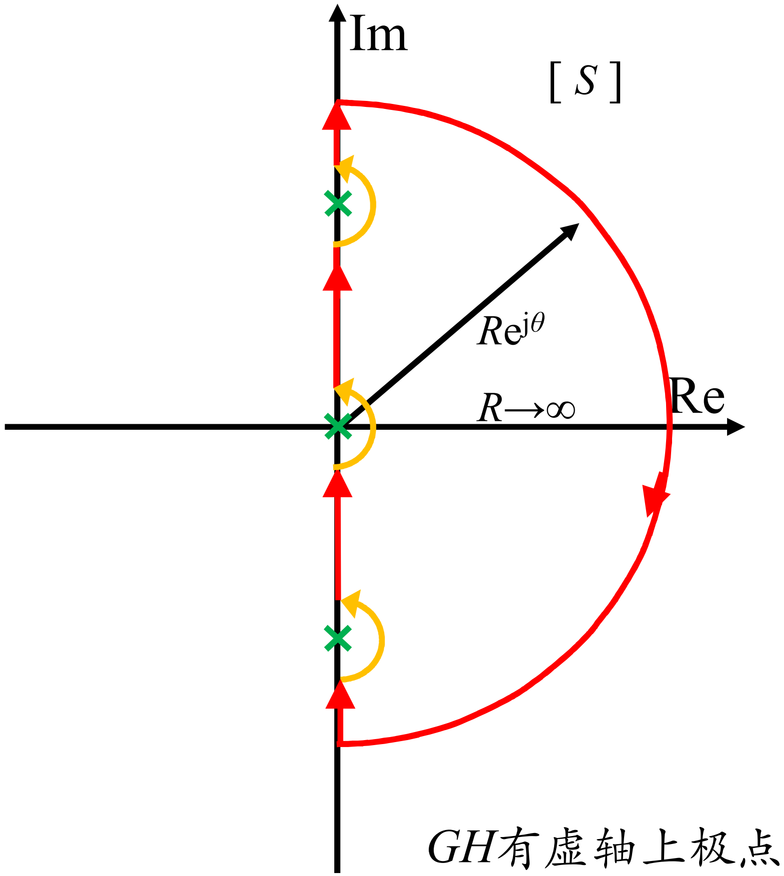
A. 当虚轴上有 $F(s)$的零点时，意味着闭环传递函数存在纯虚根极点，系统不稳定。因此，只考虑极点。

B. 复变函数$F(s)$的极点对应开环传递函数的极点。因此，只考虑GH的极点。　　两种情况：

5.3 频率域稳定判据

a. GH无虚轴上的极点　　　　b. GH有虚轴上的极点

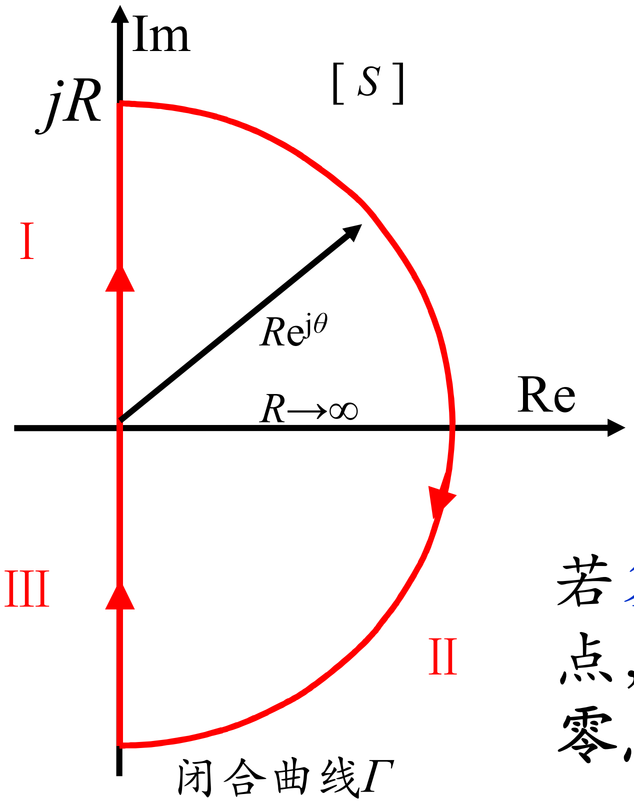




5.3 频率域稳定判据

a. *GH*无虚轴上的极点

*Γ*曲线由以下部分组成：



Ⅰ. 正虚轴s=jω， $\omega\in[0,+\infty)$；

Ⅱ. 半径为无限大的右半圆，$s = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$, $R\rightarrow\infty$， $\theta\in[+90^{\circ}, -90^{\circ}]$；

Ⅲ. 负虚轴s=jω， $\omega\in(-\infty, 0]$。

若复变函数$F(s)$在s右半平面有Z个零点和P个极点，**则上面区域包围了$F(s)$位于s右半平面所有零点和极点。**

5.3 频率域稳定判据

b. *GH*有虚轴上的极点——原点处极点

Γ曲线由以下部分组成:

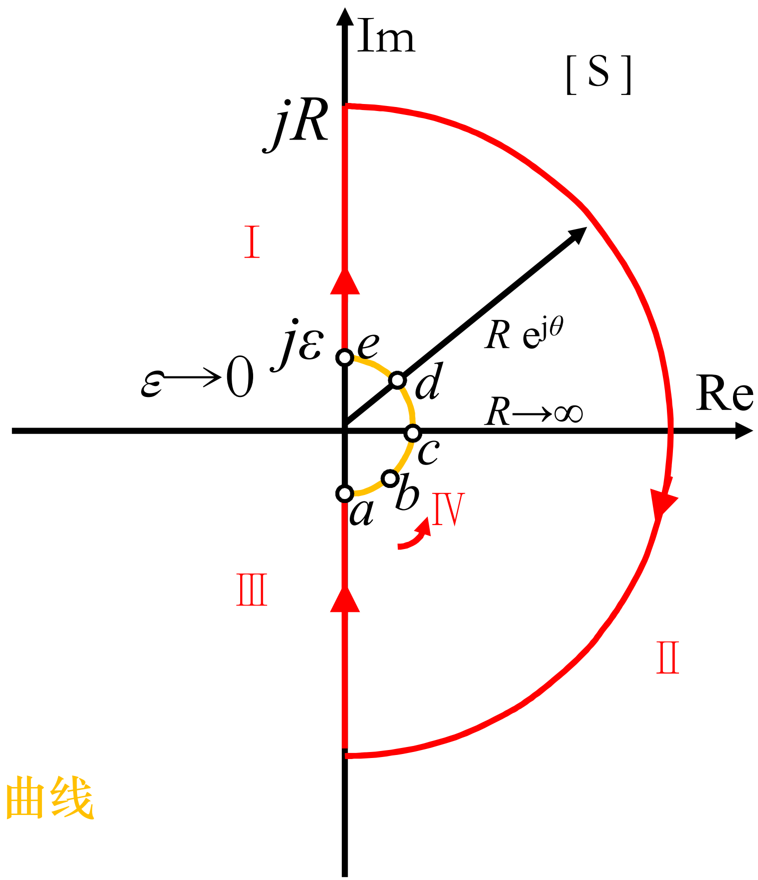
Ⅰ. 正虚轴s=jω，ω从0+变化到+∞;

Ⅱ. 半径为无限大的右半圆，$s= Re^{j\theta}$，$R\to\infty$，$\theta \in$ [+90 º，-90 º] 。

Ⅲ. 负虚轴s=jω，ω从-∞变化到0^-;

Ⅳ. 半径为无穷小的右半圆，$s= \varepsilon e^{j\theta}$，$\varepsilon\to 0$，$\theta$由$\in$ [- 90 º，+ 90 º] 。

——绕行曲线

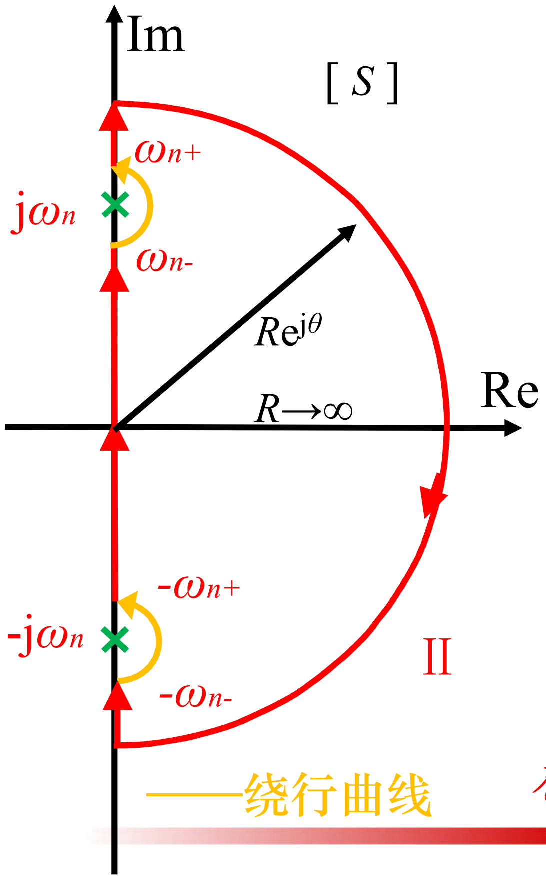


在计算*GH*右半平面极点数*P*时不包括虚轴上的极点

5.3 频率域稳定判据

b. *GH*有虚轴上的极点——等幅振荡极点

$$G(s)H(s)=\frac{1}{(s^2+\omega_n^2)^v}G_1(s) \qquad |G_1(\pm j\omega_n)|\neq\infty$$



*Γ*曲线由以下部分组成：

闭合曲线*Γ*避开极点，取

$$s=j\omega_n+\varepsilon e^{j\theta} \qquad s=-j\omega_n+\varepsilon e^{j\theta}$$

$$\theta\in[-90°,+90°] \qquad \theta\in[-90°,+90°]$$

在计算*GH*右半平面极点数*P*时不包括虚轴上的极点

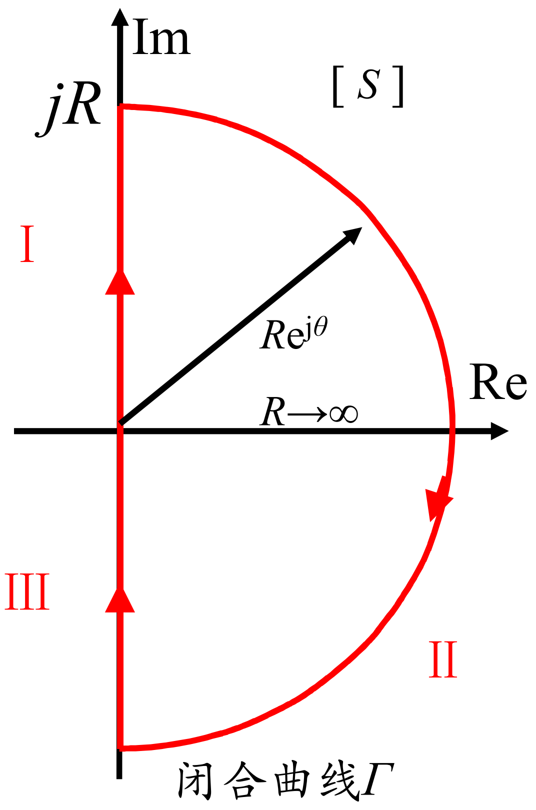
4. *GH*闭合曲线Γ_{GH}的绘制——映射曲线

s*平面闭合曲线 *Γ 关于**实轴对称**，映射曲线Γ_{GH}也关于实轴对称。

因此，只需绘制Γ_{GH}在 $\mathrm{Im}\, s>0$, $s\in \Gamma$ 对应的曲线段，得到Γ_{GH}的**半闭合曲线**，称为奈奎斯特曲线，仍记为Γ_{GH} 。

a. *GH*无虚轴上的极点

Γ曲线



曲线Γ_{GH}由以下部分组成:

I+III. 在虚轴上s=jω，$\omega\in(-\infty,+\infty)$，

⇨映射曲线Γ_{GH}对应开环幅相特性曲线;

Ⅱ. 在 $s=\infty e^{j\theta}$，$\theta\in[+90°,\ -90°]$ 时;

⇨映射曲线Γ_{GH}对应原点($n>m$)或(K_r, j0)点($n=m$)

仅考虑Γ_{GH}的半闭合曲线时:

Ⅰ. 在虚轴上s=jω，$\omega\in[0,+\infty)$，

⇨ 映射曲线Γ_{GH}对应开环幅相特性曲线;

Ⅱ. 在 $s=\infty e^{j\theta}$，$\theta\in[+90°,\ 0°]$ 时;

⇨曲线Γ_{GH}对应原点($n>m$)或(K_r,j0)点($n=m$)。

II中的点在开环幅相特性曲线上，所以仅考虑开环幅相曲线即可

b. GH有虚轴上的极点——原点处极点

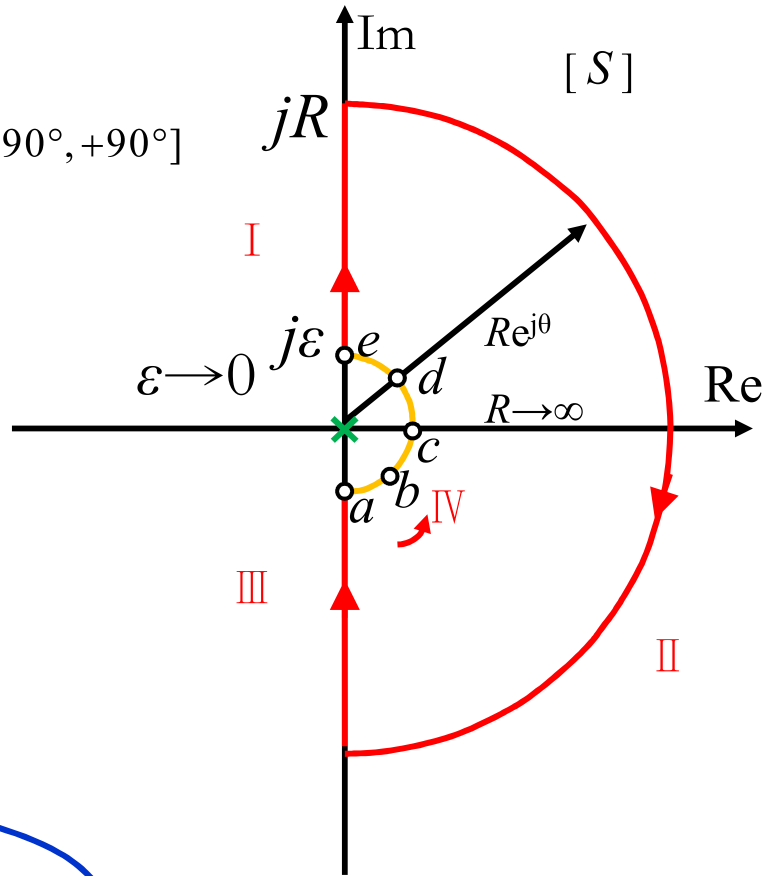
当s沿着小半圆移动时 $s=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon e^{j\theta}$ $\theta\in[-90°,+90°]$

当$s\to 0$时，系统开环特性近似为

$$G(s)H(s)\approx\frac{K}{s^{v}}$$

$$G(s)H(s)\Big|_{s=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon e^{j\theta}}=\frac{K}{s^{v}}\Big|_{s=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon e^{j\theta}}$$

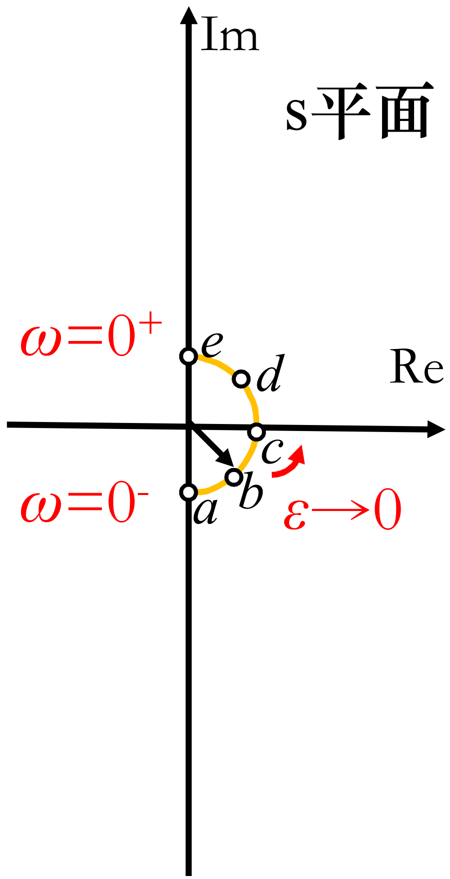
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{K}{\varepsilon^{v}}\right)e^{-jv\theta}=\infty e^{-jv\theta}$$



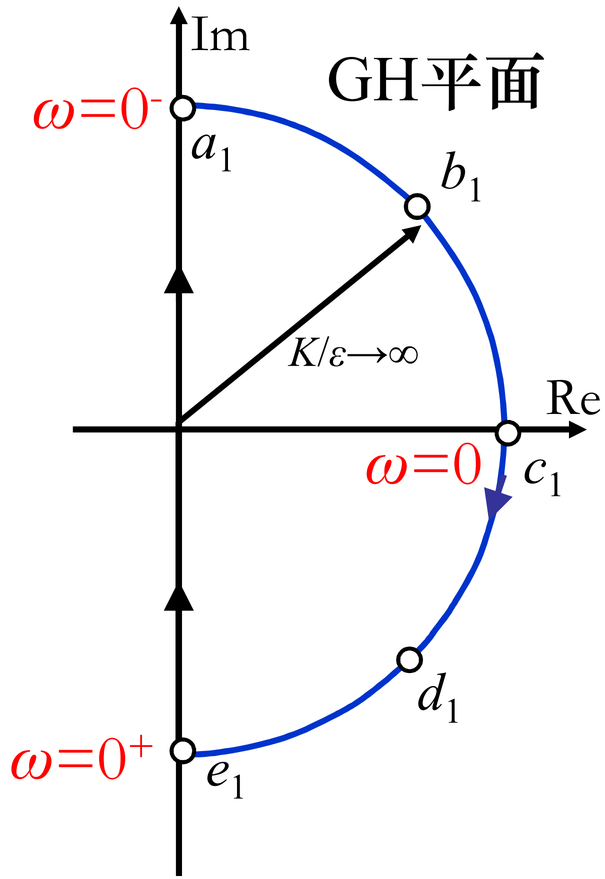
ω从$0^-\to 0^+$时，θ从$-90°\to 90°$。GH平面上的映射曲线Γ_{GH}将沿着半径为无穷大的圆弧按顺时针方向从$v\times 90°\to -v\times 90°$。

闭合曲线Γ的绕行部分

映射曲线Γ_{GH}的增补部分

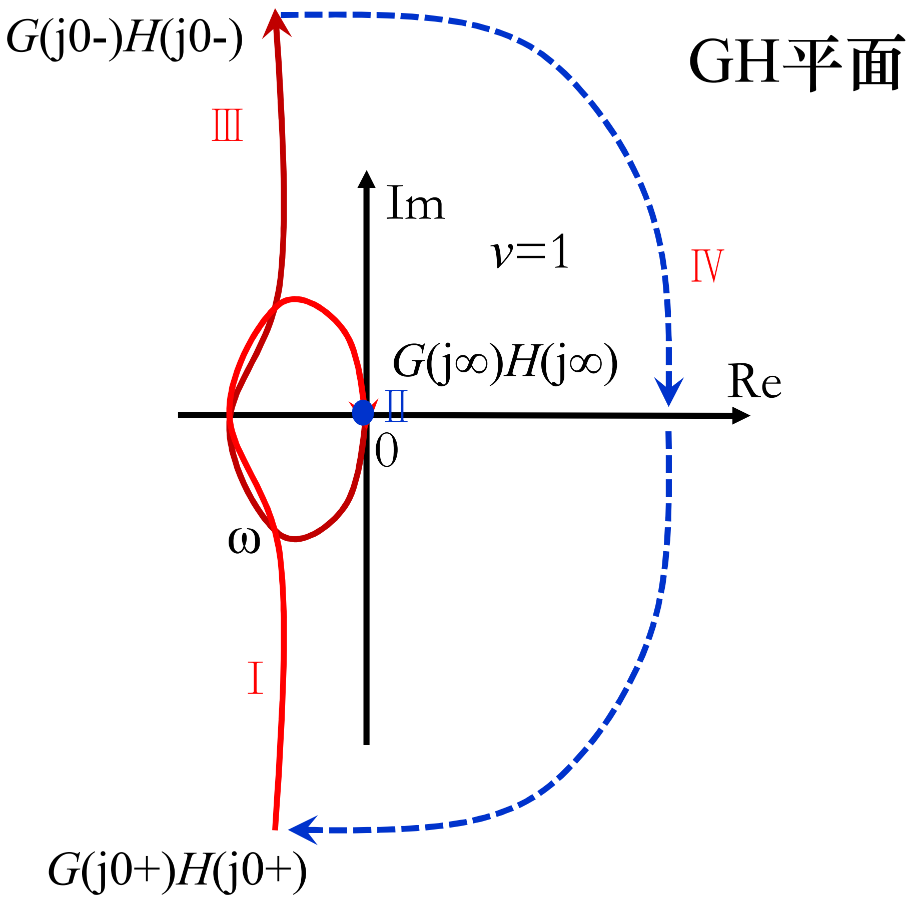


闭合曲线的绕行部分

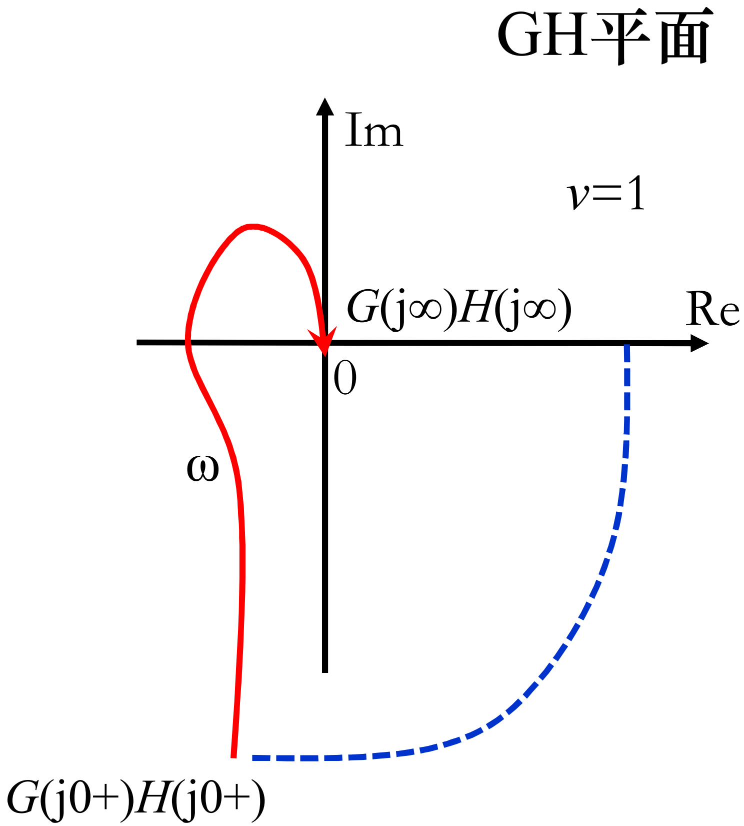


映射曲线的增补部分 ($v=1$)

固有+增补的映射曲线Γ_{GH}

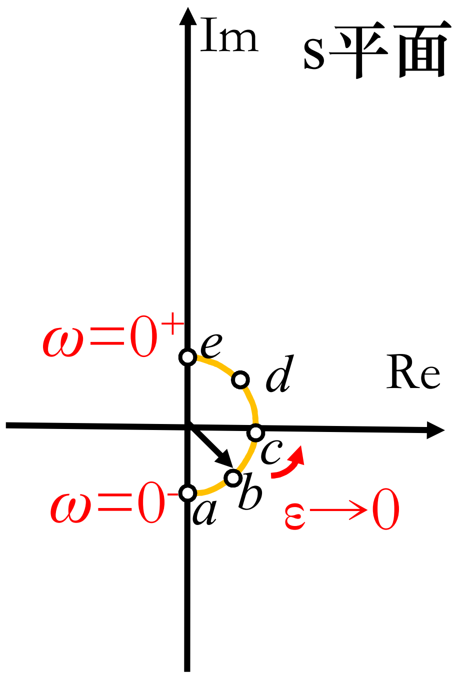


全部映射曲线$\Gamma_{GH}(v=1)$

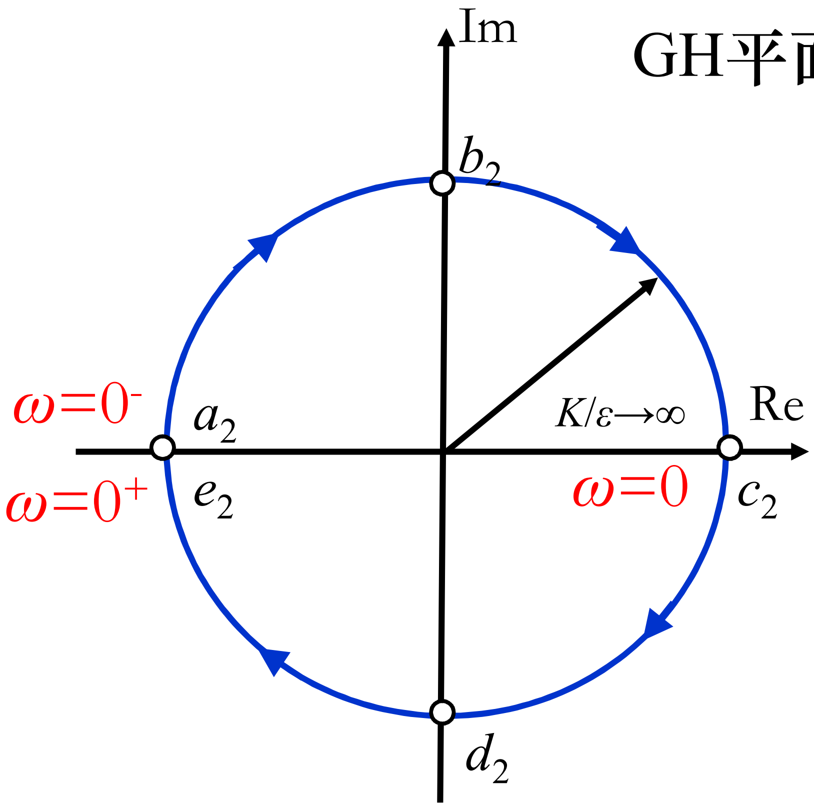


半闭合映射曲线$\Gamma_{GH}(v=1)$，

II 型系统



闭合曲线的绕行部分



映射曲线的增补部分 ($v=2$)

$$G(s)H(s)=\frac{1}{(s^2+\omega_n^2)^v}G_1(s)$$

c. *GH*有虚轴上的极点——等幅振荡极点

$$s=j\omega_n+\varepsilon e^{j\theta}$$
$$\theta\in[-90°,+90°]$$

映射曲线 $G(s)H(s)=\dfrac{1}{(2j\omega_n\varepsilon e^{j\theta}+\varepsilon^2 e^{j2\theta})^v}G_1\left(j\omega_n+\varepsilon e^{j\theta}\right)$

$$\approx\frac{1}{(2j\omega_n\varepsilon e^{j\theta})^v}G_1\left(j\omega_n\right)=\frac{e^{-j\left(\theta+90^o\right)v}}{(2\omega_n\varepsilon)^v}G_1\left(j\omega_n\right)$$

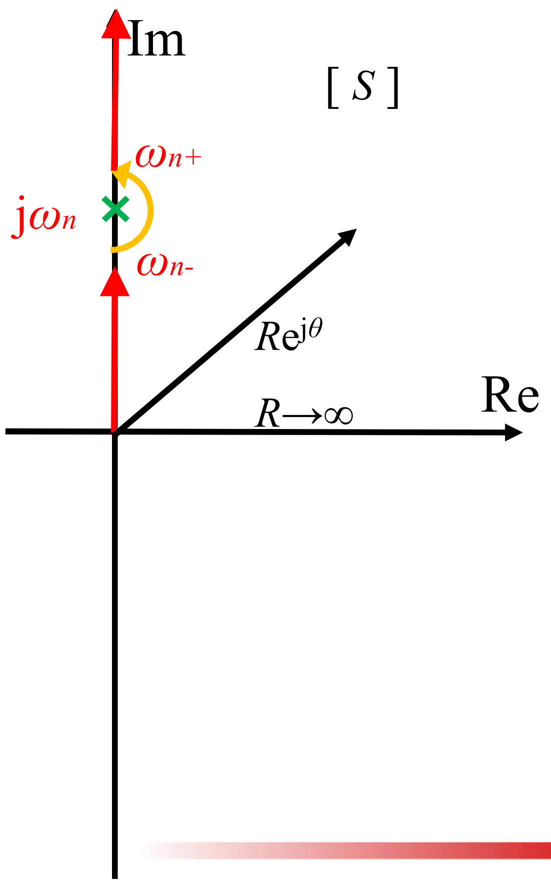
当封闭曲线上θ从-90增加到90对应绕行曲线，则映射曲线的增补曲线：

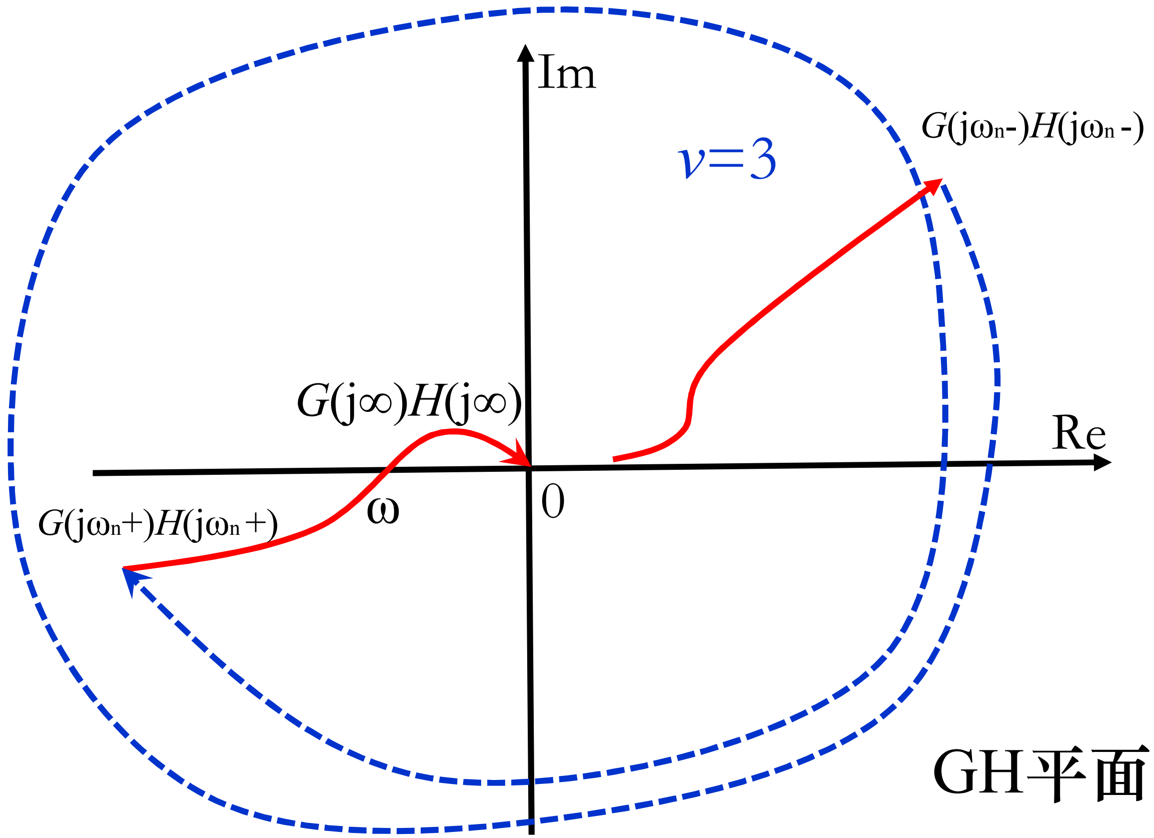
$$A(s)=\infty$$

$$\varphi(s)=\begin{cases}\angle G_1(j\omega_n) & \theta=-90^o\,(s=j\omega_n^-)\\ \angle G_1(j\omega_n)-(\theta+90^o)v & \theta\in(-90^o,+90^o)\\ \angle G_1(j\omega_n)-(90^o+90^o)v & \theta=+90^o\,(s=j\omega_n^+)\end{cases}$$

意味着：增补曲线为半径无穷大，圆心角等于$-v$*180°的圆弧(负号意味着顺时针）。

映射曲线　　即：增补从$G(j\omega_n-)H(j\omega_n-)$点起 以半径无穷大顺时针作圆心角为$v$*180°的圆弧至$G(j\omega_n+)H(j\omega_n+)$点。





5. 闭合曲线Γ_F包围原点圈数R的计算

根据半闭合映射曲线Γ_{GH}可以计算出Γ_F包围原点圈数R。

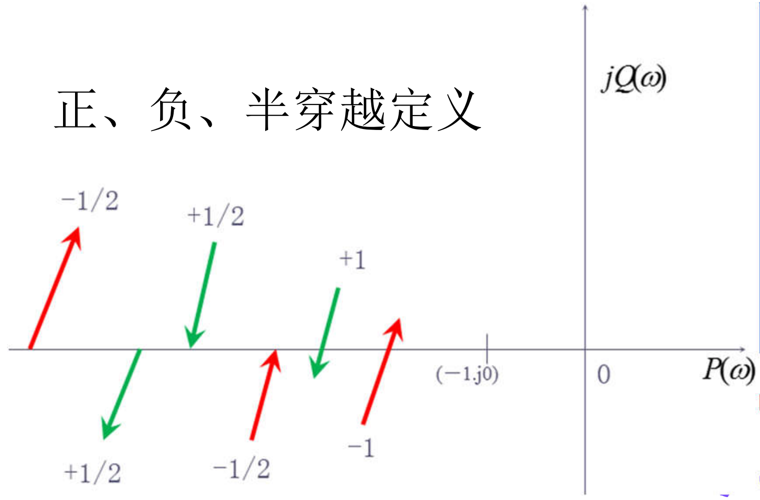
包围原点（ Γ_F ）——包围（-1，j0）点（ Γ_{GH} ）

可等效为开环频率特性曲线Γ_{GH}穿越负实轴上(-1, -∞)区段的情况。

- 相角增加，称为正穿越（从上到下），记作N_+;
- 相角减小，称为负穿越（从下到上），记作N_-;

N_+与N_-均为正数

正、负、半穿越定义



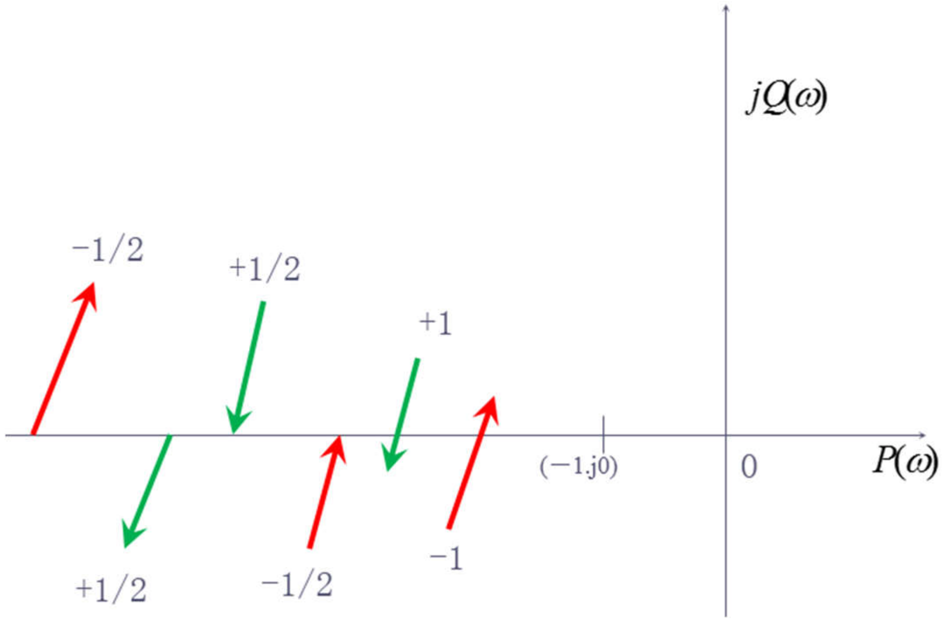
半闭合曲线Γ_{GH}穿越负实轴上(-1, -∞)

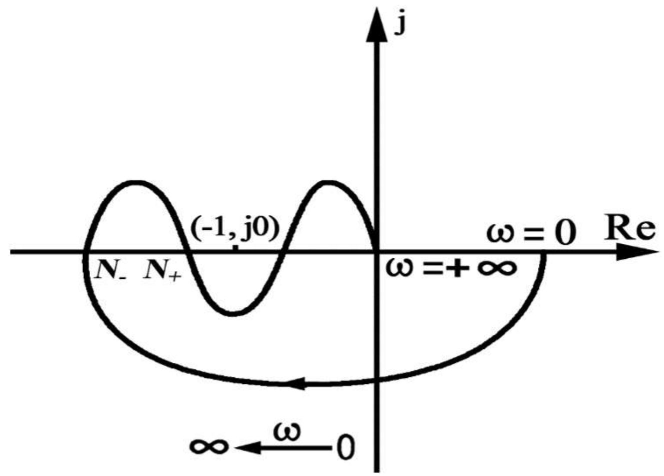
区段的次数N： $N = N_+ - N_-$

5.3 频率域稳定判据

当半闭合曲线Γ_{GH}穿越负实轴上(-1, -∞)区段的次数N，

则全闭合曲线Γ_F包围原点的圈数R：$R=2N=2（N_+-N_-）$





频率特性曲线

计算R的过程中注意：穿越负实轴方向、半次穿越和虚线圆弧所产生的穿越次数。

本次课结束

重要知识点

1. 奈奎斯特曲线的定义☆☆
2. 奈奎斯特曲线的绘制方法☆☆☆
3. 利用奈奎斯特曲线分析系统性能☆☆☆