第五章 线性系统的频域分析法

6. 二阶振荡环节

$$T = \frac{1}{\omega_n}$$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - T^2\omega^2 + j2\zeta\omega T}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 T^2)^2 + (2\zeta\omega T)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\dfrac{2\zeta\omega T}{1-\omega^2 T^2}\right), & \omega \le \dfrac{1}{T} \\ -\left[\pi - \arctan\left(\dfrac{2\zeta\omega T}{\omega^2 T^2 - 1}\right)\right], & \omega > \dfrac{1}{T} \end{cases}$$

特殊点

与原点交点　与正实轴交点

$$G(j0) = 1\angle 0^o$$

$$G(j\infty) = 0\angle -180^o$$

$$G(j\omega_n) = G(j\tfrac{1}{T}) = \frac{1}{2\zeta}\angle -90^o$$

与虚轴交点

谐振频率和谐振峰值

$$A(\omega)=\left|G(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$$

等于零

$$\frac{d}{d\omega}A(\omega)=-\frac{1}{2}\frac{\left[2\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)\times-2\frac{\omega}{\omega_n^2}+2(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})\times2\xi\frac{1}{\omega_n}\right]}{\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{-\left[\boxed{-\frac{2\omega}{\omega_n^2}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+4\zeta^2\frac{\omega}{\omega_n^2}}\right]}{\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2\right]^{\frac{3}{2}}}=0$$

$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

谐振频率

$$M_r=A(\omega_r)=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

谐振峰值

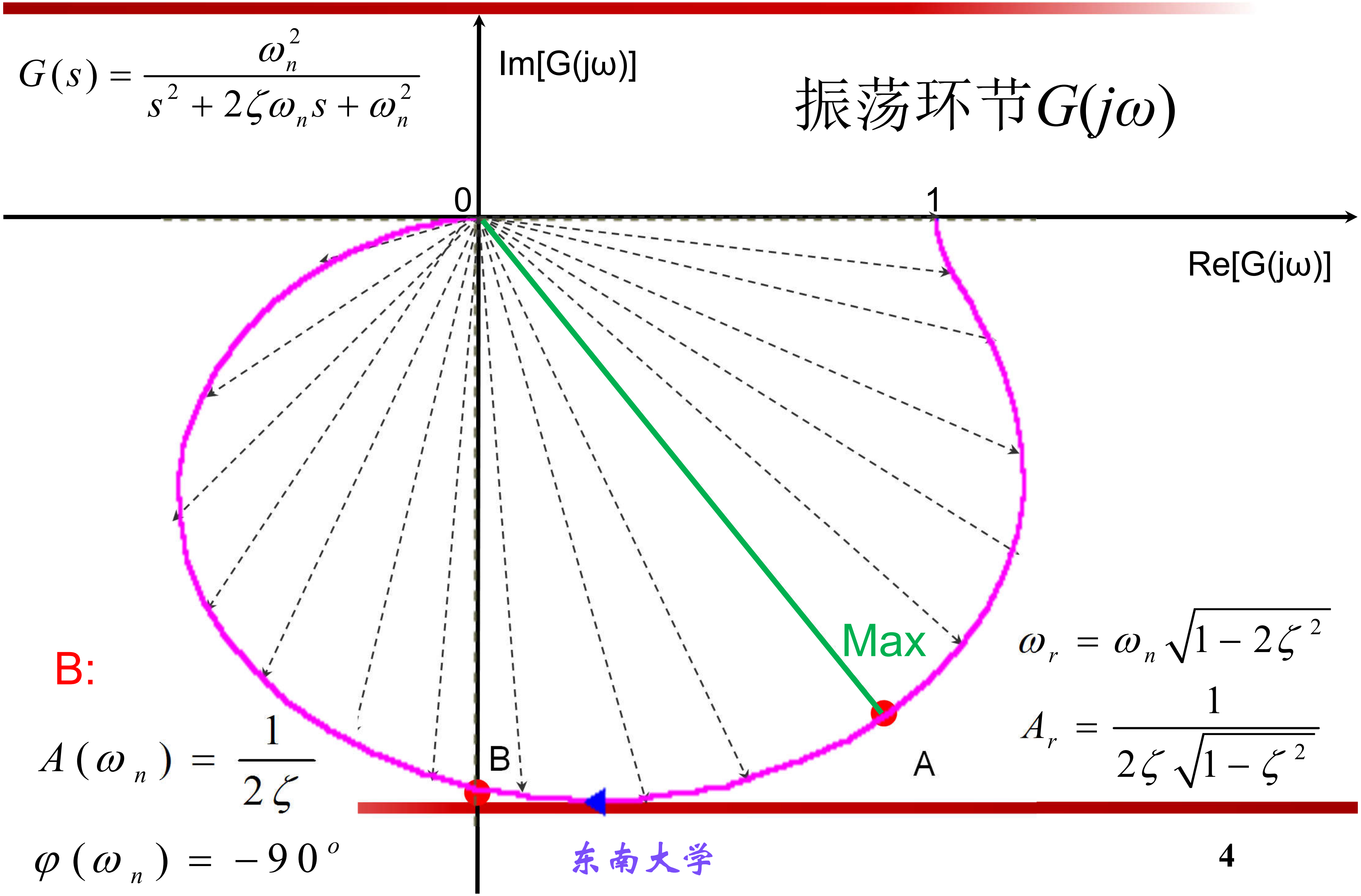
$$0\le\zeta\le\frac{\sqrt{2}}{2}\approx0.707$$

谐振条件

当 $\zeta>0.707$ 时，幅值曲线不可能有峰值出现，即不会有谐振。

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

振荡环节$G(j\omega)$



$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

$$A_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

B:

$$A(\omega_n)=\frac{1}{2\zeta}$$

$$\varphi(\omega_n)=-90^o$$

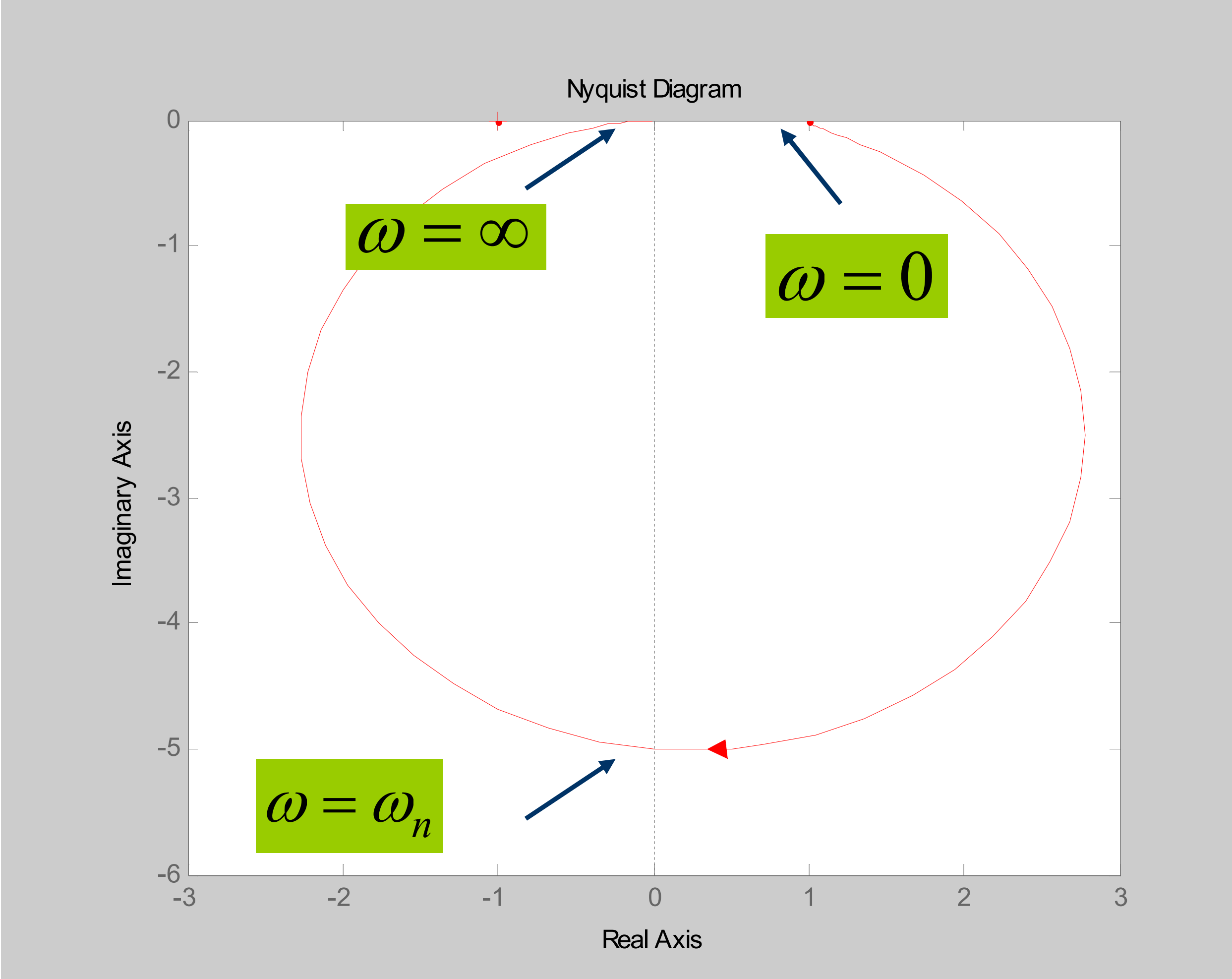
5.2 典型环节与开环系统的频率特性

欠阻尼

- 当 $\omega=\omega_n$ 时

$G(j\omega_n)=\dfrac{1}{2\zeta j}$ 相角 $-90°$

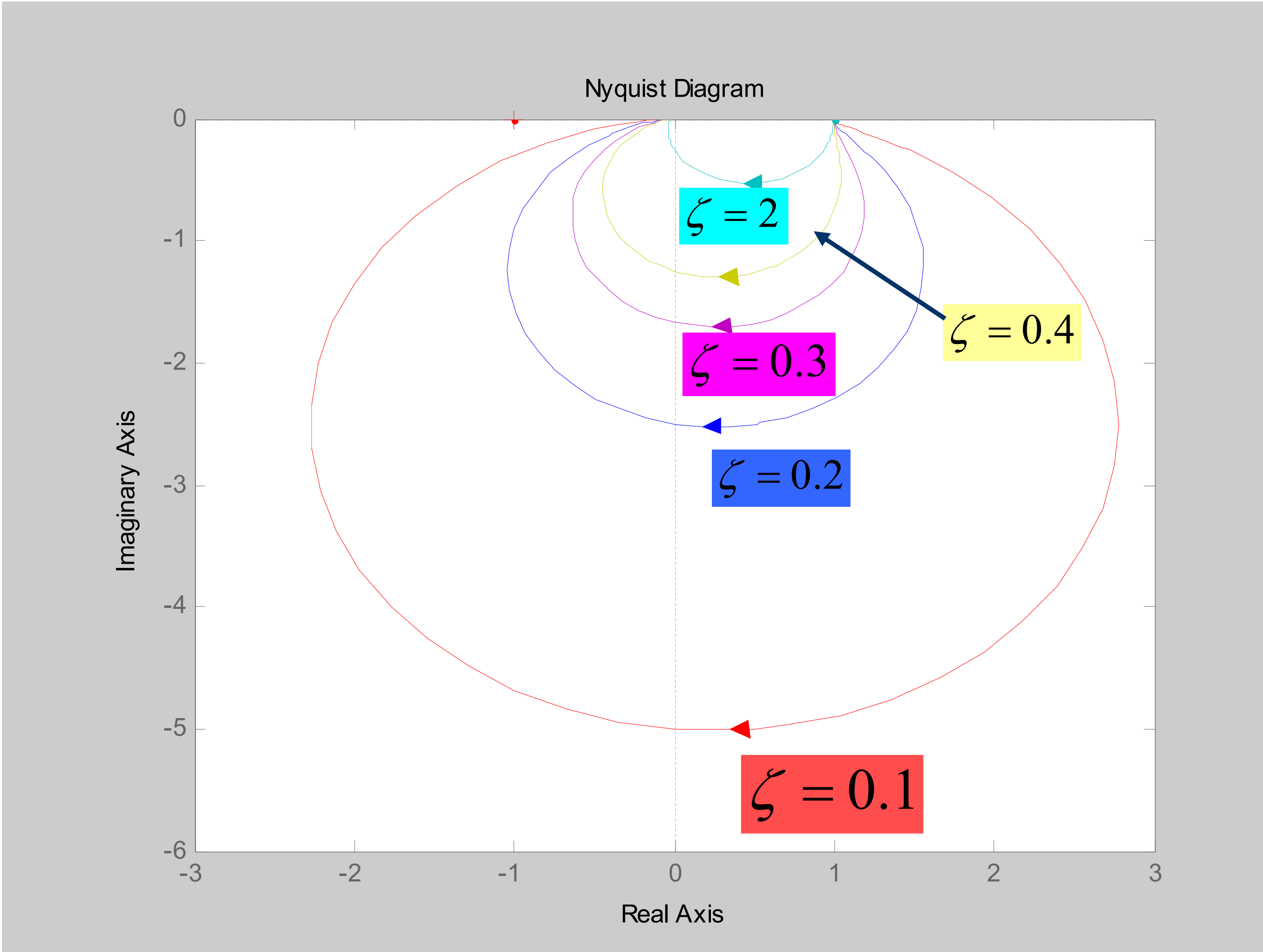
- $G(j\omega)$ 的轨迹与虚轴交点处的频率，就是无阻尼自然频率 ω_n
- 极坐标图上距原点最远的频率点，是谐振频率 ω_r。
- $G(j\omega)$ 的峰值可以用谐振频率 ω_r 处的向量幅值，与 $\omega=0$ 处向量幅值之比来确定。



5. 2 典型环节与开环系统的频率特性

过阻尼

- 当ζ增加到远大于1时，$G(j\omega)$的轨迹趋向于半圆。
- 这是因为对于强阻尼系统，特征方程的根为实根，并且其中一个根远小于另一个根。
- 对于足够大的ζ值，比较大的一个根对系统影响很小，因此系统的特征与一阶系统相似。



二阶振荡环节的伯德图

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \qquad G(j\omega)=\frac{1}{1+2\zeta(j\dfrac{\omega}{\omega_n})+(j\dfrac{\omega}{\omega_n})^2}$$

$$L(\omega)=20\lg\left|\frac{1}{1+2\zeta(j\dfrac{\omega}{\omega_n})+(j\dfrac{\omega}{\omega_n})^2}\right|=-20\lg\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2+(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

在低频时，即当 $\omega \ll \omega_n$ -20lg1=0 dB 低频渐近线为一条**0**分贝的水平线

在高频时，即当 $\omega \gg \omega_n$ $-20\lg\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}=-40\lg\dfrac{\omega}{\omega_n}$ dB

$$L_a(\omega)=\begin{cases}0 & \omega<\omega_n \\ -40\lg\dfrac{\omega}{\omega_n} & \omega>\omega_n\end{cases}$$

高频渐近线为一条斜率为**-40**分贝/十倍频程的直线

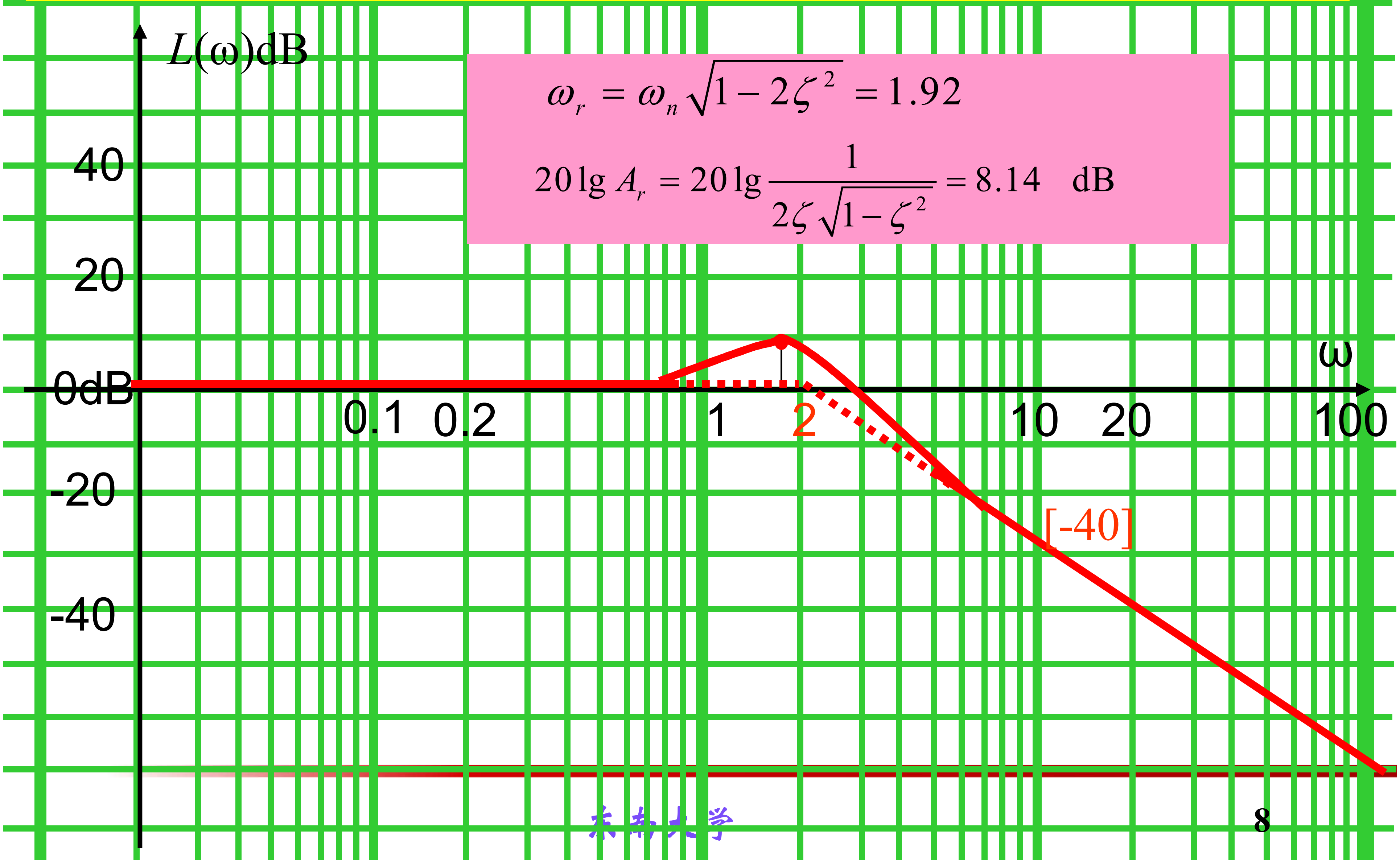
由于在 $\omega=\omega_n$ 时 $-40\lg\dfrac{\omega}{\omega_n}=-40\lg 1=0$ dB 所以高频渐近线与低频渐近线在 $\omega=\omega_n$ 处相交——交接频率。

振荡环节$L(\omega)$

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{4}{s^2+2\times0.2\times2s+4}$$

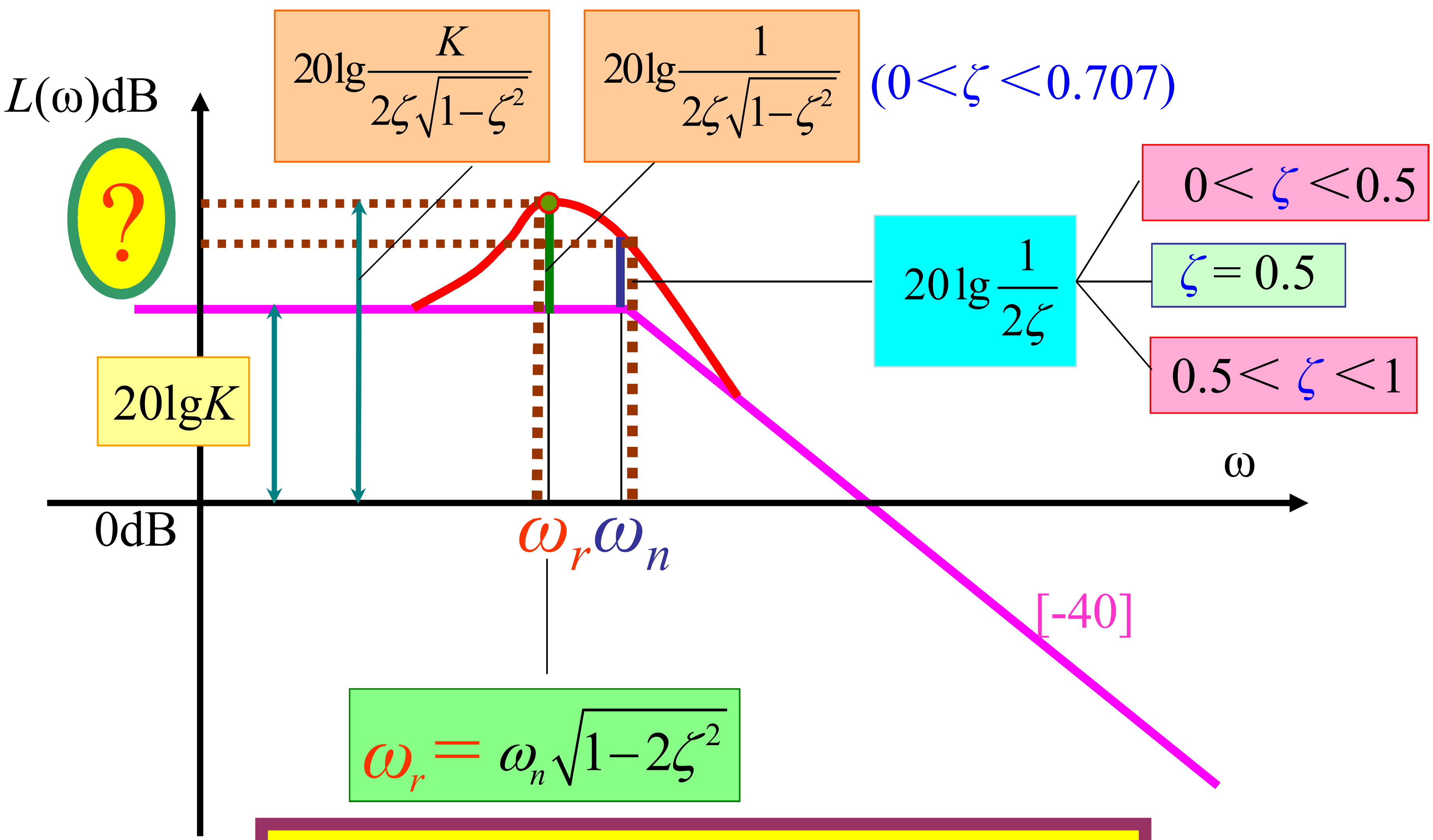
$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}=1.92$$

$$20\lg A_r=20\lg\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}=8.14 \quad \text{dB}$$



振荡环节

$$G(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$



$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

提醒: $\varphi(\omega_n)=-90^{\circ}$

5.2 典型环节与开环系统的频率特性

幅频特性与 ζ 关系

$$20\lg\frac{1}{2\zeta}$$

- $0<\zeta<0.5$
- $\zeta=0.5$
- $0.5<\zeta<1$

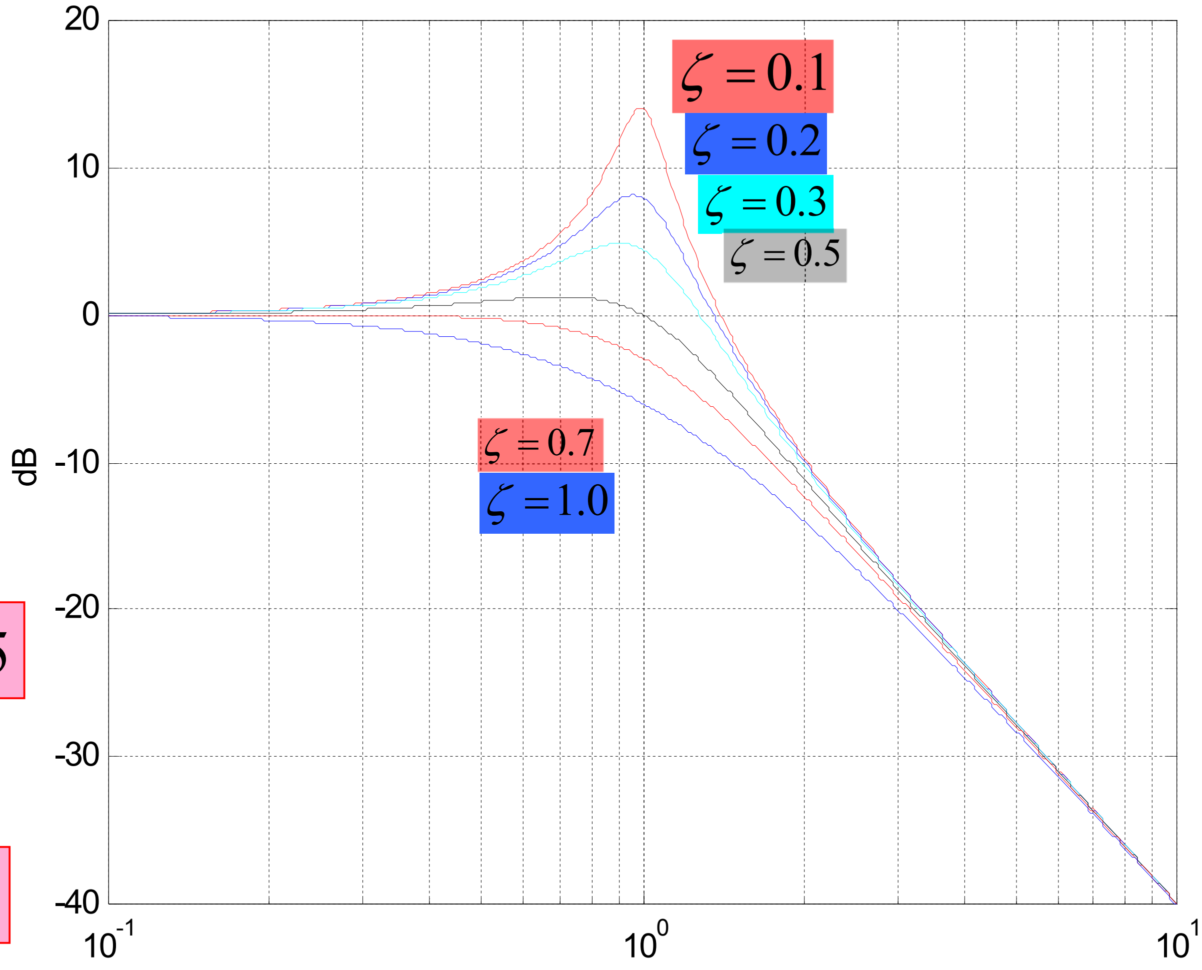


图 二阶振荡环节的对数幅频特性曲线

5.2 典型环节与开环系统的频率特性

幅值误差与ζ 关系

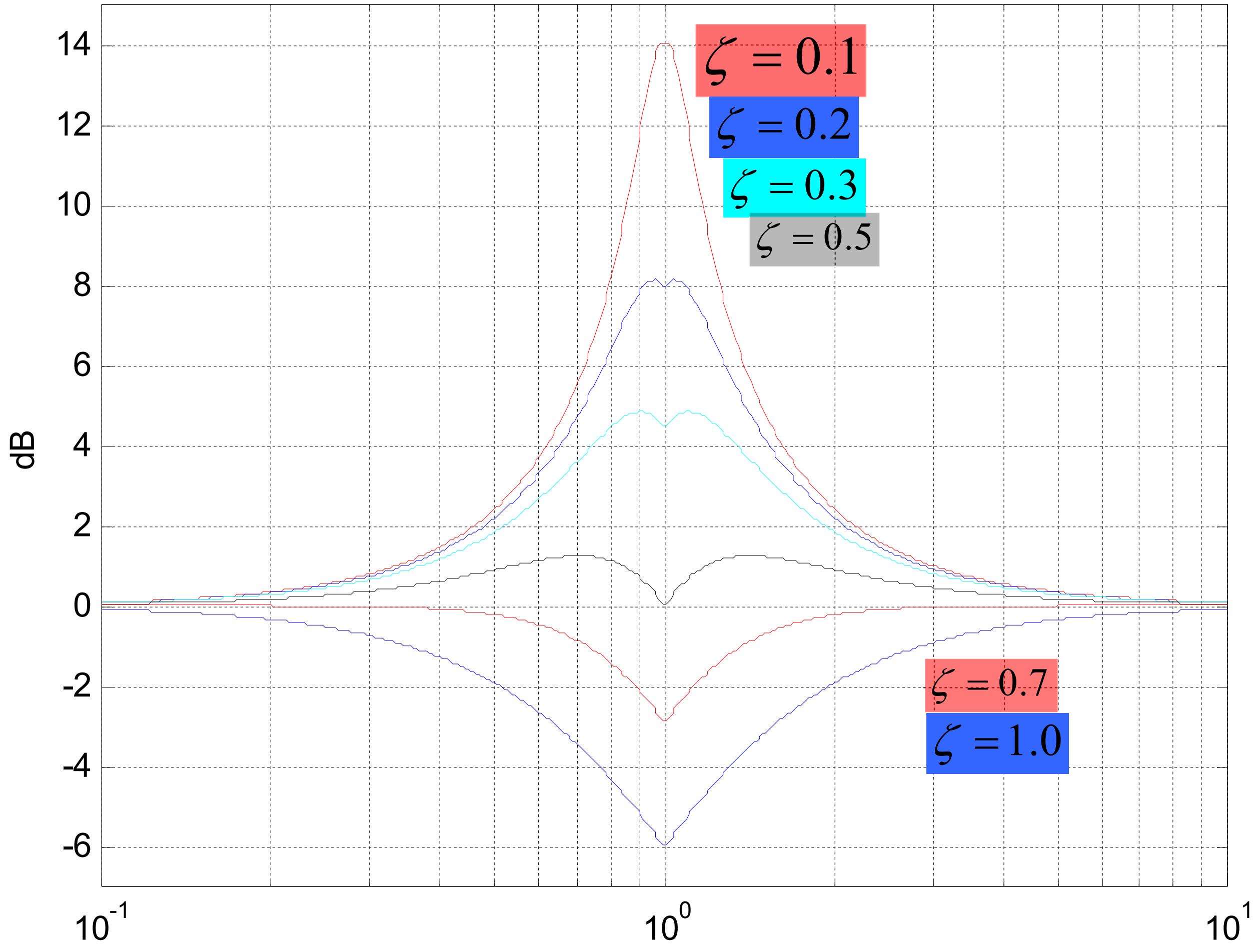


图 二阶振荡环节的频率响应曲线以渐近线表示时引起的对数幅值误差

5.2 典型环节与开环系统的频率特性

相频特性与ζ关系

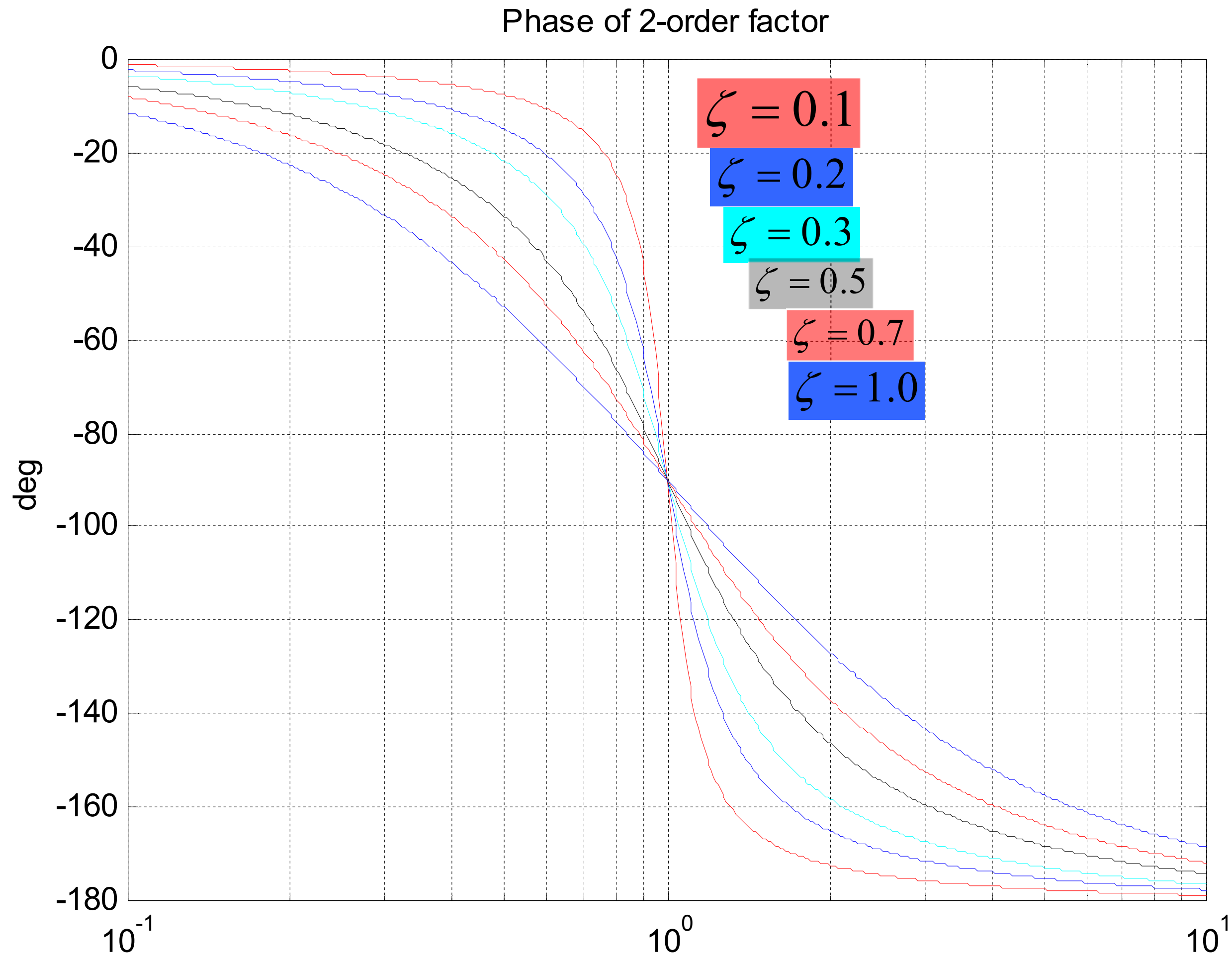


图 二阶振荡环节的对数相频特性曲线

7. 滞后环节

滞后环节的传递函数： $G(s)=e^{-\tau s}$

式中 τ ——滞后时间

频率特性： $G(j\omega)=e^{-j\tau\omega}$

幅频特性： $A(\omega)=1$

相频特性： $\varphi(\omega)=-\tau\omega$

对数幅频特性： $L(\omega)=20\lg A(\omega)=0\text{dB}$

5.2 典型环节与开环系统的频率特性

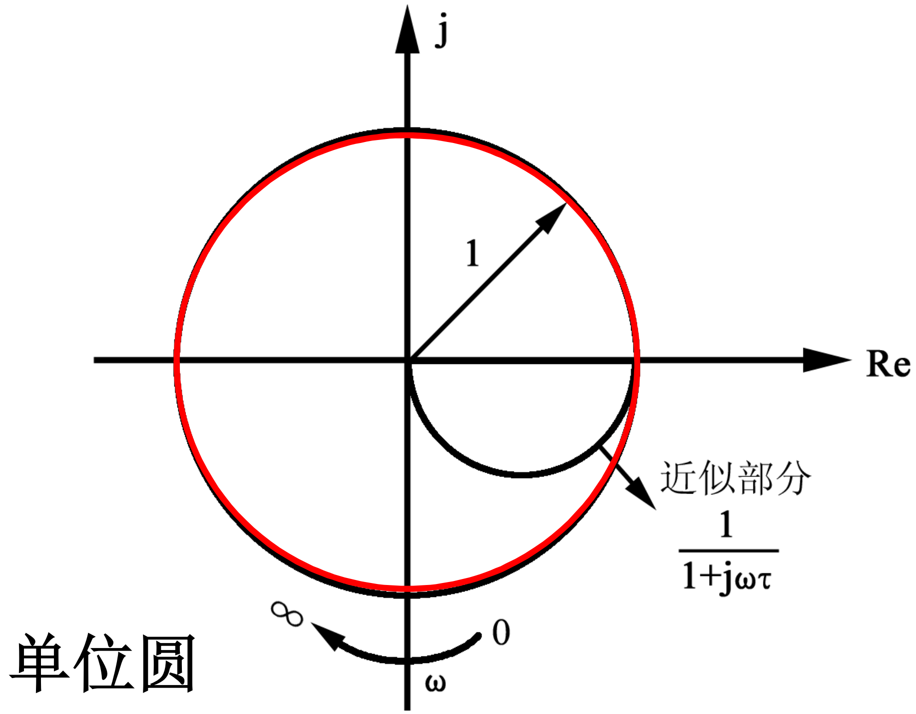


图 极坐标图

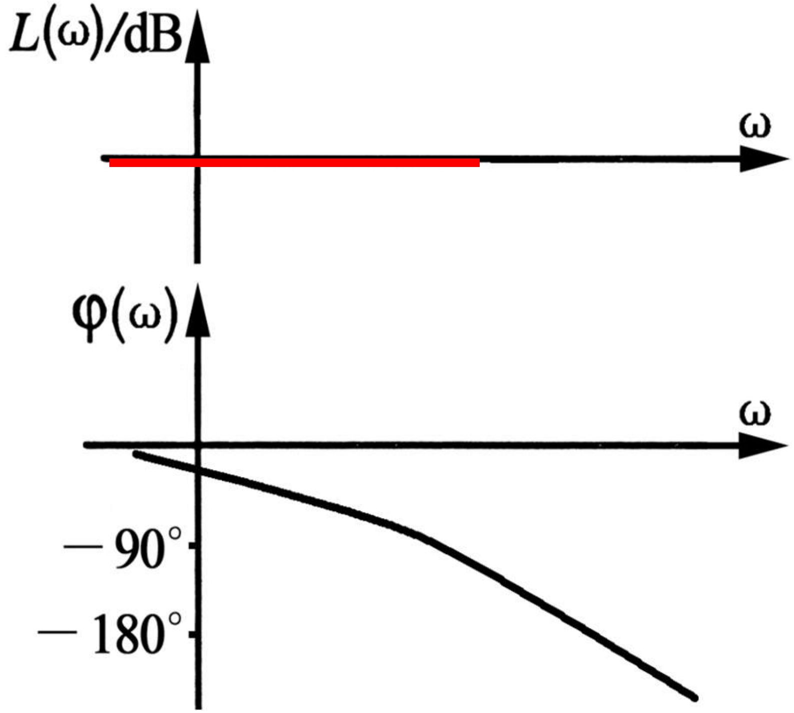
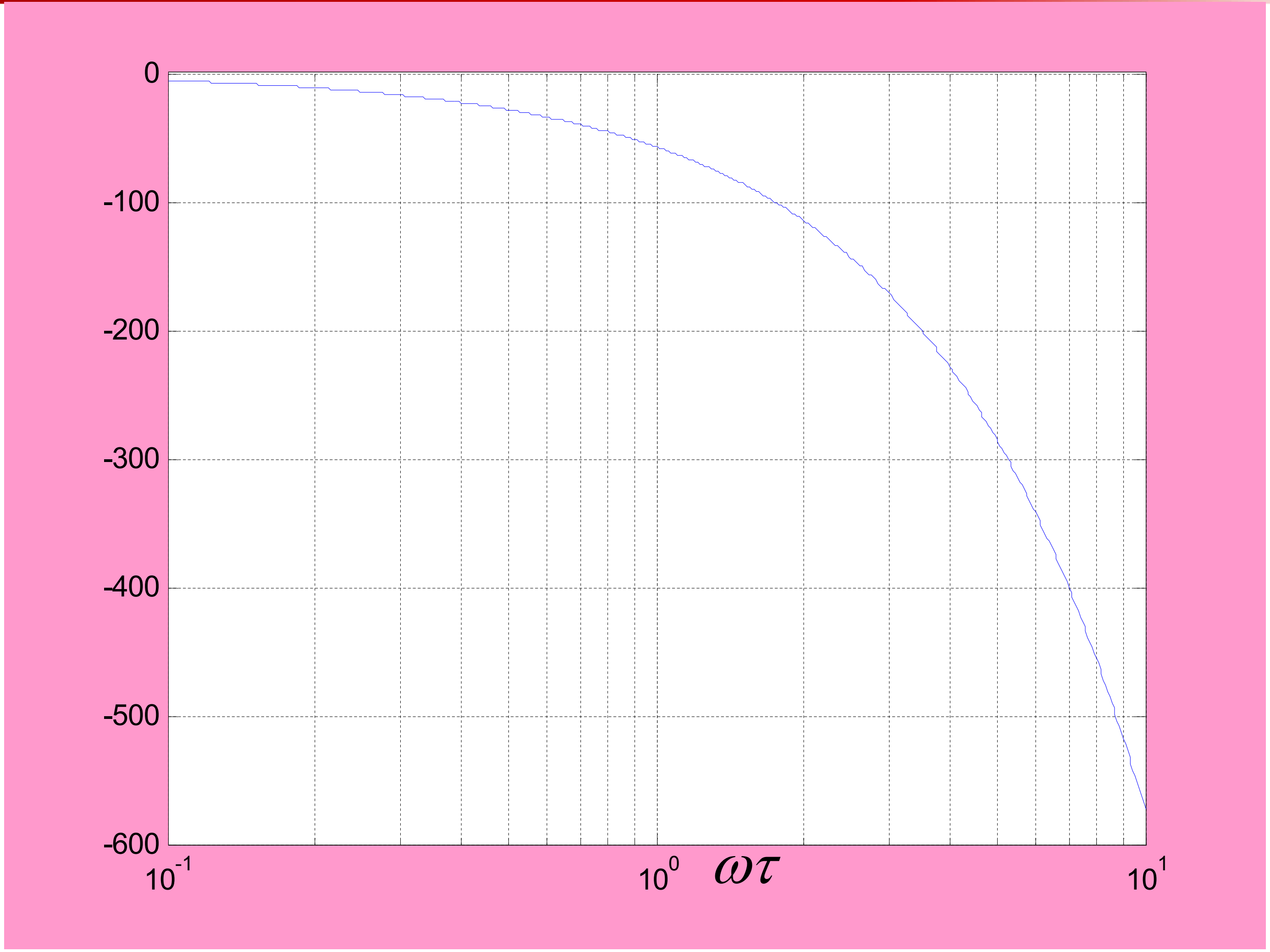


图 滞后环节的Bode图

传递延迟的影响：如果不采取对消措施，高频时将造成严重的相位滞后 。

5.2 典型环节与开环系统的频率特性



传递延迟的相角特性曲线

5.2 典型环节与开环系统的频率特性

三、开环系统幅相特性曲线

例　设0型系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$

已知：$K=10$，$T_1=1$，$T_2=5$，概略绘制开环幅相特性曲线。

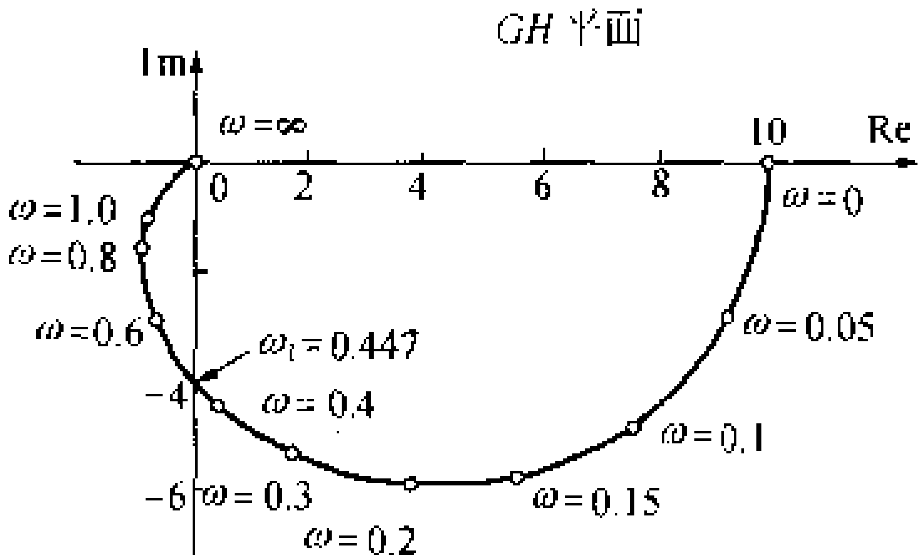
开环系统的幅相特性为：

$$P(\omega)=\frac{K(1-T_1T_2\omega^2)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

$$Q(\omega)=-\frac{K(T_1+T_2)\omega}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

$$A(\omega)=K\frac{1}{\sqrt{1+T_1^2\omega^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+T_2^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan T_1\omega-\arctan T_2\omega$$



5.2 典型环节与开环系统的频率特性

例　设某I型系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$

概略绘制开环幅相特性曲线。

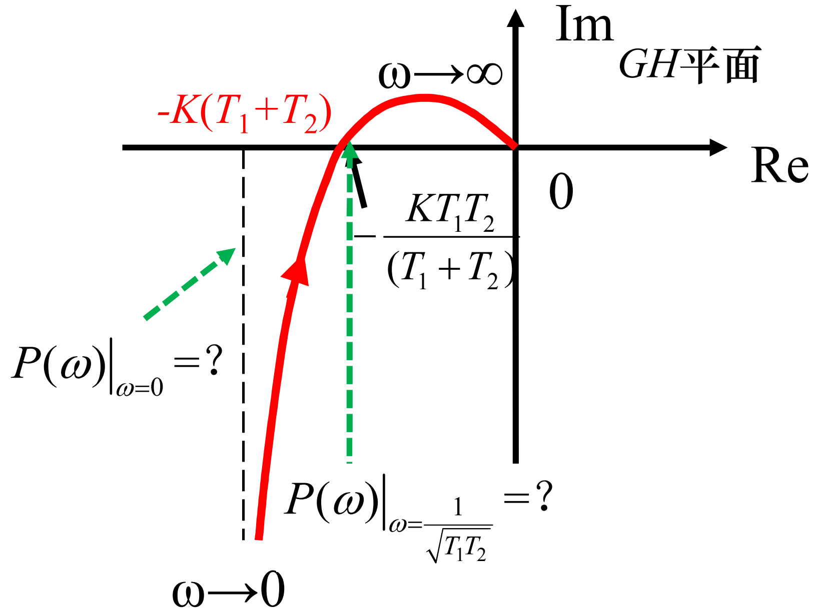
$\omega_x=\dfrac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$ 穿越频率

$$P(\omega)=\frac{-K(T_1+T_2)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

$$Q(\omega)=\frac{-K(1-T_1T_2\omega^2)}{\omega(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

$$A(\omega)=K\frac{1}{\omega\sqrt{1+T_1^2\omega^2}\sqrt{1+T_2^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-90^\circ-\arctan T_1\omega-\arctan T_2\omega$$



概略绘制时可取渐近线为坐标轴

5.2 典型环节与开环系统的频率特性

绘制开环系统幅相特性曲线时应注意的特征

$\omega \to 0$时，低频段从何处出发?

$\omega \to \infty$时，高频段以何种姿态卷入原点?

曲线在ω为何值时穿越实轴和虚轴? 穿越的坐标值为多少?

$$G(j\omega)=\frac{K}{(j\omega)^{v}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m_1}(j\tau_i\omega+1)\prod_{k=1}^{m_2}[\tau_k^2(j\omega)^2+2\zeta_k\tau_k(j\omega)+1]}{\prod_{j=1}^{n_1}(jT_j\omega+1)\prod_{l=1}^{n_2}[T_l^2(j\omega)^2+2\zeta_l T_l(j\omega)+1]}$$

$$m_1+2m_2=m \qquad n_1+2n_2+v=n \qquad n\geq m$$

5.2 典型环节与开环系统的频率特性

$$G(j\omega)=\frac{K}{(j\omega)^{v}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m_1}(j\tau_i\omega+1)\prod_{k=1}^{m_2}[\tau_k^2(j\omega)^2+2\zeta_k\tau_k(j\omega)+1]}{\prod_{j=1}^{n_1}(jT_j\omega+1)\prod_{l=1}^{n_2}[T_l^2(j\omega)^2+2\zeta_l T_l(j\omega)+1]}$$

1) $\omega\to 0$时，低频段的表达式为：$G(j\omega)\approx\frac{K}{(j\omega)^{v}}$

幅频和相频表达式分别为：$A(\omega)=\frac{K}{\omega^{v}}\quad \varphi(\omega)=-v\frac{\pi}{2}$

试分析v=0、1、2时，曲线的起始点情况？

2) $\omega\to\infty$时，高频段的幅频和相频特性为：

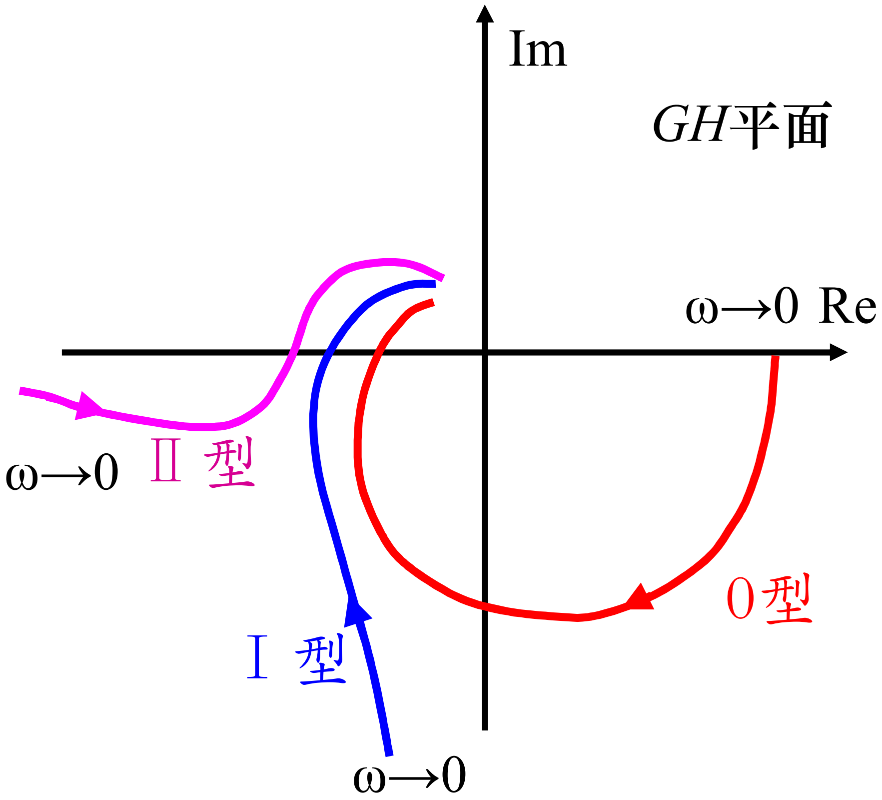
$$\lim_{\omega\to\infty}\left|G(j\omega)\right|=0 \qquad \lim_{\omega\to\infty}\angle G(j\omega)=-(n-m)\cdot\frac{\pi}{2}$$

n-m=1时，曲线沿负虚轴卷向原点；

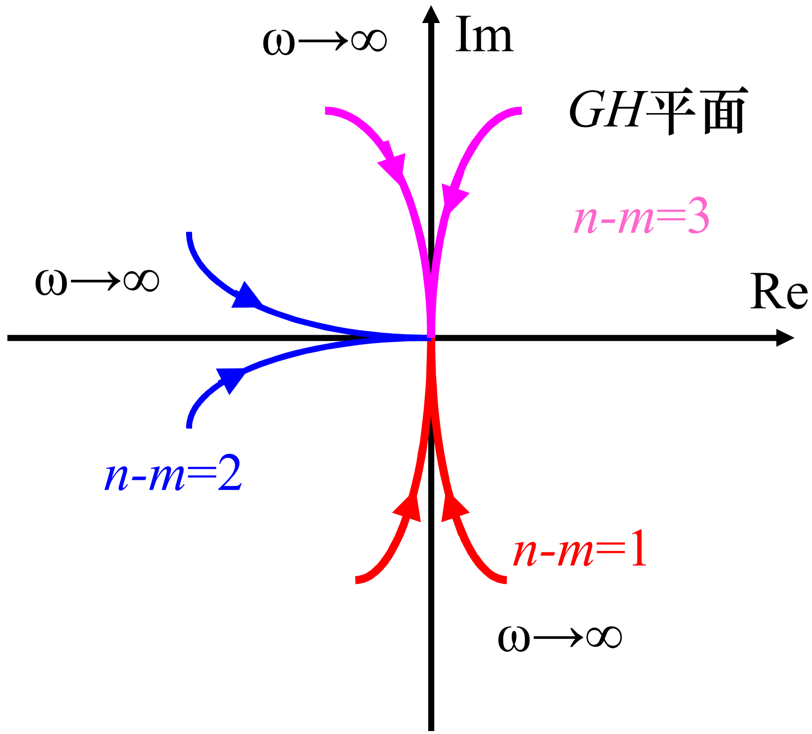
n-m=2时，曲线沿负实轴卷向原点；

n-m=3时，曲线沿正虚轴卷向原点。

5.2 典型环节与开环系统的频率特性



极坐标的低频段



极坐标的高频段

5.2 典型环节与开环系统的频率特性

例：概略绘制 $G(s)=\dfrac{5(s+2)(s+3)}{s^2(s+1)}$ 的开环幅相特性曲线。

解：$G(j0^+)=\infty\angle-180^o$　　$G(j\infty)=0\angle-90^o$

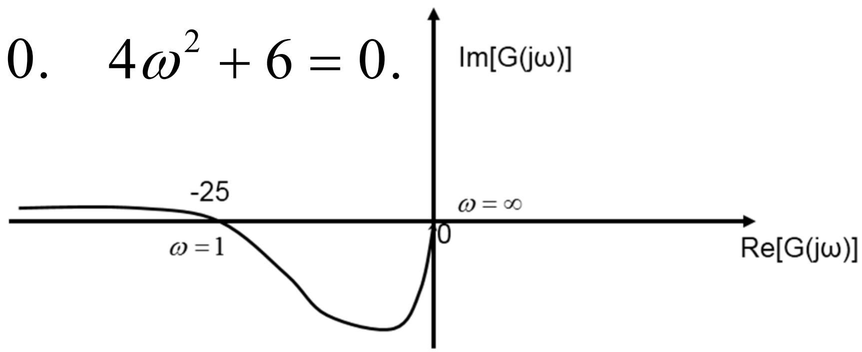
求交点：　$G(j\omega)=\dfrac{5[(6-\omega^2)+j5\omega]}{-\omega^2(1+j\omega)}$

令 $\mathrm{Im}[G(j\omega)]=0$　　$5\omega-\omega(6-\omega^2)=0$　　即 $\omega^2=1,\omega=1$

$G(j1)=\dfrac{5(5+j5)}{-(1+j)}=-25$　　与负实轴相交于 -25 处。

令 $\mathrm{Re}[G(j\omega)]=0.$　$6-\omega^2+5\omega^2=0.$　$4\omega^2+6=0.$

无实数解，与虚轴无交点。



本次课结束

重要知识点

1. 二阶振荡环节的频率特性☆☆☆
2. 开环系统的幅相频率特性☆☆☆