

第六章 线性系统的校正方法

第一节 系统的设计与校正问题

第二节 常用校正装置及其特性

第三节 串联校正

第四节 前馈校正

第五节 复合校正

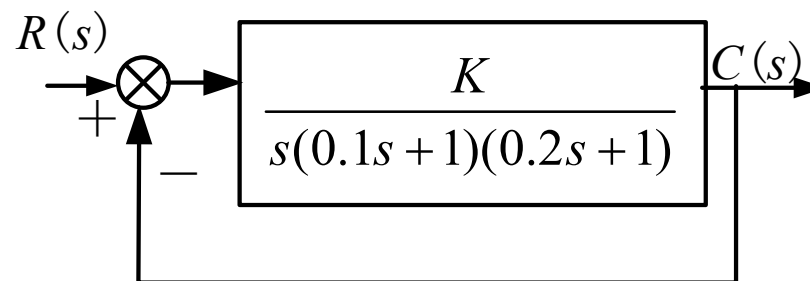
第六节 控制系统校正设计

6.3 串联校正

$$G_c(s) = \frac{1 + bTs}{1 + Ts}$$

3. 串联滞后校正

例：闭环系统如图所示，要求

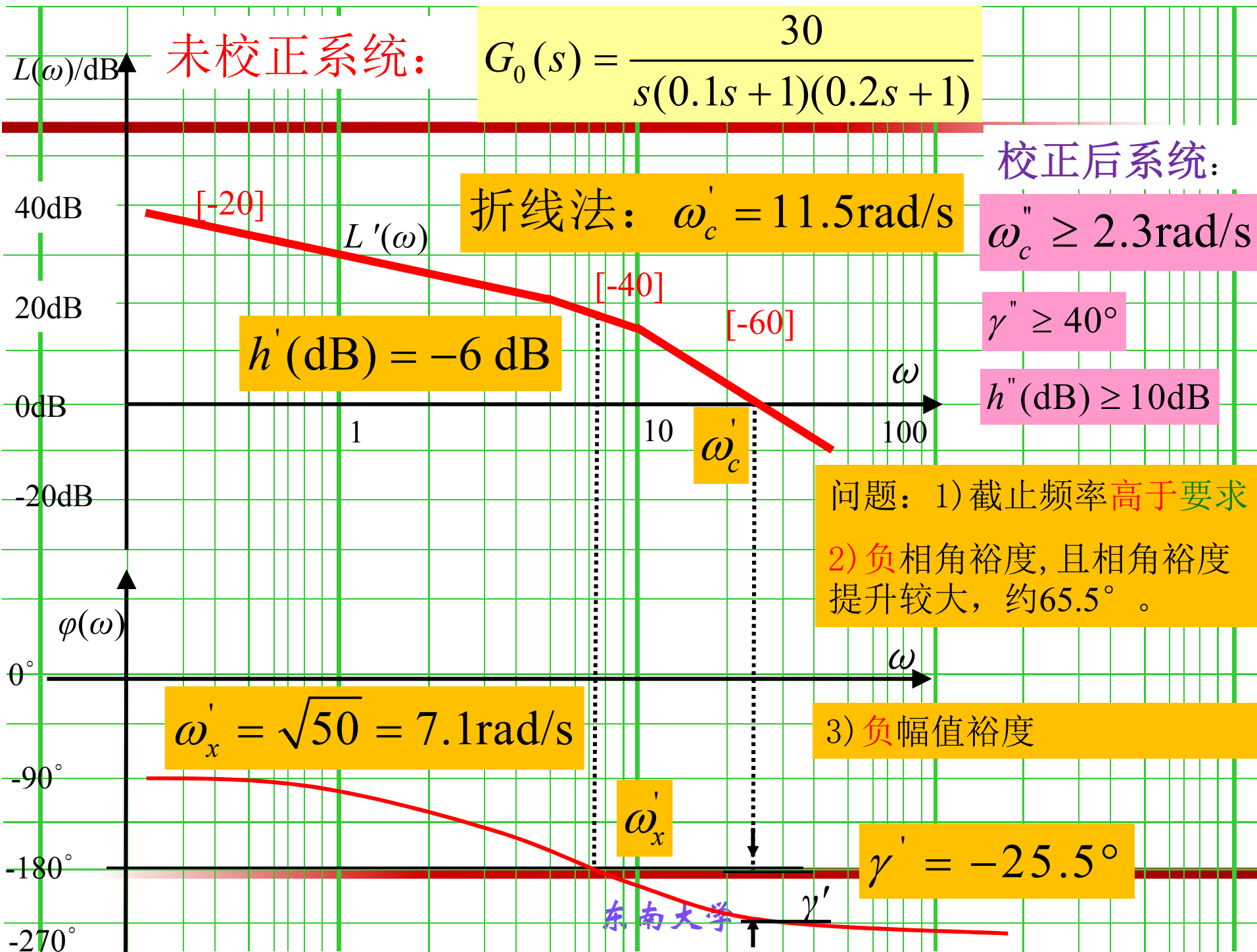


1. 稳态速度误差系数 $K_v = 30 \text{ s}^{-1}$;
2. 相角裕度 $\gamma'' \geq 40^\circ$, 幅值裕度 $h''(\text{dB}) \geq 10\text{dB}$, 截止频率 $\omega_c'' \geq 2.3\text{rad/s}$ 。

分析应该如何校正系统。

解： (1) 根据静态速度误差系数确定 K 值。

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s(0.1s + 1)(0.2s + 1)} = K = 30$$



6.3 串联校正

渐近曲线: $\omega_c' = 11.5\text{rad/s}$ $\gamma'(\omega_c') = -25.5^\circ$ $\omega_x' = 7.1\text{rad/s}$ $h'(\text{dB}) = -6\text{ dB}$

问题: 1) 相角裕度和幅值裕度为负, 系统不稳定;

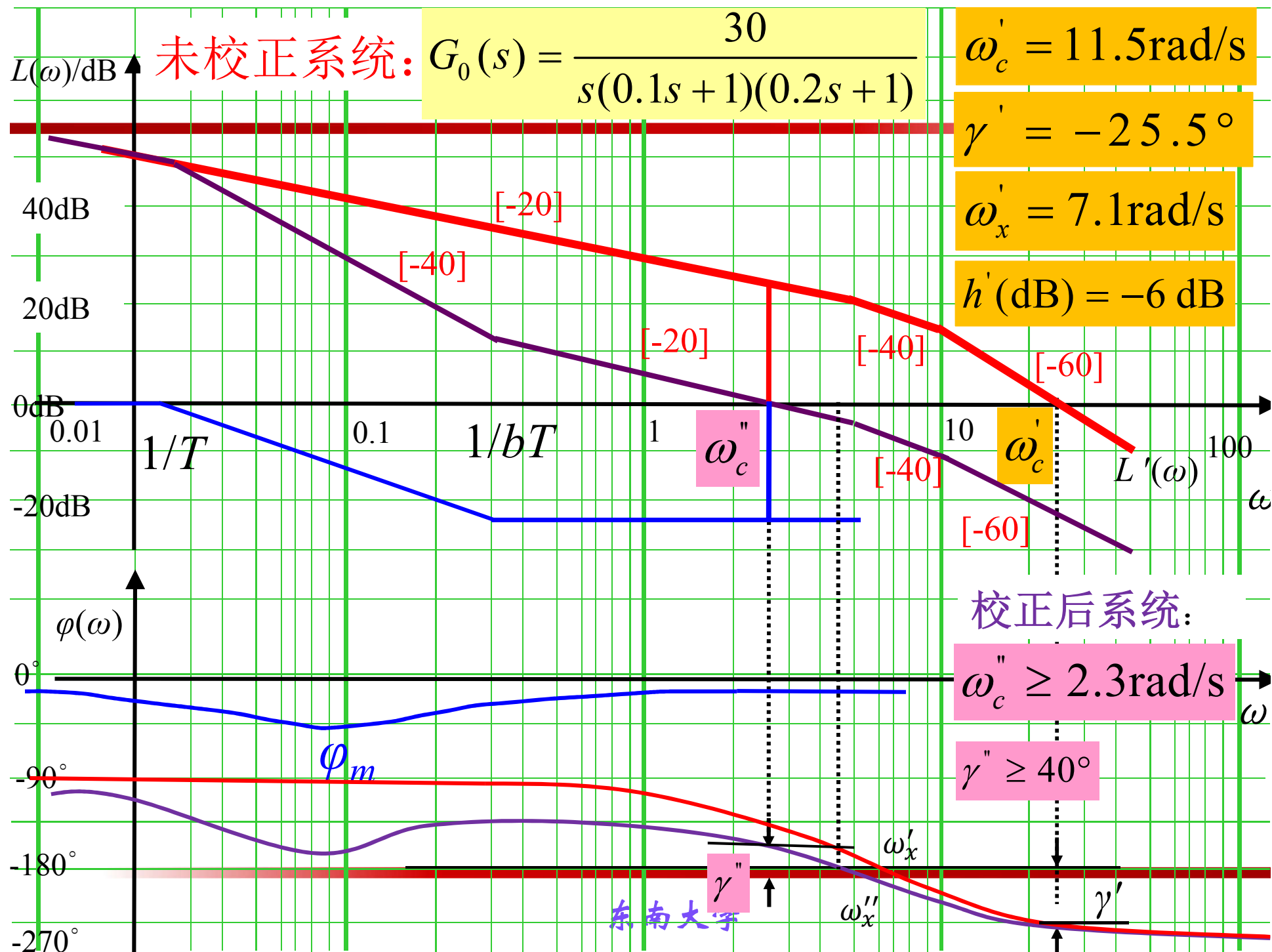
2) 截止频率远大于要求值 2.3rad/s

系统不稳定! 能否采用超前校正?

采用串联超前校正, 超前网络至少需要提供 $40+25.5+5=70.5$ 的最大超前角。当 a 超过20时, 对抑制高频干扰、提高系统的信噪比不利。

采用串联超前校正, 系统的截止频率必然提高(右移)。原系统相位在 ω_c'' 附近急剧下降, 大幅抵消了校正网络带来的相角超前量。

要求的截止频率 ω_c'' 比校正前原系统的截止频率 ω_c' 小, 可以在保持低频段基本不变前提下, 适当降低中、高频段的幅值, 截止频率必然左移(减小), 相角裕度大幅增大。串联滞后网络具备此特性。



6.3 串联校正

串联滞后校正方法：

(1) 根据校正后系统相角裕度 $\gamma'' > 40^\circ$ 的要求，并考虑校正网络在 ω_c'' 处会产生一定相角滞后（通常在 $-12^\circ \sim -5^\circ$ 之间）的副作用，现假定为 $\varphi_c(\omega_c'') = -6^\circ$ 作为校正网络副作用对应的角度。

最终的相角裕度=原系统在 ω_c'' 处的相角裕度+校正网络在 ω_c'' 的相角（副作用）

$$\text{即： } \gamma''(\omega_c'') = \gamma'(\omega_c'') + \varphi_c(\omega_c'')$$

根据 $\gamma''(\omega_c'')$ 的要求(40°)和副作用 $\varphi_c(\omega_c'')$ 的大小(-6°)，确定原系统在 ω_c'' 处的相角裕度满足 $\gamma'(\omega_c'') = 46^\circ$ 。

原系统相角裕度的计算公式为： $\gamma'(\omega_c'') = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(0.1\omega_c'') - \arctan(0.2\omega_c'')$

$$\text{令 } \gamma'(\omega_c'') = 46^\circ \quad \tan(44^\circ) = \frac{0.1\omega_c'' + 0.2\omega_c''}{1 - 0.1\omega_c'' \times 0.2\omega_c''} \quad \text{求得 } \omega_c'' = 2.74 \text{ rad/s}$$

要求 $\omega_c'' > 2.3$ ，结合响应速度考虑，选择 $\omega_c'' = 2.7 > 2.3$ 。

6.3 串联校正

(2)当 $\omega_c''=2.7$ 时, 计算未校正系统的幅频特性:

$$G(j\omega) = \frac{30}{j\omega(0.1\omega j + 1)(0.2\omega j + 1)}$$

$$20\lg A(\omega'') = 20\lg \frac{30}{\omega'' \sqrt{(0.1\omega'')^2 + 1} \sqrt{(0.2\omega'')^2 + 1}} = 20\lg 9.44 = 19.5\text{dB} \quad \text{按精确值计算}$$

若省略2个根号运算, 则 $20\lg A(\omega'') = 20\lg \frac{30}{2.7} = 20\lg 11.11 = 20.9\text{dB}$

未校正系统的幅值为 $L'(\omega_c'')=19.5\text{dB}$ 。

欲使校正后 $L(\omega)$ 曲线在 $\omega_c''=2.7$ 处通过零分贝线, 幅频特性就必下压19.5dB。

所以要求滞后网络的高频段幅值满足:

$$20\lg b + L'(\omega_c'') = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0.106$$

6.3 串联校正

$$G_c(s) = \frac{1 + bTs}{1 + Ts}$$

(3) 求滞后校正网络的参数 T : $\omega_2 = \frac{1}{bT} = 0.1\omega_c''$

$$\omega_c'' = 2.7 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{bT} = 0.27 \\ b = 0.106 \end{array} \right\} \Rightarrow T = 35$$

校正网络为 $G_c(s) = \frac{1 + 3.7s}{1 + 35s}$

$$\omega_1 = \frac{1}{T} = 0.028 \text{ rad/s}$$

校正网络的第一和第二个转折频率为

$$\omega_2 = \frac{1}{bT} = 0.27 \text{ rad/s}$$

6.3 串联校正

(4) 验算校正后系统的相角裕度和幅值裕度

➤ 相角裕度

校正后系统传递函数

$$G(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{30(1 + 3.7s)}{s(1 + 35s)(0.1s + 1)(0.2s + 1)}$$

$$\omega_c'' = 2.7 \text{ rad/s}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\omega_c'') &= -90^\circ - \arctan 35\omega_c'' - \arctan 0.1\omega_c'' - \arctan 0.2\omega_c'' + \arctan 3.7\omega_c'' \\ &= -90^\circ - 89.39^\circ - 15.1^\circ - 28.37^\circ + 84.28^\circ \\ &= -138.58^\circ\end{aligned}$$

$$\gamma''(\omega_c'') = 180^\circ + \varphi(\omega_c'') = 180^\circ - 138.58^\circ = 41.42^\circ > 40^\circ \quad \text{满足要求}$$

6.3 串联校正

$$\begin{aligned}\varphi(\omega_c'') &= -90^\circ - \arctan 35\omega_c'' - \arctan 0.1\omega_c'' - \arctan 0.2\omega_c'' + \arctan 3.7\omega_c'' \\ &= -90^\circ - 89.39^\circ - 15.1^\circ - 28.37^\circ + 84.28^\circ \\ &= -138.58^\circ\end{aligned}$$

(4) 验算校正后系统的相角裕度和幅值裕度

➤ 幅值裕度

校正后系统传递函数 $G(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{30(1+3.7s)}{s(1+35s)(0.1s+1)(0.2s+1)}$

当 $\varphi(\omega_x'') = -180^\circ$ 时, 计算穿越频率: 高阶系统求解穿越频率有一定困难

$$-\arctan 35\omega_x'' \approx -90^\circ$$

$$3.7\omega_x'' = \frac{0.1\omega_x'' + 0.2\omega_x''}{1 - 0.1\omega_x'' \times 0.2\omega_x''}$$

$$\omega_x'' = 6.8 \text{ rad/s}$$

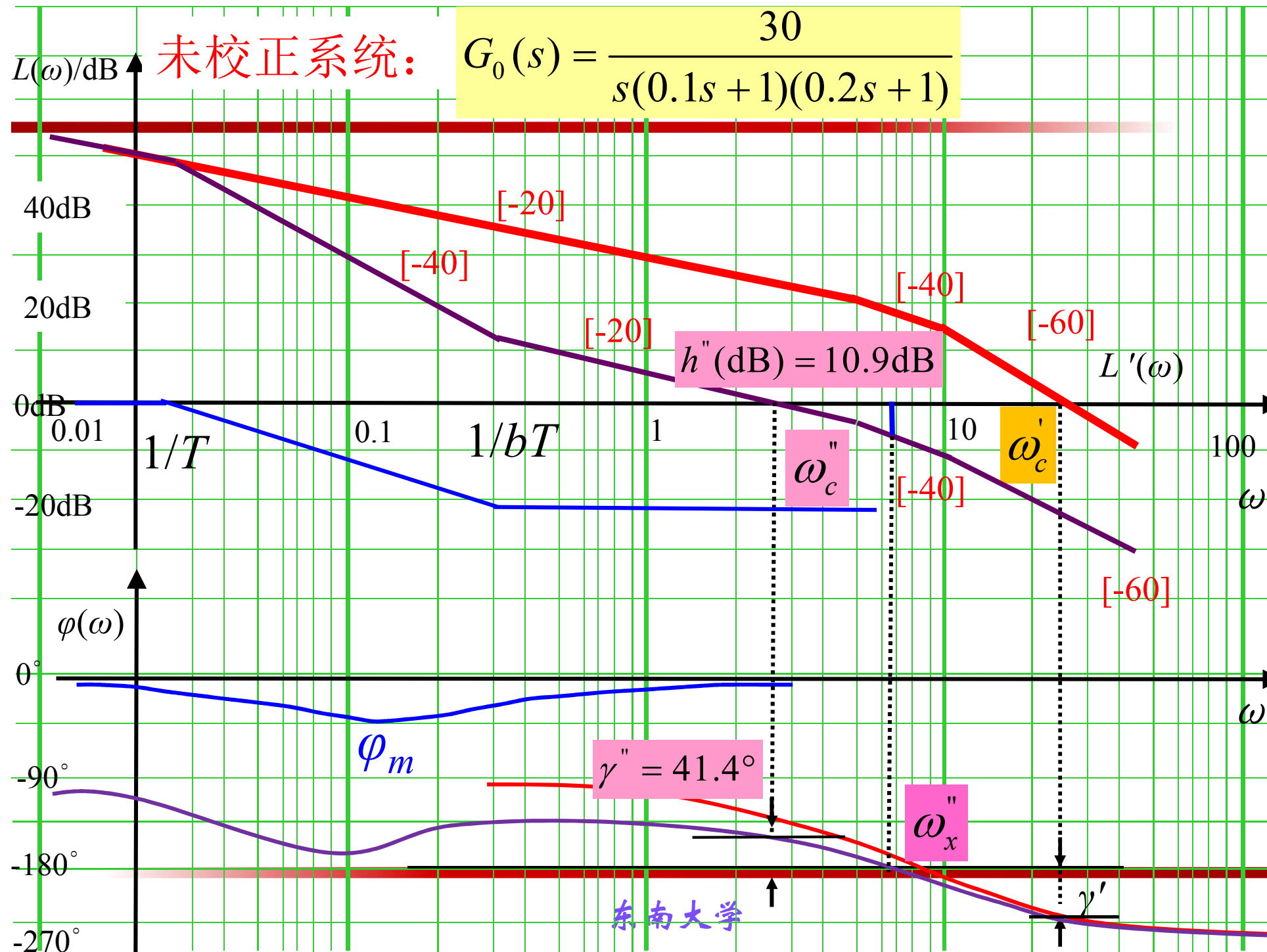
$$\omega_x'' \approx 6.77 \text{ rad/s}$$

计算幅值裕度

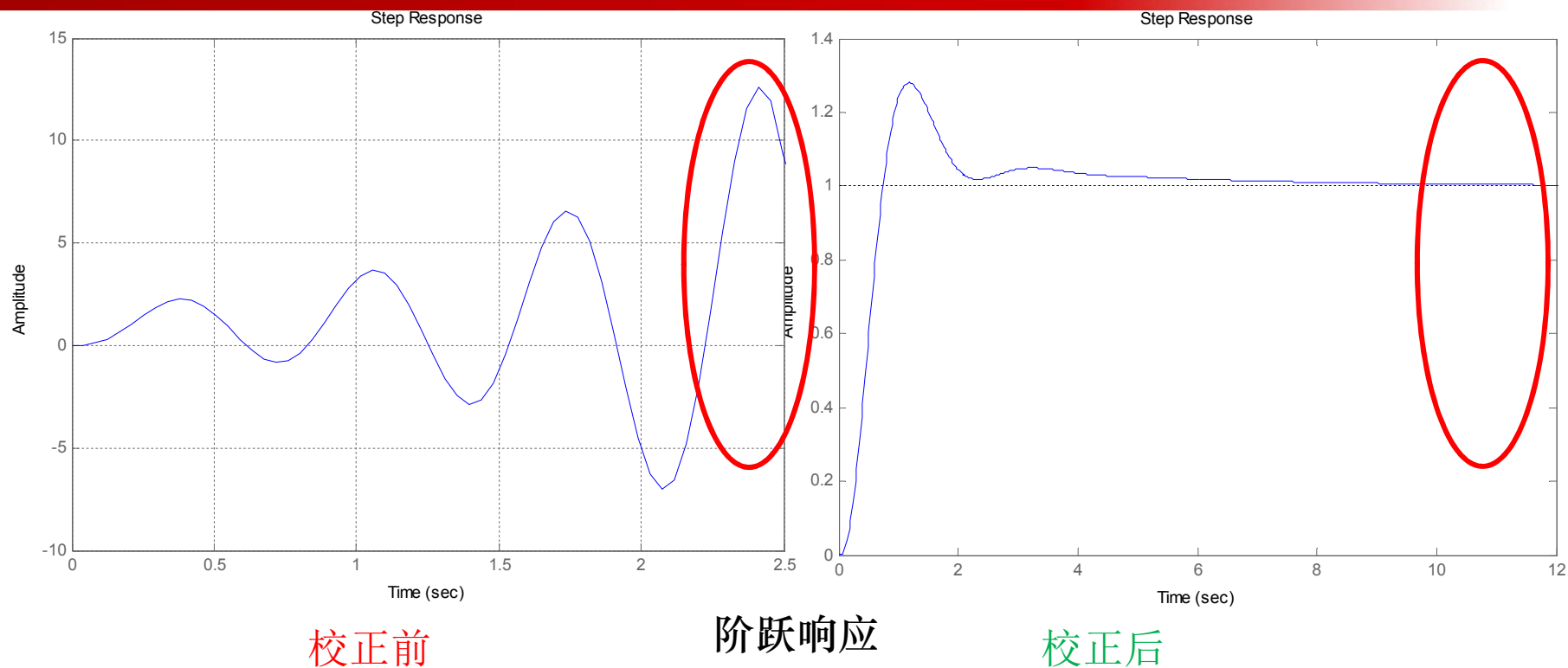
$$A(\omega_x'') = \frac{30\sqrt{(3.7\omega_x'')^2 + 1}}{\omega_x''\sqrt{(35\omega_x'')^2 + 1}\sqrt{(0.1\omega_x'')^2 + 1}\sqrt{(0.2\omega_x'')^2 + 1}} = 5.325$$

$$h''(\text{dB}) = -20\lg A(\omega_x'') = -20\lg 5.325 = 10.9\text{dB} > 10\text{dB}$$

满足要求



6.3 串联校正



- 滞后校正的结果：降低了截止频率，从而提高了相角裕度。
- 应用场合：系统快速性要求不高（ ω_c 降低），具有较满意的动态性能，但中、低频段对应的稳态性能不理想的情况，且对抗扰性要求较高的场合。

6.3 串联校正

串联滞后校正网络的设计步骤：

- 1) 根据稳态误差要求，确定开环增益 K 。
- 2) 利用已确定的开环增益 K ，绘制校正前系统的开环对数频率特性，确定校正前系统的截止频率 ω_c' 、相角裕度 γ' 和幅值裕度 h' (dB)。
- 3) 写出校正前系统的相角裕度 $\gamma'(\omega)$ 公式，计算校正前系统在不同 ω 时的 γ' 值，为下一步计算做准备。

可以计算出精确相频特性曲线，便于查表。也可以不逐一计算。

6.3 串联校正

4) 根据相角裕度 $\gamma''(\omega_c'')$ 要求, 确定校正后系统的截止频率 ω_c'' 。

考虑滞后网络在新的截止频率 ω_c'' 处会产生一定的相角滞后 $\varphi_c(\omega_c'')$, 按下式计算校正后的相角裕度:

$$\gamma''(\omega_c'') = \gamma'(\omega_c'') + \varphi_c(\omega_c'')$$

其中, $\gamma''(\omega_c'')$ 为校正后系统在新截止频率处 ω_c'' 的指标要求,

$\gamma'(\omega_c'')$ 为待校正系统在新截止频率处 ω_c'' 的相角裕度,

$\varphi_c(\omega_c'')$ 为滞后网络在新截止频率处 ω_c'' 的副作用相角, 一般取 $-14^\circ \sim -6^\circ$ 。

6.3 串联校正

5) 计算滞后网络参数 b 和 T 。

(1) 在新的截止频率 ω_c'' 上, 校正后系统的对数幅频特性曲线需要衰减到0dB, 确定 b 值, 即满足:

$$20\lg b + L'(\omega_c'') = 0 \quad \Rightarrow \quad b$$

一阶微分的转折频率

(2) 由 $\omega_2 = \frac{1}{bT}$ 确定滞后网络的高频段转折频率 ω_2 , 通常 ω_2 为 ω_c'' 的0.1~0.25倍, 即满足: $\omega_2 = \frac{1}{bT} = (0.1 \sim 0.25)\omega_c''$ 默认0.1

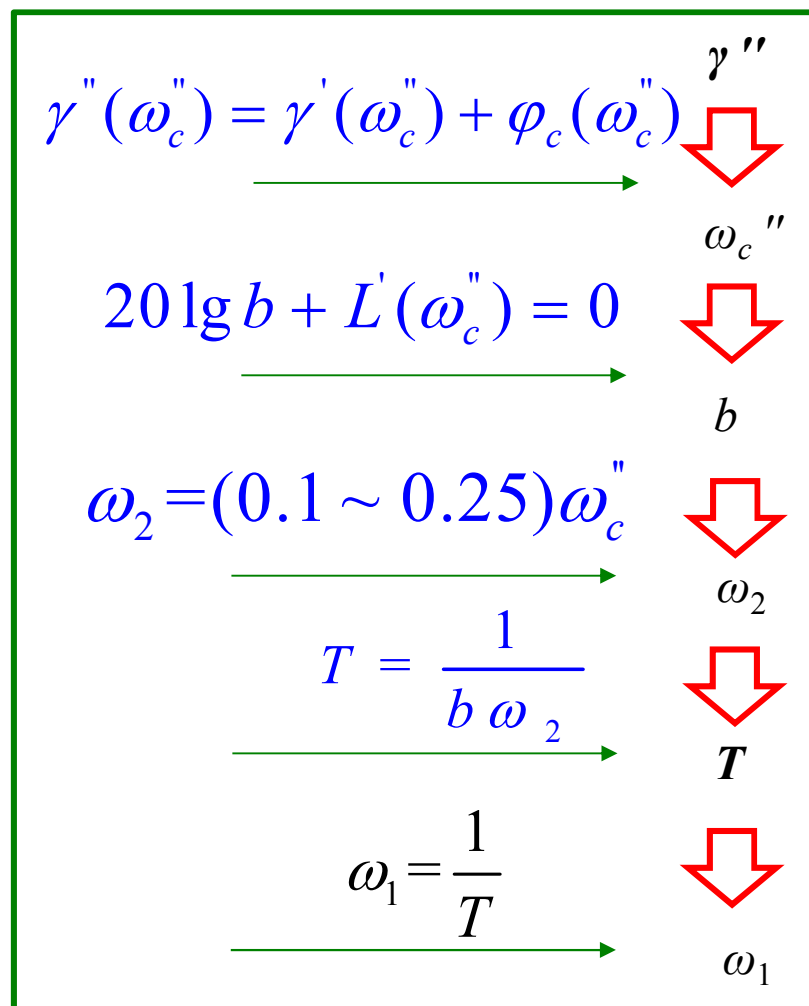
(3) 由 $T = \frac{1}{b\omega_2}$ 计算出 T 。如果算出的 T 较大时(不易实际实现), 则增加上面的系数, 但导致相角副作用变大。
系数越小、副作用越小。

(4) 由 $\omega_1 = \frac{1}{T} = b\omega_2$ 确定滞后网络的低频段转折频率 ω_1 。

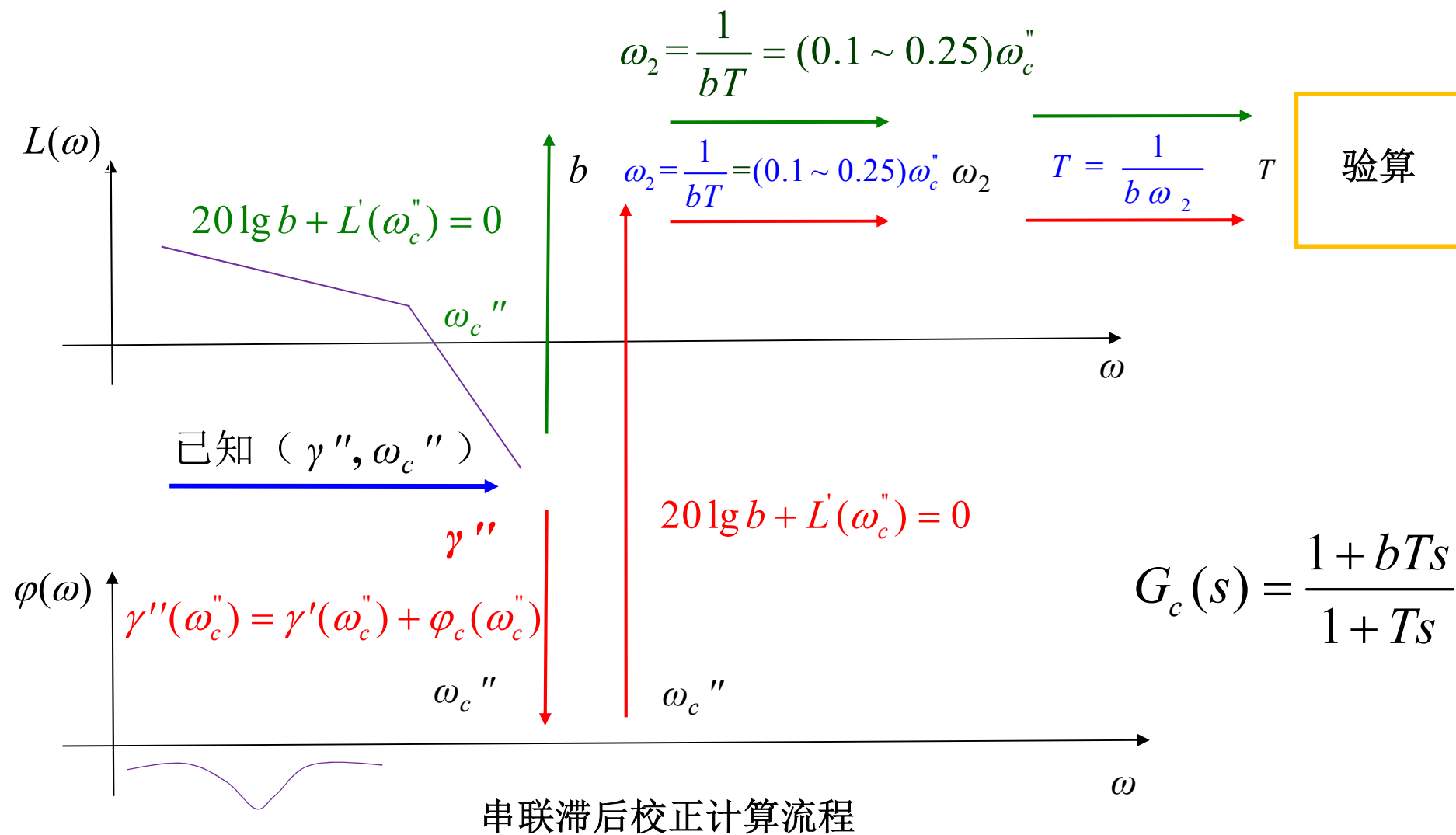
6) 验算校正后系统的相角裕度和幅值裕度。

6.3 串联校正

流程

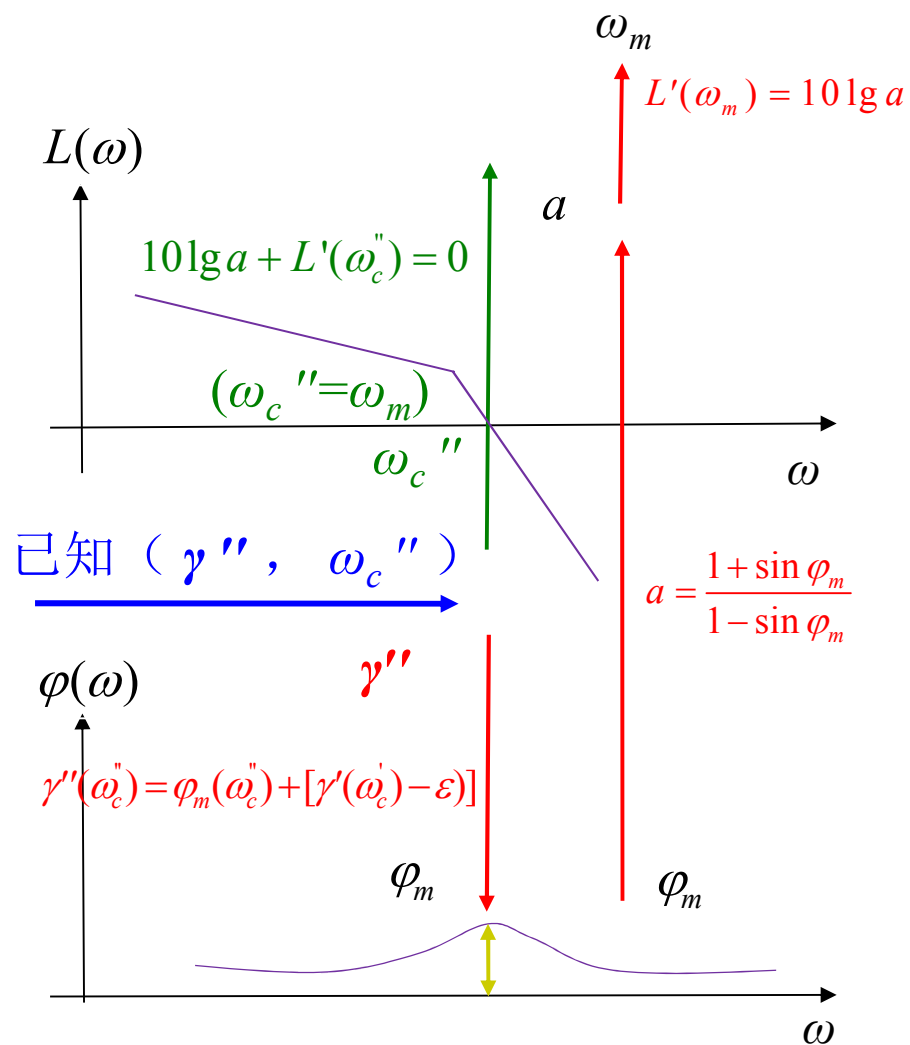


6.3 串联校正

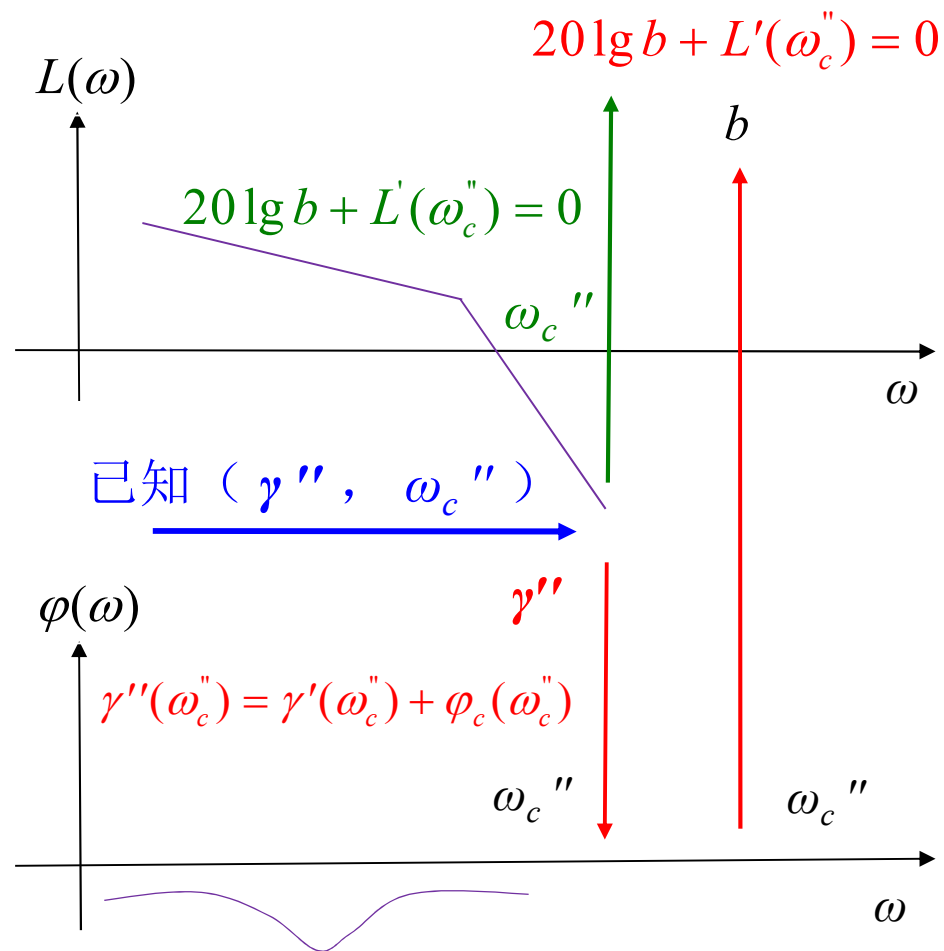


$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}} \quad \uparrow$$

$$\frac{1}{bT} = (0.1 \sim 0.25)\omega_c'' \quad \uparrow$$



串联超前校正计算流程



串联滞后校正计算流程

滞后校正和超前校正的比较

	超前校正	滞后校正
本质	利用装置的相角超前特性	利用装置的高频幅值衰减特性
注意事项	装置的 ω_m 应选在校正后系统的 ω_c'' 处。	为减小校正装置带来的负相角的影响，最大滞后相角频率选在系统低频段，远离校正后的系统 ω_c'' 。
校正效果	中、高频幅值增大， ω_c'' 增加，系统通带宽度增加，快速性好，相角裕度增加。	ω_c'' 下降，相角裕度增加。向上平移曲线保持相同的截止频率，则等效低频段幅值增加。
说明	增加的超前相角一般小于 65° ，否则 a 很大，导致校正后系统高频幅值过大（增加 $20\lg a$ ），高频噪声加强，无法工作。要考虑附加增益。	无需考虑附加增益。
改善	动态特性（中、高频段）	稳态特性（中、低频段）
副作用 相角	在截止频率 ω_c'' 处，原系统相角裕度减小。	在截止频率 ω_c'' 处，校正装置带来相角滞后。

6.3 串联校正

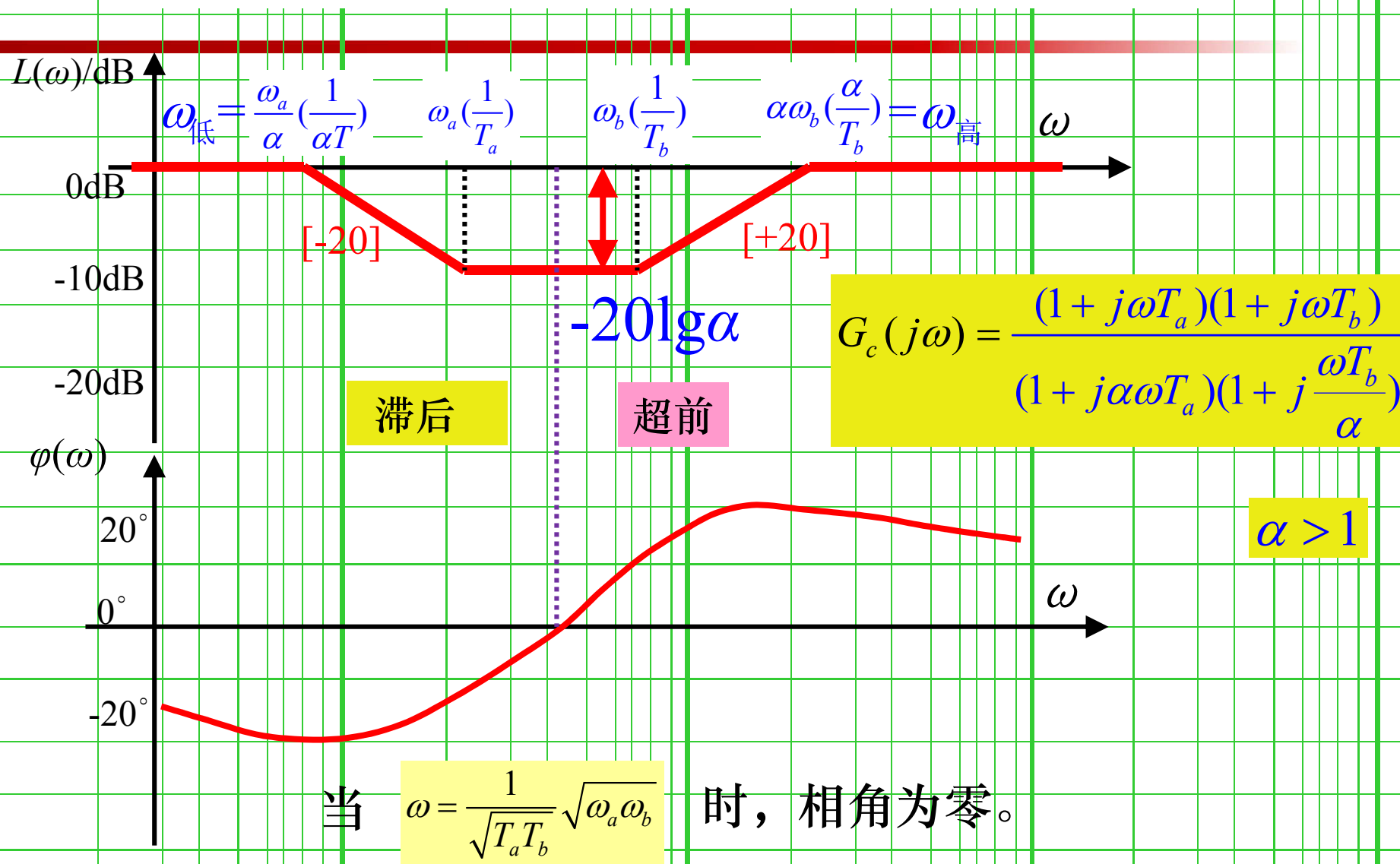
4. 滞后-超前校正

(1) 超前网络增大系统的相角裕度，改善动态性能。

(2) 滞后网络降低系统的截止频率，改善稳态性能。

针对待校正系统不稳定，且要求校正后系统的响应速度、相角裕度和稳态精度较高时，采用串联滞后-超前校正。

相位滞后-超前校正网络的Bode图



6.3 串联校正

设计步骤:

$$G_c(s) = \frac{(1 + T_a s)(1 + T_b s)}{(1 + \alpha T_a s)(1 + \frac{T_b}{\alpha} s)}$$

- 1) 根据稳态性能要求, 确定开环增益 K 。
- 2) 绘制校正前系统的开环对数幅频渐近特性, 求出校正前系统的截止频率 ω_c' 、穿越频率 ω_x' 、相角裕度 γ' 及幅值裕度 h' (dB)。
- 3) 根据指标要求, 确定校正后系统的截止频率 ω_c'' 。

(1) 题目指定 ω_c''

(2) 一般选校正前相角为 -180° 时所对应的角频率为 ω_c'' 。

$$\omega_c'' = \omega_x'$$

6.3 串联校正

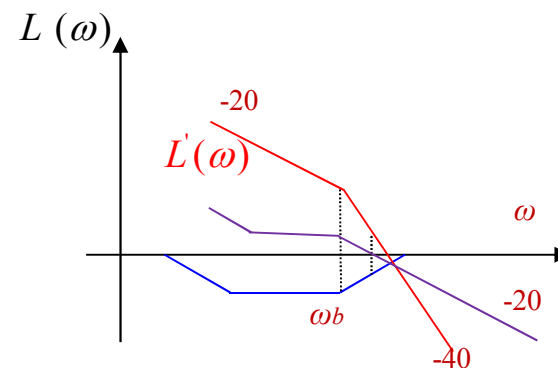
4) 确定超前网络参数 α 和 T_b

$$G_c(s) = \frac{(1+T_a s)(1+T_b s)}{(1+\alpha T_a s)(1+\frac{T_b}{\alpha} s)}$$

(1) 在校正前系统开环对数幅频特性上, 选择斜率从-20dB/dec变为-40dB/dec的转折频率作为校正网络超前部分的低频段转折频率 ω_b (转向20dB的频率)。

(2) 根据确定的 ω_c'' , 计算校正网络参数 α 。

$$\alpha \text{ 满足: } -20 \lg \alpha + 20 \lg \frac{\omega_c''}{\omega_b} + L'(\omega_c'') = 0$$



在 ω_c'' 处 滞后网络幅值 \oplus 超前网络幅值 \oplus 原系统幅值 $\boxed{0}$

(3) 根据公式 $\omega_{\text{高}} = \alpha \omega_b$ 计算出 $\omega_{\text{高}}$ 。

6.3 串联校正

$$G_c(s) = \frac{(1 + T_a s)(1 + T_b s)}{(1 + \alpha T_a s)(1 + \frac{T_b}{\alpha} s)}$$

5) 确定滞后网络的两个交接频率 ω_a 和 $\omega_{\text{低}}$ 。

根据相角裕度要求, 估算校正网络滞后部分的高频段转折频率 ω_a 。

转向0dB的频率

$$\omega_a = \frac{1}{T_a} = (0.1 \sim 0.25)\omega_c'' \Rightarrow T_a$$

$$\omega_{\text{低}} = \frac{1}{\alpha T_a}$$

6) 校验校正后系统的各项性能指标。

6.3 串联校正

设 某单位负反馈系统的传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K}{s(0.1s + 1)(0.01s + 1)}$$

要求 静态速度误差系数 $K_v > 100$ ，相角裕度 $\gamma'' > 40^\circ$ ， $\omega_c'' \approx 20 \text{ rad/s}$ ，设计一个相位滞后-超前校正装置。

解：（1）根据静态指标有：

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s(0.1s + 1)(0.01s + 1)} = K$$

$$K = 100$$

（2）画出 $K=100$ 时的系统开环频率特性。

6.3 串联校正

$$G_0(s) = \frac{100}{s(0.1s + 1)(0.01s + 1)}$$

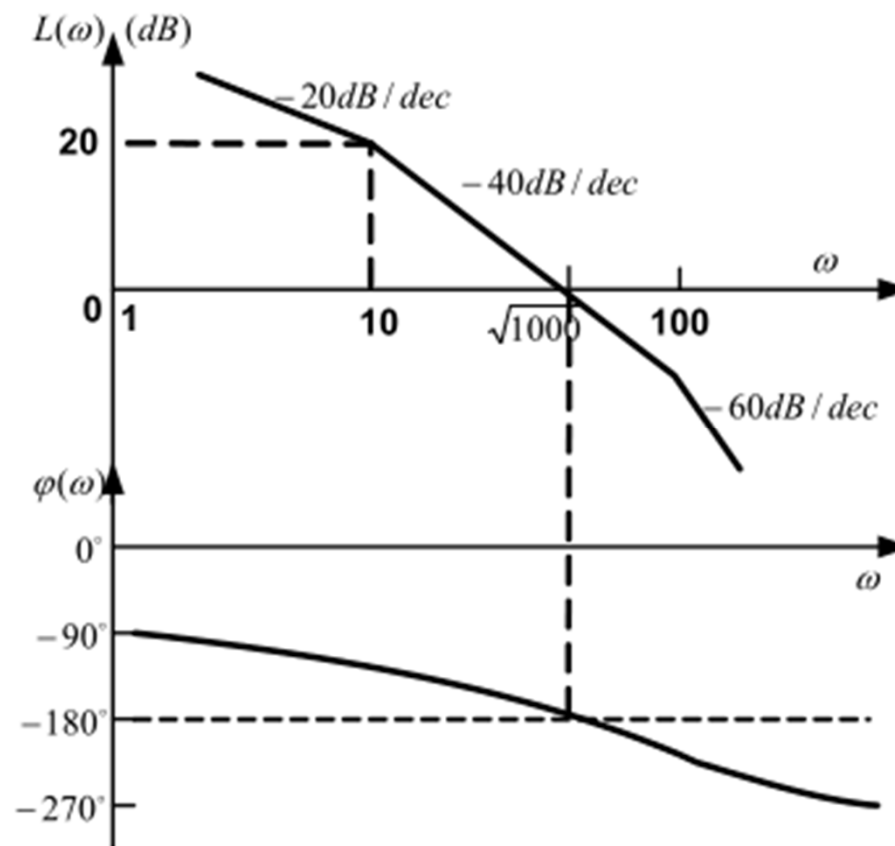
利用折线法，计算截止频率

$$\omega'_c = \sqrt{1000} = 31.6 \text{ rad/s}$$

计算相角裕度

$$\begin{aligned}\gamma &= 180^\circ - 90^\circ - \arctan(0.1\omega'_c) - \arctan(0.01\omega'_c) \\ &= 180^\circ - 90^\circ - \arctan 3.16 - \arctan 0.316 \\ &= 180^\circ - 90^\circ - 72.5^\circ - 17.5^\circ \approx 0^\circ\end{aligned}$$

计算幅值裕度，约为0dB。



6.3 串联校正

$$-20 \lg \alpha + 20 \lg \frac{\omega_c''}{\omega_b} + L'(\omega_c'') = 0$$

(3) 在待校正系统开环对数幅频特性上，选择斜率从-20dB/dec变为-40dB/dec的交接频率作为校正网络超前部分的转折频率 ω_b 。

$$\omega_b = 10 \quad G_c(s) = \frac{(1 + T_a s)(1 + T_b s)}{(1 + \alpha T_a s)(1 + \frac{T_b}{\alpha} s)} \quad \omega_b = \frac{1}{T_b} = 10 \quad T_b = 0.1$$

(4) 根据要求，确定校正后系统的截止频率 ω_c'' 为20rad/s，计算校正网络参数 α ，确定超前环节参数。

根据校正要求， $\omega_c'' = 20$ 。

$$-20 \lg \alpha + 20 \lg \frac{20}{10} + L'(20) = 0$$

$$-40 = \frac{L'(20) - 20}{\lg 20 - \lg 10} \Rightarrow L'(20) = 8 \text{dB}$$

$$20 \lg \frac{20}{10} = 6 \text{dB} \Rightarrow \alpha = 5$$

6.3 串联校正

$$G_c(s) = \frac{(1 + T_a s)(1 + T_b s)}{(1 + \alpha T_a s)(1 + \frac{T_b}{\alpha} s)}$$

$$T_b = 0.1 \quad \alpha = 5 \quad \frac{T_b}{\alpha} = 0.02$$

$$G_{c2}(s) = \frac{1 + 0.1s}{1 + 0.02s}$$

(5) 估算校正网络滞后部分的转折频率 ω_a 。

参考滞后网络： $\frac{1}{T_a} \approx 0.2\omega_c'' = 4$ $\Rightarrow T_a = 0.25$
(经验公式)

若 $\frac{1}{T_a} \approx 0.1\omega_c'' = 2$ $T_a = 0.5$

$$G_c(s) = \frac{(1 + T_a s)(1 + T_b s)}{(1 + \alpha T_a s)(1 + \frac{T_b}{\alpha} s)} \Rightarrow G_{c1}(s) = \frac{1 + 0.25s}{1 + 1.25s}$$

6.3 串联校正

$$G_c(s) = \frac{(1+0.25s)(1+0.1s)}{(1+1.25s)(1+0.02s)}$$

$$G_0(s) = \frac{100}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$$

$$G_c(j\omega)G_0(j\omega) = \frac{(1+0.25s)}{s(1+1.25s)(1+0.02s)} \frac{100}{(1+0.01s)}$$

一对零极点对消

(6) 校验校正后系统的相角裕度

计算校正后系统在 $\omega_c''=20$ 处的相角裕度

$$\gamma''(\omega_c'') = 180^\circ - 90^\circ + \arctan 0.25 \times 20 - \arctan 1.25 \times 20 - \arctan 0.02 \times 20 - \arctan 0.01 \times 20$$

$$= 90^\circ + 78.7^\circ - 87.7^\circ - 21.8^\circ - 11.3^\circ$$

$$\approx 48^\circ > 40^\circ$$

满足要求

$$\text{若 } \frac{1}{T_a} \approx 0.1\omega_c'' \Rightarrow \gamma''(\omega_c'') \approx 53^\circ$$

1) 系数越小, 距离 ω_c'' 越远, 副作用越小

2) 系数越小, T 越大, 物理实现困难。

6.3 串联校正

高阶系统幅值裕度的计算比较麻烦

$$G_c(j\omega)G_0(j\omega) = \frac{(1+0.25s)}{s(1+1.25s)(1+0.02s)} \frac{100}{(1+0.01s)}$$

计算校正后系统在 ω_x''

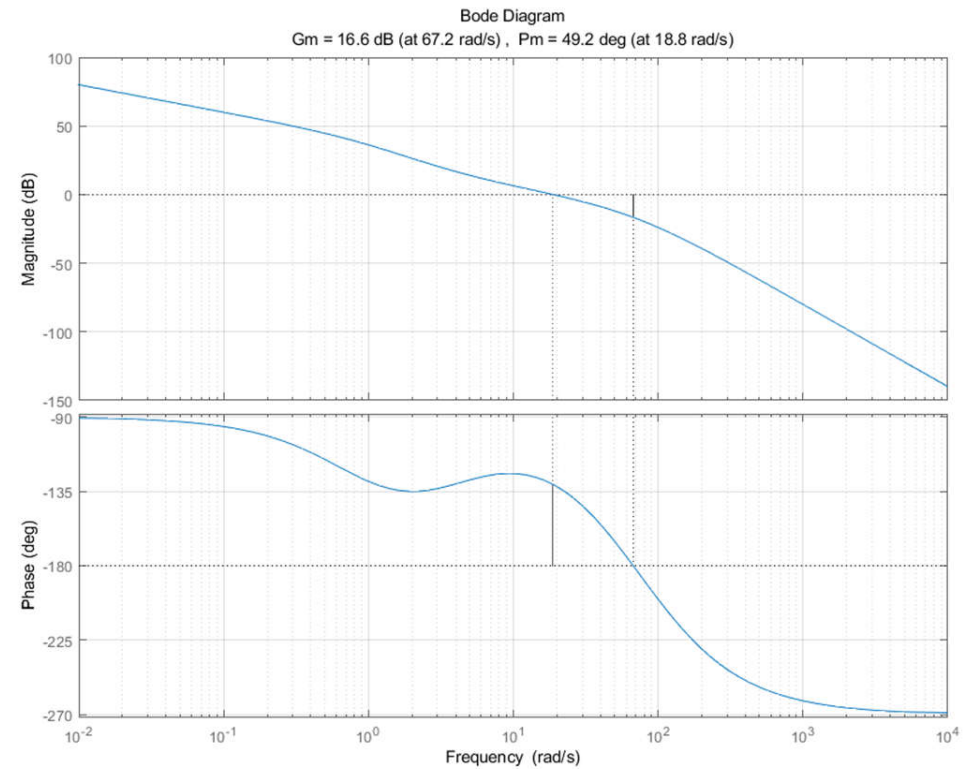
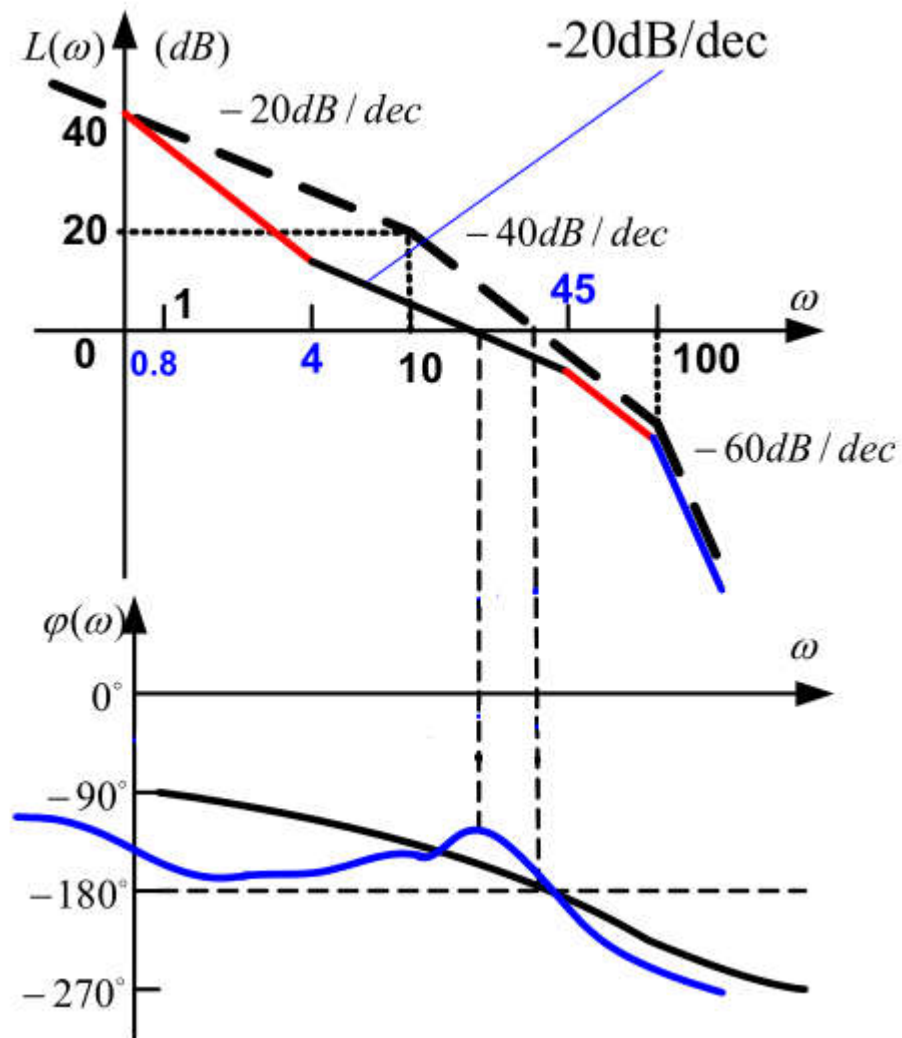
$$\arctan 0.25 \times \omega_x'' - 90^\circ - \arctan 1.25 \times \omega_x'' - \arctan 0.02 \times \omega_x'' - \arctan 0.01 \times \omega_x'' = -180$$

$$\omega_x'' = 67.4 \text{ rad/s}$$

$$G_c(j\omega_x'')G_0(j\omega_x'') = \frac{(1+j0.25\omega_x'')}{j\omega_x''(1+j1.25\omega_x'')(1+j0.02\omega_x'')} \frac{100}{(1+j0.01\omega_x'')}$$

$$h''(\text{dB}) = -20 \lg A(\omega_x'') = 16.6 \text{ dB}$$

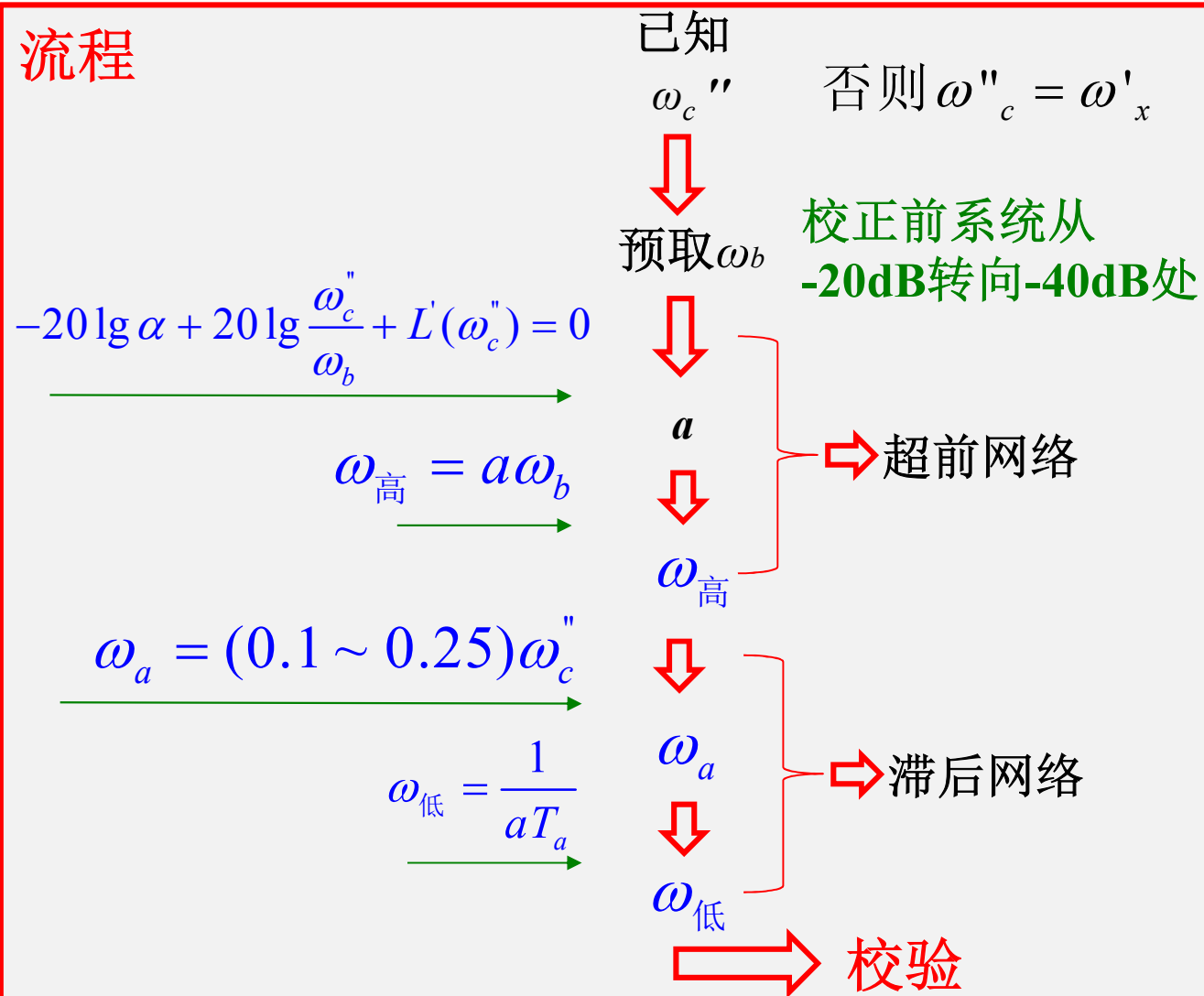
6.3 串联校正



满足要求

6.3 串联校正

流程



6.3 串联校正

$$\gamma''(\omega_c'') = \varphi_m(\omega_c'') + \gamma'(\omega_c') - \varepsilon_{\text{原系统减小量}}$$

主要公式

	幅频特性计算公式	相频特性计算公式
超前校正	$10 \lg a + L'(\omega_c'') = 0$	$\gamma''(\omega_c'') = \varphi_m(\omega_c'') + \gamma'(\omega_c')$
滞后校正	$20 \lg b + L'(\omega_c'') = 0$	$\gamma''(\omega_c'') = \gamma'(\omega_c') + \varphi_c(\omega_c'')$
滞后-超前校正	$-20 \lg \alpha + 20 \lg \frac{\omega_c''}{\omega_b} + L'(\omega_c'') = 0$	$\gamma''(\omega_c'') = \varphi_m(\omega_c'') + \underbrace{\gamma'(\omega_c') - \varepsilon}_{\gamma'(\omega_c'')} + \varphi_c(\omega_c'')$

说明：

$\varepsilon_{\text{原系统减小量}}$

1) ε 为超前网络的引入使 ω_c'' 增大而造成的原系统相角裕度减小量，一般取 $5 \sim 20^\circ$ 。正数

2) $\varphi_c(\omega_c'')$ 为滞后网络在 ω_c'' 处会产生相角滞后的副作用，通常在 $-12 \sim -5^\circ$ 之间。负数

超前校正、滞后校正和滞后-超前校正的比较

	超前校正	滞后校正	滞后-超前校正
传函	$G_c(s) = \frac{1}{a} \times \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \quad (a > 1)$	$G_c(s) = \frac{1 + bTs}{1 + Ts} \quad (b < 1)$	$G_c(s) = \frac{(1 + T_a s)(1 + T_b s)}{(1 + \alpha T_a s)(1 + \frac{T_b}{\alpha} s)} \quad (\alpha > 1)$
对数频率	超前相角	滞后相角	
参数特性	$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}} \quad \varphi_m = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$	$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{b}} \quad \varphi_m = \arcsin \frac{1-b}{1+b}$	零相角频率 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_a} \sqrt{T_b}}$
特点	正相移和正幅值斜率	负相移和负幅值斜率	将滞后效应设置在低频段，超前效应设置在中频段，以确保滞后校正和超前校正优势的充分发挥，从而全面提高系统的动态性能和稳态精度。
作用	正相移和正幅值斜率改善中频段的斜率，增大了稳定裕度，提高了快速性，改善了平稳性。	低频幅值的压低使得有可能调大开环增益，从而提高稳态精度，提高稳定裕量。	
缺点	抗干扰能力下降、改善稳态精度作用不大。	截止频率变低、频带变窄、快速性降低。	
适用	稳态精度已满足要求，但动态性能较差的系统	稳态精度要求较高，或平稳要求严格的系统。	

本章结束

总结：

1. 掌握系统带宽的概念 ★★
2. 掌握无源超前网络和无源滞后网络特性 ★★★
3. 掌握串联超前校正和串联滞后校正方法 ★★★
4. 熟悉滞后滞后-超前校正方法 ★★

作业： 6-2, 6-3,
6-5, 6-8,
6-10, 6-11,