

# 第三章 线性系统的时域分析法

第一节 系统时间响应的性能指标

第二节 一阶系统的时域分析

第三节 二阶系统的时域分析

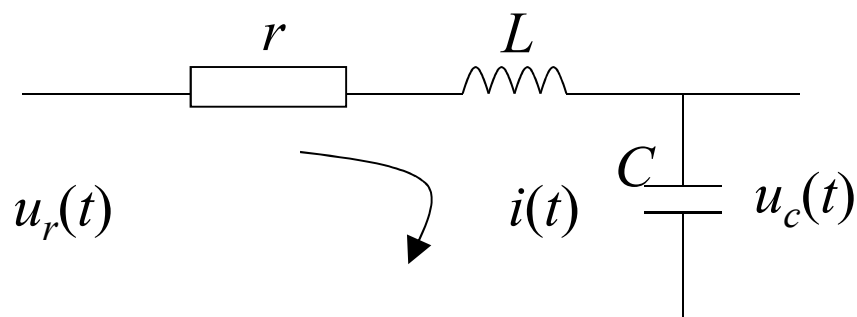
第四节 高阶系统的时域分析

第五节 线性系统的稳定性分析

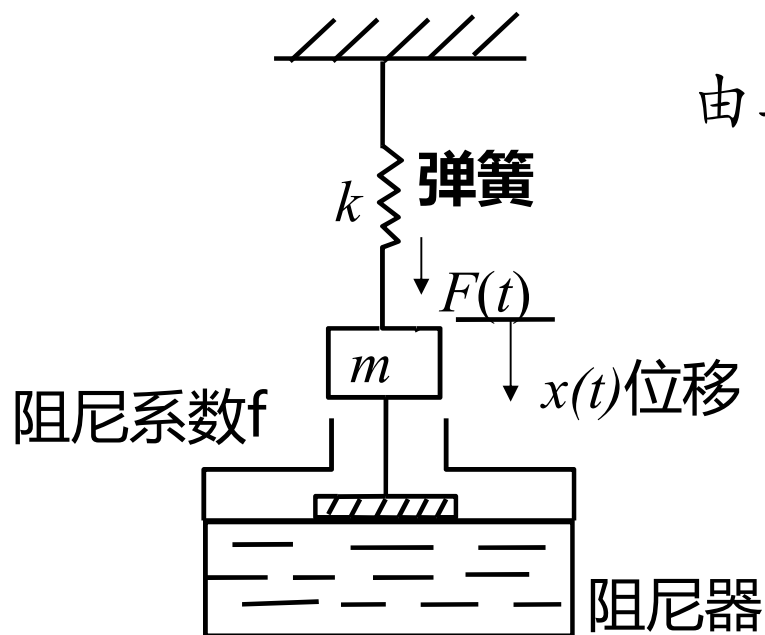
第六节 线性系统的稳态误差计算

第七节 控制系统时域设计

### 3.3 二阶系统的时域分析



$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + rC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$



由二阶微分方程描述的系统称为**二阶系统**

$$mx''(t) + fx'(t) + kx(t) = F(t)$$

### 3.3 二阶系统的时域分析

#### 一、二阶系统的数学模型

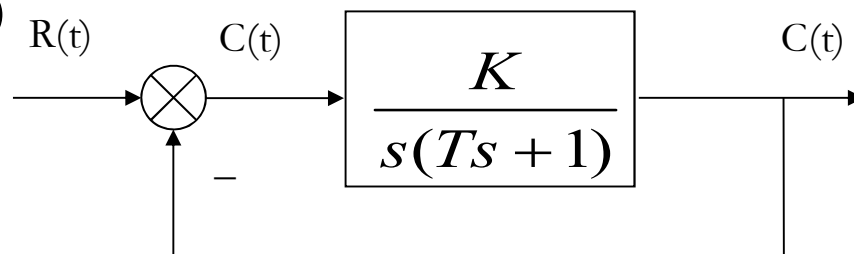
位置控制系统的微分方程：
$$T \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + \frac{dc(t)}{dt} + Kc(t) = Kr(t)$$

➤ 系统的(闭环)传递函数：
$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts^2 + s + K}$$

分子分母同除以 $s(Ts+1)$  后，
$$\Phi(s) = \frac{\frac{K}{s(Ts+1)}}{1 + \frac{K}{s(Ts+1)}}$$

➤ 系统的开环传递函数（单位反馈）

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$$



$K$ 为系统的开环放大系数, $T$ 为时间常数。

图3-5 二阶系统结构图

### 3.3 二阶系统的时域分析

将系统的闭环传递函数:

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts^2 + s + K}$$

改写成:

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

式中,  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}}$  称为无阻尼自然振荡频率 (简称为无阻尼自振频率)

$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{TK}}$  称为阻尼比 (或相对阻尼系数, 实际阻尼/临界阻尼)

系统的闭环特征方程为  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

两个根:

$$s_{1,2} = P_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

### 3.3 二阶系统的时域分析

#### 二、二阶系统的单位阶跃响应

设系统的输入为单位阶跃函数，则系统输出响应的拉氏变换为

$$C(s) = \Phi(s) \cdot R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$

对上式取拉氏反变换，即可求得二阶系统的时域单位阶跃响应。

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2}$$

$$s_{1,2} = P_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \zeta \text{不同, 根不同, 所以分别讨论。}$$

### 3.3 二阶系统的时域分析

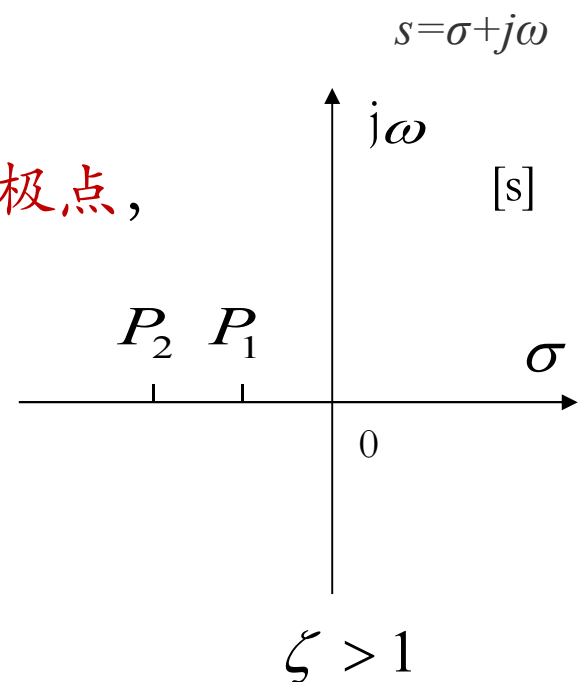
$$s_{1,2} = P_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

#### 1. 过阻尼 ( $\zeta > 1$ ) 的情况

当  $\zeta > 1$  时, 系统具有两个不相等的负实数极点,

$$P_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$P_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$



此时, 输出响应的拉氏变换可写成

图3-6 过阻尼时极点分布

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2}$$

### 3.3 二阶系统的时域分析

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2}$$

式中  $A_0 = [C(s) \cdot s]_{s=0} = 1$

$$A_1 = [C(s) \cdot (s-p_1)]_{s=p_1} = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1} \cdot p_1}$$

$$A_2 = [C(s) \cdot (s-p_2)]_{s=p_2} = \frac{-\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1} \cdot p_2}$$

将  $A_0$ 、 $A_1$ 、 $A_2$  代入式输出响应的拉氏变换，得：

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{1}{s} + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1} \cdot p_1} \frac{1}{s-p_1} + \frac{-\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1} \cdot p_2} \frac{1}{s-p_2}$$

### 3.3 二阶系统的时域分析

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{1}{s} + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1} \cdot p_1} \frac{1}{s-p_1} + \frac{-\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1} \cdot p_2} \frac{1}{s-p_2}$$

进行拉氏反变换，得：

$$C(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1} \cdot p_1} e^{p_1 t} + \frac{-\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1} \cdot p_2} e^{p_2 t} = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \left( \frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2} \right) (t \geq 0)$$

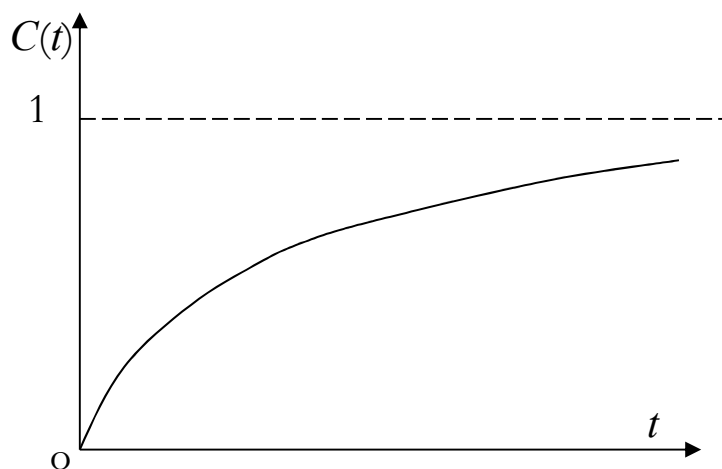


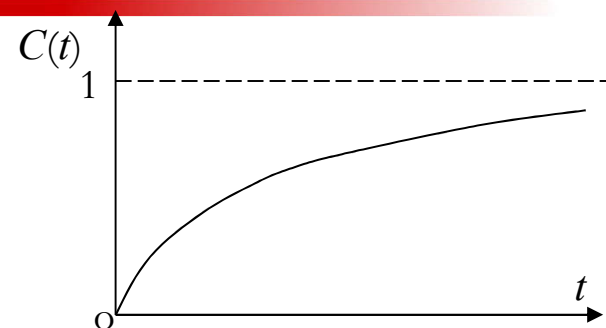
图3-7 过阻尼响应

通常，称阻尼比  $\zeta > 1$  时二阶系统的运动状态为过阻尼状态。



### 3.3 二阶系统的时域分析

$$C(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2} \right) \quad (t \geq 0)$$



上式表明：

- 系统的单位阶跃响应由**稳态分量**和**瞬态分量**组成；
- **稳态分量**为**1**，**瞬态分量**包含两个**单调衰减**指数项；
- 随着时间 $t$ 的增加，**指数项**逐渐**衰减**，系统输出响应曲线**单调上升**。
- 当 $\zeta \gg 1$ 时，极点 $p_2$ 比 $p_1$  **距虚轴远的多**，故 $e^{p_2 t}$ 比 $e^{p_1 t}$ 衰减**更快**。
- 可以**忽略**  $p_2$  对系统输出的影响，把二阶系统**近似看作一阶系统**。
- 在工程上，当 $\zeta \geq 1.5$  时，这种近似处理方法具有**足够的准确度**。

### 3.3 二阶系统的时域分析

$$s_{1,2} = P_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

#### 2. 欠阻尼 ( $0 < \zeta < 1$ ) 的情况

当  $0 < \zeta < 1$  时, 系统具有一对共轭复数极点, 且在  $s$  平面的左半部分, 即

$$p_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

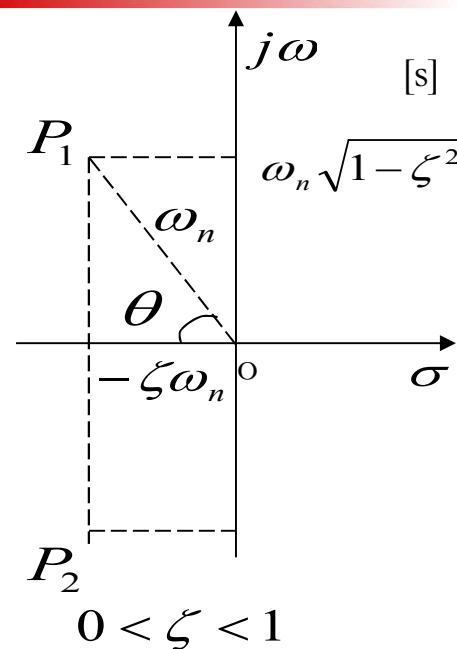


图3-8 欠阻尼时的极点分布

角  $\theta$  称为阻尼角(从负实轴顺时针计算, 正角度)

输出响应的拉氏变换为

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)}$$

式中  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ , 称为阻尼振荡频率。  $\sin\theta = \sqrt{1 - \zeta^2}$   $\cos\theta = \zeta$

### 3.3 二阶系统的时域分析

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)} \quad C(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1s + A_2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

进一步求得  $A_0 = 1 \quad A_1 = -1 \quad A_2 = -2\zeta\omega_n$

代入上式，并将式中的第二项分成两项得

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

拉氏逆变换  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

### 3.3 二阶系统的时域分析

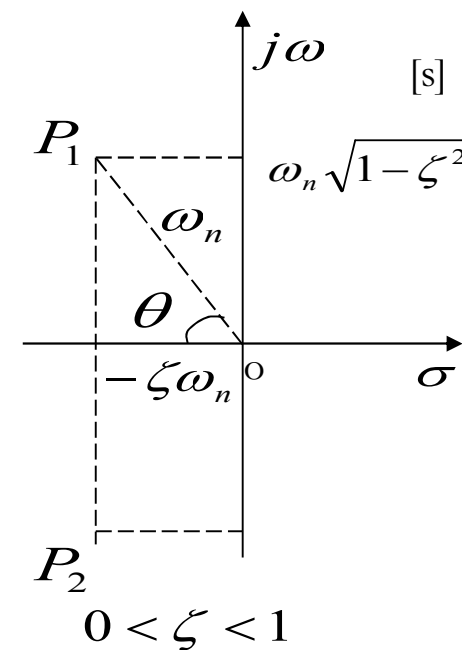
输出响应  $C(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right)$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} (\sqrt{1-\zeta^2} \cos \omega_d t + \zeta \sin \omega_d t)$$

有  $\sin \theta = \sqrt{1-\zeta^2}$  ,  $\cos \theta = \zeta$  。

输出响应：

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} (\sin \theta \cos \omega_d t + \cos \theta \sin \omega_d t)$$
$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \quad t \geq 0$$



式中  $\theta = \arctg \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

$$\theta = \arccos \zeta$$

### 3.3 二阶系统的时域分析

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta)$$

上式表明：

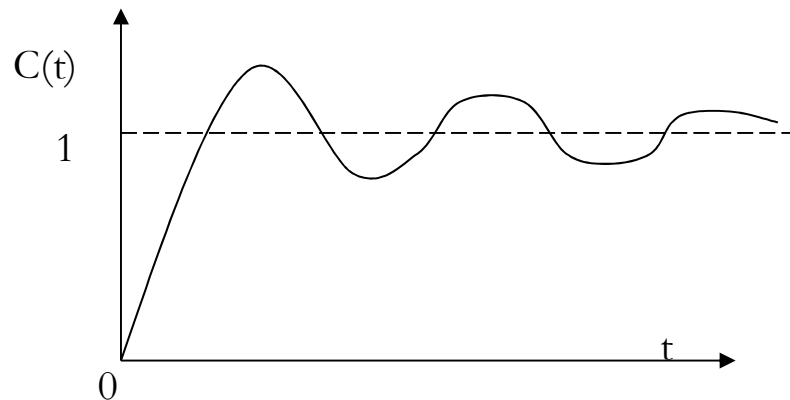


图3-9 欠阻尼响应

- 系统的稳态响应为1，瞬态分量是一个随时间 $t$ 的增大而衰减的阻尼正弦振荡过程。
- 振荡频率为 $\omega_d$ ，它取决于阻尼比 $\zeta$ 和无阻尼自然频率 $\omega_n$ 。
- 衰减速度取决于 $\zeta\omega_n$ 的大小，所以 $\sigma = \zeta\omega_n$ 定义为衰减系数。
- 此时系统工作在欠阻尼状态。

### 3.3 二阶系统的时域分析

#### 3. 临界阻尼 ( $\zeta=1$ ) 的情况

当  $\zeta=1$  时，系统有两个相等的负实数极点， $p_{1,2} = -\omega_n$ 。

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s + \omega_n} + \frac{A_2}{(s + \omega_n)^2}$$

$$A_0 = [C(s) \cdot s]_{s=0} = 1$$

$$A_1 = \left\{ \frac{d}{ds} [C(s)(s + \omega_n)^2] \right\}_{s=-\omega_n} = -1$$

$$A_2 = [C(s) \cdot (s + \omega_n)^2]_{s=-\omega_n} = -\omega_n$$

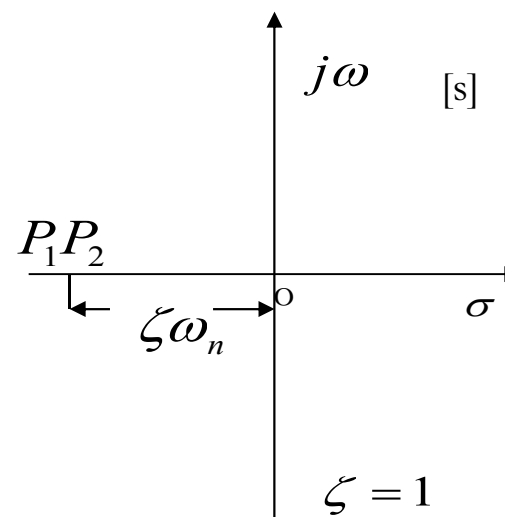


图3-10 临界阻尼时极点的分布

### 3.3 二阶系统的时域分析

---

将  $A_0, A_1, A_2$  代入前式, 得

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} = \frac{1}{s} + \frac{-1}{s + \omega_n} + \frac{-\omega_n}{(s + \omega_n)^2}$$

进行拉氏反变换:

$$\begin{aligned} C(t) &= 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t} \\ &= 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

### 3.3 二阶系统的时域分析

$$C(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad (t \geq 0)$$

当  $\zeta = 1$  时，系统的输出  
响应由零开始单调上升，  
最后达到稳态值1。

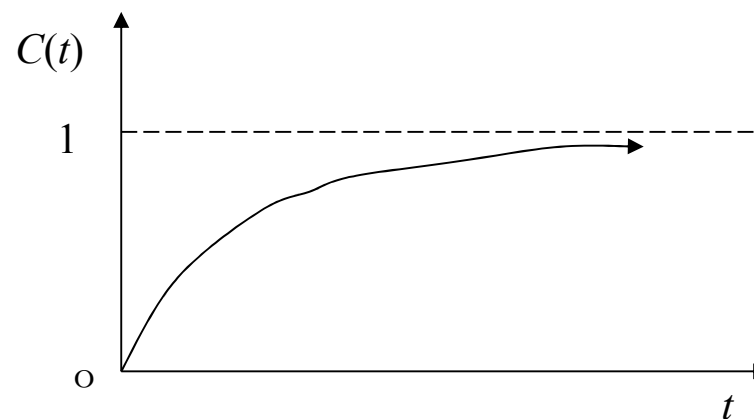


图3-11 临界阻尼响应

$\zeta = 1$  是输出响应单调和振荡过程的分界，称为临界阻尼状态。



### 3.3 二阶系统的时域分析

#### 4. 无阻尼 ( $\zeta = 0$ ) 的情况

当  $\zeta = 0$  时，系统具有一对共轭纯虚数极点。

$$p_{1,2} = \pm j\omega_n$$

将  $\zeta = 0$  代入  $0 < \zeta < 1$  计算结果

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} (\sqrt{1-\zeta^2} \cos \omega_d t + \zeta \sin \omega_d t)$$

$$\text{解得: } C(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

系统的输出响应是**无阻尼的等幅**

**振荡过程**，其振荡频率为  $\omega_n$ 。

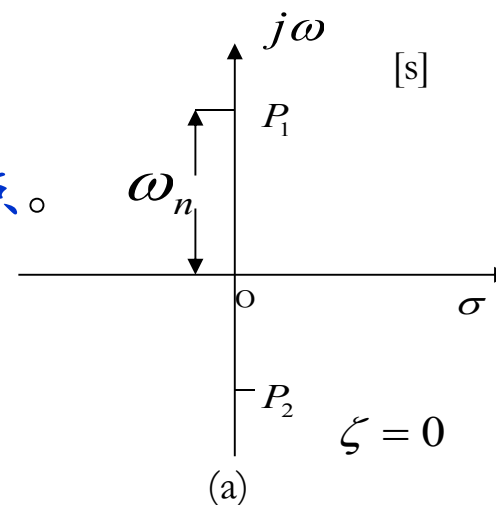


图3-12 a) 无阻尼时的极点分布

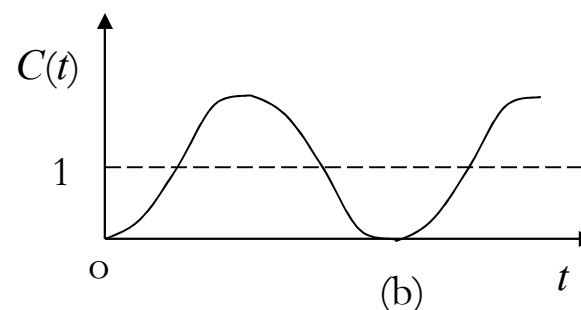


图3-12 b) 无阻尼时的输出响应

### 3.3 二阶系统的时域分析

---

比较 频率  $\omega_n$  和  $\omega_d$  的物理意义。

$\omega_n$  ——无阻尼自然振荡频率，此时系统输出为等幅振荡。

$\omega_d$  ——阻尼振荡频率，此时系统输出为衰减正弦振荡过程。

#### 5. 无阻尼 ( $\zeta < 0$ ) 的情况

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta)$$

当  $\zeta < 0$  ,系统具有实部为正的极点，输出响应指数因子具有正幂指数，输出响应是发散（振荡或单调）的，此时系统已无法正常工作。

### 3.3 二阶系统的时域分析

根据上面的分析，在不同的阻尼比时，二阶系统的响应具有不同的特点。因此，阻尼比 $\zeta$ 是二阶系统的重要特征参数。

选取 $\omega_n t$ 为横坐标，不同阻尼比时二阶系统单位阶跃响应曲线。

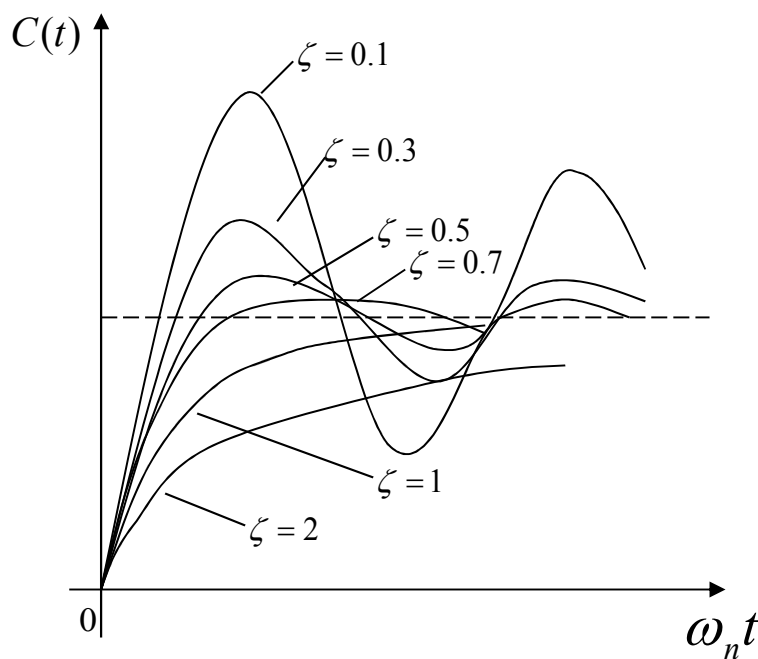


图3-13 二阶系统的阶跃响应

### 3.3 二阶系统的时域分析

- $\zeta$  越小，响应特性振荡得越厉害。
- 随着  $\zeta$  增大到一定程度后，响应特性变成单调上升。 $\zeta = 1$  是临界。
- 当系统无振荡时，临界阻尼所对应的上升时间最短，系统响应最快。
- 当欠阻尼时，若阻尼比  $\zeta$  在  $0.4 \sim 0.8$  之间，则系统的超调量适中，调节时间较短，振荡特性并不严重。

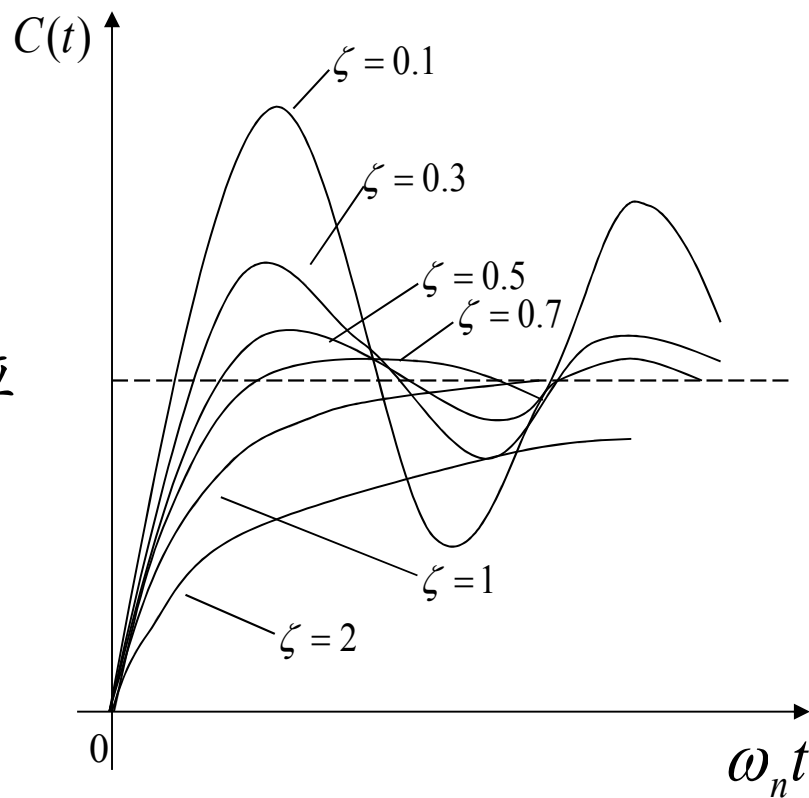


图3-13 二阶系统的阶跃响应

- 一般希望二阶系统工作在  $\zeta = 0.4 \sim 0.8$  的欠阻尼状态下，在工程实际中，通常选取  $\zeta = 1/\sqrt{2} = 0.707$  作为设计系统的依据。

### 3.3 二阶系统的时域分析

#### 三、二阶系统动态性能指标

- 系统控制性能的好坏通过系统性能指标衡量。
- 性能指标的定义和定量关系的推导，主要针对欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应。
- 考虑  $\zeta$  和  $\omega_n$  对系统单位阶跃响应的影响。
- 上升时间 $t_r$ ：响应从终值的10%上升到90%所需时间，或从零第一次上升到终值所需时间。Speed
- 峰值时间 $t_p$ ：响应超过终值到达第一个峰值所需时间。Speed
- 调节时间 $t_s$ ：响应到达并保持在终值的 $\pm 5\%$ 内所需时间。Speed+damp
- 超调量 $\sigma\%$ ：响应的最大偏离量与终值的差与终值的比（百分数）。damp

### 3.3 二阶系统的时域分析

在欠阻尼情况下，系统的输出响应曲线如图3-14所示。

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \quad (t \geq 0)$$

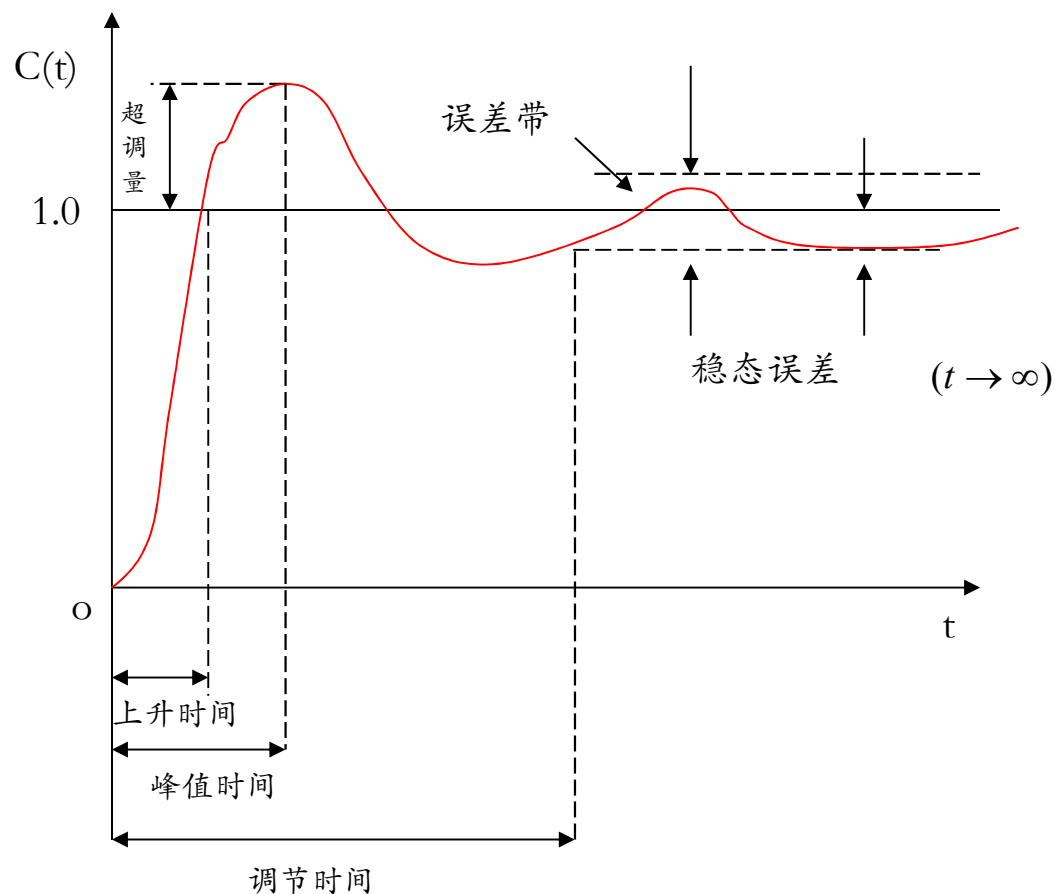


图3-14 二阶系统瞬态性能指标

### 3.3 二阶系统的时域分析

对于无零点的欠阻尼二阶系统，动态性能指标计算公式：

#### 1、上升时间

响应曲线从零开始上升，第一次到达稳态值所需的时间，称为上升时间。根据上述定义，当  $t = t_r$  时， $C(t_r) = 1$ 。

根据单位阶跃响应表达式：
$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta)$$

$$\text{有：} \frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_r + \theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega_d t_r + \theta) = 0$$

所以  $\omega_d t_r + \theta = k\pi \quad (k=1,2,\dots) \quad (t \geq 0)$

### 3.3 二阶系统的时域分析

由于上升时间  $t_r$  是  $C(t)$  第一次到达稳态值的时间，故取  $k=1$ ，  
所以

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

单位：弧度

由式可以看出，

- 当  $\omega_n$  一定时，阻尼比  $\zeta$  越大，上升时间  $t_r$  越长；
- 当  $\zeta$  一定时， $\omega_n$  越大， $t_r$  越小。



### 3.3 二阶系统的时域分析

#### 2、峰值时间 $t_p$

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta)$$

响应曲线 $C(t)$ 从零开始到达第一个峰值所需时间，称为峰值时间。

由定义，对输出响应对时间求导，并令其等于零，即  $\left. \frac{dC(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = 0$

$$\text{得} \quad \zeta\omega_n \sin(\omega_d t_p + \theta) - \omega_d \cos(\omega_d t_p + \theta) = 0$$

$$\text{经变换可得} \quad \operatorname{tg}(\omega_d t_p + \theta) = \frac{\omega_d}{\zeta\omega_n} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \operatorname{tg}\theta$$

$$\text{所以} \quad \omega_d t_p + \theta = k\pi + \theta \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$\text{即} \quad \omega_d t_p = k\pi$$

### 3.3 二阶系统的时域分析

因为峰值时间 $t_p$ 是 $C(t)$ 到达第一个峰值的时间，所以 $k=1$ 。

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \qquad t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

- 当  $\zeta$  一定时,  $\omega_n$  越大,  $t_p$  越小, 反应速度越快。
- 当  $\omega_n$  一定时,  $\zeta$  越大,  $t_p$  越大, 反应速度越慢。
- 由于  $\omega_d$  是闭环极点虚部的数值,  $\omega_d$  越大, 则闭环极点到实轴的距离越远。因此, 峰值时间  $t_p$  与闭环极点到实轴的距离成反比。

### 3.3 二阶系统的时域分析

#### 3、超调量 $\sigma_p$

在响应过程中，输出量 $C(t)$ 超出其稳态值的最大差量与稳态值之比。

$$\sigma_p = \frac{C(t_p) - C(\infty)}{C(\infty)} \times 100\%$$

式中 $C(t_p)$ 为输出量的最大值， $C(\infty)$ 为输出量的稳态值。

将  $t_p$  代入输出  $C(t)$  中，求得输出量的最大值为

$$\left. \begin{aligned} C(t) &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \\ t_p &= \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \end{aligned} \right\} C(t_p) = 1 - \frac{e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\pi + \theta)$$

### 3.3 二阶系统的时域分析

$$\left. \begin{aligned} \sin(\pi + \theta) &= -\sin \theta = -\sqrt{1 - \zeta^2} \\ C(t_p) &= 1 - \frac{e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\pi + \theta) \end{aligned} \right\} C(t_p) = 1 + e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

根据超调量的定义，并考虑到  $C(\infty) = 1$ ，有

$$\sigma_p = \frac{C(t_p) - C(\infty)}{C(\infty)} \times 100\% = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$
$$\sigma_p = e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1}}} \times 100\%$$

$\sigma_p$  只是  $\zeta$  的函数，而与  $\omega_n$  无关， $\zeta$  越小，则  $\sigma_p$  越大。

### 3.3 二阶系统的时域分析

$$\sigma_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

- 1) 当二阶系统的阻尼比  $\zeta$  确定后，即可求得对应的超调量  $\sigma_p$ 。
- 2) 如果给出了超调量的要求值，也可求得相应的阻尼比的数值。

一般当  $\zeta = 0.4 \sim 0.8$  时，相应的超调量  $\sigma_p = 25 \sim 1.5\%$

$\sigma_p$  与  $\zeta$  关系曲线如图3-15所示。

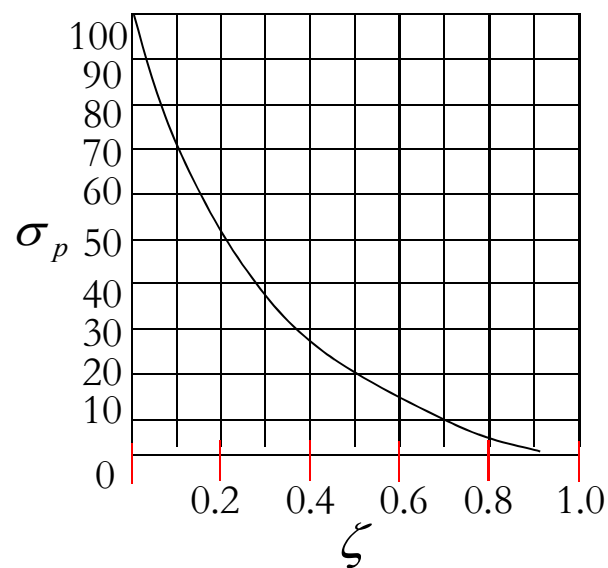


图3-15 欠阻尼二阶系统超调与 阻尼比关系曲线

### 3.3 二阶系统的时域分析

#### 4、调节时间 $t_s$

响应曲线到达并停留在稳态值的  $\pm 5\%$  (或 $\pm 2\%$ ) 误差范围内所需的最小时间称为调节时间 (或过渡过程时间)。

根据调节时间的定义, 有  $|C(t) - C(\infty)| \leq \Delta \cdot C(\infty) \quad (t \geq t_s)$

式中  $\Delta = 0.05$  (或 $0.02$ )

将 $C(t)$  及  $C(\infty)=1$  代入上式得

$$\left| \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \right| \leq \Delta \quad (t \geq t_s)$$

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta)$$

$$|\sin(\omega_d t + \theta)| \leq 1$$

### 3.3 二阶系统的时域分析

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \leq \Delta \quad (t \geq t_s)$$

由此可求得  $t_s \geq \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln \frac{1}{\Delta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{\zeta\omega_n} \left( \ln \frac{1}{\Delta} + \ln \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right)$

若取  $\Delta = 0.05$ ，则得  $t_s \geq \frac{3 + \ln \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{\zeta\omega_n}$

若取  $\Delta = 0.02$ ，则得  $t_s \geq \frac{4 + \ln \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{\zeta\omega_n}$

在  $\zeta=0.8$  时，上面两式可分别近似为  $t_s \approx \frac{3.5}{\zeta\omega_n}$  和  $t_s \approx \frac{4.4}{\zeta\omega_n}$

### 3.3 二阶系统的时域分析

$$t_s \approx \frac{3.5}{\zeta\omega_n} \quad t_s \approx \frac{4.4}{\zeta\omega_n}$$

该式表明，调节时间  $t_s$  近似与  $\zeta\omega_n$  成反比。

➤  $\zeta\omega_n$  是闭环极点实部的数值， $\zeta\omega_n$  越大，则闭环极点到虚轴的距离越远。

➤ 可近似地认为调节时间  $t_s$  与闭环极点到虚轴的距离成反比。

在设计系统时， $\zeta$  通常由要求的超调量所决定，而调节时间  $t_s$  则由自然振荡频率  $\omega_n$  所决定。

在不改变超调量的条件下，通过改变  $\omega_n$  的值可以改变调节时间。



### 3.3 二阶系统的时域分析

阻尼比  $\zeta$  和无阻尼自振频率  $\omega_n$  是二阶系统两个重要特征参数，它们对系统的性能具有决定性的影响。


$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad t_s \approx \frac{3.5}{\zeta \omega_n} \quad \sigma_p = e^{-\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \times 100\%$$

- 当保持  $\zeta$  不变时，提高  $\omega_n$  可使  $t_r$ 、 $t_p$ 、 $t_s$  下降，从而提高系统的快速性，同时保持  $\sigma_p$ 。
- 当保持  $\omega_n$  不变时，增大  $\zeta$  可使  $\sigma_p$  和  $t_s$  下降 ( $0 < \zeta < 0.8$ )，但使  $t_r$  和  $t_p$  上升。
- 系统的振荡性能和快速性相互矛盾，要使系统满足动态性能要求，必须选取合适的阻尼比和无阻尼自振荡率。
- 根据系统对超调量的要求选定  $\zeta$ ，然后再根据其它要求确定  $\omega_n$ 。

---

## 本次课结束

1)重点掌握二阶系统时域性能指标的计算 

2)重点掌握二阶系统时域性能指标与阻尼比、无阻尼振荡频率的关系 

3)重点掌握二阶系统根的分布与输出响应的关系

