第三章 线性系统的时域分析法

3.6 线性系统的稳态误差计算

稳态误差: 反映系统的稳态分量跟踪输入信号的准确度、抑制扰动信号的能力，是系统控制准确度（控制精度）的一种度量，称为稳态性能。

影响因素：

1）系统的结构、输入作用类型和输入函数形式——原理性稳态误差

2）系统的不灵敏区、零位输出、间隙、摩擦等非线性因素——附加稳态误差或结构性稳态误差）。——非理想情况导致的

只有当系统稳定时，研究稳态误差才有意义。**不稳定的系统无稳态误差。**

只讨论原理性稳态误差

3.6 线性系统的稳态误差计算

重点关注二个方面：

1）定性：系统类型与稳态误差的关系

2）定量：描述误差的两类系数（静态误差系数和动态误差系数）。

- **给定稳态误差**（**给定输入作用下**的稳态误差）

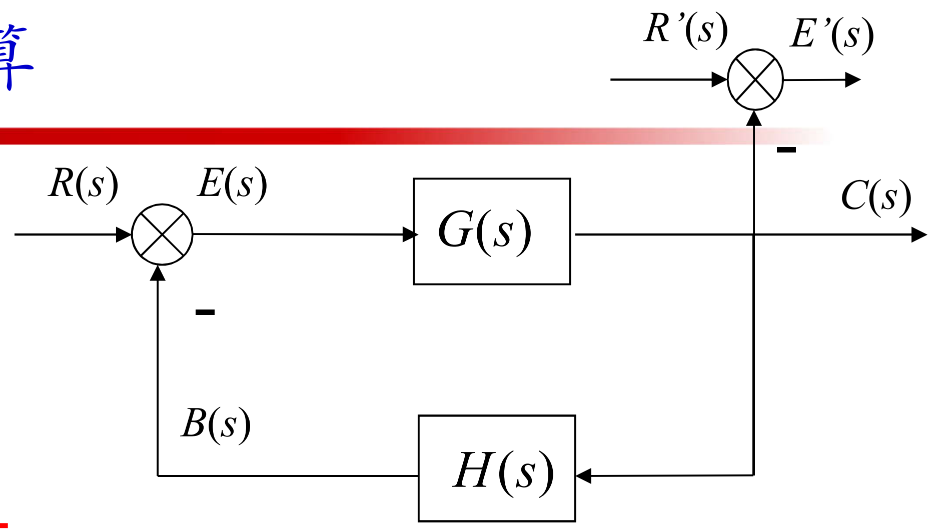
  给定输入，要求系统输出量以一定的精度跟随输入量，因而用**给定稳态误差**衡量系统的稳态性能。

- **扰动稳态误差**（**扰动输入作用下**的稳态误差）

  给定输入通常是不变的，需要分析在扰动作用下输出量受到扰动的影响，因而用**扰动稳态误差**衡量系统的稳态性能。

3.6 线性系统的稳态误差计算

一、误差与稳态误差



反馈系统结构图

1. 误差$E(s)$定义有两种形式：

1) 输入端定义，系统输入信号$R(s)$与反馈信号$B(s)$之间的**偏差**。

$$E(s)=R(s)-C(s)H(s)$$

可测，物理意义明显

信号可测

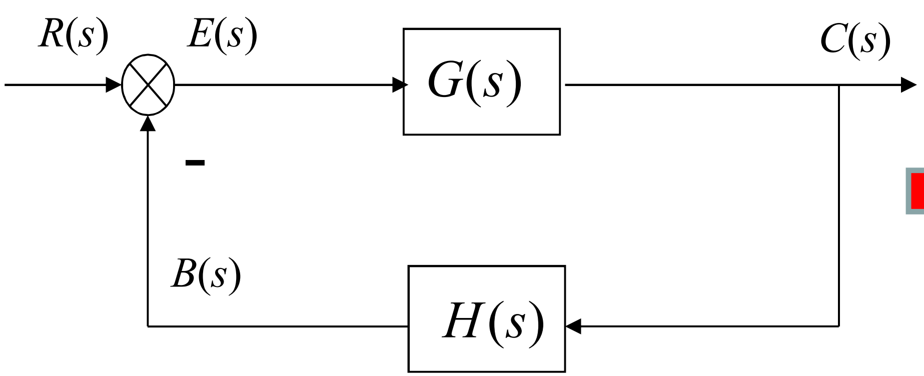
2) 输出端定义，系统输出信号的希望值$R'(s)$ 与实际值$C(s)$之误差。

指标提法，不便测量，强调数学意义

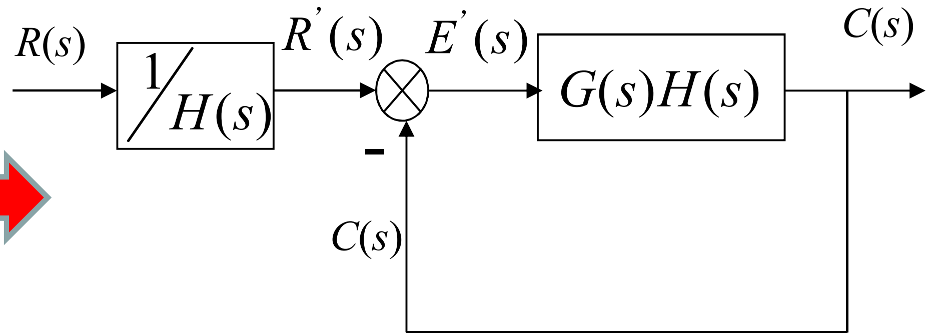
$$E'(s)=R'(s)-C(s)$$

信号不可测

3.6 线性系统的稳态误差计算



反馈系统结构图



等效单位反馈系统结构图

$$E(s)=R(s)-C(s)H(s)$$

$$E^{'}(s)=R^{'}(s)-C(s)=\frac{R(s)}{H(s)}-C(s)$$

$$\Downarrow$$

$$E^{'}(s)H(s)=R(s)-C(s)H(s)$$

$$E^{'}(s)H(s)=E(s)$$

- $E^{'}(s)$ 是从输出端定义的非单位反馈系统的误差
- 对于单位反馈系统，输出量的希望值就是输入信号$R(s)$，两种误差定义方法相同。

2. 误差响应

$E(s)$的**时域响应**即**误差响应**$e(t)$

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G(s)H(s)} \qquad E(s)=\Phi_e(s)R(s)=\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$e(t)=L^{-1}[E(s)]=L^{-1}[\Phi_e(s)R(s)]$$

例 $\quad G(s)=\frac{1}{Ts} \quad R(s)=\frac{1}{s^3} \quad E(s)=\Phi_e(s)R(s)=\frac{R(s)}{1+G(s)}=\frac{1}{s^2(s+\frac{1}{T})}$

$$=\frac{T}{s^2}-\frac{T^2}{s}+\frac{T^2}{s+\frac{1}{T}}$$

$$e(t)=T^2e^{-\frac{t}{T}}+T(t-T)$$

3.6 线性系统的稳态误差计算

$$e(t)=T^2e^{-\frac{t}{T}}+T(t-T)$$

误差信号$e(t)$中包含：瞬态分量$e_{ts}(t)$和稳态分量$e_{ss}(t)$两部分。

- 稳定系统的误差信号$e(t)$的瞬态分量$e_{ts}(t)$ ——趋于零@稳定系统
- 稳定系统的误差信号$e(t)$的稳态分量$e_{ss}(t)$部分，简写e_{ss}。

稳态误差：误差信号的稳态分量$e_{ss}(t)$在t趋于无穷时的数值$e_{ss}(\infty)$。

简写：e_{ss}

稳态分量e_{ss}怎么求？

$$\begin{cases} e(t)\big|_{t\to\infty}=? \\ \text{终值定理} \end{cases}$$

3. 终值误差

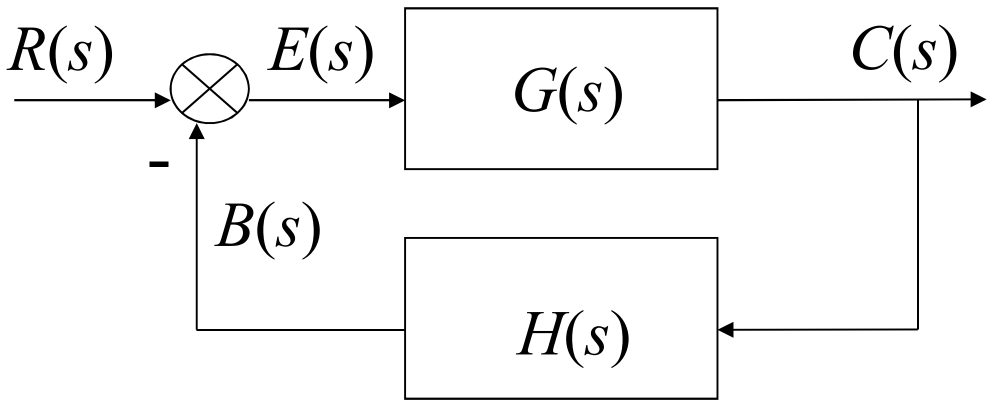
有理函数$sE(s)$的极点均位于s左半平面（包括坐标原点），则可利用拉氏变换的终值定理，即

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}$$

- 时间 t 趋向于无穷大时的误差——终值误差

- 终值误差不能反映$e_{ss}(t)$随时间变化的过程规律

二、系统类型



给定输入作用下系统结构图

稳态误差

$$E(s)=\Phi_e(s)R(s)=\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

输入信号 ⇨ 输入信号

系统结构 ⇨ 结构特征

（开环传函）

为了分析稳态误差与系统结构的关系，可以根据开环传递函数$G(s)H(s)$中串联的积分环节来规定控制系统的类型。

设系统的**开环传递函数**为

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{j=1}^{m}(\tau_j s+1)}{s^{\nu}\prod_{i=1}^{n-\nu}(T_i s+1)}$$

K为系统的开环增益

分母中的 s^{ν} 表示开环传递函数在原点处有重极点，或者说有 ν 个积分环节串联。当 $\nu=0,\ 1,\ 2,\ldots$ 时，分别称系统为0型、1型、2型……系统。

——引入“型别” 描述系统结构特征

3.6 线性系统的稳态误差计算

型别描述的优点：可以根据已知输入信号形式，判断系统是否存在原理性稳态误差及稳态误差大小。

——定性　　　　——定量

系统的**开环传递函数：**

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{j=1}^{m}(\tau_j s+1)}{s^{\nu}\prod_{i=1}^{n-\nu}(T_i s+1)}$$

令 $G_0(s)H_0(s)=\dfrac{\prod_{j=1}^{m}(\tau_j s+1)}{\prod_{i=1}^{n-\nu}(T_i s+1)}$

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s^{\nu}}G_0(s)H_0(s)$$

当s趋于0时，$G_0(s)H_0(s)$趋于1。

$\boxed{\text{稳态时稳态误差只与开环增益和型别有关}}$

3.6 线性系统的稳态误差计算

☆☆☆☆

$$e_{ss}(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}$$

你有我有，误差没有

内模原理

$$= \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+\frac{K}{s^{\nu}} G_0(s)H_0(s)}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{s^{\nu+1}\boxed{R(s)}}{\boxed{s^{\nu}+K}}$$

输入信号：输入形式、幅值

系统结构（开环传函）：型别、开环增益

$$= \lim_{s\to 0} \frac{\boxed{s^{\nu+1}R(s)}}{\boxed{s^{\nu}}+K}$$

- ν 个数 $\geq R$ 中 $1/s$ 个数, 0
- ν 个数 $< R$ 中 $1/s$ 个数, $\neq 0$
- $\nu=0$，1
- $\nu\neq 0$，0

三、阶跃输入时的稳态误差与静态位置误差系数

对于阶跃输入，$R(s)=R/s$，
$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{s^{\nu+1}R(s)}{s^{\nu}+K}$$

法一：直接计算各型系统在阶跃输入下的稳态误差：

$$e_{ss}(\infty)=\begin{cases}\dfrac{R}{1+K} & \nu=0\\ 0 & \nu\geq 1\end{cases}$$

法二：常用误差系数反映误差

系统在阶跃输入作用下的稳态误差

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G(s)H(s)}\cdot\frac{R}{s}=\frac{R}{1+\lim\limits_{s\to 0}G(s)H(s)}$$

将 $K_p=\lim\limits_{s\to 0}G(s)H(s)$ 定义为静态位置误差系数

在阶跃输入下稳态误差　$e_{ss}=\dfrac{R}{1+K_p}$　　$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)H(s)$

➢ **对于0型系统**，$\nu=0$

$$K_p=\lim_{s\to 0}\frac{K\prod_{j=1}^{m}(\tau_j s+1)}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)}=K$$

➢ **对于1型系统（或高于1型的系统）**，$\nu\ge 1$

$$K_p=\lim_{s\to 0}\frac{K\prod_{j=1}^{m}(\tau_j s+1)}{s^{\nu}\prod_{i=1}^{n-\nu}(T_i s+1)}=\infty$$

$$K_p=\begin{cases}K & \nu=0\\ \infty & \nu\ge 1\end{cases}$$

$$e_{ss}(\infty)=\begin{cases}\dfrac{R}{1+K} & \nu=0\\ 0 & \nu\ge 1\end{cases}$$

3.6 线性系统的稳态误差计算

$$e_{ss}(\infty)=\begin{cases}\dfrac{R}{1+K} & \nu=0\\ 0 & \nu\geq 1\end{cases}$$

- 由于**0型系统**中没有积分环节，它对阶跃输入的稳态误差为定值。
- **误差的大小与系统的开环放大系数K成反比**，K越大，e_{ss}越小。
- **只要K不是无穷大，系统总有误差存在。**

- 对实际系统，通常允许存在稳态误差，但不允许超过规定的指标。
- 为降低稳态误差，在稳定条件允许的前提下，增大开环放大系数。
- **问：如何保证系统对阶跃输入的稳态误差为零？**

  答： 必须选用1型或高于1型的系统。

内模原理：若想消除稳态误差，系统内部必须有输入函数的模型。

四、斜坡输入时的稳态误差与静态速度误差系数

对于斜坡输入 $R(s)=\dfrac{R}{s^2}$ ，

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{s^{\nu+1}R(s)}{s^{\nu}+K}$$

法一：直接计算各型系统在斜坡输入下的稳态误差：

$$e_{ss}(\infty)=\begin{cases}\infty & \nu=0\\ \dfrac{R}{K} & \nu=1\\ 0 & \nu\geq 2\end{cases}$$

四、 斜坡输入时的稳态误差与静态速度误差系数

法二：系统在斜坡输入作用下的稳态误差:

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G(s)H(s)}\cdot\frac{R}{s^2}=\frac{R}{\lim\limits_{s\to 0}sG(s)H(s)}$$

将 $K_v=\lim\limits_{s\to 0}sG(s)H(s)=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{K}{s^{\nu-1}}$ 定义为静态速度误差系数K_v

稳态误差可表示为 $e_{ss}=\dfrac{R}{K_v}$

$$K_V=\begin{cases}0 & \nu=0\\ K & \nu=1\\ \infty & \nu\ge 2\end{cases}\qquad e_{ss}(\infty)=\begin{cases}\infty & \nu=0\\ \dfrac{R}{K} & \nu=1\\ 0 & \nu\ge 2\end{cases}$$

3.6 线性系统的稳态误差计算

在斜坡输入作用下：
$$e_{ss}(\infty)=\begin{cases}\infty & \nu=0\\ \dfrac{R}{K} & \nu=1\\ 0 & \nu\geq 2\end{cases}$$

- **0型系统的稳态误差为∞;**
- **1型系统**的稳态误差为一定值，且**误差与开环放大系数成反比。**
  为了使稳态误差不超过规定值，可以增大系统的K值；
- **2型或高于2型系统的稳态误差总为零。**

因此，**对于斜坡输入，要使系统的稳态误差为一定值或为零，必需 ν≥1，也即系统必须有足够积分环节。**

五、加速度输入时的稳态误差与静态加速度误差系数

对于加速度输入 $R(s)=\dfrac{R}{s^3}$ ， $e_{ss}(\infty)=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{s^{\nu+1}R(s)}{s^{\nu}+K}$

法一：直接计算各型系统在加速度输入下的稳态误差：

$$e_{ss}(\infty)=\begin{cases}\infty & \nu=0,1\\ \dfrac{R}{K} & \nu=2\\ 0 & \nu\geq 3\end{cases}$$

五、 加速度输入时的稳态误差与静态加速度误差系数

法二：系统在加速度输入作用下的稳态误差

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G(s)H(s)}\cdot\frac{R}{s^3}=\frac{R}{\lim\limits_{s\to 0}s^2G(s)H(s)}$$

将 $K_a=\lim\limits_{s\to 0}s^2G(s)H(s)=\lim\limits_{s\to 0}\frac{K}{s^{\nu-2}}$ 定义为静态加速度误差系数Ka

稳态误差可表示为 $e_{ss}=\frac{R}{K_a}$ $K_a=\begin{cases}0 & \nu=0,1\\ K & \nu=2\\ \infty & \nu\geq 3\end{cases}$ $e_{ss}(\infty)=\begin{cases}\infty & \nu=0,1\\ \frac{R}{K} & \nu=2\\ 0 & \nu\geq 3\end{cases}$

在加速度输入作用下： $e_{ss}(\infty)=\begin{cases}\infty & \nu=0,1\\ \dfrac{R}{K} & \nu=2\\ 0 & \nu\ge 3\end{cases}$

- **0型和1型系统的稳态误差为∞；**
- **2型系统**的稳态误差为一定值，且**误差与开环放大系数成反比**。
- **3型或高于3型系统的稳态误差总为零。**但是，此时要使系统稳定则比较困难。

3.6 线性系统的稳态误差计算

若给定**输入信号是**上述**典型信号的线性组合**，则系统相应的**稳态误差就由叠加原理求出**。

例，若输入信号为

$$r(t) = \mathrm{A} + \mathrm{B}t + \frac{1}{2}Ct^2$$

则系统的总稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{\mathrm{A}}{1+K_p} + \frac{B}{K_v} + \frac{C}{K_a}$$

在各种典型输入信号作用下，不同类型系统的稳态误差如下表所示。

系统类别	静态误差系数			阶跃输入 $r(t)=R\cdot 1(t)$	斜坡输入r(t)=R t	加速度输入 $r(t)=\frac{Rt^2}{2}$
	K_p	K_v	K_a	$e_{ss}=\frac{R}{1+K_p}$	$e_{ss}=\frac{R}{K_v}$	$e_{ss}=\frac{R}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{R}{1+K}$	∞	∞
I	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$	∞
II	∞	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$
III	∞	∞	∞	0	0	0

当 $\nu=1$时，系统相对 $R(s)=\dfrac{A}{s}$ 的稳态误差为零；

当$\nu=2$ 时，系统相对$R(s)=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s^2}$ 的稳态误差为零；

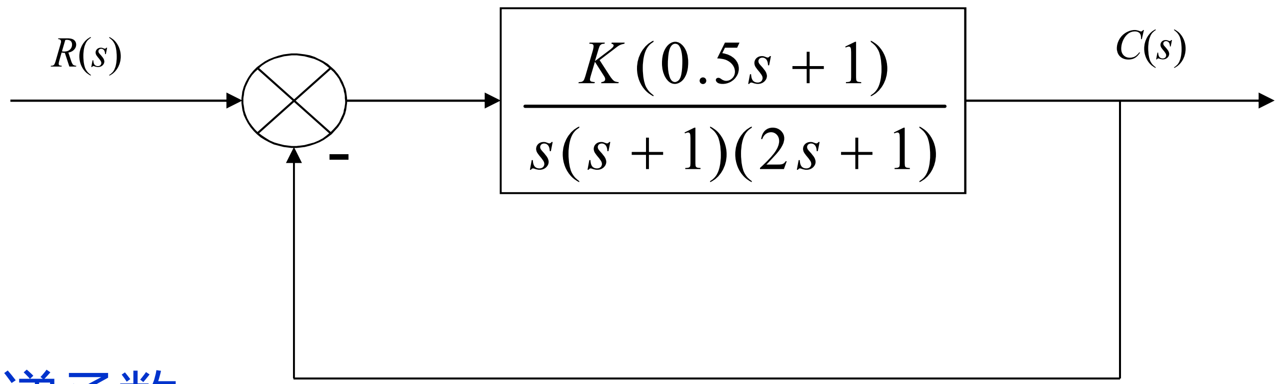
当$\nu=3$ 时，系统相对$R(s)=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s^2}+\dfrac{C}{s^3}$ 的稳态误差为零；

因此，当开环系统含有 ν个串联积分环节时，称系统对 给定输入 $r(t)$是ν 阶无差系统，而ν 称为**系统的无差度**。

提高开环放大系数K 或**增加开环传递函数中的积分环节数**，都**可以**达到**减小或消除系统稳态误差**的目的。但是，这两种方法都受到系统稳定性的限制。

3.6 线性系统的稳态误差计算

例 输入信号$r(t)=10+5t$，试分析系统的稳定性并求出其稳态误差。



解 求系统的闭环传递函数

$$G(s)=\frac{\dfrac{K(0.5s+1)}{s(s+1)(2s+1)}}{1+\dfrac{K(0.5s+1)}{s(s+1)(2s+1)}}=\frac{K(0.5s+1)}{s(s+1)(2s+1)+K(0.5s+1)}$$

$$=\frac{K(0.5s+1)}{2s^3+3s^2+(1+0.5K)s+K}$$

系统的特征方程为 $2s^3+3s^2+(1+0.5K)s+K=0$

由特征方程列劳斯表

$$\begin{array}{lll}
s^3 & 2 & 1+0.5K \\
s^2 & 3 & K \\
s^1 & \dfrac{3(1+0.5K)-2K}{3} & \\
s^0 & K &
\end{array}$$

系统稳定条件： $K>0$ ， $1+0.5K>0$ ， $3(1+0.5K)-2K>0$

解得 $K>0$， $K>-2$， $K<6$

所以，当 $0<K<6$ 时，系统是稳定的。

3.6 线性系统的稳态误差计算

系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K(0.5s+1)}{s(s+1)(2s+1)}$

系统的稳态误差系数分别为

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K(0.5s+1)}{s(s+1)(2s+1)}=\infty$$

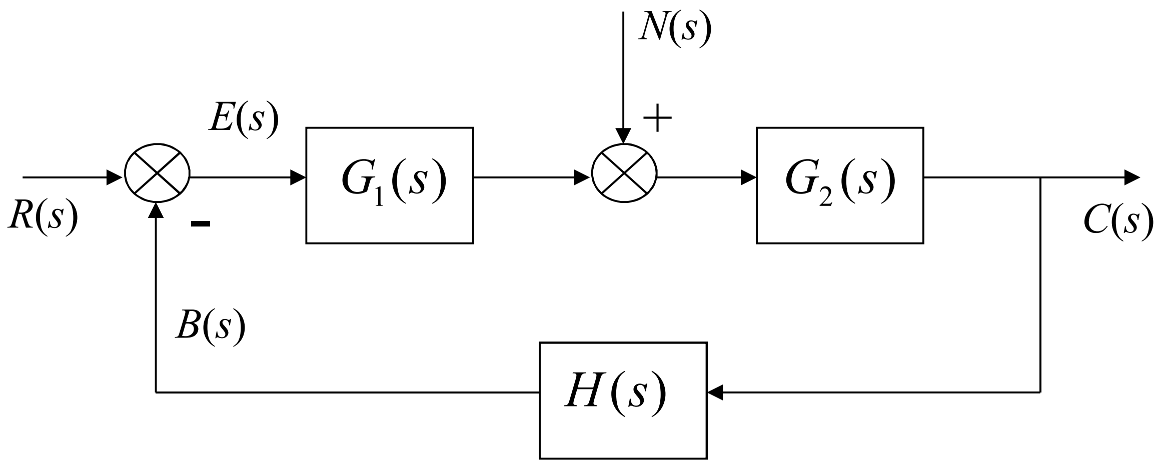
$$K_v=\lim_{s\to 0}sG(s)=\lim_{s\to 0}s\bullet\frac{K(0.5s+1)}{s(s+1)(2s+1)}=K$$

系统的稳态误差为： $e_{ss}=\dfrac{10}{1+K_p}+\dfrac{5}{K_v}=\dfrac{5}{K}$

系统的稳态误差与K成反比，K值越大，稳态误差越小。

但K值的增大受到稳定性的限制，当$K>6$时，系统将不稳定。

六、扰动作用下的稳态误差



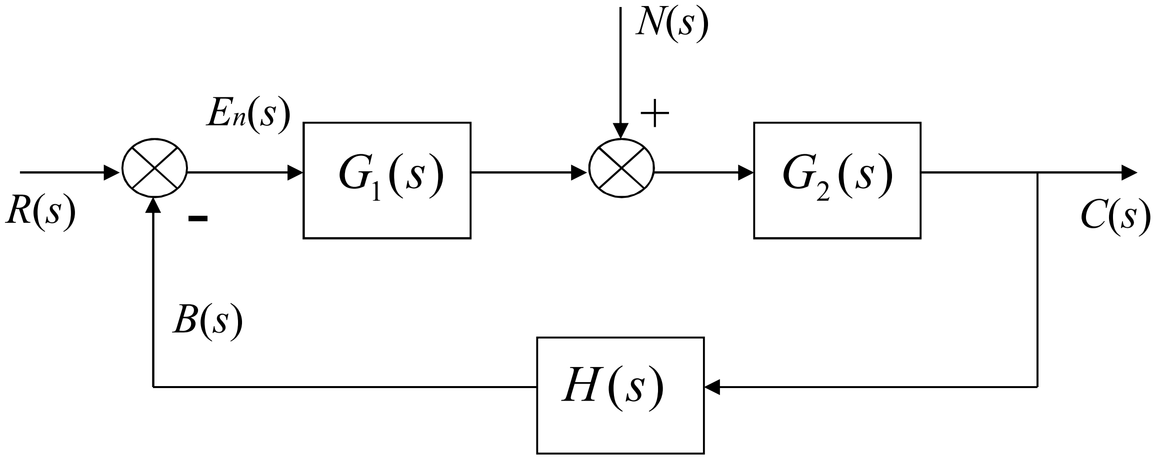
扰动输入作用下系统结构图

控制系统在扰动作用下的稳态误差值，反映系统抗干扰能力。

对于任意形式的扰动作用，系统稳态误差应该为零。

六、扰动作用下的稳态误差

按输入端定义稳态误差



扰动输入作用下系统结构图

$$E_n(s) = 0 - H(s)C(s)$$

在扰动作用下，稳态误差仍然指给定输入与反馈输出的偏差$E(s)$。

系统输出为 $C(s)=\dfrac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\cdot N(s)$

所以 $E_n(s)=-H(s)C(s)\ =-H(s)\cdot\dfrac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\cdot N(s)\ =\Phi_{en}(s)\cdot N(s)$

扰动输入作用下系统的误差传递函数:

负号！！！

$$\Phi_{en}(s)=-\frac{G_2(s)H(s)}{\boxed{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}}$$

系统闭环特征多项式相同

系统的稳态误差为

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0}sE_n(s)=\lim_{s\to 0}-\frac{sG_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\cdot N(s)$$

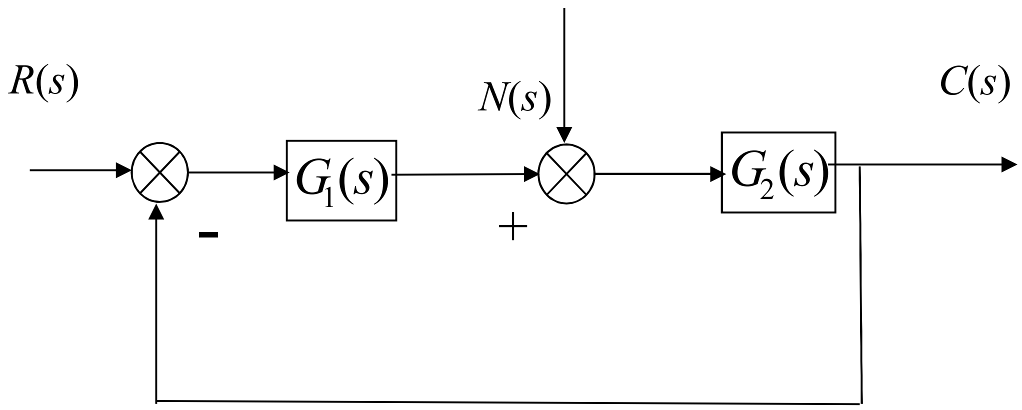
系统在给定和扰动共同作用下的稳态输出误差：

给定输入作用下 $$E_r(s)=\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\cdot R(s)=\Phi_{er}(s)\cdot R(s)$$

扰动输入作用下 $$E_n(s)=-\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\cdot N(s)=\Phi_{en}(s)\cdot N(s)$$

系统的总 稳态误差为 $$E(s)=\frac{R(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}-\frac{G_2(s)H(s)N(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

例 设控制系统如图所示,给定输入 $r(t)=R_r\cdot 1(t)$，扰动输入$n(t)=R_n\cdot 1(t)$（R_r 和R_n 均为常数），试求系统的稳态误差。



$$G_1(s)=\frac{K_1}{1+T_1 s}\qquad G_2(s)=\frac{K_2}{s(1+T_2 s)}$$

解： 当系统同时受到给定输入和扰动输入的作用时，其稳定误差为给定稳态误差和扰动稳态误差的叠加。

令$n(t)=0$时，求得给定输入作用下的误差传递函数为

$$\Phi_{er}(s)=\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} \qquad H(s)=1$$

所以给定误差为
$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)}\cdot R(s)$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{s^2(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)+K_1K_2}\cdot\frac{R_r}{s} = 0$$

令$r(t)$=0时，求得扰动输入作用下的误差传递函数为

$$\Phi_{en}(s) = -H(s)\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} \qquad H(s)=1$$

所以扰动稳态误差为 $$e_{ssn} = \lim_{s\to 0} s \cdot -\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)} N(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} -\frac{s\cdot K_2(1+\mathrm{T}_1 s)}{s(1+\mathrm{T}_1 s)(1+\mathrm{T}_2 s)+K_1K_2}\cdot\frac{R_n}{s}$$

$$= -\frac{R_n}{K_1}$$

3.6 线性系统的稳态误差计算

$$e_{ssr}=0 \qquad e_{ssn}=-\frac{R_n}{K_1}$$

系统总的稳态误差: $$e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssn}=-\frac{R_n}{K_1}$$

- $r(t)$和$n(t)$同是阶跃信号，由于在系统中的作用点不同，故它们产生的稳态误差不相同。
- 扰动稳态误差的表达式表明：**提高系统前向通道中扰动信号作用点之前的环节的放大系数（即K_1），可以减小系统的扰动稳态误差。**

为了分析系统中串联的积分环节对稳态误差的影响，假设

$$G_1(s)=\frac{K_1}{s(1+T_1s)} \qquad G_2(s)=\frac{K_2}{1+T_2s}$$

给定输入和扰动输入保持不变。

$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)}\cdot R(s)\ =0$$

$$e_{ssn}=\lim_{s\to 0}s\cdot-\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}\cdot N(s)$$

$$=\lim_{s\to 0}-\frac{s^2K_2(1+T_1s)}{s(1+T_1s)(1+T_2s)+K_1K_2}\cdot\frac{R_n}{s}=0$$

系统的总误差为

$$e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssn}=0$$

$$e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssn}=-\frac{R_n}{K_1} \qquad e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssn}=0$$

比较以上两次计算的结果可以看出

- 若要消除系统的给定稳态误差，则系统前向通道中串联的积分环节都起作用。
- 若要消除系统的扰动稳态误差，则在系统前向通道中只有扰动输入作用点之前的积分环节起作用。
- 若要消除由给定输入和扰动输入同时作用于系统所产生的稳态误差，则串联的积分环节应集中在前向通道中扰动输入作用点之前。

- 参考相对于给定输入的无差度，可定义**相对于扰动输入的无差度**。

- 当系统的 $G_1(s)$ 中含有 γ_1 个串联的积分环节时称系统相对于扰动输入是γ_1阶无差系统，而 γ_1 称为系统相对于扰动输入的**无差度**。

——对扰动误差而言，内模原理的限定对象是$G_1(s)$

- 对本例中的前一种情况，系统对扰动输入的无差度为0，而后一种情况，系统对扰动输入的无差度是1。

- 谈及一个系统的无差度时，应指明系统对哪一种输入作用而言，否则可能会得出错误的结论。

本次课结束

1）稳态误差的两种定义 ☆

2）不同型别和输入情况下的稳态误差计算

☆☆☆☆