结构图

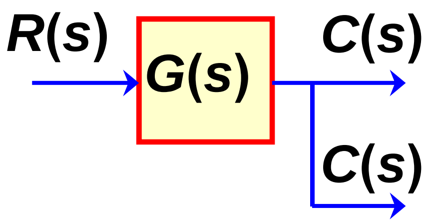
- 比较点和引出点的移动：

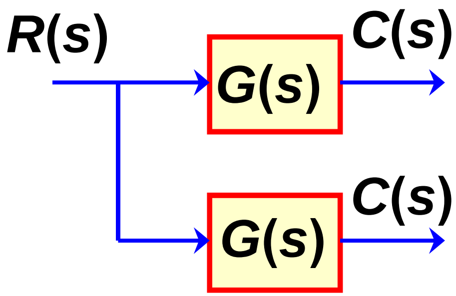
  等效原则：前向通道和反馈通道传递函数都不变。

- 引出点移动：

  1. 引出点前移

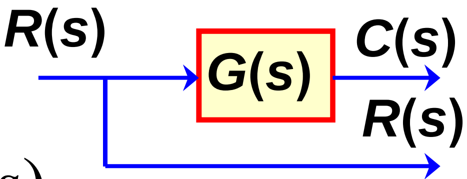
  $C(s)=G(s)R(s)$

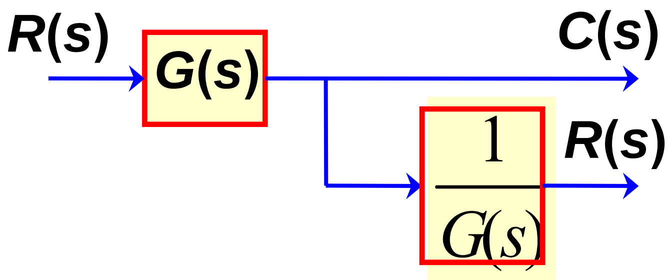




  2. 引出点后移

$$R(s)=\frac{1}{G(s)}G(s)R(s)$$

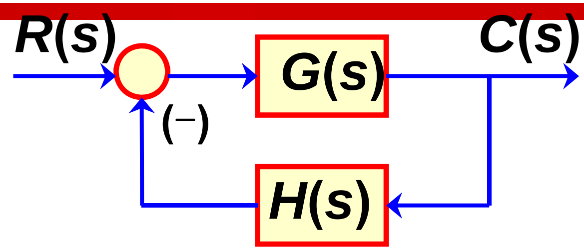


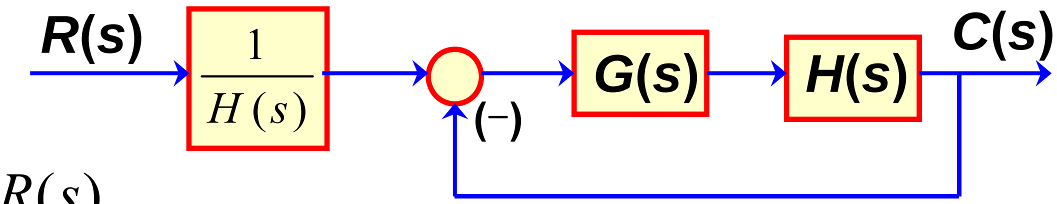


结构图

- **其它等价法则**

1. 等效为单位反馈系统





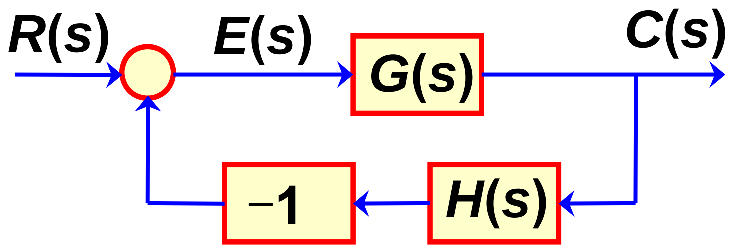
$$C(s)=\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}\cdot\frac{1}{H(s)}R(s)$$

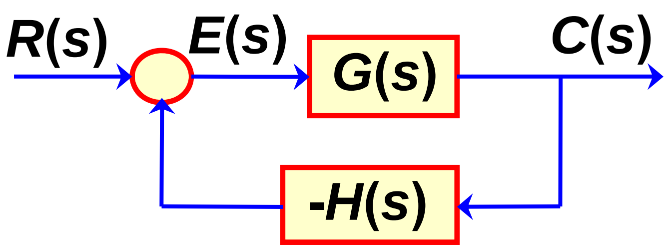
2. 负号可在支路上移动

$$E(s)=R(s)-H(s)C(s)$$

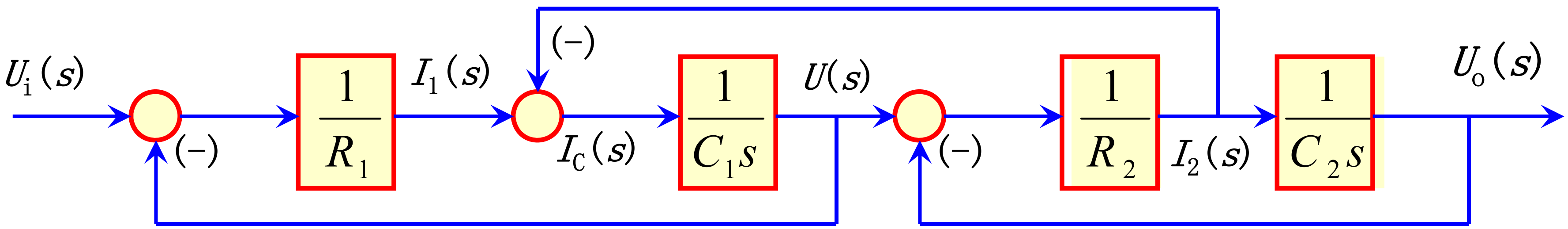
$$=R(s)+(-1)H(s)Cs)$$

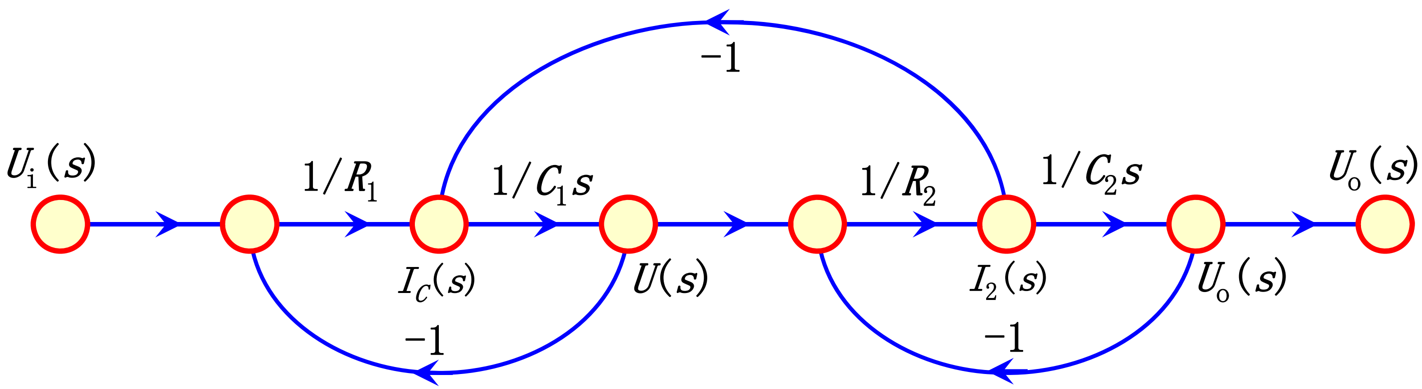
$$=R(s)+[-H(s)]C(s)$$





绘制结构图对应的信号流图





信号流图

二、梅逊公式

任一结构图中，某个输入对某个输出的传递函数为

$$P=\frac{\sum_{1}^{n} P_k \Delta_k}{\Delta}$$

式中：n 为前向通路的条数

P_k为第k条前向通路增益

Δ为系统特征式（闭环传递函数特征方程）

Δ=1-（所有单独回路增益之和）+（所有每两个互不接触回路增益乘积之和）-（所有三个互不接触回路增益乘积之和）+……

$$=1-\sum L_a+\sum L_b L_c-\sum L_d L_e L_f+\cdots$$

Δk为第k条前向通路特征式的余子式，即将第k条前向通路去掉，对余下的图再算一次Δ。

一阶系统的时域响应

图3-2中指数响应曲线的初始（t=0时）斜率为 $\dfrac{1}{T}$

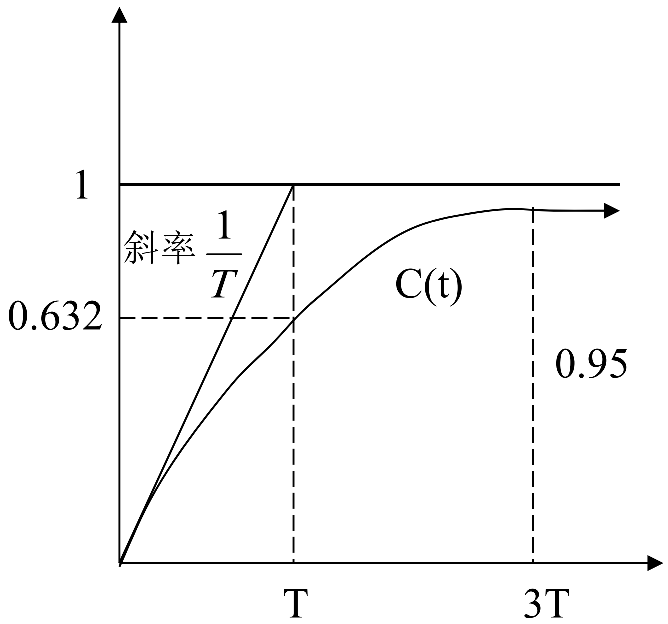


图3-2 一阶系统的单位阶跃响应

由式（3-2）可知，只有当t趋于无穷大时，响应的瞬态过程才能结束，在实际应用中，常以输出量达到稳态值的95%或98%的时间作为系统的响应时间（即调节时间），这时输出量与稳态值之间的偏差为5%或2%。

二阶系统的时域响应

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$$

对应的响应曲线如图**3-14**所示下面就根据式（**3-18**）和图**3-14**所示曲线来定义系统的瞬态性能指标，同时讨论性能指标与特征量之间的关系。

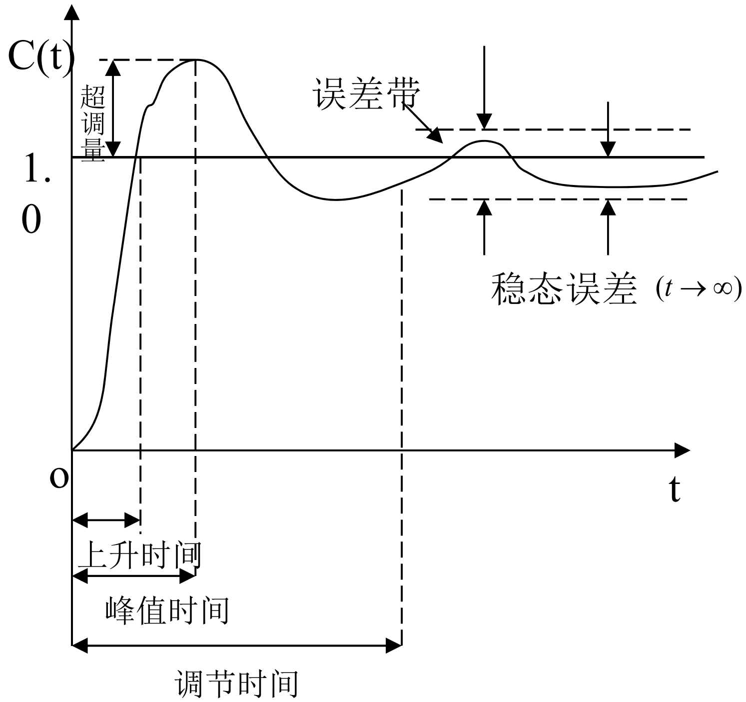
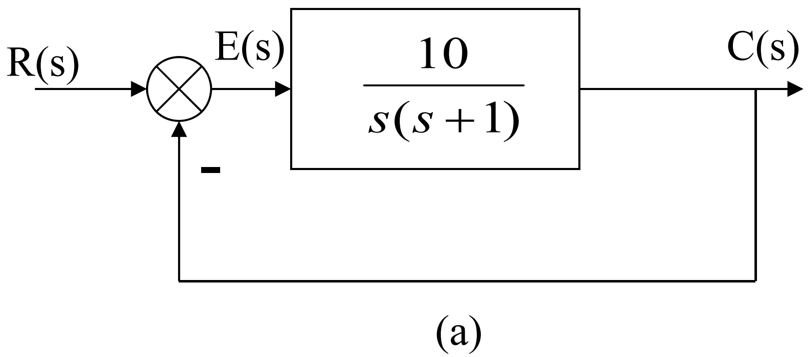


图3-14　二阶系统瞬态性能指标

$$C(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\sin(\omega_d t+\theta)\qquad t\geq 0\qquad (3-14)$$

例3-1　设控制系统 如图**3-16**所示。其中 **(a)** 为无速度反馈系统，**(b)** 为带速度反馈系统，试确定是系统阻尼比为**0.5**时 K_t 的值，并比较系统 **(a)** 和**(b)**阶跃响应的瞬态性能指标。



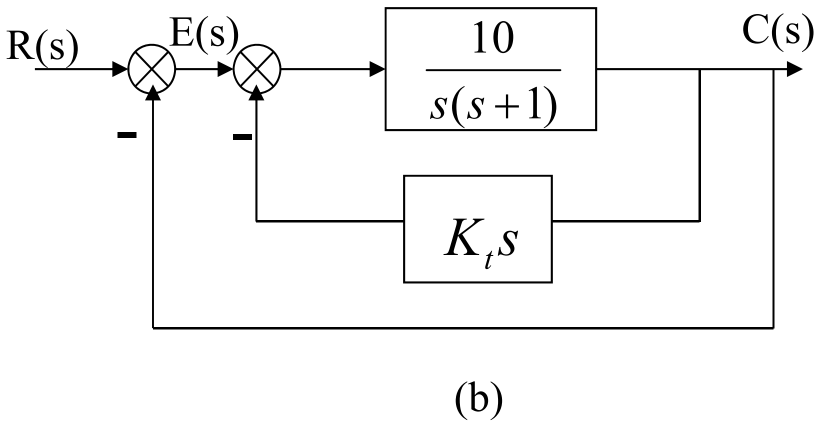


图3-16　例一系统结构图

解 系统（a）的闭环传递函数为$\Phi(s)=\dfrac{10}{s^2+s+10}$

将上式与式（3-6）相比较得 $2\zeta\omega_n=1$ $\omega_n^2=10$

解得 $\zeta=0.158$ $\omega_n=3.16$

根据式（3-19）、（3-20）、（3-21）、（3-24）、(3-25）计算上升时间

$$t_r=\frac{\pi-tg^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=0.55$$（秒）

二阶系统的时域响应

峰值时间 $$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.01 \quad (秒)$$

超调量 $$\sigma_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 60.4\%$$

调节时间 $$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = 6 \quad (秒) \quad (\Delta = 0.05)$$

振荡次数 $$N = \frac{1.5\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta} \approx 3 \quad (次) \quad (\Delta = 0.05)$$

系统 **(b)** 的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{10}{s^2 + (1+10K_t)s + 10}$$

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 s + a_0 = 0 \qquad (a_0 \rangle 0)$$

- 将方程各项**系数**组成**劳斯表**

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	$\ldots\ldots\ldots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	$\ldots\ldots\ldots$
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	$\ldots\ldots\ldots$
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	$\ldots\ldots\ldots$
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4	$\ldots\ldots\ldots$
$\vdots$					
s^2	e_1	e_2			
s^1	f_1				
s^0	g_1				

➢ 计算劳斯表的各系数

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

……

b_i

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	………
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	………
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	………
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	………
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4	………
$\vdots$					
s^2	e_1	e_2			
s^1	f_1				
s^0	g_1				

系数的计算一直进行到其余的b值**全部等于零**为止。

用同样的前两行系数交叉相乘的方法，可以计算c，d，… …e，f，g各行的系数。

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1} \qquad d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1} \qquad d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_{n-7} - a_{n-1} b_4}{b_1} \qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

这个计算过程一直进行到n+1行为止。为了简化运算，可以用一个**正整数**去乘或除其一行的各项，这将**不改变**稳定性的结论。

(2) 劳斯表某行的第一列系数等于零，而其余各项不全为零的情况

当劳斯表**某一行**的**第一列系数为零**，而**其余项不全为零**，**可用一个很小的正数 ε 代替第一列的零项**，然后按照通常方法计算劳斯表中的其余项。

(3)劳斯表某行所有系数均为零的情况

如果劳斯表中**某一行**（如第K行）**各项为零**，这说明在S平面内**存在以原点为对称的特征根**。

综上所述，应用劳斯表判据分析系统的稳定性时，一般可以按如下顺序进行：

1、确定系统**是否满足稳定的必要条件**。当特征方程的系数不满足 $a_i \rangle 0$(i=0,1,2,……n)时，系统是不稳定的。

2、**当**特征方程的系数**满足**$a_i \rangle 0$ (i=0,1,2,……n)**时**，计算劳斯表。当劳斯表的**第一列系数都大于零时**，系统是**稳定**的。如果第一**列出现小于零的系数**，则系统是**不稳定**的。

3、若计算劳斯表时出现情况（2）和（3），此时为确定系数极点的分布情况，可按情况（2）和（3）的方法处理。

运用劳斯判据，不仅可以判定系统是否稳定，还可以用来分析系统参数的变化对稳定性产生的影响，从而给出使系统稳定的参数范围。

在各种典型输入信号作用下，不同类型系统的给定稳态误差如表3-1所示。

系统类别	静态误差系数			阶跃输入 $r(t)=R\cdot I(t)$	斜坡输入r(t)=R t	加速度输入 $r(t)=\frac{Rt^2}{2}$
γ	K_p	K_γ	K_a	$e_{ss}=\frac{R}{1+K_p}$	$e_{ss}=\frac{R}{K_\gamma}$	$e_{ss}=\frac{R}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{R}{1+K}$	∞	∞
I	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$	∞
II	∞	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$
	∞	∞	∞	0	0	0

表3-1 输入信号作用下的稳态误差

二、输入作用下的稳态误差

在图3-22所示系统中，如果不计扰动输入的影响，可以求得系统的给定稳态误差。此时，系统的结构图可简化为图3-23。

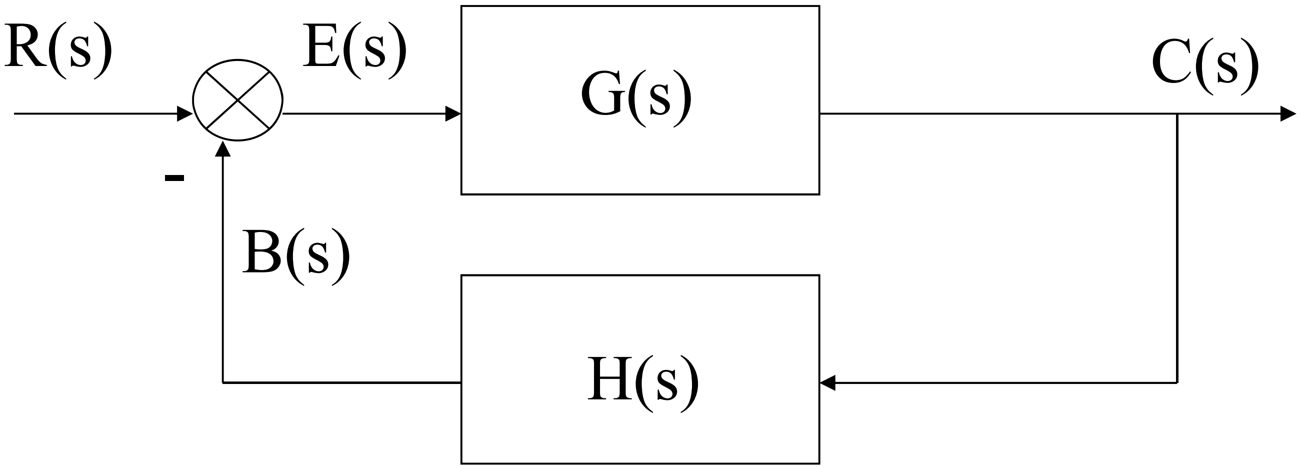


图3-23 给定输入作用下系统结构图

由图3-23可知

$$C(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}\cdot R(s)$$

由误差的定义可知

$$E(s)=R(s)-B(s)=R(s)-H(s)C(s)$$

$$=\frac{1}{1+G(s)H(s)}\cdot R(s)=\Phi_{er}(s)R(s)$$

式中

$$\Phi_{er}(s)=\frac{1}{1+G(s)H(s)}$$

称为给定输入作用下系统的**误差传递函数**。

控制系统的稳态误差

应用拉氏变换的终值定理可以方便地求出系统的稳态误差。

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)} \qquad (3\text{-}33)$$

式 **(3-33)** 是确定给定稳态误差的一个基本公式。它表明，在给定输入作用下，系统的稳态误差与系统的结构、参数和输入信号的形式有关，对于一个给定的系统，当给定输入的形式确定后，系统的**稳态误差**将**取决于以开环传递函数描述的系统结构**。

下面根据线性系统的叠加原理，以图3-25所示系统来讨论由扰动输入所产生的稳态误差。按照前面给出的误差信号的定义可得扰动输入引起的误差为

$$E(s)=R(s)-B(s)=-H(s)C(s)$$

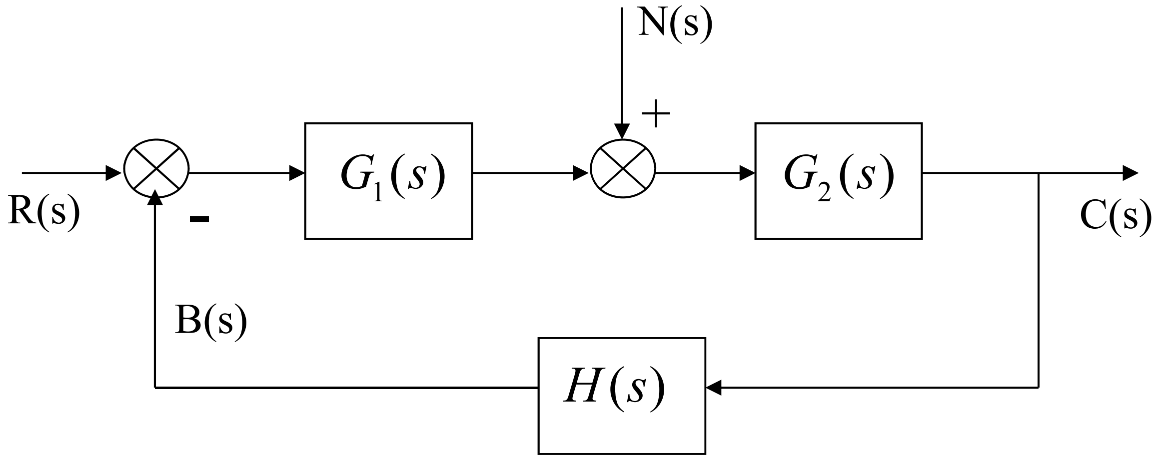


图3-25　扰动输入作用下系统结构图

而此时系统的输出为

$$C(s)=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\cdot N(s)$$

所以

$$E(s)=-\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\cdot N(s)=\Phi_{en}(s)\cdot N(s)$$

式中

$$\Phi_{en}(s)=-\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

称为扰动输入作用下系统的误差传递函数。

此时，系统的稳态误差为

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}e(t)=\lim_{s\to 0}-\frac{sG_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\cdot N(s)$$

例 3-10 设控制系统如图3-26所示，其中 $G_1(s)=\dfrac{K_1}{1+T_1 s}$ **，** $G_2(s)=\dfrac{K_2}{s(1+T_2 s)}$**，给定输入** $r(t)=R_r(s)\cdot 1(t)$**， 扰动输入** $n(t)=R_n(t)\cdot 1(t)$ **（**R_r **和** R_n **均为常数），试求系统的稳态误差。**

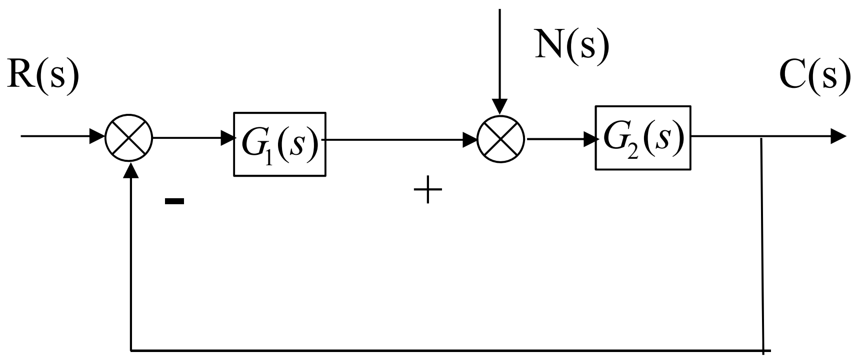


图3-26 例3-10系统结构图

解：当系统同时受到给定输入和扰动输入的作用时，其稳定误差为给定稳态误差和扰动稳态误差的叠加。

令n(t)=0时，求得给定输入作用下的误差传递函数为

$$\Phi_{er}(s)=\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)}$$

所以给定误差为

$$\begin{aligned}e_{ssr}&=\lim_{s\to 0}\frac{s\cdot R(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}\\&=\lim_{s\to 0}\frac{s^2(1+\mathrm{T}_1 s)(1+\mathrm{T}_2 s)}{s(1+\mathrm{T}_1 s)(1+\mathrm{T}_2 s)+K_1K_2}\cdot\frac{R_r}{s}\\&=0\end{aligned}$$

令r(t)=0时，求得扰动输入作用下的误差传递函数为

$$\Phi_{en}(s) = -\frac{G_2(s)}{1+G\ (s)G_2(s)}$$

所以扰动稳态误差为

$$e_{ssn} = \lim_{s\to 0} -\frac{sG_2(s)\cdot N(s)}{1+G_1(s)G_2(s)} = \lim_{s\to 0} -\frac{s\cdot K_2(1+\mathrm{T}_1 s)}{s(1+\mathrm{T}_1 s)(1+\mathrm{T}_2 s)+K_1K_2}\cdot\frac{R_n}{s} = -\frac{R_n}{K_1}$$

由上式计算可以看出，r(t)和n(t)同是阶跃信号，由于在系统中的作用点不同，故它们产生的稳态误差也不相同。此外，由扰动稳态误差的表达式可见，提高系统前向通道中扰动信号作用点之前的环节的放大系数（即K_1），可以减小系统的扰动稳态误差。

该系统总的稳态误差为 $e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssn}=-\dfrac{R_n}{K_1}$

为了分析系统中串联的积分环节对稳态误差的影响，我们假设图3-26中

$$G_1(s)=\frac{K_1}{s(1+\mathrm{T}_1 s)} \qquad G_2(s)=\frac{K_2}{1+\mathrm{T}_2 s}$$

给定输入和扰动输入保持不变。这时，系统的稳态误差可按上述相同的方法求出，即

$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}=0$$

$$e_{ssn}=\lim_{s\to 0}-\frac{sG_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}\cdot N(s)$$

$$=\lim_{s\to 0}-\frac{s^2K_1(1+\mathrm{T}_2s)}{s(1+\mathrm{T}_1s)(1+\mathrm{T}_2s)+K_1K_2}\cdot\frac{R_n}{s}=0$$

系统的总误差为 $e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssn}=0$

比较以上两次计算的结果可以看出，若要消除系统的给定稳态误差，则系统前向通道中串联的积分环节都起作用。若要消除系统的扰动稳态误差，则在系统前向通道中只有扰动输入作用点之前的积分环节才起作用。因此，若要消除由给定输入和扰动输入同时作用于系统所产生的稳态误差，则串联的积分环节应集中在前向通道中扰动输入作用点之前。

对于非单位反馈系统，当H（s）为常数时，以上分析的有关结论同样适用。前面定义了相对于给定输入的无差度，同样也可以定义**相对于扰动输入的无差度**。当系统的 $G_1(s)$ 中含有 γ_1 个串联的积分环节时称系统相对于扰动输入是 γ_1 阶无差系统，而 γ_1 称为系统相对于扰动输入的**无差度**。

对本例中的前一种情况，系统对扰动输入的无差度为0，而后一种情况，系统对扰动的无差度是1。显然，当谈及一个系统的无差度时应指明系统对哪一种输入作用而言，否则，可能会得出错误的结论。

在图3-27所示系统中，为了消除由r(t)引起的稳态误差，可在原反馈控制的基础上，从给定输入处引出前馈量经补偿装置$G_c(s)$，对系统进行开环控制。此时系统误差信号的拉氏变换式为

$$E(s)=R(s)-G_2(s)[G_1(s)E(s)+G_c(s)R(s)]$$

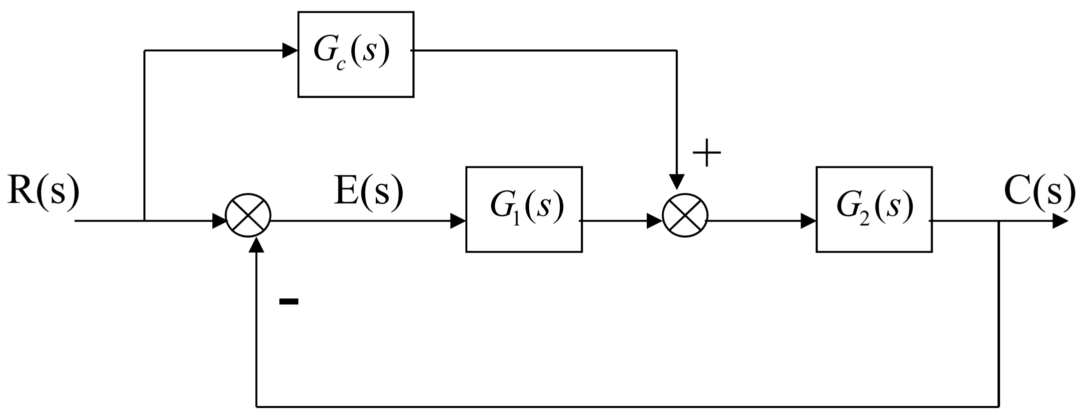


图3-27 按给定输入补偿的复合控制

在图3-28所示系统中，为了消除由n(t)引起的稳态误差，可在原反馈控制的基础上，从扰动输入引出前馈量经补偿装置 $G_c(s)$ 加到系统中，若设r(t)=0，则系统的输出C(s)就是系统的误差信号。系统输出的拉氏变换式为

$$C(s)=G_2(s)[N(s)-G_1(s)G_c(s)N(s)-G_1(s)C(s)]$$

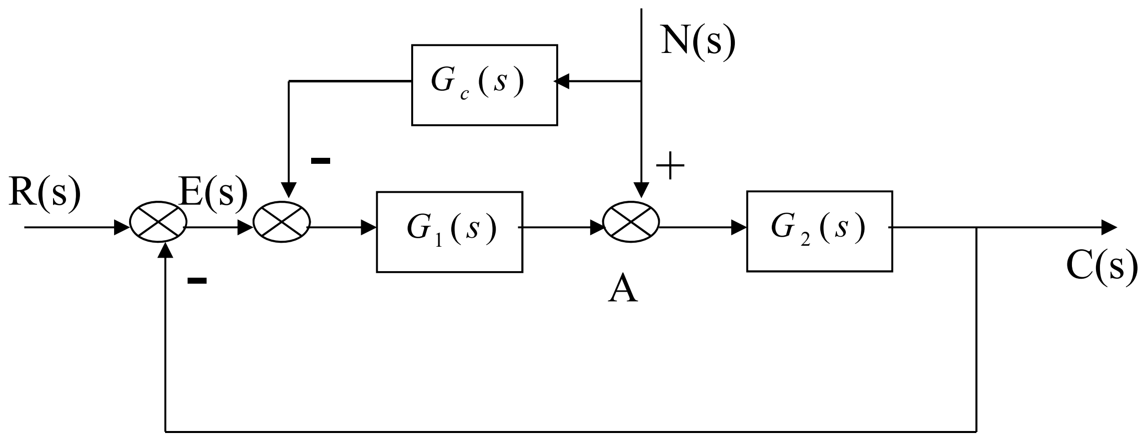
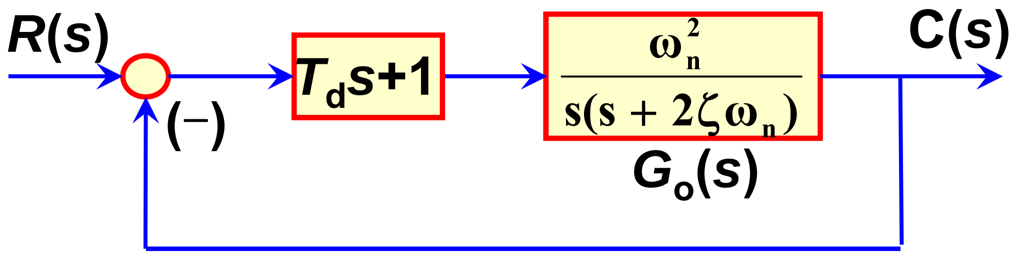


图3-28 按扰动输入补偿的复合控制

比例-微分环节对系统动态特性的影响



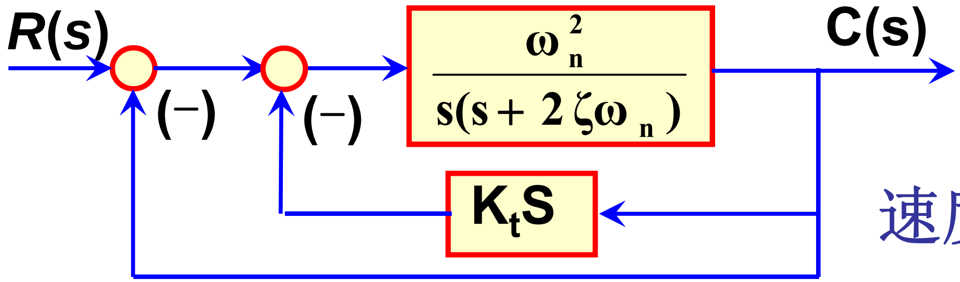
开环传递函数:

$$G(s)=\frac{C(s)}{E(s)}=\frac{\omega_n^{\ 2}(T_d s+1)}{s(s+2\varsigma\omega_n)}=\frac{K(T_d s+1)}{s(s/2\varsigma\omega_n+1)}$$

闭环传递函数:

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}}{a}\left(\frac{s+a}{s^2+2\varsigma_d\omega_n s+\omega_n^2}\right),a=1/T_d,\varsigma_d=\varsigma+\frac{\omega_n}{2a}$$

闭环系统具有零点,可以使上升时间提前.阻尼增大,超调减小。



速度反馈对系统动态特性的影响

开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{C(s)}{E(s)}=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\varsigma\omega_n+k_t\omega_n^2)}=\frac{\omega_n}{2\varsigma+k_t\omega_n}\times\frac{1}{s\left[s/\left(2\varsigma\omega_n+k_t\omega_n^2\right)+1\right]}$$

闭环传递函数：

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+(2\varsigma\omega_n+k_t\omega_n^2)s+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\varsigma_t\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\zeta_t=\zeta+\frac{1}{2}k_t\omega_n$$

❑由上可知：

1) 速度反馈使ς增大，振荡和超调减小，改善了系统平稳性；
2) 速度负反馈控制的闭环传递函数无零点，其输出平稳性优于比例——微分控制；
3) 系统增益不变；

四、根轨迹与系统性能

稳定性　如果系统特征方程的根都位于S平面的左半部，系统是稳定的，否则是不稳定的。若根轨迹穿越虚轴进入右半S平面，根轨迹与虚轴交点处的K值，就是临界稳定的开环增益K_c。

稳态性能　开环系统在坐标原点有一个极点，所以属 I 型系统，因而根轨迹上的K值就是静态速度误差系数。如果给定系统的稳态误差要求，则可由根轨迹图确定闭极点位置的允许范围。

动态性能　当$0<K_r<1$时，所有闭环极点均位于实轴上，系统为过阻尼系统，其单位阶跃响应为单调上升的非周期过程。当$K_r=1$时，特征方程的两个相等负实根，系统为临界阻尼系统，单位阶跃响应为响应速度最快的非周期过程。当$K_r>1$时，特征方程为一对共轭复根，系统为欠阻尼系统，单位阶跃响应为阻尼振荡过程，振荡幅度或超调量随K_r值的增加而加大，但调节时间不会有显著变化。

二、绘制根轨迹的基本规则

通常，我们把以开环根轨迹增益 K_r 为可变参数绘制的根轨迹叫做普通根轨迹（或一般根轨迹）。绘制普通根轨迹的基本规则主要有7条：

1、根轨迹的起点与终点；

2、根轨迹的分支数；

3、实轴上的根轨迹；

4、根轨迹的渐近线；

5、根轨迹在实轴上的分离点；

6、根轨迹的起始角和终止角；

7、根轨迹与虚轴的交点。

二、基于辅助函数 $F(s)$的奈氏判据

为了分析反馈控制系统的稳定性，只须判断是否存在S平面右半部的闭环极点。为此，在S平面上作一条完整的封闭曲线Γs，使它包围S平面右半部且按顺时针环绕。如图5—40所示，该曲线包括S平面的整个虚轴（由 $\omega=-\infty$ 到 $\omega=+\infty$）及右半平面上以原点为圆心，半径为无穷大的半圆弧组成的封闭轨迹。这一封闭无穷大半圆称作奈氏轨迹。显然，由奈氏轨迹包围的极点数P和零点数Z，就是F(s)位于S平面右半部的极点数和零点数。

前面已经指出，辅助函数 $F(s)$ 的极点等于系统的开环极点， $F(s)$ 的零点等于系统的闭环极点。因此，如果奈氏轨迹中包围 $F(s)$ 的零点数Z=0，系统是稳定的，此时由 $F(s)$ 映射到 $F(s)$ 平面上的封闭曲线 Γ_F 逆时针绕坐标原点的周数应为

$$N=P \qquad (5\text{-}114)$$

由此得到应用幅角定理分析系统稳定性的判据如下：

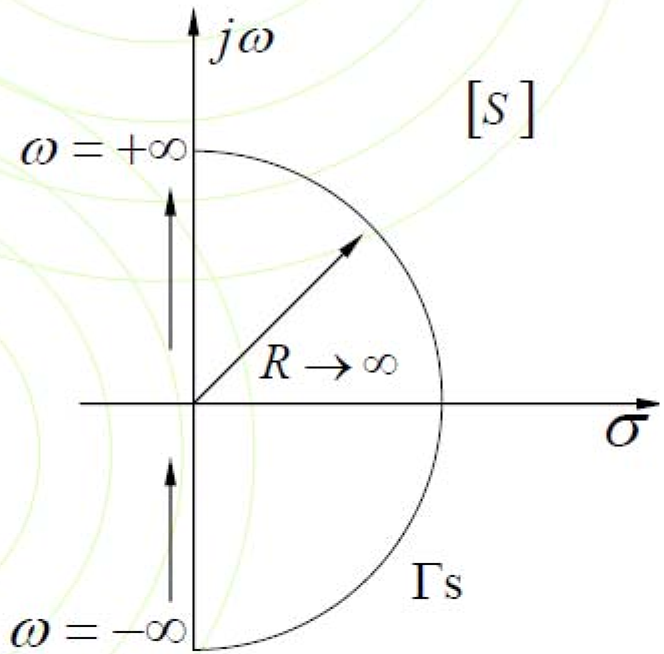


图5-40 Nyquist轨迹

若辅助函数$F(s)$的解析点s沿奈氏轨迹Γs 按顺时针连续环绕一周，它在 $F(s)$平面上的映射Γ_F 按逆时针方向环绕其原点 P周，则系统是稳定的，否则是不稳定的。

通常情况下，开环系统是稳定的，即S平面右半部的开环极点数P=0。此时系统稳定的充分条件是不包围 $F(s)$ 平面坐标原点，即 N=0。

三、基于开环传递函数 $G(s)H(s)$的奈氏判据

用辅助函数 $F(s)=1+G(s)H(s)$ 来分析系统的稳定性仍然不大方便，实际上，开环传递函数与辅助函数之间的关系非常简单，即

$$G(s)H(s)=F(s)-1 \qquad (5\text{-}115)$$

上式意味着将 $F(s)$平面的纵轴向右平移一个单位后构成的平面即为 GH平面（如图5-41）。$F(s)$平面的坐标原点是GH 平面的$(-1, jo)$ 点。因此，Γ_F 绕 $F(s)$平面原点的周数等效于Γ_{GH} 绕GH平面 $(-1, jo)$点的周数。

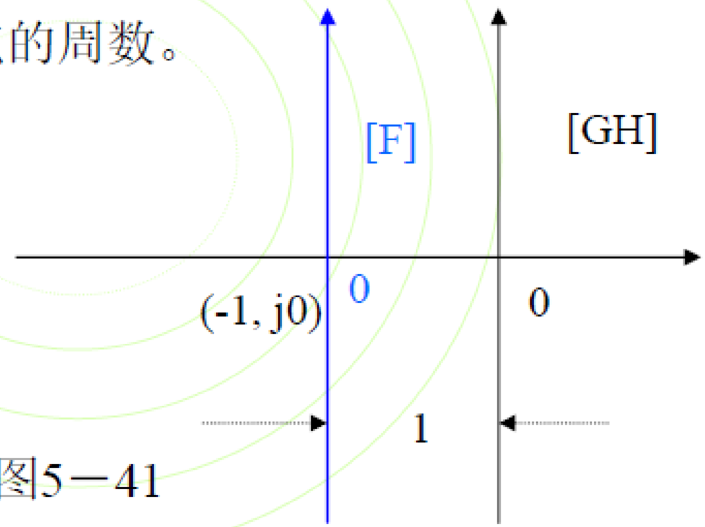


图5－41

由分析，得到基于开环传递函数$G(s)H(s)$的奈氏判据如下：

闭环系统稳定的充分必要条件是奈氏轨迹映射在GH平面上的封闭曲线Γ_{GH}逆时针包围$(-1, jo)$点P周，其中P为开环传递函数$G(s)H(s)$在S平面右半部的极点数。

当$G(s)H(s)$在S平面右半部没有极点时，即P=0，闭环系统稳定的充分必要条件是Γ_{GH}在GH平面上不包围$(-1, jo)$点。

四、基于开环频率特性 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的奈氏判据

（一） $G(s)H(s)$ 与 $G(j\omega)H(j\omega)$ 之间的关系

前面曾经指出，频率特性是 $s = j\omega$ 特定情况下的传递函数。下面分两种情况来研究 $G(s)H(s)$ 与 $G(j\omega)H(j\omega)$ 之间的关系。

1、当 $G(s)H(s)$ 在S平面虚轴上（包括原点）无极点时，奈氏轨迹可分成三个部分如图5—42所示，（1） $-\infty < \omega \le 0$ ，s沿负虚轴变化；（2） $0 \le \omega < +\infty$ ，s沿正虚轴变化；（3） $s = \lim\limits_{R\to\infty} Re^{-j\phi}$ ，s沿以原点为圆心，半径为无穷大的右半圆弧变化，其中 $\phi = \pi$ ，对应ω由 $+\infty \to -\infty$ 顺时针绕。

（1）当s在S平面负虚轴上变化时， $s = -j\omega$ ，

$$\left|G(s)H(s)\right|_{s=-j\omega} = G(-j\omega)H(-j\omega)$$

$$= \left|G(j\omega)H(j\omega)\right|e^{-j\angle G(j\omega)H(j\omega)} \qquad (5\text{-}117)$$

在[GH]平面上的映射如图5—43中曲线（1）。

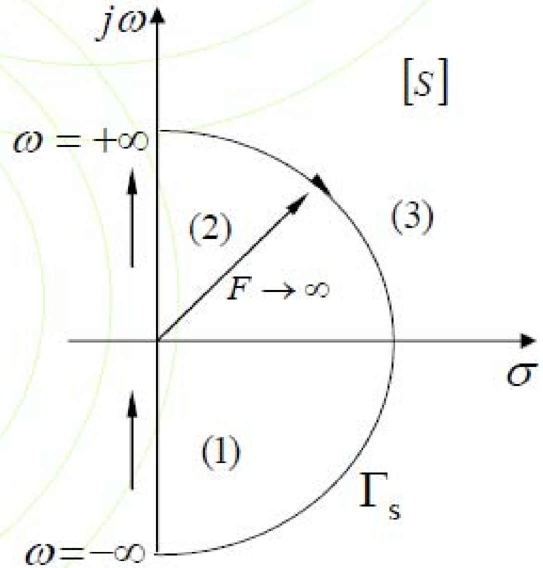


图5-42 Nyquist轨迹

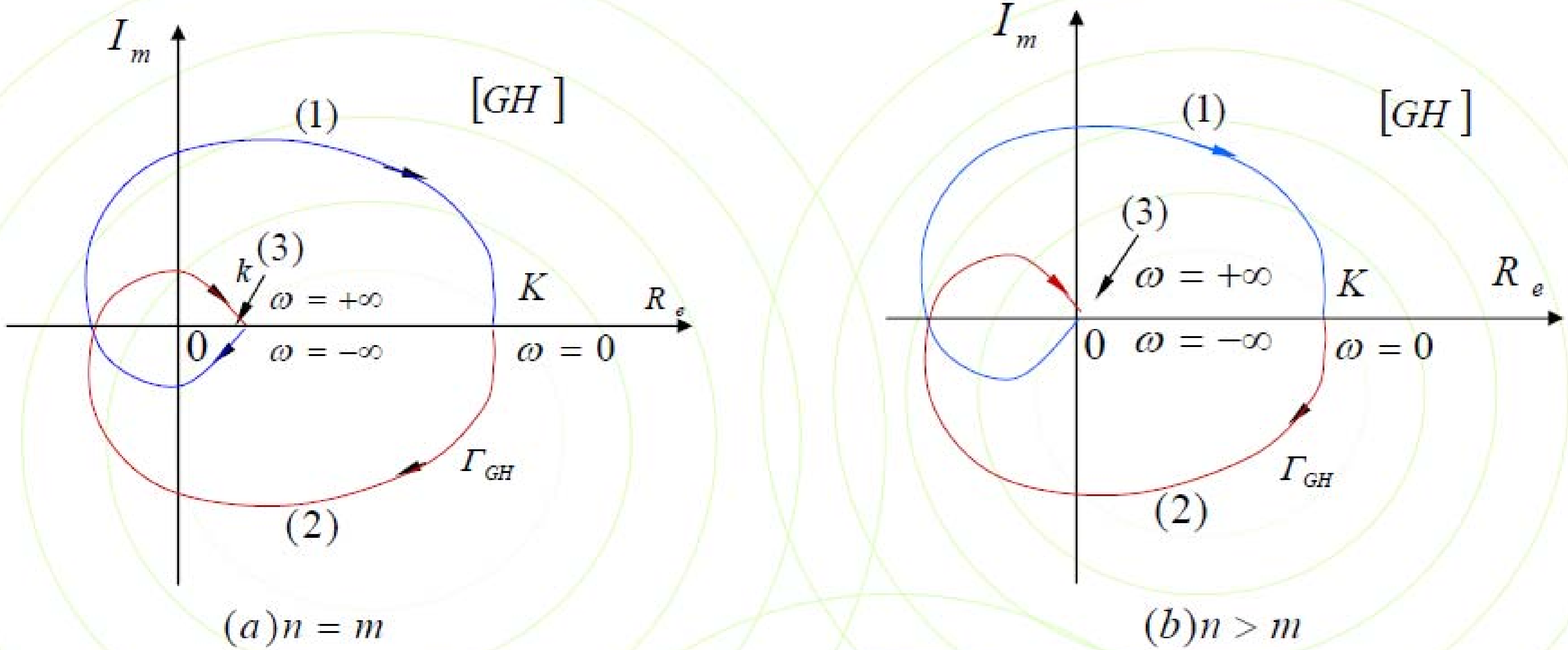


图5-43 Γ_s 在GH平面上的映射

（2）当s在S平面正虚轴上变化时，$s=j\omega$

$$\left|G(s)H(s)\right|_{s=j\omega}=G(j\omega)H(j\omega)$$
$$=\left|G(j\omega)H(j\omega)\right|e^{j\angle G(j\omega)H(j\omega)}$$

如图5-43中的曲线（2），这正是系统的开环频率特性。由于正负虚轴在S平面上以实轴为对称，它们在GH平面上的映射曲线（1）、（2）两部分也对称于实轴。

当Γ_s过平面原点时，$s = jo$ ，它在GH平面上的映射为

$$\left|G(s)H(s)\right|_{s=jo} = G(jo)H(jo) = K \tag{5-118}$$

即S平面的原点在GH平面上的映射为常数K（K为系统开环放大系数）。

（3）当s在Γ_s的第三部分上的变化时，$s = \lim\limits_{R\to\infty} \mathrm{Re}^{-j\phi}$,

$$G(s)H(s)\Big|_{s=\lim\limits_{R\to\infty}\mathrm{Re}^{-j\phi}} = \left.\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots\ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 s + a_0}\right|_{s=\lim\limits_{R\to\infty}\mathrm{Re}^{-j\phi}}$$

$$= (\lim_{R\to\infty}\frac{b_m}{a_n}\cdot\frac{1}{R^{n-m}})e^{j(n-m)\phi} \tag{5-119}$$

当n=m时，

$$G(s)H(s)\Big|_{s=\lim\limits_{R\to\infty}\mathrm{Re}^{-j\phi}} = \frac{b_m}{a_n} = k \tag{5-120}$$

奈氏轨迹的第三部分（无穷大半圆弧）在GH平面上的映射为常数K，如图5—43（a）所示。

当n>m时，
$$G(s)H(s)\Big|_{s=\lim\limits_{R\to\infty}\mathrm{Re}^{-j\phi}} = o\cdot e^{j(n-m)\phi} \tag{5-121}$$

Γ_s的第三部分在GH平面上的映射是它的坐标原点（图5—43（b））。

奈氏轨迹Γs 在GH平面上的映射称为奈奎斯特曲线或奈氏曲线。

2、当$G(s)H(s)$在S平面的虚轴上（包括原点）有极点时，由于奈氏轨迹不能经过开环极点，Γs必须避开虚轴上的所有开环极点。增加第4部分曲线，如图5-44所示。其中（1）（2）和（3）部分的定义与图5—42相同.

第（4）部分的定义是： $s=\lim\limits_{r\to 0} re^{j\theta} \quad (-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$

表明s沿以原点为圆心，半径为无穷小的右半圆弧上逆时针变化（ω由$o_- \to o_+$ ）。这样， Γs 既绕过了$G(s)H(s)$ 原点上的极点， 又包围了整个右半S平面，如果在虚轴上还有其它极点，亦可采用同样的方法，将Γs 绕过这些虚轴上的极点。

设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{k(s-z_1)(s-z_2)\ldots\ldots(s-z_m)}{s^v(s-p_1)(s-p_2)\ldots\ldots(s-p_{n-v})} \tag{5-122}$$

其中v称为无差度，即系统中含积分环节的个数或位于原点的开环点数。当$s=\lim\limits_{r\to 0} re^{j\theta}$时，

$$G(s)H(s)\Big|_{s=\lim\limits_{r\to 0} re^{j\theta}}=\frac{k(s-z_1)(s-z_2)\ldots\ldots(s-z_m)}{s^v(s-p_1)(s-p_2)\ldots\ldots(s-p_n)}\Bigg|_{\lim\limits_{r\to 0} re^{j\theta}}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{K}{r^v}e^{-jv\theta}=\infty e^{-jv\theta} \tag{5-123}$$

式(5-123)表明， Γs 的第（4）部分无穷小半圆弧在 GH平面上的映射为顺时针旋转的无穷大圆弧，旋转的弧度为 $v\pi$ 弧度。图5—45（a）、（b）分别表示当 v=1和v=2时系统的奈氏曲线，其中虚线部分是Γs 的无穷小半圆弧在GH平面上的映射。

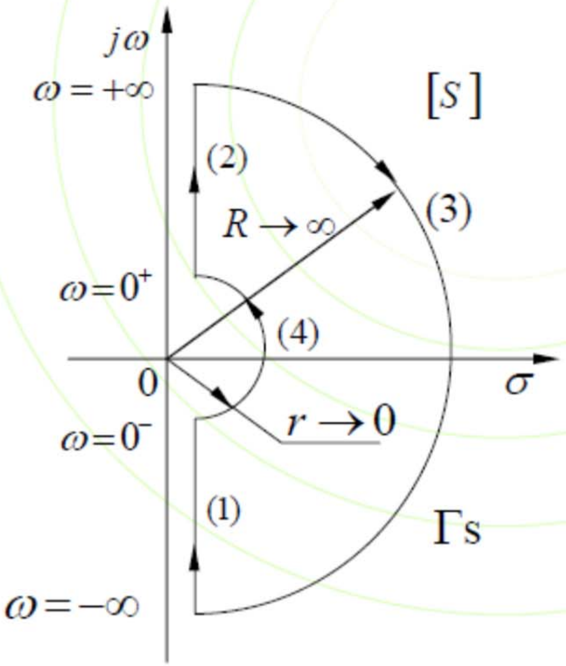


图5-44　虚轴上有开环极点时的奈氏轨迹

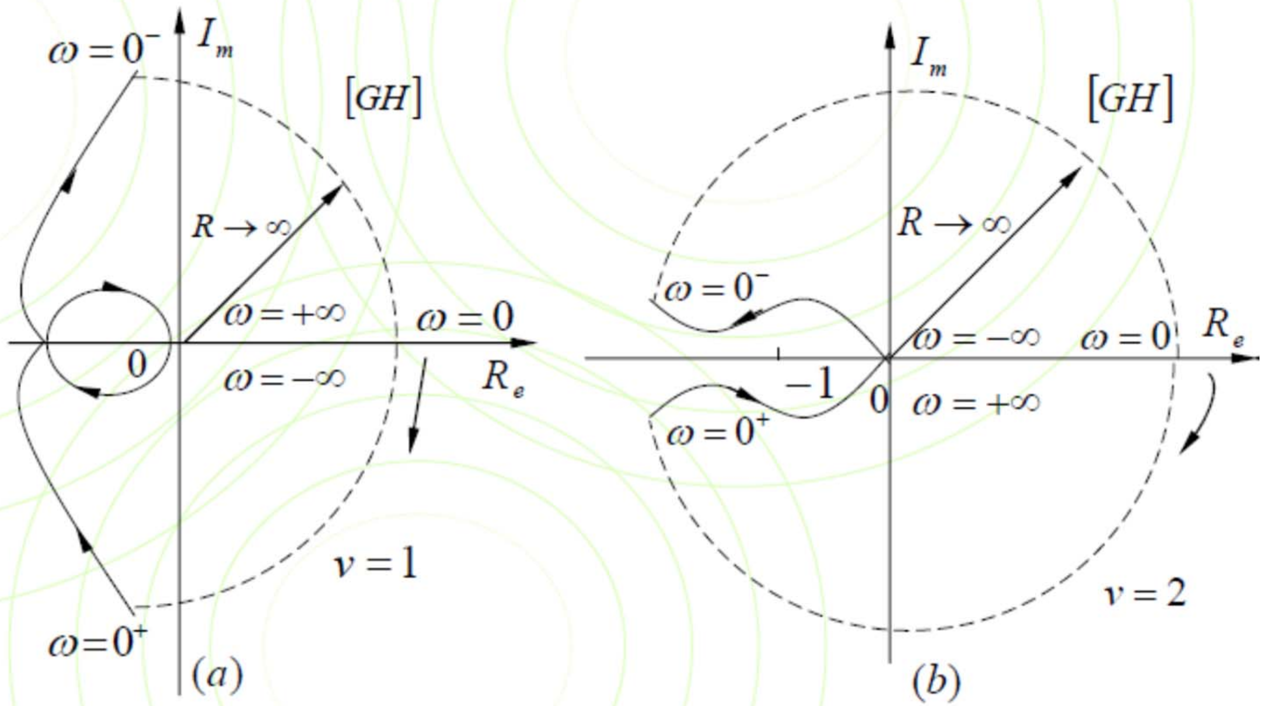
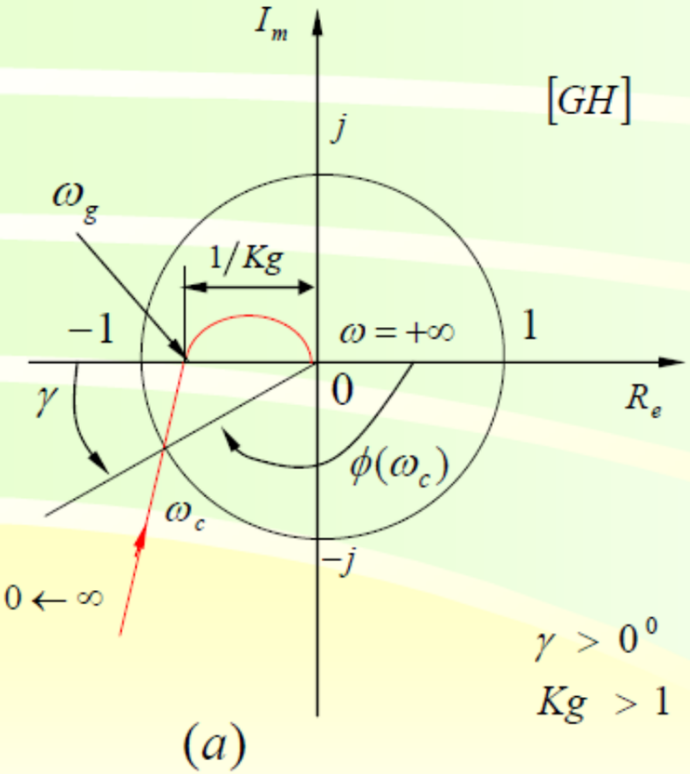


图5-45　　$v\neq 0$ 时的奈氏曲线

二、稳定裕度

通常用稳定裕度来衡量系统的相对稳定性或系统的稳定程度，其中包括系统的相角裕度和幅值裕度。



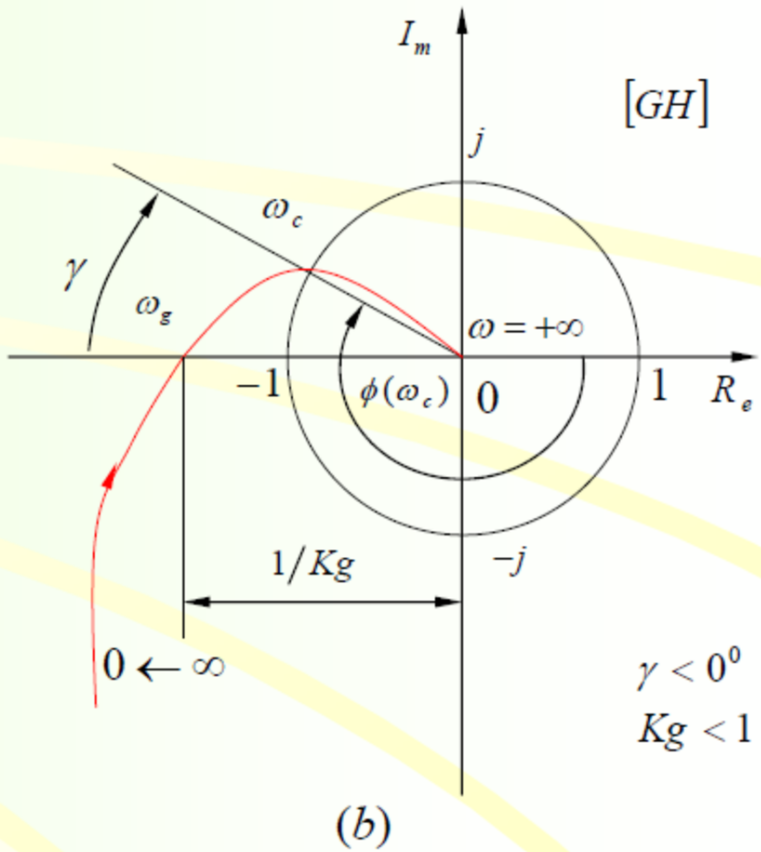


图5-53 最小相位系统的稳定裕度

2、控制目标 – 性能指标

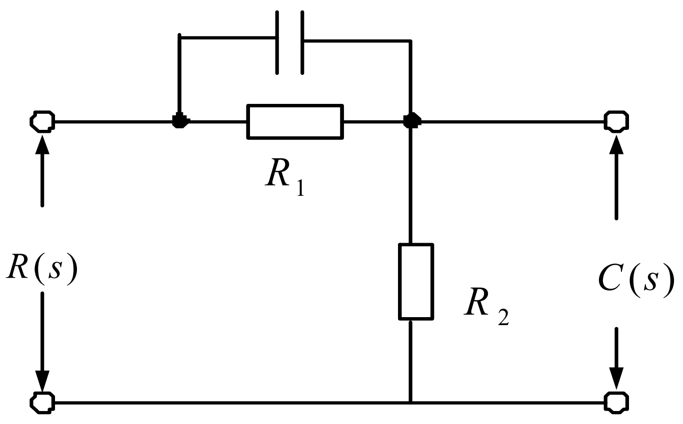
时域指标
超调量 $\sigma\%$ 调节时间 t_s
二阶系统指标计算
$\sigma\% = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\%$
$t_s = 3.5/\xi\omega_n \quad \omega_c t_s = 7/tg\gamma$

频域指标
谐振峰值 M_r 谐振频率 ω_r 带宽频率 ω_b
截止频率 ω_c 相位裕度 γ 幅值裕度 h
二阶系统指标计算
$M_r = 1/2\xi\sqrt{1-\xi^2} \quad \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \quad \xi \le \sqrt{2}$
$\omega_b = \omega_n\sqrt{(1-2\xi^2)+\sqrt{(1-2\xi^2)^2+1}}$
$\omega_c = \omega_n\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}$
$\gamma = \tan^{-1}(2\xi/\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2})$

性能指标是系统设计的基础，综合考虑动态、稳态和稳定性特性。

一、无源校正装置

1．相位超前校正装置：具有相位超前特性(即相频特性φ>0)的校正装置叫相位超前校正装置（又称为“微分校正装置”）。



(a)

传递函数为：$G_c(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{Z_2}{Z_1+Z_2}$

$$\frac{1}{Z_1}=\frac{1}{1/(Cs)}+\frac{1}{R_1}$$

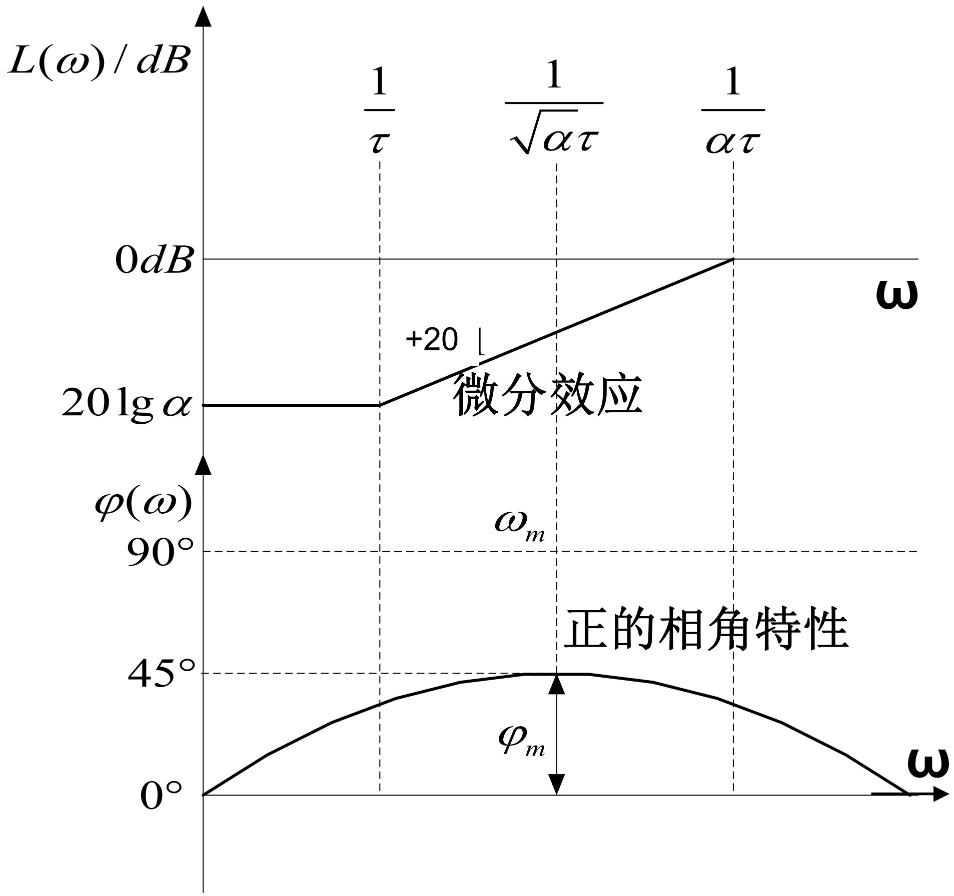
$$Z_1=\frac{R_1\cdot 1/(Cs)}{R_1+1/(Cs)}=\frac{R_1}{R_1Cs+1}\qquad Z_2=R_2$$

$$G_c(s)=\alpha\left(\frac{\tau s+1}{\alpha\tau s+1}\right)\qquad \tau=R_1C$$

$$\alpha=\frac{R_2}{R_1+R_2}<1$$

α为低频衰减率

频率特性： $G_c(j\omega)=\alpha\left(\dfrac{j\omega\tau+1}{j\omega\alpha\tau+1}\right)$ $\varphi_c=arctg(\tau\omega)-arctg(\alpha\tau\omega)$



超前校正网络的特点：

1. 具有正的相角特性，最大的超前相角φ_m 发生ω_m处

$$\frac{d\varphi_c}{d\omega}=0\rightarrow\omega_m=\frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$$

$$\varphi_m=\arcsin\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

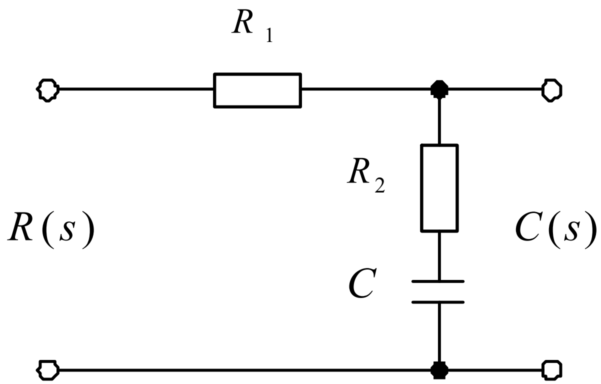
2. 利用相角超前特性来增大系统的相角裕度γ，以达到改善系统瞬态响应的目的。

要求校正装置的φ_m出现在系统的剪切频率ω_c处。

3. 具有高通滤波特性，而使系统低频响应的增益衰减

2.相位滞后校正装置

具有相位滞后特性(即相频特性φ(ω)<0)的校正装置叫滞后校正装置（又称之为积分校正装置）。



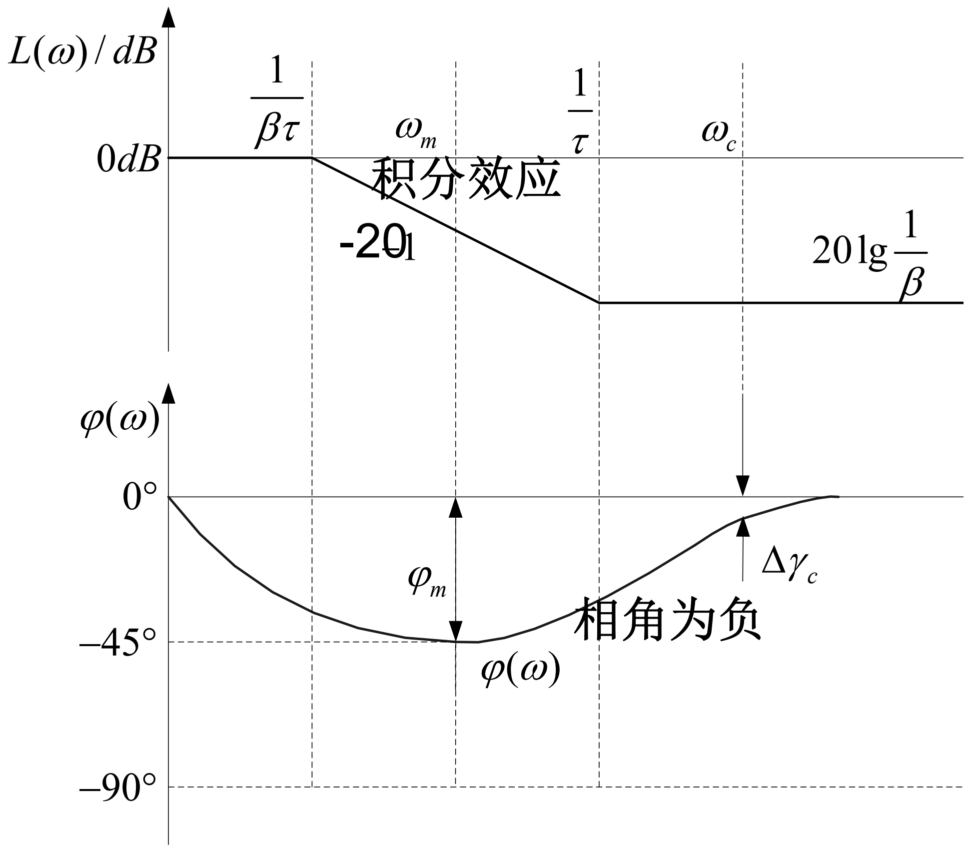
$$G_c(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}$$

$$Z_1=R_1 \qquad Z_2=R_2+\frac{1}{Cs}$$

$$G_c(s)=\frac{\tau s+1}{\beta\tau s+1}$$

式中：$\tau=R_2C$　　$\beta=\frac{R_1+R_2}{R_2}>1$　　β滞后程度系数

频率特性：$G_c(j\omega)=\dfrac{j\omega\tau+1}{j\omega\beta\tau+1}$　　$\varphi_c=arctg(\tau\omega)-arctg(\beta\tau\omega)$



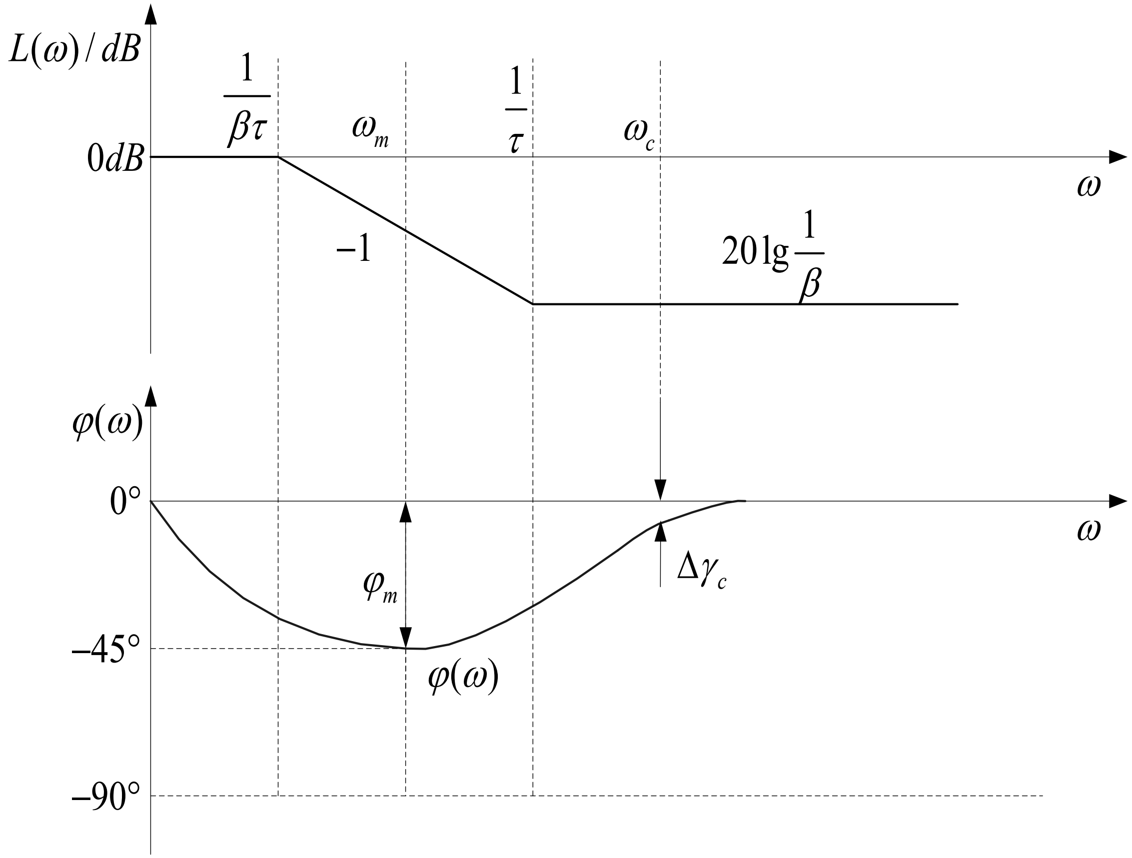
相位滞后校正特点：

1. 具有低通滤波特性，使系统高频响应的增益衰减，

☆低通滤波器对低频信号具有较强的放大能力，从而可以降低系统的稳态误差；

☆β值越大，高频段衰减的能力越强,抑制噪声的能力愈强；通常选β=10，β太大，不容易实现

2. 最大相位滞后角φ_m发生在ω_m处



$$\varphi_c = arctg(\tau\omega) - arctg(\beta\tau\omega)$$

$$\frac{d\varphi_c}{d\omega} = 0 \rightarrow \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\beta}\tau}$$

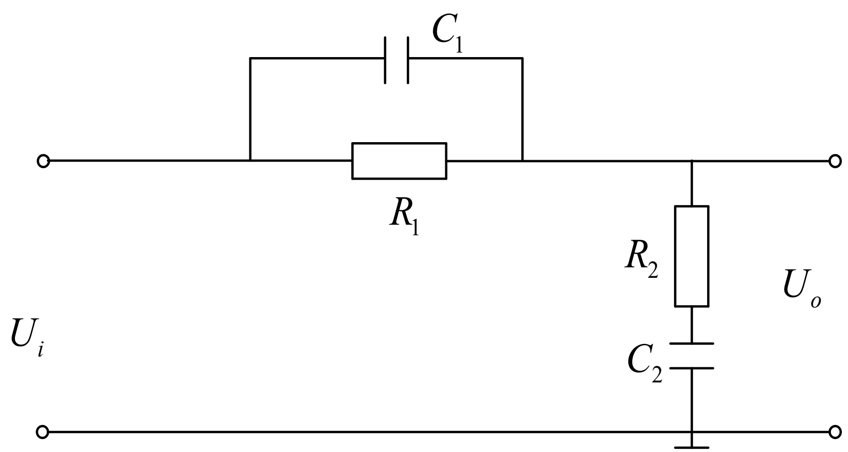
$$\varphi_m = -\tan^{-1}\frac{\beta-1}{2\sqrt{\beta}}$$

如果γ_0<希望的γ，ω_{c0}>希望的ω_c，可以采用滞后校正。

注意：在应用时，$\omega_m \ll \omega_c$

☆降低系统的剪切频率，来增大系统的相角裕度，提高系统的相对稳定性和平稳性，瞬态响应的速度要变慢；

3.相位滞后-超前校正装置（微分 - 积分校正）



$$G_c(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}$$

$$Z_1=\frac{R_1}{1+R_1C_1s} \qquad Z_2=R_2+\frac{1}{C_2s}$$

$$G_c(s)=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{(1+R_1C_1s)(1+R_2C_2s)}{(1+R_1C_1s)(1+R_2C_2s)+R_1C_2s}$$

$$=\frac{(\tau_1s+1)(\tau_2s+1)}{\tau_1\tau_2s^2+(\tau_1+\tau_2+\tau_{12})s+1}$$

$$\tau_1=R_1C_1 \qquad \tau_2=R_2C_2 \qquad \tau_{12}=R_1C_2$$

$$G_c(s)=\frac{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}{\tau_1\tau_2 s^2+(\tau_1+\tau_2+\tau_{12})s+1}$$

滞后-超前网络的传递函数变为

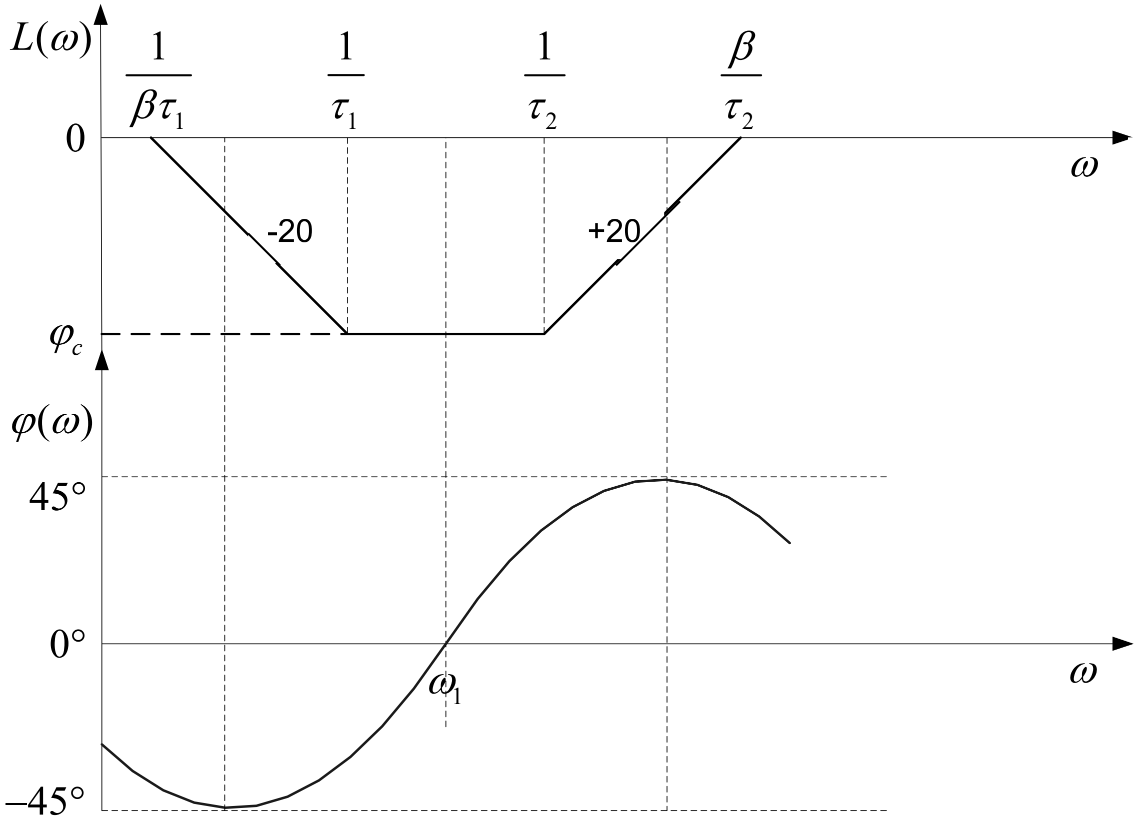
$$G_c(s)=\frac{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}=\frac{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}{(\beta\tau_1 s+1)(\frac{\tau_2}{\beta}s+1)}$$

其中 $T_1T_2=\tau_1\tau_2$ $\qquad \dfrac{T_1}{\tau_1}=\dfrac{\tau_2}{T_2}=\beta$

$$T_1>\tau_1>\tau_2>T_2 \qquad \beta>1$$

$$G_c(s)=\frac{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}{(\beta\tau_1 s+1)(\frac{\tau_2}{\beta}s+1)}$$

$T_1>\tau_1>\tau_2>T_2$ $\beta>1$，滞后-超前网络的波德图如图所示。



利用滞后部分来改善系统的稳态性能；

利用超前部分来改善系统的暂态性能。

§6-4　校正装置设计的方法和依据

性能指标

a）时域指标：超调量M_p、调整时间t_s、峰值时间t_p、上升时间t_r等

b）频域指标：

① 开环：剪切频率ω_c、相角裕度γ及增益裕度GM

② 闭环：谐振峰值M_r、谐振频率ω_r及带宽ω_b

伯特图法校正系统采用开环频域性能作为性能指标：

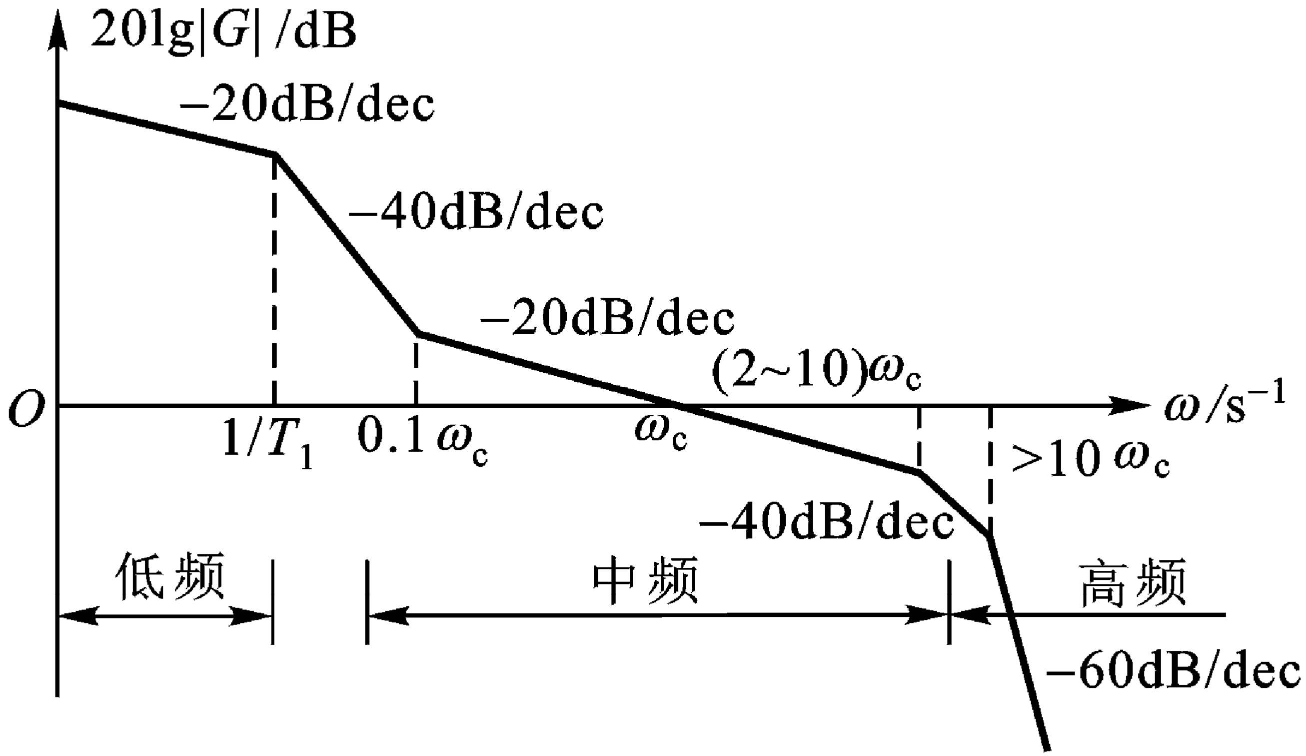
相角裕量γ ⟶ 系统的相对稳定性和平稳性

剪切频率ω_c ⟶ 系统的响应速度

开环增益K ⟶ 系统的稳态误差

期望特性

根据期望特性设计校正装置时，通常将其分为三个频段考虑



(3)－(6) 步骤：

$$20\lg|G_0(j\omega_c)| = -20\lg|G_c(j\omega_c)| = -10\lg(1/\alpha)$$

$$\gamma_{要} \xrightarrow{(3)} \varphi_m \xrightarrow{(4)} \alpha \xrightarrow{(5)} \omega_m$$

$$\varphi_m = \gamma_{要} - \gamma_0 + \varepsilon$$

ε取$5^0 \sim 20^0$

$$\alpha = \frac{1-\sin\varphi_m}{1+\sin\varphi_m}$$

$$\omega_c = \omega_m$$

(6)

确定校正后期望系统的ω_c，使其为最大相角φ_m所对应的频率ω_m

例6－5－1

校核

$$G(s) \longleftarrow G_c(s) \longleftarrow \tau$$

$$G(s) = G_o(s) \bullet G_c(s)$$

$$G_c(s) = \left(\frac{\tau s + 1}{\alpha\tau s + 1}\right)$$

$$\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$$

$$G(s) = G_o(s) \bullet G_c(s)$$

$$\omega_c = \omega_m$$

$$G_c(s) = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1}$$

$$= \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1}$$

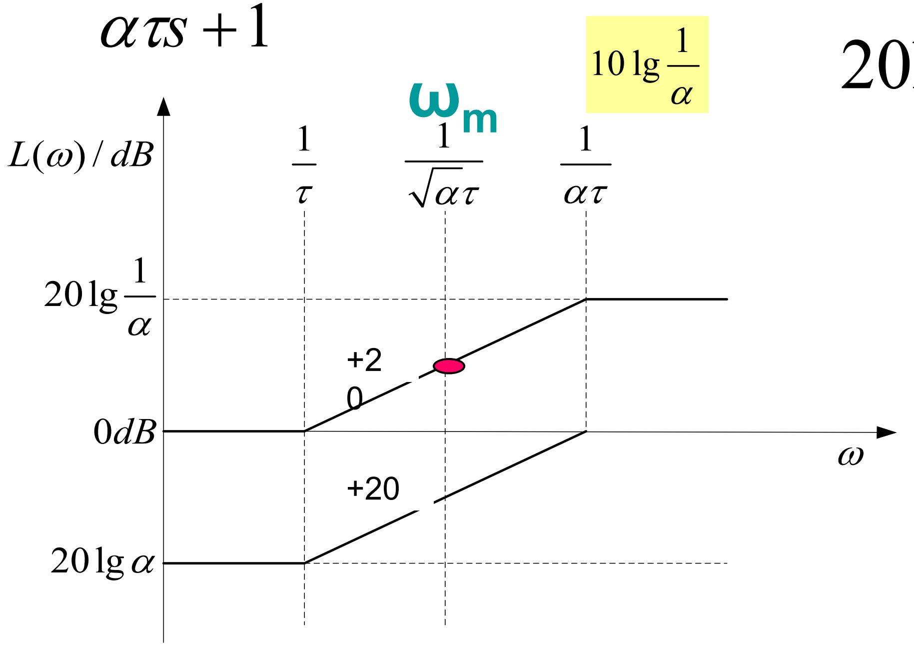
$$20\lg|G(j\omega_c)| = 20\lg[|G_0(j\omega_c) \cdot G_c(j\omega_c)|] = 0$$

$$20\lg|G_0(j\omega_c)| + 20\lg|G_c(j\omega_c)| = 0$$

$$20\lg|G_0(j\omega_c)| = -20\lg|G_c(j\omega_c)|$$

$$20\lg|G_0(j\omega_m)| = -20\lg|G_c(j\omega_m)|$$

$$= -10\lg(1/\alpha)$$



(3)-(5)步骤：

$$
\begin{tikzcd}
\gamma_{要} \arrow[r, "(3)"] & \omega_c \arrow[r, "(4)"] \arrow[rr, bend left, "{20\lg|G_0(j\omega_c)|=20\lg\beta \quad (5)}"] & \beta & \tau \arrow[d, bend left] \\
校核 & G(s) \arrow[l] & & G_c(s) \arrow[ll]
\end{tikzcd}
$$

$\gamma = \gamma_{要} + \varepsilon$

ε一般取 $10^0 \sim 15^0$ 根据$\gamma_{要}$，确定原系统G_0 γ处的频率为校正后系统G的剪切频率 ω_c

$$\omega_2 = \frac{1}{\tau} = \left(\frac{1}{2} \sim \frac{1}{10}\right)\omega_c$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\beta\tau} = \frac{1}{\beta}\omega_2$$

$$G(s) = G_o(s) \bullet G_c(s)$$

$$G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{\beta\tau s + 1} \qquad \beta > 1$$

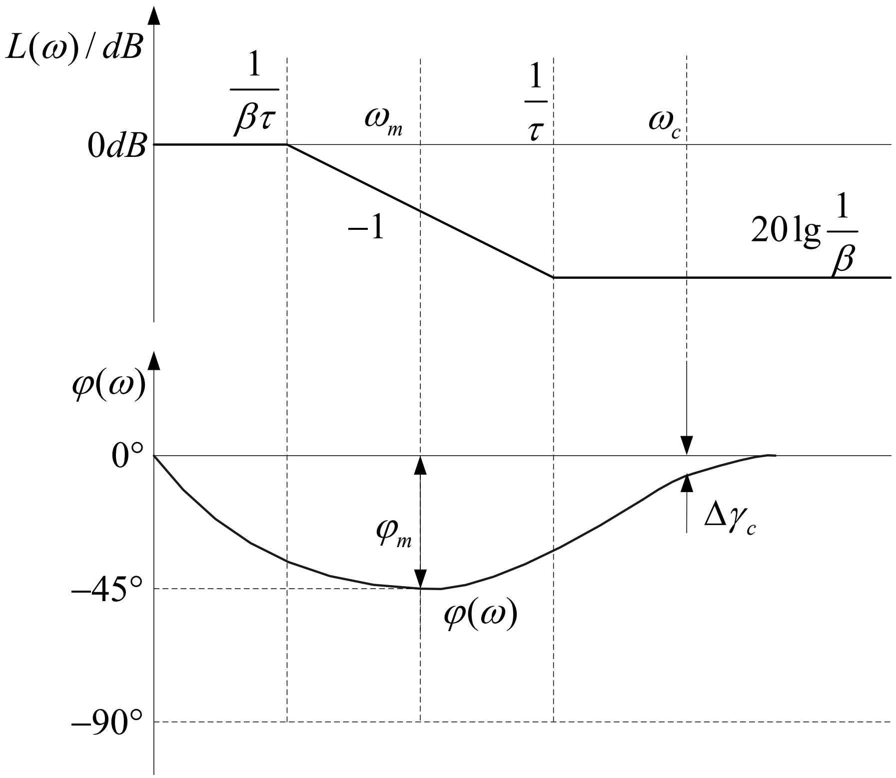
$$G_c(s)=\frac{\tau s+1}{\beta\tau s+1}$$

$$G(s)=G_o(s)\bullet G_c(s)$$

在应用时，ω_m 《ω_c

$$20\lg|G(j\omega_c)|=20\lg[|G_0(j\omega_c)\cdot G_c(j\omega_c)|]=0$$

$$20\lg|G_0(j\omega_c)|+20\lg|G_c(j\omega_c)|=0$$



$$20\lg|G_0(j\omega_c)|=-20\lg|G_c(j\omega_c)|$$

$$=-20\lg(1/\beta)=20\lg\beta$$

利用迟后校正装置的高频衰减特性