

# 5-1 频率特性的概念

讨论线性定常系统（包括开环、闭环系统）在正弦输入信号作用下的稳态输出。设图5-1所示的线性定常系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) \quad (5-1)$$

其输入信号为

$$x(t) = X \sin \omega t \quad (5-2)$$



图5-1 系统方框图

则输入信号的拉氏变换是

$$X(s) = \frac{X\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{X\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} \quad (5-3)$$

系统的传递函数通常可以写成

$$G(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)}{(s - s_1)(s - s_2)\Lambda (s - s_n)} \quad (5-4)$$

由此得到输出信号的拉氏变换

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)X(s) \\ &= \frac{A(s)}{(s - s_1)(s - s_2)\Lambda (s - s_n)} \cdot \frac{X\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} \\ &= \frac{b}{s + j\omega} + \frac{\bar{b}}{s - j\omega} + \frac{a_1}{s - s_1} + \frac{a_2}{s - s_2} + \Lambda + \frac{a_n}{s - s_n} \end{aligned} \quad (5-5)$$

对上式进行拉氏反变换得到系统的输出为

$$y(t) = be^{-j\omega t} + \bar{b}e^{j\omega t} + a_1e^{s_1t} + a_2e^{s_2t} + \dots + a_ne^{s_nt} \quad (5-6)$$

对稳定系统,  $s_1, s_2, \dots, s_n$  都具有负实部, 当时间  $t$  趋于无穷大时, 上式的暂态分量将衰减至零。因此系统的稳态响应为

$$y_W(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = be^{-j\omega t} + \bar{b}e^{j\omega t} \quad (5-7)$$

其中待定系数  $b$  和  $\bar{b}$  可按下式计算

$$b = G(s) \frac{X\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} \cdot (s+j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{G(-j\omega)X}{2j} \quad (5-8)$$

$$\bar{b} = G(s) \frac{X\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} \cdot (s-j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{G(j\omega)X}{2j} \quad (5-9)$$

$G(j\omega)$  是一个复数，用模和幅角可表示为

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\phi(\omega)} \quad (5-10)$$

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \arctg \left[ \frac{\text{Im } G(j\omega)}{\text{Re } G(j\omega)} \right] \quad (5-11)$$

同样， $G(-j\omega)$  可以表示为

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)| \cdot e^{-j\phi(\omega)} = |G(j\omega)| e^{-j\phi(\omega)} \quad (5-12)$$

将式(5-8) (5-9) 以及式(5-10) (5-12)代入式(5-7)可得

$$\begin{aligned} y_W(t) &= -|G(j\omega)| e^{-j\phi(\omega)} \cdot \frac{Xe^{-j\omega t}}{2j} + |G(j\omega)| \cdot e^{j\phi(\omega)} \cdot \frac{Xe^{j\omega t}}{2j} \\ &= |G(j\omega)| X \cdot \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \\ &= |G(j\omega)| X \cdot \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (5-13)$$

或 
$$y_w(t) = Y \sin(\omega t + \phi) \quad (5-14)$$

式中  $Y = |G(j\omega)|X$  为稳态输出信号的幅值。

上式表明，线性定常系统对正弦输入信号的稳态响应仍然是与正弦输入信号同频率的正弦信号；输出信号的振幅是输入信号振幅的  $|G(j\omega)|$  倍；输出信号相对输入信号的相移为  $\phi = \angle G(j\omega)$ ；输出信号的振幅及相移都是角频率  $\omega$  的函数。

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)} \quad (5-15)$$

称为系统的频率特性，它反映了在正弦输入信号作用下，系统的稳态响应与输入正弦信号的关系。

其中

$$|G(j\omega)| = \frac{Y}{X}(\omega) \quad (5-16)$$

称为系统的幅频特性，它反映系统在不同频率正弦信号作用下，输出稳态幅值与输入信号幅值的比值，即系统的放大（或衰减）特性。

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \arctg \left[ \frac{\text{Im } G(j\omega)}{\text{Re } G(j\omega)} \right] \quad (5-17)$$

称为系统的相频特性，它反映系统在不同频率正弦信号的作用下，输出信号相对输入信号的相移。系统的幅频特性和相频特性统称为系统的频率特性。

获取系统频率特性的途径有两个：

**一、解析法** 当已知系统的传递函数时，用  $s = j\omega$  代入传递函数可得到系统的频率特性  $G(j\omega)$ 。因此，频率特性是  $s = j\omega$  特定情况下的传递函数。它和传递函数一样，反映了系统的内在联系。这种通过传递函数确定频率特性的方法是求取频率特性的解析法。

**二、实验法** 当系统已经建立，尚不知道其内部结构或传递函数时，在系统的输入端输入一正弦信号  $X(t) = X \sin \omega t$ ，测出不同频率时系统稳态输出的振幅  $Y$  和相移  $\phi$ ，便可得到它的幅频特性  $\frac{Y}{X}(\omega)$  和相频特性  $\phi(\omega)$ 。这种通过实验确定系统频率特性的方法是求取频率特性的实验法。

## 5-2 典型环节频率特性的绘制

自动控制系统通常由若干环节构成，根据它们的基本特性，可划分成几种典型环节。本节将介绍典型环节频率特性的绘制方法，主要介绍应用较为广泛的极坐标图和伯德图。

### 一、典型环节的幅相特性曲线（极坐标图）

以角频率  $\omega$  为参变量，根据系统的幅频特性  $|G(j\omega)|$  和相频特性  $\angle G(j\omega)$  在复平面  $[G(j\omega)]$  上绘制出的频率特性叫做幅相特性曲线或频率特性的极坐标图。它是当角频率  $\omega$  从0到无穷变化时，矢量  $|G(j\omega)H(j\omega)|e^{j\phi}$  的矢端在  $[GH]$  平面上描绘出的曲线。曲线是关于实轴对称的。



## (一) 放大环节 (比例环节)

放大环节的传递函数为  $G(s) = K$  (5-18)

其对应的频率特性是  $G(j\omega) = K$  (5-19)

其幅频特性和相频特性分别为

$$|G(j\omega)| = K \quad (5-20)$$

$$\angle G(j\omega) = 0^\circ \quad (5-21)$$

频率特性如图5-2所示。

由图5-2可看出放大环节的幅频特性为常数K，相频特性等于零度，它们都与频率无关。理想的放大环节能够无失真和无滞后地复现输入信号。

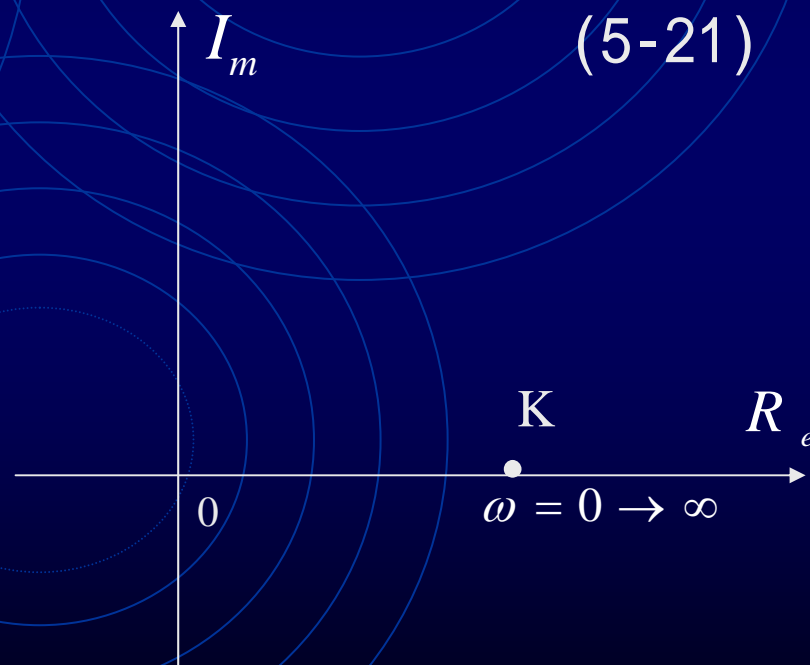


图5-2 放大环节的频率响应 2

## (二) 积分环节

积分环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad (5-22)$$

其对应的频率特性是

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \quad (5-23)$$

幅频特性和相频特性分别为

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{j\omega} \right| = \frac{1}{\omega} \quad (5-24)$$

$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega}{0} = -90^\circ \quad (5-25)$$

频率特性如图5-3所示。由图可看出，积分环节的相频特性等于 $-90^\circ$ ，与角频率无关，

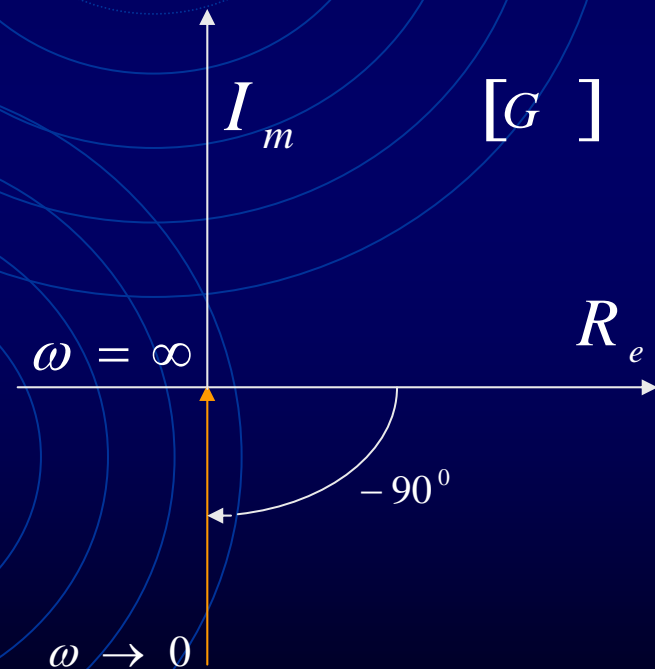


图5-3 积分环节的频率<sup>3</sup>响应

表明积分环节对正弦输入信号有 $90^\circ$ 的滞后作用；其幅频特性等于 $\frac{1}{\omega}$ ，是 $\omega$ 的函数，当 $\omega$ 由零变到无穷大时，输出幅值则由无穷大衰减至零。在 $[G(j\omega)]$ 平面上，积分环节的频率特性与负虚轴重合。

### (三) 惯性环节

惯性环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (5-26)$$

其对应的频率特性是

$$G(j\omega) = \frac{1}{jT\omega + 1} \quad (5-27)$$

幅频特性和相频特性分别是

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \quad (5-28)$$

$$\angle G(j\omega) = -\arctg T\omega \quad (5-29)$$

当  $\omega = 0$  时,  $|G(j0)| = 1$   $\angle G(j0) = 0^\circ$  ;

当  $\omega = \frac{1}{T}$  时,  $|G(j\frac{1}{T})| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$   $\angle G(j\frac{1}{T}) = -45^\circ$  ;

当  $\omega = \infty$  时,  $|G(j\infty)| = 0$   $\angle G(j\infty) = -90^\circ$

当 由零至无穷大变化时, 惯性环节的频率特性在  $[G(j\omega)]$  平面上是正实轴下方的半个圆周, 证明如下:

$$G(j\omega) = \frac{1}{jT\omega + 1} = \frac{1}{1+T^2\omega^2} - j\frac{T\omega}{1+T^2\omega^2} \quad (5-30)$$

令

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = \frac{1}{1+T^2\omega^2} = u(\omega) \quad (5-31)$$

$$\operatorname{Im}[G(j\omega)] = -\frac{T\omega}{1+T^2\omega^2} = v(\omega) \quad (5-32)$$

则有

$$\left[ u(\omega) - \frac{1}{2} \right]^2 + [v(\omega)]^2 = \left( \frac{1}{1+T^2\omega^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{-T\omega}{1+T^2\omega^2} \right)^2 = \left( \frac{1}{2} \right)^2 \quad (5-33)$$

这是一个标准圆方程，其圆心坐标是  $\left( \frac{1}{2}, 0 \right)$ ，半径为  $\frac{1}{2}$ 。且当  $\omega$  由  $0 \rightarrow \infty$  时， $\angle G(j\omega)$  由  $0^\circ \rightarrow -90^\circ$ ，说明惯性环节的频率特性在  $[G(j\omega)]$  平面上是实轴下方半个圆周，如图5-4所示。惯性环节是一个低通滤波环节和相位滞后环节。在低频范围内，对输入信号的幅值衰减较小，滞后相移也小，在高频范围内，幅值衰减较大，滞后相角也大，最大滞后相角为  $90^\circ$ 。

推广：当惯性环节传递函数的分子是常数K时，即  $G(j\omega) = \frac{K}{jT\omega + 1}$  时，其频率特性是圆心为  $\left(\frac{K}{2}, 0\right)$ ，半径为  $\frac{K}{2}$  的实轴下方半个圆周。

#### (四) 振荡环节

振荡环节的传递函数是

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} \quad (5-34)$$

其频率特性是

$$G(j\omega) = \frac{1}{-T^2 \omega^2 + j2\xi T\omega + 1} = \frac{1}{(1 - T^2 \omega^2) + j2\xi T\omega} \quad (5-35)$$

幅频特性和相频特性分别为

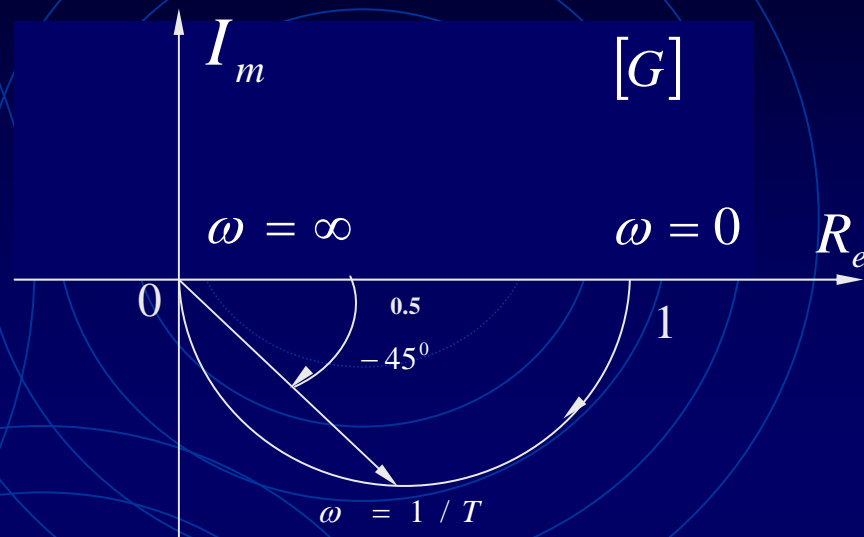


图5-4 惯性环节的频率响应

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}} \quad (5-36)$$

$$\angle G(j\omega) = -\arctg \frac{2\xi T \omega}{1-T^2\omega^2} \quad (5-37)$$

当  $\omega = 0$  时,  $|G(j\omega)| = 1$ ,  $\angle G(j\omega) = 0^\circ$  ;

当  $\omega = \frac{1}{T}$  时,  $|G(j\omega)| = \frac{1}{2\xi}$ ,  $\angle G(j\omega) = -90^\circ$  ;

当  $\omega = \infty$  时,  $|G(j\omega)| = 0$ ,  $\angle G(j\omega) = -180^\circ$ 。

振荡环节的幅频特性和相频特性均与阻尼比  $\xi$  有关, 不同阻尼比的频率特性曲线如图 5-10 所示。

当阻尼比较小时, 会产生谐振, 谐振峰值  $M_r$  ( $M_r > 1$ ) 和谐振频率  $\omega_r$  由幅频特性的极值方程解出。

$$\frac{d}{d\omega}|G(j\omega)| = \frac{d}{d\omega} \left[ (1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2 \right] = 0$$

$$\omega_r = \frac{1}{T} \sqrt{1-2\xi^2} = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} \quad (0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}})$$

其中  $\omega_n = \frac{1}{T}$  称为振荡环节的无阻尼自然振荡频率，它是振荡环节频率特性曲线与虚轴的交点处的频率。

将  $\omega_r$  代入  $|G(j\omega)|$  得到谐振峰值  $M_r$  为

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad (5-40)$$

将  $\omega_r$  代入  $\angle G(j\omega)$  得到谐振相移  $\phi_r$  为

$$\phi_r = \angle G(j\omega_r) = -\arctg \frac{\sqrt{1-2\xi^2}}{\xi} = -90^\circ + \arcsin \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (5-41)$$

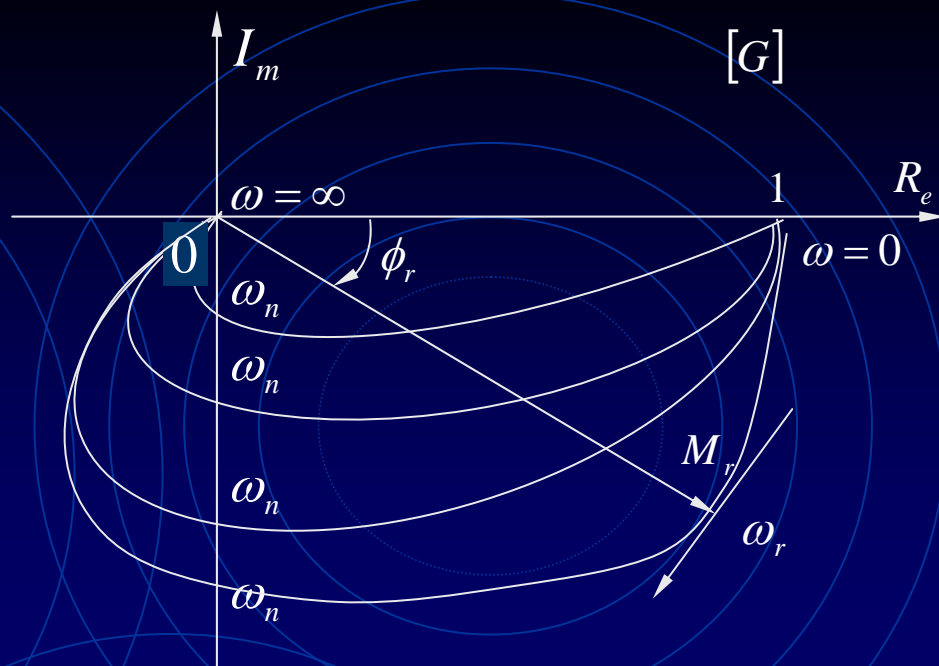


图5-5 振荡环节的频率响应



振荡环节的幅值特性曲线如图 5-6 所示。在  $0 < \omega < \omega_r$  的范围内，随着  $\omega$  的增加， $M(\omega)$  缓慢增大；当  $\omega = \omega_r$  时， $M(\omega)$  达到最大值  $M_r$ ；当  $\omega > \omega_r$  时，输出幅值衰减很快。

当阻尼比  $\xi > 1$  时，此时振荡环节可等效成两个不同时间常数的惯性环节的串联，即

$$G(s) = \frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad (\xi > 1)$$

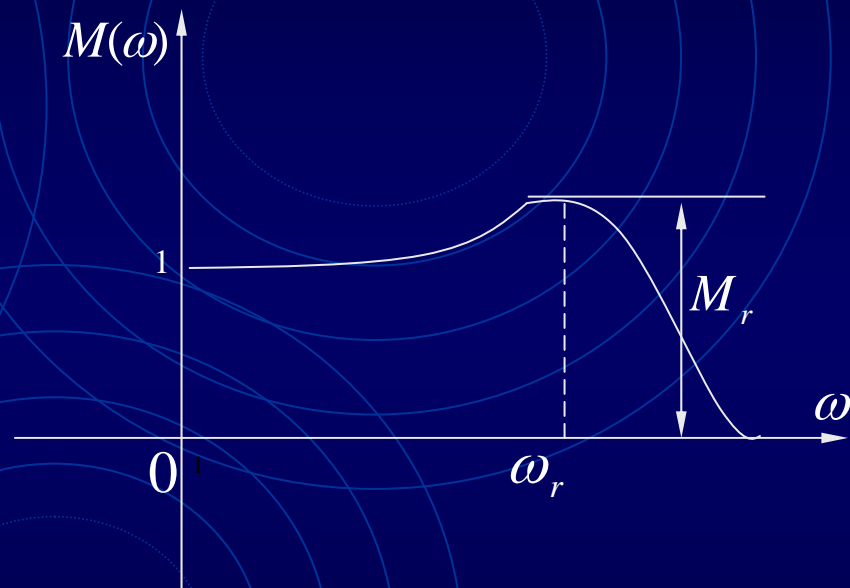


图5-6 振荡环节的频率响应

$T_1, T_2$  为一大一小两个不同的时间常数，小时间常数对应的负实极点离虚轴较远，对瞬态响应的影响较小。

振荡环节为相位滞后环节，最大滞后相角是 $180^\circ$ 。

推广：当振荡环节传递函数的分子是常数 $K$ 时，  
即  $G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$ ，其对应频率特性  $G(j\omega)$  的起点  
为  $|G(j0)| = K$ ， $\angle G(j0) = 0^\circ$  ( $\omega = 0$ )。

### (五) 一阶微分环节

典型一阶微分环节的传函数为

$$G(s) = \tau s + 1 \quad (5-43)$$

其中  $\tau$  为微分时间常数、1为比例项因子，严格地说，由式  
(5-43)表示的是一阶比例微分环节的传递函数，由于实际的  
物理系统中理想微分环节或纯微分环节（即不含比例项）是不  
存在的，因此用比例微分环节作为一阶微分环节的典型形式。



## (六) 二阶微分环节

二阶微分环节的传递函数为

$$G(s) = \tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1 \quad (5-47)$$

其对应的频率特性是

$$G(j\omega) = -\tau^2 \omega^2 + j2\xi\tau\omega + 1 \quad (5-48)$$

幅频特性和相频特性分别为

$$|G(j\omega)| = \sqrt{(1 - \tau^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 \tau^2 \omega^2} \quad (5-49)$$

$$\angle G(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{2\xi\tau\omega}{1 - \tau^2 \omega^2} \quad (5-50)$$

$$\omega = 0 \quad |G(j0)| = 1 \quad \angle G(j0) = 0^\circ$$

$$\omega = \frac{1}{\tau} \quad \left| G\left(j\frac{1}{\tau}\right) \right| = 2\xi \quad \angle G\left(j\frac{1}{\tau}\right) = 90^\circ$$

$$\omega = \infty \quad |G(j\infty)| = \infty \quad \angle G(j\infty) = 180^\circ$$

二阶微分环节频率特性曲线如  
 图5-8所示，它是一个相位超前  
 环节，最大超前相角为 $180^\circ$ 。

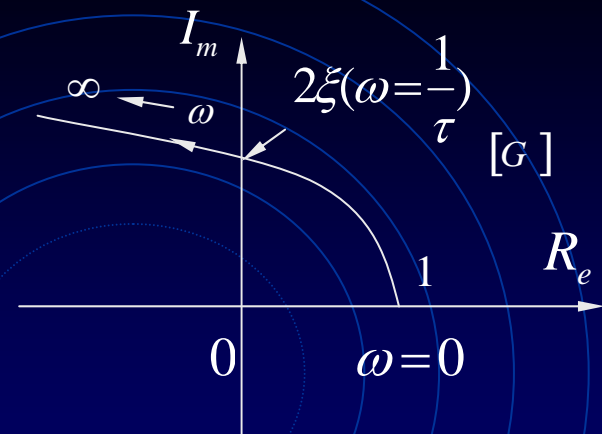


图5-8 二阶微分环节频率特性图

### (七) 不稳定环节

不稳定环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{Ts - 1} \quad (5-51)$$

不稳定环节有一个正实极点，对应的频率特性是

$$G(j\omega) = \frac{1}{jT\omega - 1} \quad (5-52)$$

幅频特性和相频特性分别为

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} \quad (5-53)$$

$$\angle G(j\omega) = -\arctg \frac{T\omega}{-1} = -180^\circ + \arctg T\omega \quad (5-54)$$

当  $\omega = 0$  时,  $|G(j0)| = 1$ ,  $\angle G(j0) = -180^\circ$  ;

当  $\omega = \frac{1}{T}$  时,  $|G(j\frac{1}{T})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\angle G(j\frac{1}{T}) = -135^\circ$  ;

当  $\omega = \infty$  时,  $|G(j\infty)| = 0$ ,  $\angle G(j\infty) = -90^\circ$  。

不稳定环节的频率特性  
如图5-9。比较图5-4可知，  
它与惯性环节的频率特性  
相比，是以平面的虚轴为  
对称的。

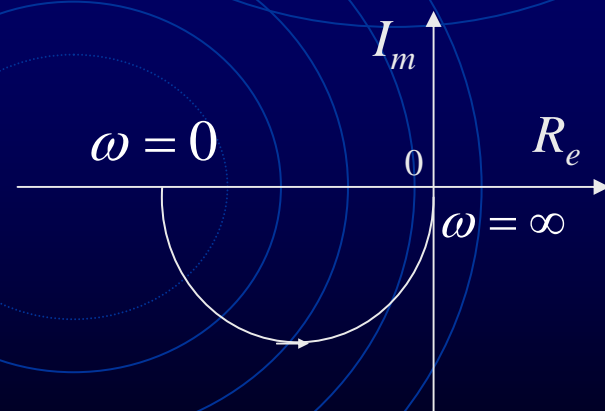


图5 - 4不稳定惯性环节的频率特性

## (八) 滞后环节的传递函数

滞后环节的传递函数为

$$G(s) = e^{-\tau s} \quad (5-55)$$

其对应的频率特性是

$$G(j\omega) = e^{-j\tau\omega} \quad (5-56)$$

幅频特性和相频特性分别为

$$|G(j\omega)| = 1 \quad (5-57)$$

$$\angle G(j\omega) = -\tau\omega (\text{弧度}) = -57.3\tau\omega (\text{度}) \quad (5-58)$$

如图5-10所示，滞后环节的频率特性在平面上是一个顺时针旋转的单位圆。

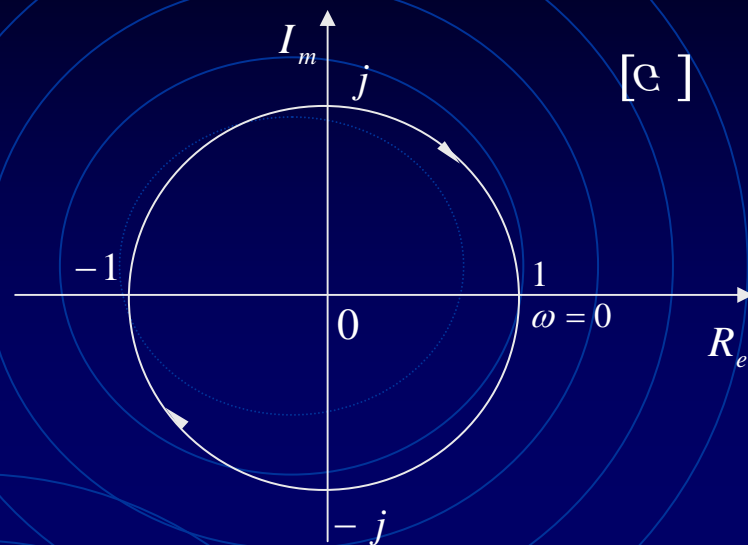
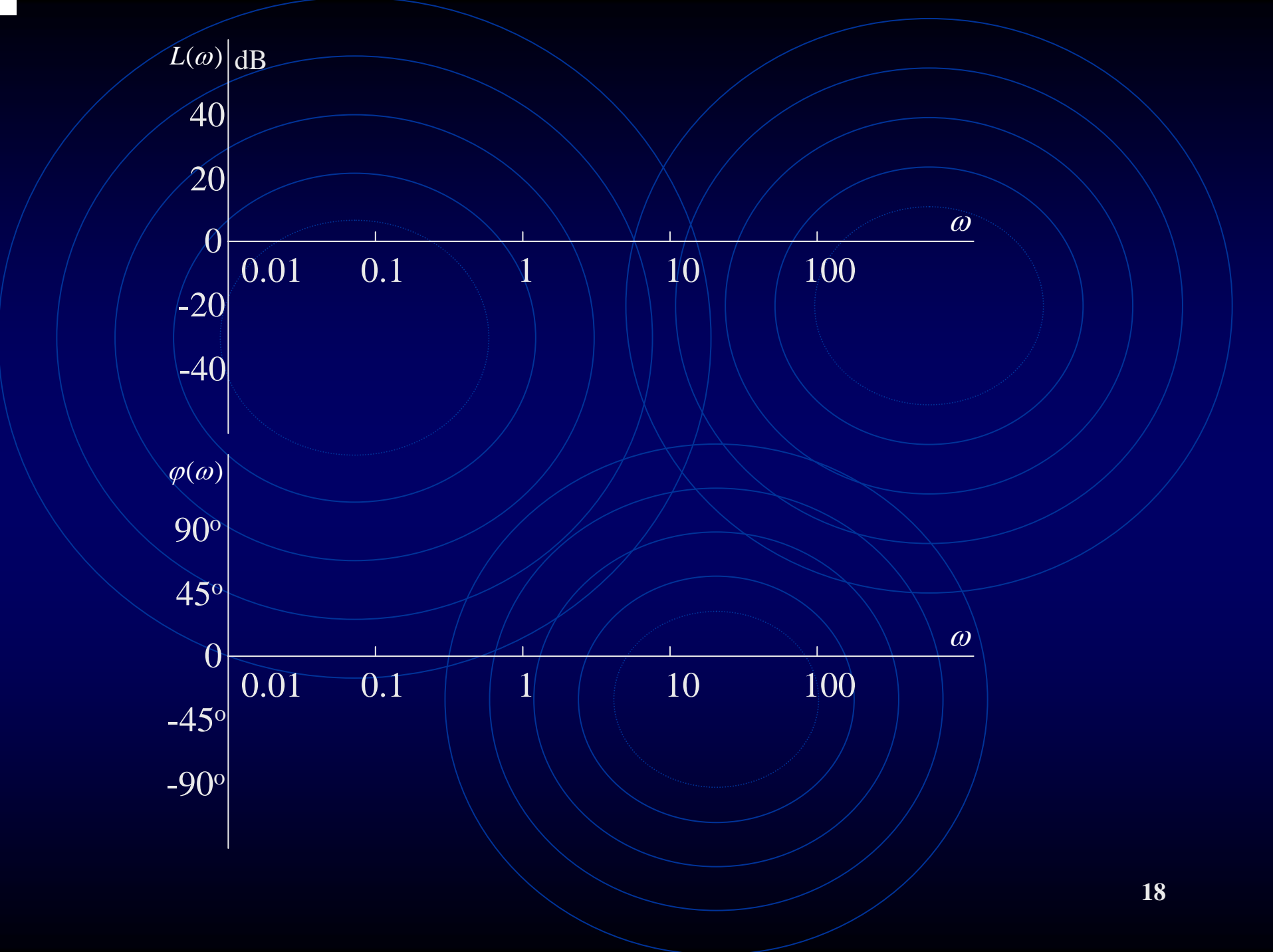


图5-10 滞后环节频率特性图

## 二、典型环节频率特性的伯德图

伯德（Bode）图又叫对数频率特性曲线，它是将幅频特性和相频特性分别绘制在两个不同的坐标平面上，前者叫对数幅频特性，后者叫对数相频特性。两个坐标平面横轴（ $\omega$  轴）用对数分度，对数幅频特性的纵轴用线性分度，它表示幅值的分贝数，即  $L(\omega) = 20\lg|G(j\omega)|(dB)$ ；对数相频特性的纵轴也是线性分度，它表示相角的度数，即  $\phi(\omega) = \angle G(j\omega)(度)$ 。通常将这两个图形上下放置（幅频特性在上，相频特性在下），且将纵轴对齐，便于求出同一频率的幅值和相角的大小，同时为求取系统相角裕度带来方便。





用伯德图分析系统有如下优点：

(1) 将幅频特性和相频特性分别作图，使系统（或环节）的幅值和相角与频率之间的关系更加清晰；

(2) 幅值用分贝数表示，可将串联环节的幅值相乘变为相加运算，可简化计算；

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)\Lambda G_n(j\omega)$$

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| \Lambda |G_n(j\omega)|$$

$$L(\omega) = 20\lg|G(j\omega)| = 20\lg|G_1(j\omega)| + 20\lg|G_2(j\omega)| + \Lambda + 20\lg|G_n(j\omega)|$$

(3) 用渐近线表示幅频特性，使作图更为简单方便；

(4) 横轴（轴）用对数分度，扩展了低频段，同时也兼顾了中、高频段，有利于系统的分析与综合。

## (一) 放大环节 (比例环节)

放大环节的频率特性为

$$G(j\omega) = K \quad (K \text{ 为大于零的常数}) \quad (5-59)$$

其幅频特性是

$$|G(j\omega)| = K \quad (5-60)$$

对数幅频特性为

$$20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg K \quad (5-61)$$

当 $K > 1$ 时,  $20 \lg K > 0$ , 位于横轴上方;

当 $K = 1$ 时,  $20 \lg K = 0$ , 与横轴重合;

当 $K < 1$ 时,  $20 \lg K < 0$ , 位于横轴下方。

放大环节的对数幅频特性如图5-11所示，它是一条与角频率 无关且平行于横轴的直线，其纵坐标为 $20\lg K$ 。

当有 $n$ 个放大环节串联时，即

$$G(j\omega) = K_1 \cdot K_2 \Lambda K_n \quad (5-62)$$

幅值的总分贝数为

$$20\lg|G(j\omega)| = 20\lg K_1 + 20\lg K_2 + \Lambda + 20\lg K_n \quad (5-63)$$

放大环节的相频特性是

$$\angle G(j\omega) = 0^\circ \quad (5-64)$$

如图5-11所示，它是一条与角频率 无关且与 轴重合的直线。

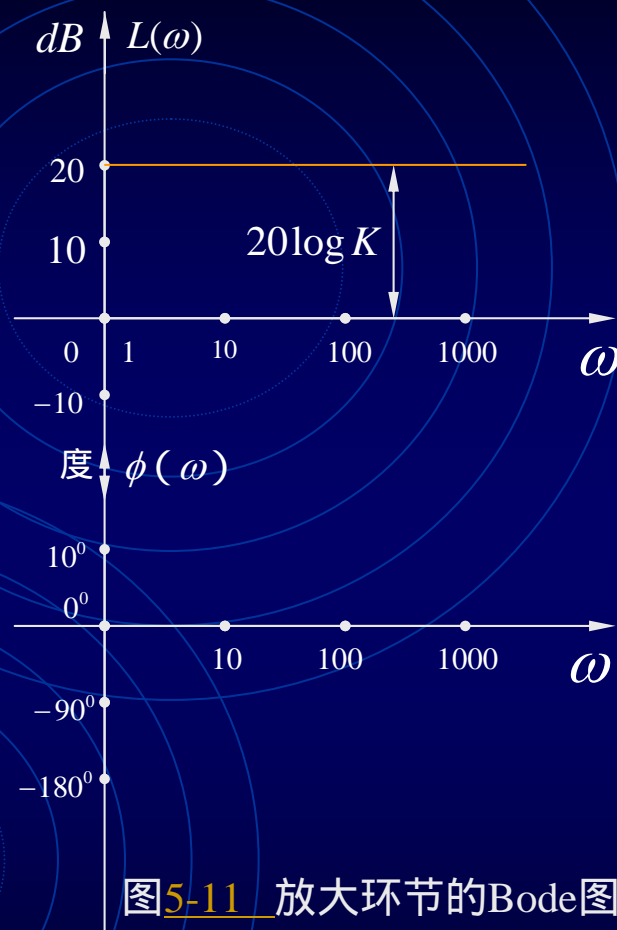


图5-11 放大环节的Bode图

## (二) 积分环节

积分环节的频率特性是

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

其幅频特性为

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$$

对数幅频特性是

$$20\lg|G(j\omega)| = 20\lg\frac{1}{\omega} = -20\lg\omega \quad (5-65)$$

(5-65)

(5-66)

(5-67)

当  $\omega = 0.1$  时,  $20\lg|G(j0.1)| = -20\lg 0.1 = 20(dB)$  ;

当  $\omega = 1$  时,  $20\lg|G(j1)| = -20\lg 1 = 0(dB)$  ;

当  $\omega = 10$  时,  $20\lg|G(j10)| = -20\lg 10 = -20(dB)$  。

设  $\omega' = 10\omega$  , 则有

$$-20 \lg \omega' = -20 \lg 10\omega = -20 - 20 \lg \omega \quad (5-68)$$

可见, 其对数幅频特性是一条在  $\omega = 1$  (弧度/秒) 处穿过零分贝线 (轴), 且以每增加十倍频降低20分贝的速度 ( $-20\text{dB/dec}$ ) 变化的直线。

积分环节的相频特性是

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ \quad (5-69)$$

是一条与  $\omega$  无关, 值为  $-90^\circ$  且平行于  $\omega$  轴的直线。积分环节的对数幅频特性和相频特性如图5-12所示。

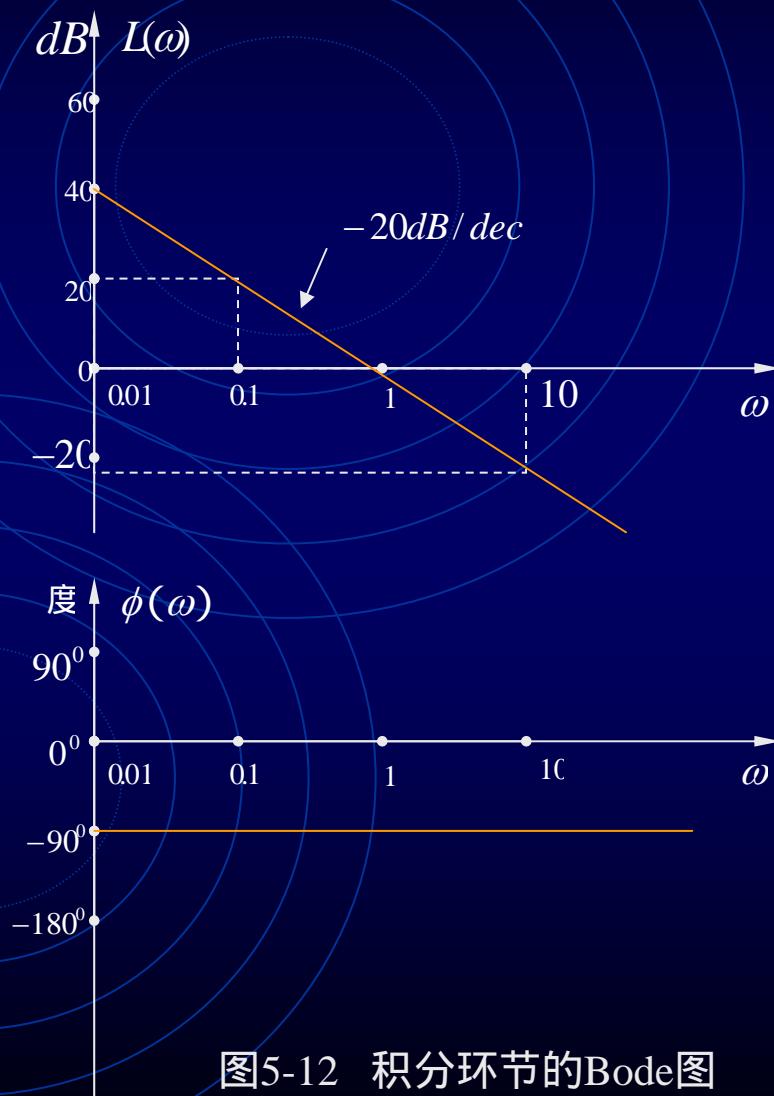


图5-12 积分环节的Bode图

当有n个积分环节串联时，即

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^n} \quad (5-70)$$

其对数幅频特性为

$$20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \frac{1}{\omega^n} \quad (5-71)$$

$$= -n \times 20 \lg \omega$$

$$\angle G(j\omega) = -n \times 90^\circ \quad (5-72)$$

是一条斜率为  $-n \times 20 \text{dB/dec}$ ，且在  $\omega=1$ （弧度/秒）处过零分贝线（轴）的直线。相频特性是一条与  $\omega$  无关，值为  $-n \times 90^\circ$  且与  $\omega$  轴平行的直线。两个积分环节串联的Bode图如图5-13所示。

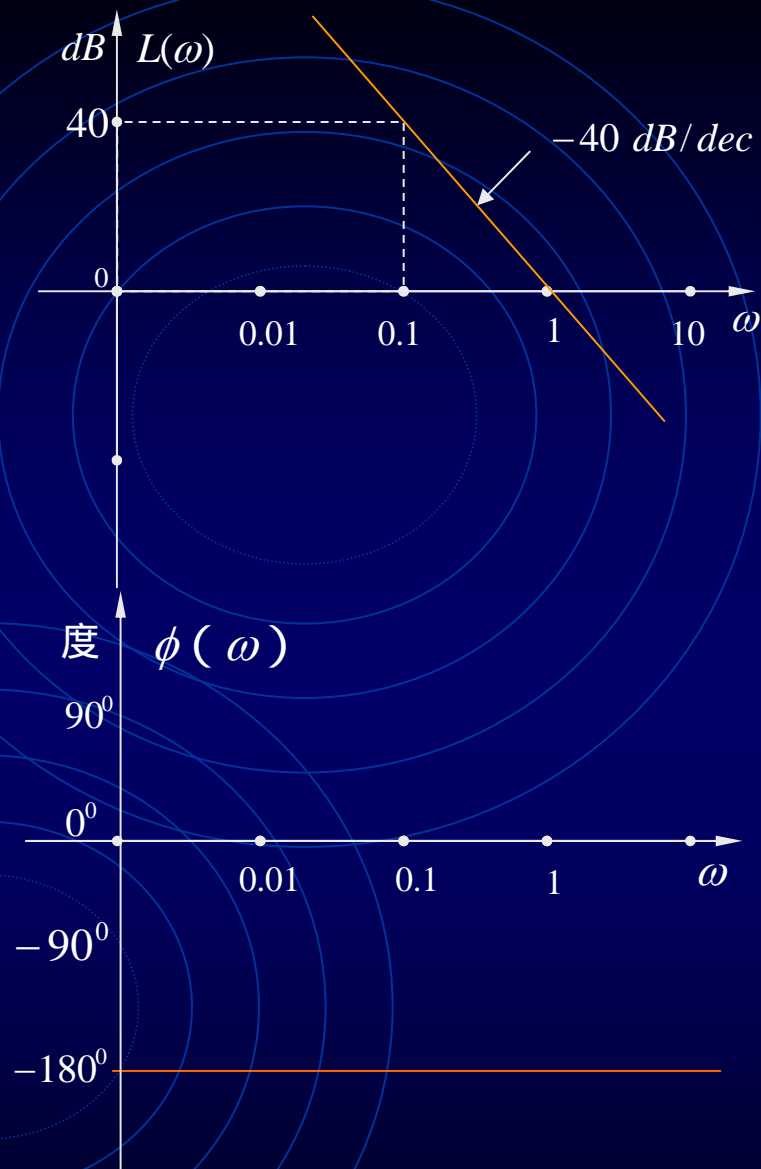


图5-13 两个积分环节串联的Bode图

### (三) 惯性环节

惯性环节的频率特性是

$$G(j\omega) = \frac{1}{jT\omega + 1} \quad (5-73)$$

其对数幅频特性是

$$\begin{aligned} 20 \lg |G(j\omega)| &= 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \\ &= -20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (5-74)$$

当  $\omega \ll \frac{1}{T}$  时,  $20 \lg |G(j\omega)| = -20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2} \approx 0(\text{dB})$ ,

当  $\omega \gg \frac{1}{T}$  时,  $20 \lg |G(j\omega)| = -20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2} \approx -20 \lg T\omega(\text{dB})$ ,

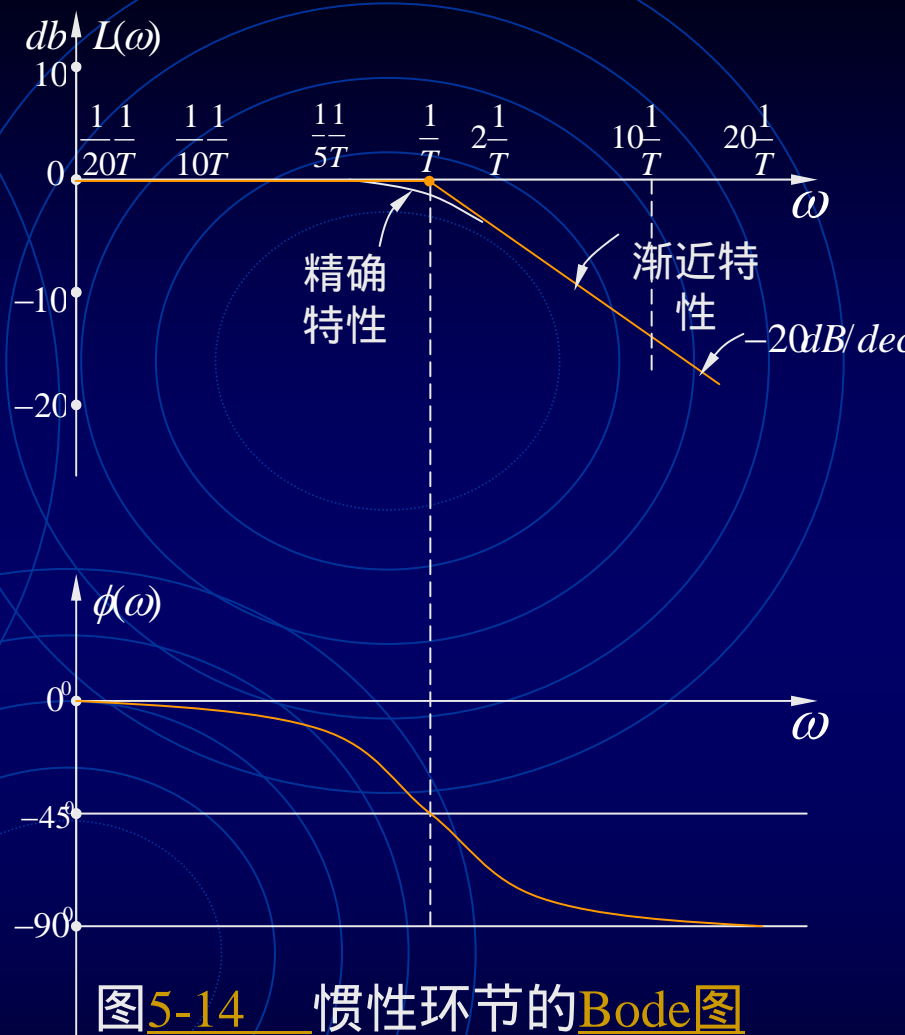
用两条直线近似描述惯性环节的对数幅频特性, 即在  $0 < \omega < \frac{1}{T}$  的低频段时,  $20 \lg |G(j\omega)| = 0$ , 与零分贝线重合; 在  $\frac{1}{T} < \omega < \infty$  的高频段时,  $20 \lg |G(j\omega)| = -20 \lg T\omega$ , 是一条斜率为 -20 (dB/dec.) 的直线。

两条直线在  $\frac{1}{T}$  处相交,  $\omega = \frac{1}{T}$  称为转折频率, 由这两条直线构成的折线称为对数幅频特性的渐近线。如图5-14所示。



很明显，距离转折频率  $\frac{1}{T}$  愈远 ( $\omega \ll \frac{1}{T}$  或  $\omega \gg \frac{1}{T}$ )，愈能满足近似条件，用渐近线表示对数幅频特性的精度就愈高；反之，距离转折频率愈近，渐近线的误差愈大。 $\omega$  等于转折频率  $\frac{1}{T}$  时，误差最大，最大误差为

$$\left. -20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2} \right|_{\omega = \frac{1}{T}} = -20 \lg \sqrt{2} = -3(\text{dB})$$



$\omega = \frac{1}{2T}$  时的误差是

$$\left. -20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2} \right|_{\omega = \frac{1}{2T}} = -20 \lg \frac{\sqrt{5}}{2} = -0.97(dB)$$

$\omega = 2\frac{1}{T}$  时的误差是

$$\begin{aligned} & \left. -20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2} \right|_{\omega = 2\frac{1}{T}} - \left( 20 \lg T \omega \right|_{\omega = 2\frac{1}{T}} ) = -20 \lg \sqrt{5} + 20 \lg 2 \\ & = -0.97(dB) \end{aligned}$$

误差曲线对称于转折频率 $\frac{1}{T}$ ，如图5-15所示。由图5-15可知，惯性环节渐近线特性与精确特性的误差主要在交接频率 $\omega = \frac{1}{T}$ 上下十倍频程范围内。转折频率十倍频以上的误差极小，可忽略。经过修正后的精确对数幅频特性如图5-14所示。

惯性环节的相频特性为

$$\angle G(j\omega) = -\arctg \omega T \quad (5-75)$$

当  $\omega = 0$  时,  $\angle G(j0) = 0^\circ$  ;

当  $\omega = \frac{1}{T}$  时,  $\angle G(j\frac{1}{T}) = -45^\circ$  ;

当  $\omega = \infty$  时,  $\angle G(j\infty) = -90^\circ$  。

对应的相频特性曲线如图5-14

所示。它是一条由  $0^\circ$  至  $-90^\circ$  范围内变化的反正切函数曲线，  
且以  $\omega = \frac{1}{T}$  和  $\angle G(j\omega) = -45^\circ$  的交  
点为斜对称。

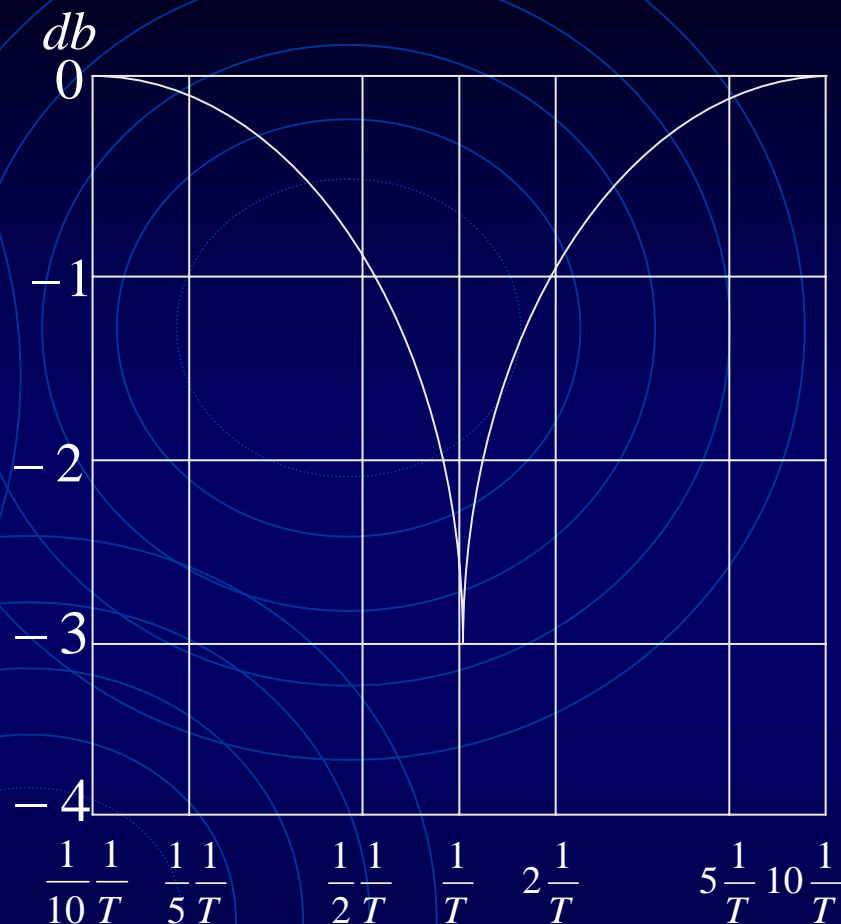


图5-15 惯性环节对数幅频特性误差修正曲线

## (四) 一阶微分环节

一阶微分环节频率特性为

$$G(j\omega) = j\tau\omega + 1$$

其对数幅频特性是

$$20\lg|G(j\omega)| = 20\lg\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1} \quad (5-77)$$

当  $\omega \ll \frac{1}{\tau}$  时,  $20\lg\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1} \approx 0(dB)$  ;

当  $\omega \gg \frac{1}{\tau}$  时,  $20\lg\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1} \approx 20\lg\tau\omega(dB)$  ;

一阶微分环节的对数幅频特性如图5-16所示, 渐近线的转折频率  $\frac{1}{\tau}$  为, 转折频率处渐近特性与精确特性的误差为  $20\lg\sqrt{2} = 3dB$ , 其误差均为正分贝数, 误差范围与惯性环节类似。

相频特性是  $\angle G(j\omega) = \arctg \tau\omega$  (5-78)

当  $\omega = 0$  时,  $\angle G(j0) = 0^\circ$  ;

当  $\omega = \frac{1}{\tau}$  时,  $\angle G(j\frac{1}{\tau}) = 45^\circ$ ;

当  $\omega = \infty$  时,  $\angle G(j\infty) = 90^\circ$ 。

一阶微分环节的相频特性如图 5-16 所示, 相角变化范是  $0^\circ$  至  $90^\circ$ , 转折频率  $\frac{1}{T}$  处的相角为  $45^\circ$ 。比较 图 5-16 和

5-14, 可知, 一阶微分环节与惯性环节的对数幅频特性和相频特性是

以横轴 ( 轴 ) 为对称的。

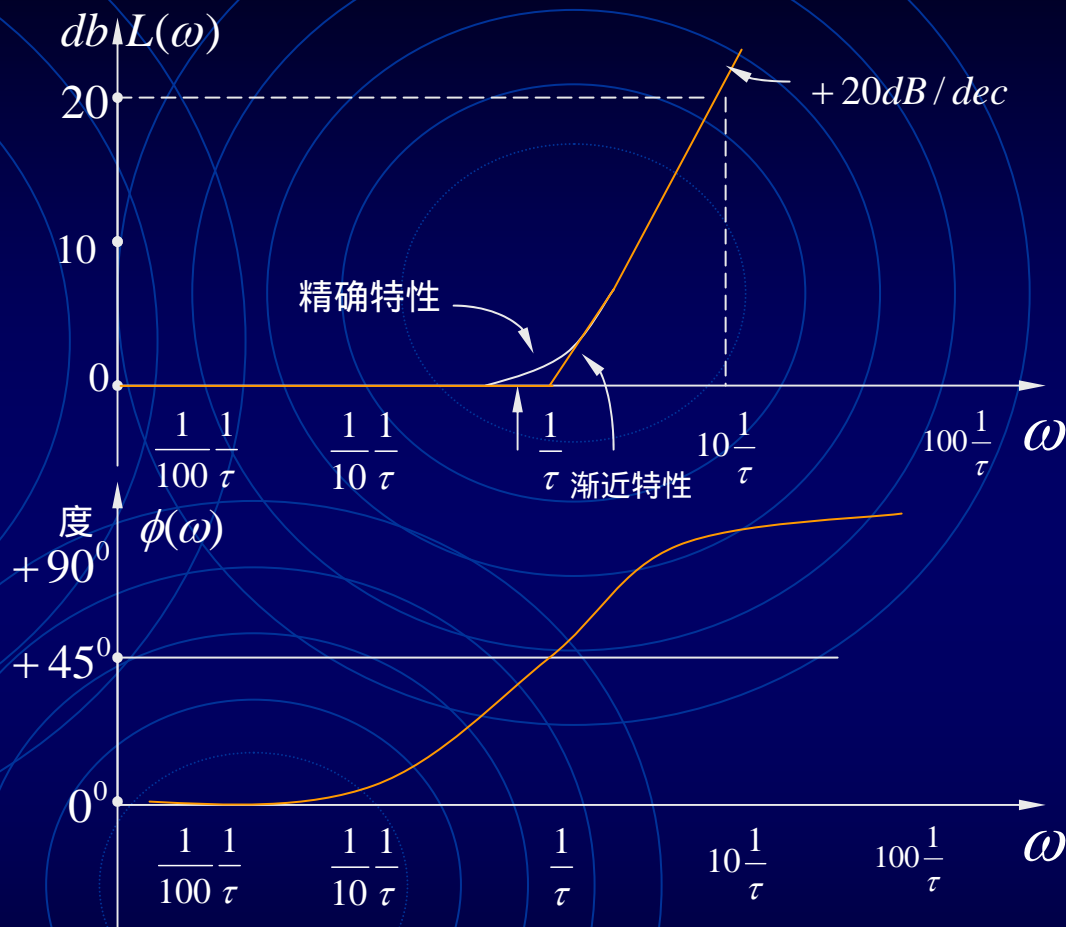


图5-16 一阶微分环节的Bode图

## (五) 振荡环节

振荡环节的频率特性是

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1 - T^2\omega^2) + j2\xi T\omega} \quad (5-79)$$

其对数幅频特性为

$$20\lg|G(j\omega)| = -20\lg\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2} \quad (5-80)$$

当  $\omega \ll \frac{1}{T}$  时,  $-20\lg\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2} \approx 0(\text{dB})$

当  $\omega \gg \frac{1}{T}$  时,  $-20\lg\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2} \approx -40\lg T\omega(\text{dB})$ 。

渐近线的第一段折线与零分贝线（轴）重合，对应的频率范围是0至 $\frac{1}{T}$ ；第二段折线的起点在 $\frac{1}{T}$ 处，是一条斜率为-40

（dB/dec）的直线，对应的频率范围是 $\frac{1}{T}$ 至 $\infty$ 。两段折线构成振荡环节对数幅频特性的渐近线，它们的转折频率为 $\frac{1}{T}$ 。对数幅频特性曲线的渐近线如图5-17所示。

渐近线与精确对数幅频特性曲线的误差分析如下：

当  $\omega = \frac{1}{T}$  时， $-20\lg \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2} \Big|_{\omega=\frac{1}{T}} = -20\lg 2\xi$ ，它是阻尼比的函数；当  $\xi=1$  时为-6 (dB)，当  $\xi=0.5$  时为0(dB)，当  $\xi=0.25$  时为+6(dB)；误差曲线如图5-18所示。

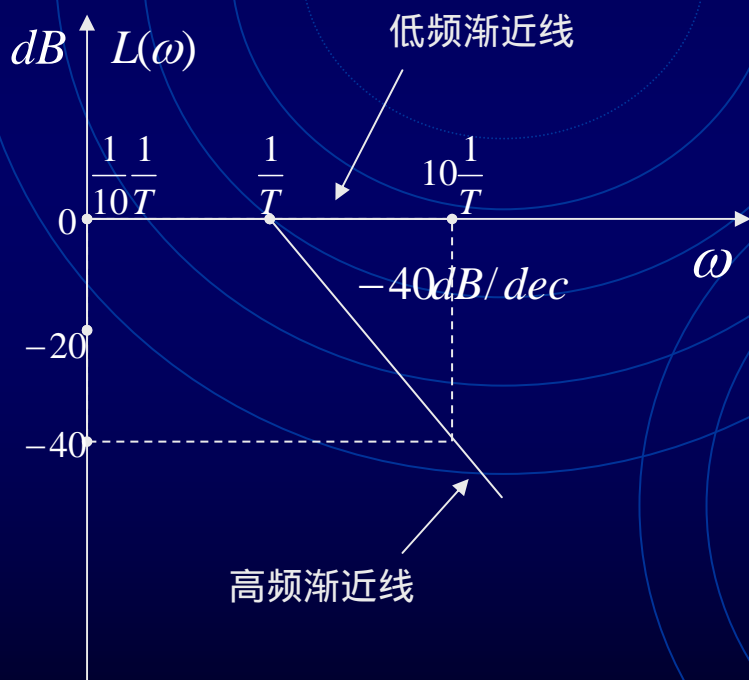


图5-17 振荡环节渐进线对数幅频特性

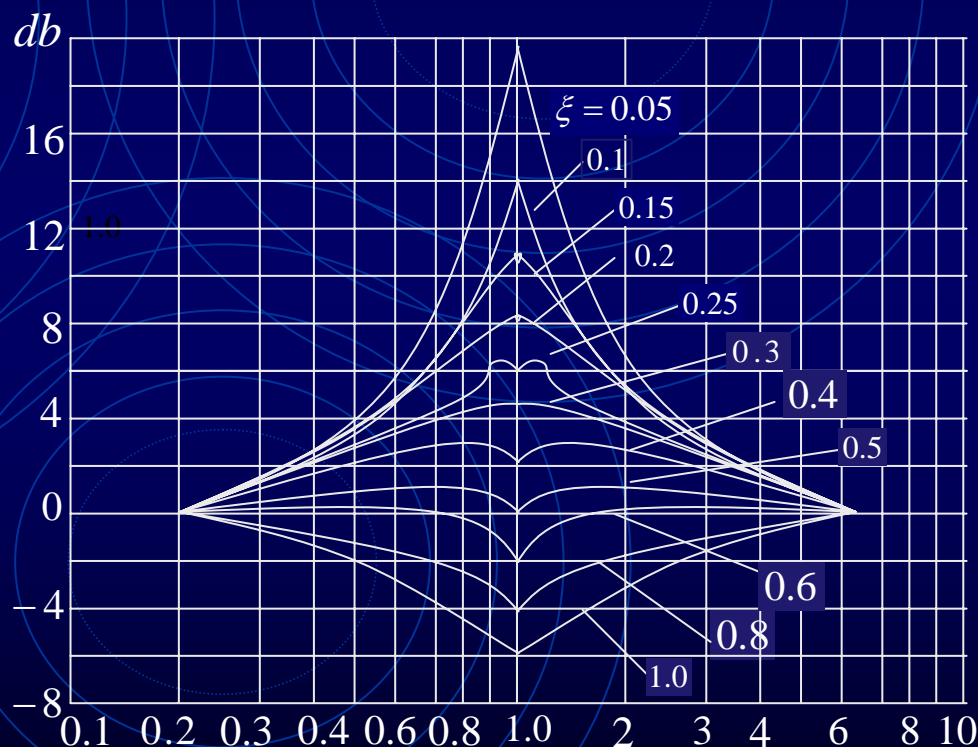


图5-18 振荡环节对数幅频特性误差修正曲线



由图知，振荡环节的误差可正可负，它们是阻尼比  $\zeta$  的函数，且以  $\omega = \frac{1}{T}$  的转折频率为对称，距离转折频率愈远误差愈小。通常大于（或小于）十倍转折频率时，误差可忽略不计。经过修正后的对数幅频特性曲线如图5-19所示。

由图5-19可看出，振荡环节的对数幅频特性在转折频率  $\frac{1}{T}$  附近产生谐振峰，这是该环节固有振荡性能在频率特性上的反映。前面已经分析过，谐振频率  $\omega_r$  和谐振峰  $M_r$  分别为

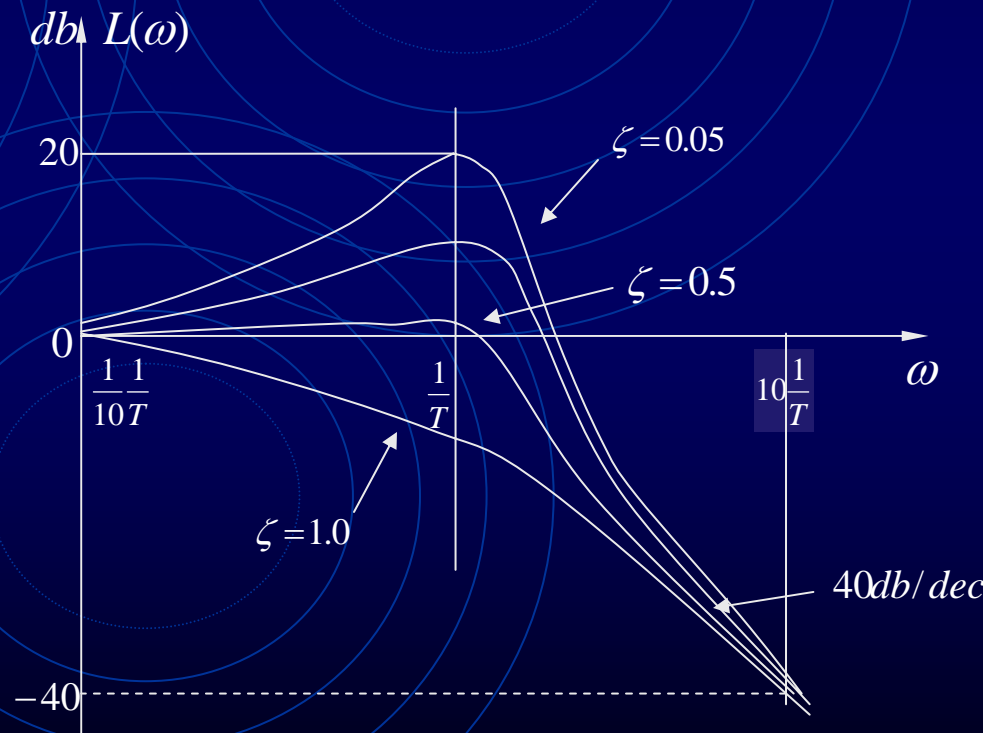


图5-19 振荡环节对数幅频率特性图



$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad (5-81)$$

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (5-82)$$

其中  $\omega_n = \frac{1}{T}$  称为振荡环节的无阻尼 ( $\xi=0$ ) 自然振荡频率, 它也是渐近线的转折频率。由式 (5-81) 可知, 当阻尼比  $\xi$  愈小, 谐振频率  $\omega_r$  愈接近无阻尼自然振荡频率  $\omega_n$ , 当  $\xi=0$  时,  $\omega_r = \omega_n$

振荡环节的相频特性是

$$\angle G(j\omega) = -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2} \quad (5-83)$$

当  $\omega=0$  时,  $\angle G(j0)=0^{\circ}$  ;  
 当  $\omega=\frac{1}{T}$  时,  $\angle G(j\frac{1}{T})=-90^{\circ}$  ;  
 当  $\omega=\infty$  时  $\angle G(j\infty)=-180^{\circ}$  。

除上面三种特殊情况外, 振荡环节相频特性还是阻尼比  $\xi$  的函数, 随阻尼比  $\xi$  变化, 相频特性在转折频率  $\frac{1}{T}$  附近的变化速率也发生变化, 阻尼比  $\xi$  越小, 变化速率越大, 反之愈小。但这种变化不影响整个相频特性的大致形状。不同阻尼比  $\xi$  的相频特性如图 5-20 所示。

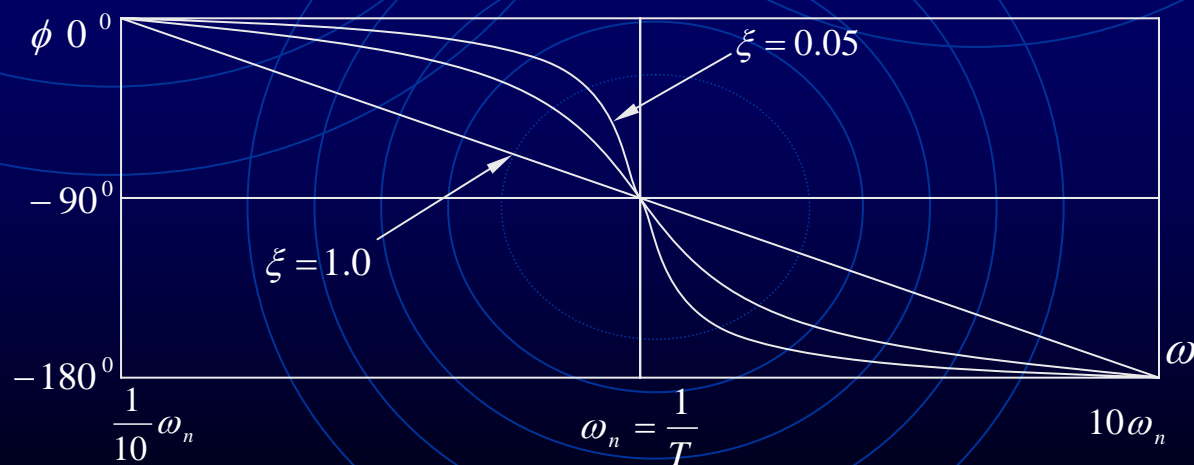


图5-20

振荡环节对数相频特性图

## (六) 二阶微分环节

二阶微分环节的频率特性是

$$G(j\omega) = (1 - \tau^2 \omega^2) + j2\xi\tau\omega \quad (5-84)$$

其对数幅频特性是

$$20\lg|G(j\omega)| = 20\lg\sqrt{(1 - \tau^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 \tau^2 \omega^2} \quad (5-85)$$

相频特性是

$$\angle G(j\omega) = \arctg \frac{2\xi\tau\omega}{1 - \tau^2 \omega^2}$$

(5-86)

二阶微分环节与振荡节的Bode

图关于 轴对称，如图5-

21。渐近线的转折频率为  $\frac{1}{\tau}$ ，相角变化范围是  $0^\circ$  至  $+180^\circ$ 。

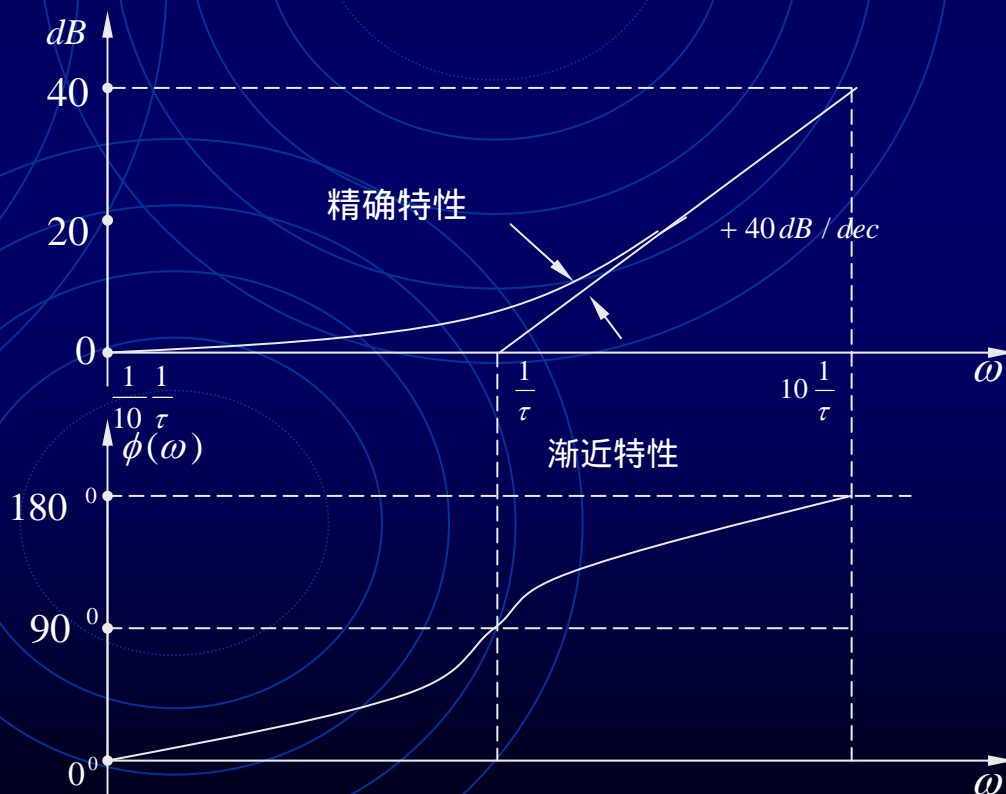


图5-21 二阶微分环节的Bode图

## (七) 不稳定环节

不稳定环节的频率特性是

$$G(j\omega) = \frac{1}{jT\omega - 1} \quad (5-87)$$

其对数幅频特性和相频特性分别为

$$\begin{aligned} 20\lg|G(j\omega)| \\ = -20\lg\sqrt{T^2\omega^2 + 1} \quad (5-88) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) \\ = -180^\circ + \arctg T\omega \quad (5-89) \end{aligned}$$

其对数幅频特性与惯性环节相同；相频特性与惯性环节相比是以  $\angle G(j\omega) = -90^\circ$  为对称，相角的变化范围是  $-180^\circ$  至  $-90^\circ$ 。

Bode如图5-22所示。

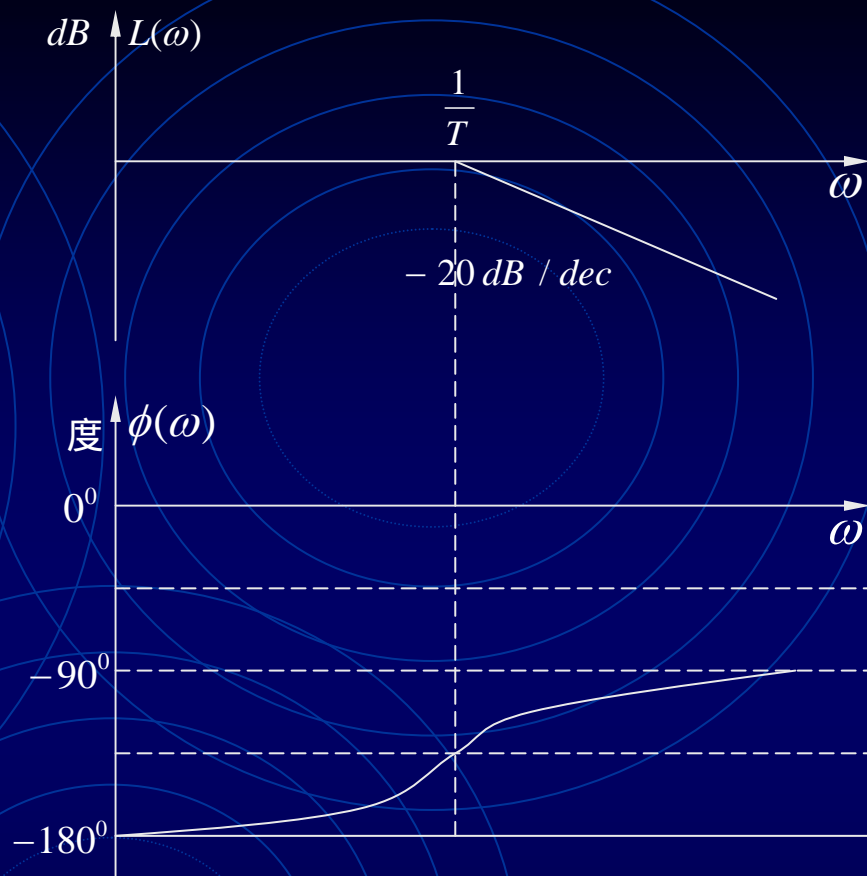


图5-22 不稳定惯性环节的Bode图

## (八) 滞后环节

滞后环节的频率特性是

其对数幅频特性和相频特性分别为

$$G(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$$

$$20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg 1 = 0(\text{dB})$$

$$\angle G(j\omega) = -\tau\omega (\text{弧度}) = -57.3\tau\omega (\text{度})$$

滞后环节伯德图如图5-23所示。

其对数幅频特性与  $\omega$  无关，是一条与  $0\text{dB}$  轴重合的零分贝线。滞后相角由式 (5-92) 计算，分别与滞后时间常数  $\tau$  和角频率  $\omega$  成正比。

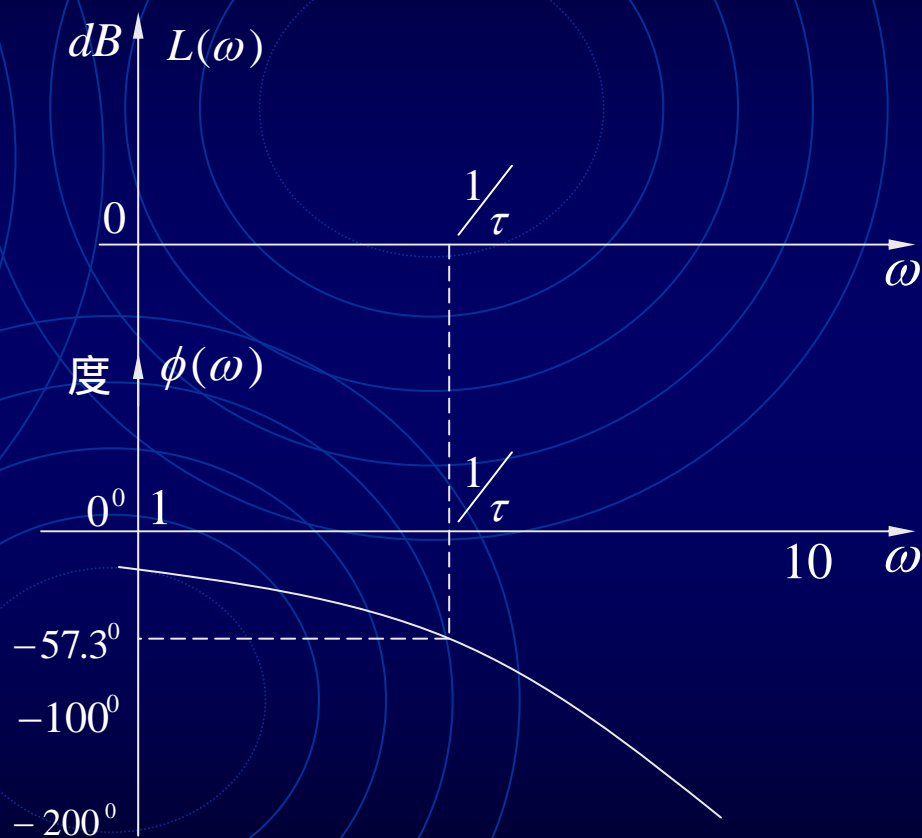


图5-23 滞后环节的Bode图

## 5-3 系统开环频率特性的绘制

系统的开环频率特性在系统的分析与综合中有很重要的意义，本节将通过一些示例介绍系统的开环频率特性（包括它的极坐标和伯德图）的绘制方法和步骤。

自动控制系统通常由若干环节组成，根据它们的基本特性，可以把系统分解成一些典型环节的串联，再按照串联的规律将这些典型环节的频率特性组合起来得到整个系统的开环频率特性。因此，将系统的开环传递函数分解成若干典型环节的串联形式是绘制系统开环频率特性的基本步骤。

# 一、绘制系统开环频率特性极坐标图的步骤

1. 将系统开环传递函数分解成若干典型环节的串联形式；
2. 典型环节幅频特性相乘得到系统开环幅频特性，
3. 典型环节相频特性相加得到系统开环相频特性；
4. 如幅频特性有渐近线，则根据开环频率特性表达式的实部和虚部，求出渐近线；
5. 最后在 $G(j\omega)H(j\omega)$ 平面上绘制出系统开环频率特性的极坐标图。

## 二、绘制系统开环频率特性伯德图的步骤

1. 将系统的开环传递函数写成典型环节乘积（即串联）的形式；
2. 如果存在转折频率，在 轴上标出转折频率的坐标位置；
3. 由各串联环节的对数幅频特性叠加后得到系统开环对数幅频特性的渐近线；
4. 修正误差，画出比较精确的对数幅频特性；
5. 画出各串联典型环节相频特性，将它们相加后得到系统开环相频特性。



### 例5-1 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = K \cdot \frac{1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{1}{T_2 s + 1} (T_1 > T_2)$$

它由一个放大环节和两个惯性环节串联而成，其对应的频率特性是

$$G(j\omega)H(j\omega) = K \cdot \frac{1}{jT_1\omega + 1} \cdot \frac{1}{jT_2\omega + 1}$$

幅频特性和相频特性分别为

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = K \cdot \frac{1}{\sqrt{T_1^2\omega^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{T_2^2\omega^2 + 1}}$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -\arctg T_1\omega - \arctg T_2\omega = -\arctg \frac{(T_1 + T_2)\omega}{1 - T_1T_2\omega^2}$$

## (1) 极坐标图

当  $\omega=0$  时,  $|G(j\omega)H(j\omega)|=K, \angle G(j\omega)H(j\omega)=0^\circ$

当  $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$  时  $|G(j\omega)H(j\omega)|=K \cdot \frac{\sqrt{T_1 T_2}}{T_1 + T_2}, \angle G(j\omega)H(j\omega)=-90^\circ$

当  $\omega = \infty$  时,

$|G(j\omega)H(j\omega)|=0, \angle G(j\omega)H(j\omega)=-180^\circ$

当 由零增至无穷大时, 幅值由K衰减至零, 相角 $0^\circ$ 变至 $-180^\circ$ , 且均为负相角。频率特性与负虚轴的交点频率为

$\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$ , 交点坐标是  $(0, -jK \frac{\sqrt{T_1 T_2}}{T_1 + T_2})$ 。  $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$

其极坐标图如图5-24所示。

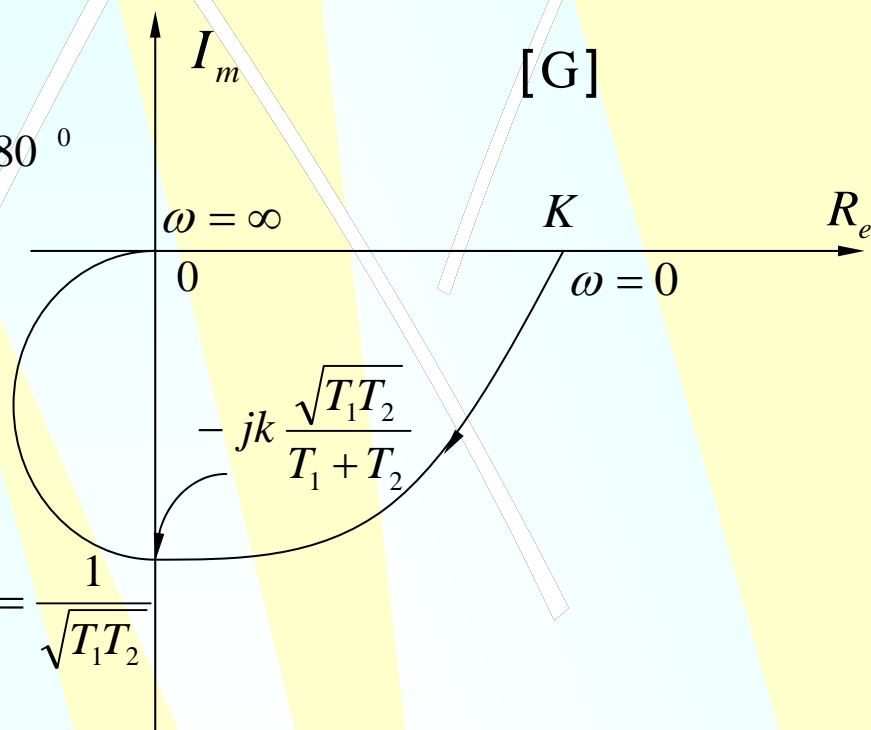


图5-24 开环系统极坐标图

## (2) 伯德图

### (a) 对数幅频特性

由开环传递函数知，对数幅频特性的渐近线有两个转折频率  $\frac{1}{T_1}$  和  $\frac{1}{T_2}$ ，且  $\frac{1}{T_1} < \frac{1}{T_2}$ ，将它们在轴上标出（图5-25）；

在纵坐标上找到  $20\lg K$  的点 A，过 A 点作平行于横轴的直线 AB，这条平行线对应放大环节的幅频特性；

在转折频率  $\frac{1}{T_1}$  处作轴的垂线（虚线）交平行线 AB 于 B 点，以 B 为起点作斜率为  $-20\text{dB/dec}$  的斜线 BC，C 点对应转折频率  $\frac{1}{T_2}$ ，折线 ABC 对应放大环节 K 和惯性环节的叠加；

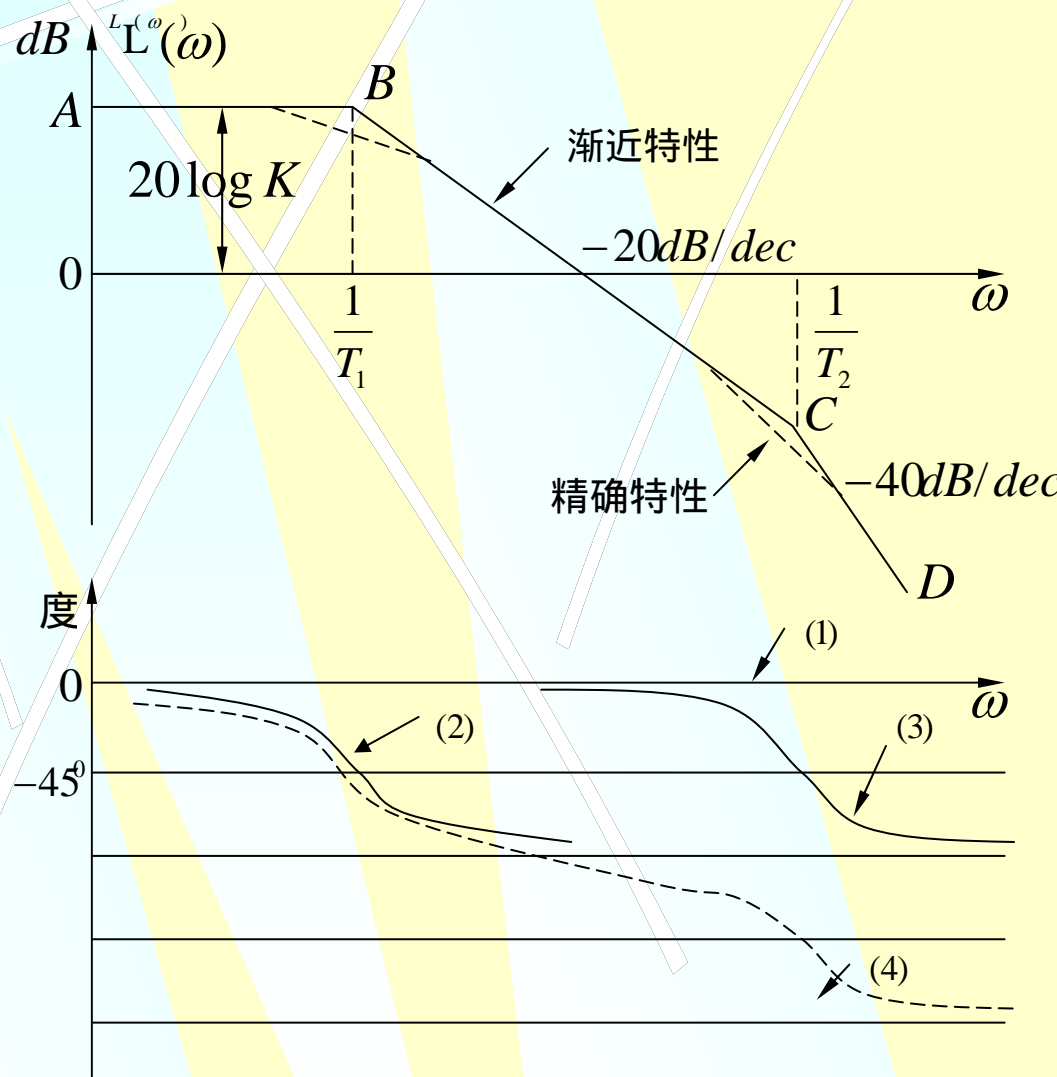


图5-25 开环系统Bode图

以C为起点，作斜率为-40dB/dec的斜线CD，折线ABCD即为系统开环对数幅频特性的渐近线。

## (b) 对数相频特性

在图5-25上分别画出三个环节的相频特性曲线，（1）为放大环节，（2）为惯性环节1和（3）为惯性环节2，然后将它们在纵轴方向上相加得到系统开环相频特性曲线（4）。

**例5-2** 试绘制传递函数为

$$G_1(s) = \frac{K_v}{s} \quad (5-93)$$

$$G_2(s) = \frac{K_a}{s^2} \quad (5-94)$$

的对数幅频特性。

解：有n个积分环节串联，对数幅频特性应是一条过横轴上  $\omega=1$  且斜率为  $-n \times 20\text{dB/dec}$  的直线。式(5-93)和(5-94)中分别含有一个和两个积分环节（串联），当不考虑  $K_v$  和  $K_a$  的影响时，它们的对数幅频特性应是过  $\omega=1$  且斜率分别为  $-0\text{dB/dec}$  和  $-40\text{dB/dec}$  的直线，如图5-26和图5-27中虚线所示。考虑到  $K_v$  和  $K_a$  的作用，上述两条直线应分别在纵轴方向上平移  $20\lg K_v$  和  $20\lg K_a$  分贝（如图中实线所示），即  $\omega=1$  所对应的坐标值应分别为  $20\lg K_v$  和  $20\lg K_a$  分贝。设对数幅频特性与零分贝线（横轴）的交点频率值分别为  $\omega_v$  和  $\omega_a$ ，则有

$$20 \lg |G_1(j\omega)| \Big|_{\omega=\omega_v} = 20 \lg \left| \frac{K_v}{j\omega} \right| \Big|_{\omega=\omega_v} = 20 \lg K_v - 20 \lg \omega_v = 0 \quad (5-95)$$

和

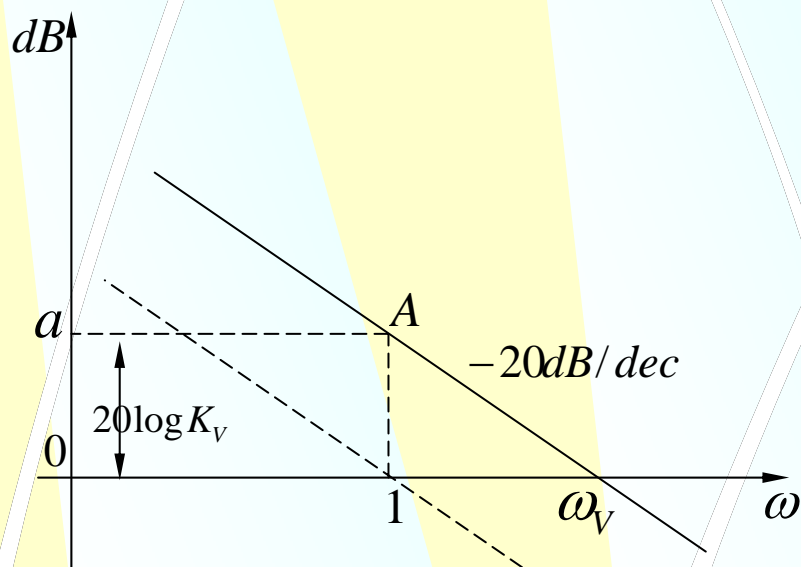
$$20 \lg |G_2(j\omega)| \Big|_{\omega=\omega_a} = 20 \lg \left| \frac{K_a}{\omega^2} \right| \Big|_{\omega=\omega_a} = 20 \lg K_a - 20 \lg \omega_a^2 = 0 \quad (5-96)$$

由上面两式分别得到

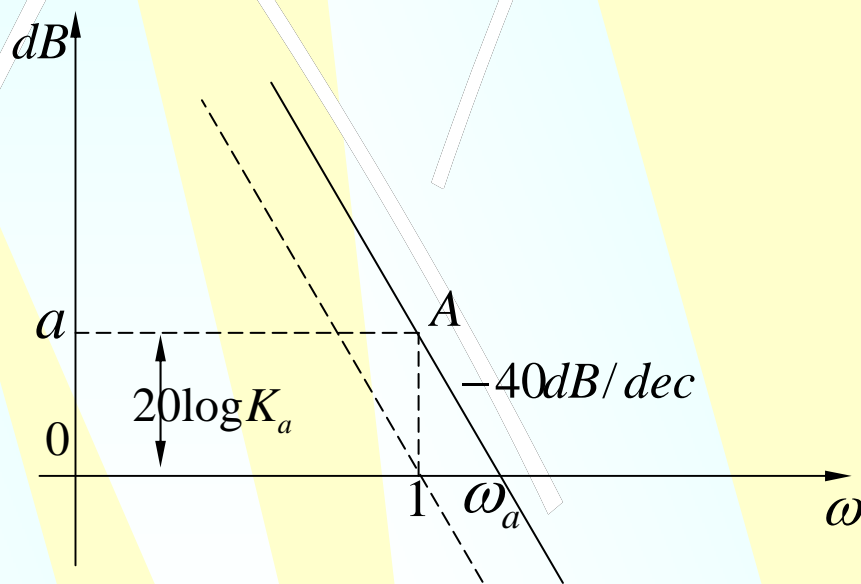
$$\omega_v = K_v \quad (5-97)$$

$$\omega_a = \sqrt{K_a} \text{ 或 } K_a = \omega_a^2 \quad (5-98)$$

通过上面的分析，在绘制传递函数为式 (5-93) 和 (5-94) 的对数幅频特性时，可用下述两种方法之一进行。



**图5-26**  $K_v$ 与 $\omega_v$ 的关系



**图5-27**  $K_a$ 与 $\omega_a$ 的关系

**方法一：**对于式 ( 5-93 )，先过横轴上  $\omega = 1$  点作横轴的垂直线，过纵轴上  $20\lg K_v$  点作横轴的平行线，这两条直线交于A点，然后过A点作斜率为  $-20\text{dB/dec}$  的直线即为所求的对数幅频特性 ( 图5-26 )；对于式 ( 5-94 )，过横轴上  $\omega = 1$  点作横轴的垂线过纵轴上  $20\lg K_a$  点作横轴的平行线，这两条直线交于A点，然后过A点作斜率为  $-40\text{dB/dec}$  的直线即为所求的对数幅频特性 ( 图5-27 )。

**方法二：**对于式 ( 5-93 )，先根据式 ( 5-97 ) 在横轴上找到频率为  $\omega_v$  点，过该点作斜率为  $-20\text{dB/dec}$  的直线即为所求的对数幅频特性 ( 图5-26 )；对于式 ( 5-94 )，根据式 ( 5-98 ) 在横轴上找到频率为  $\omega_a$  的点，过该点作斜率为  $-40\text{dB/dec}$  的直线即为所求的对数幅频特性 ( 图5-27 )。



反之，通过对数幅频特性，也可以用上述两种方法的逆过程，求出式（[5-93](#)）和式（[5-94](#)）中的开环放大系数 $K_v$ 和 $K_a$ 。

对于含有一个或两个积分环节的系统（含有两个以上积分环节的实际系统很少见），由于频率特性的低频段形状主要由积分环节决定，因此，在绘制其对数幅频特性或通过对数幅频特性求系统的开环放大系数时，可用上述两种方法中的一个进行。这在下面的示例中将得到进一步应用。



例5-3 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_v}{s(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)} \quad (0 < \zeta < 1)$$

试绘制该系统开环频率特性的极坐标图和伯德图。

解：系统的开环传递函数可写成

$$G(s)H(s) = K_v \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$$

它由一个放大环节、一个积分环节和一个振荡环节串联组成，对应的频率特性表达式为

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = K_v \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -90^\circ - \arctg \frac{2\zeta T \omega}{1 - T^2 \omega^2}$$

## (1) 极坐标图

当  $\omega = 0$  时,  $|G(j0)H(j0)| = \infty$ ,  $\angle G(j0)H(j0) = -90^\circ$

当  $\omega = \frac{1}{T}$  时,  $|G(j\frac{1}{T})H(j\frac{1}{T})| = \frac{K_v T}{2\zeta}$ ,  $\angle G(j\frac{1}{T})H(j\frac{1}{T}) = -180^\circ$

当  $\omega = \infty$  时,  $|G(j\infty)H(j\infty)| = 0$ ,  $\angle G(j\infty)H(j\infty) = -270^\circ$

由于系统含有一积分环节, 当  $\omega \rightarrow 0$  时, 系统的开环幅频特性  $|G(j\omega)H(j\omega)| \rightarrow \infty$ 。  
为使频率特性曲线比较精确, 还须求出它的渐近线。由系统的开环频率特性可得

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{-2\zeta K_v T}{4\zeta^2 T^2 \omega^2 + (1 - T^2 \omega^2)} - j \frac{(1 - T^2 \omega^2) K_v}{4\zeta^2 T^2 \omega^3 + (1 - T^2 \omega^2)^2 \omega}$$

当  $\omega \rightarrow 0$  时有

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega)H(j\omega) = -2 \frac{K_v T}{\omega} - j \frac{K_v}{\omega}$$

即渐近线是一条与实轴交点为  $-2 \frac{K_v T}{\omega}$  且垂直于实轴的直线, 图5-28绘制出该系统在不同阻尼比的渐近线 (虚线) 及对应开环频率特性的极坐标图。

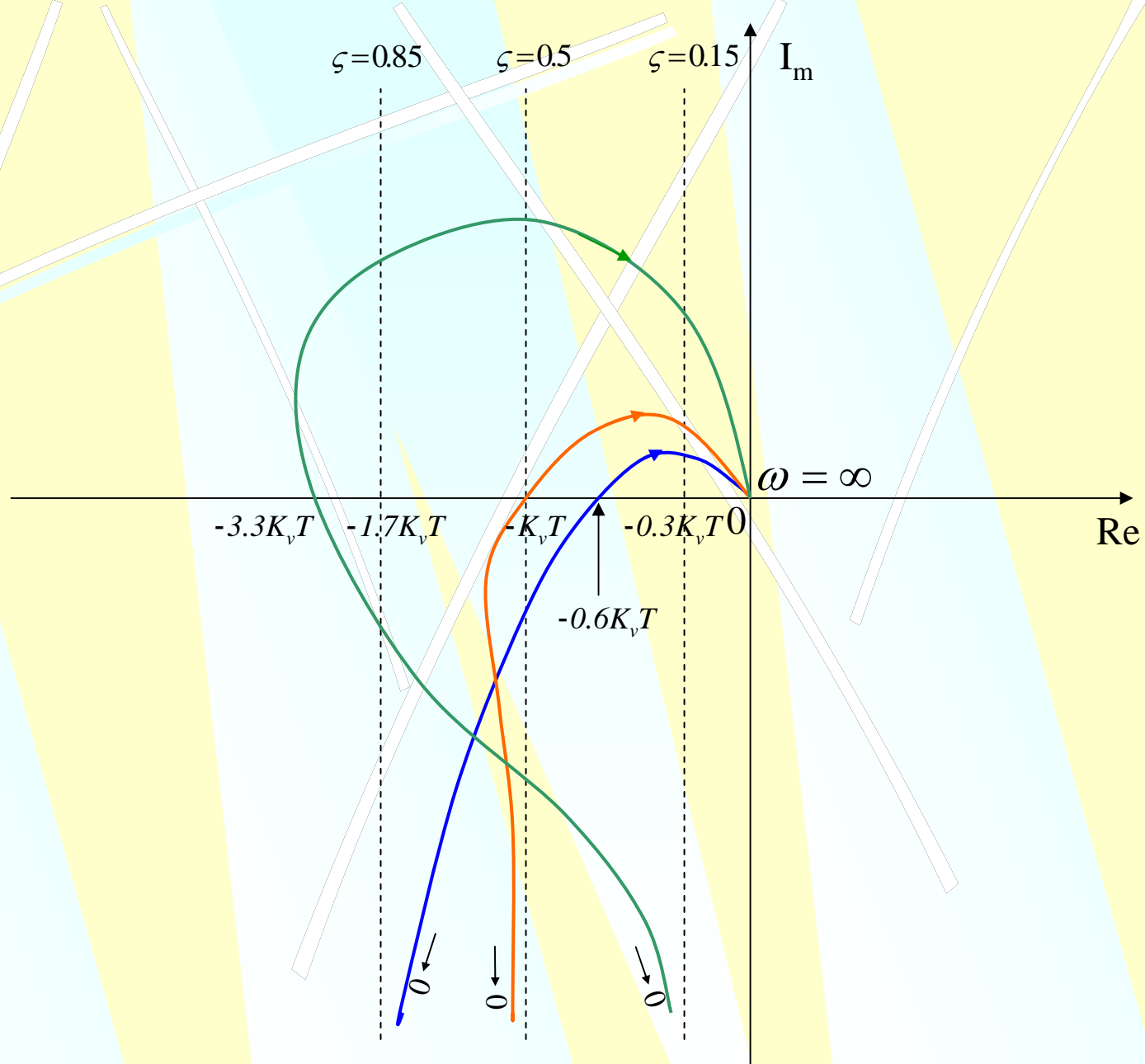


图5 - 28 例5 - 3极坐标图

## (2) 伯德图

### (a) 对数幅频特性

由开环频率特性表达式知，对数幅频特性的渐近线有一个转折频率  $\frac{1}{T}$ （对应振荡环节），将它在图5-29的横轴上标出。该系统还含有一个积分节和放大环节，参照例 5-2，对数幅频特性的低频段主要由积分环节和放大环节决定。当转折频率  $\frac{1}{T} > \omega_v$  时，对数幅频特性如图 5-29 所示，斜率为  $-20\text{dB/dec}$  的折线段在频率为  $\omega_v$  ( $\omega_v = K_v$ ) 处穿过零分贝线直到振荡环节的转折频率  $\frac{1}{T}$  处转折为斜率为  $-60\text{dB/dec}$  的线段。当转折频率为  $\frac{1}{T} < \omega_v$  时，对数幅频特性如图5-30所示。

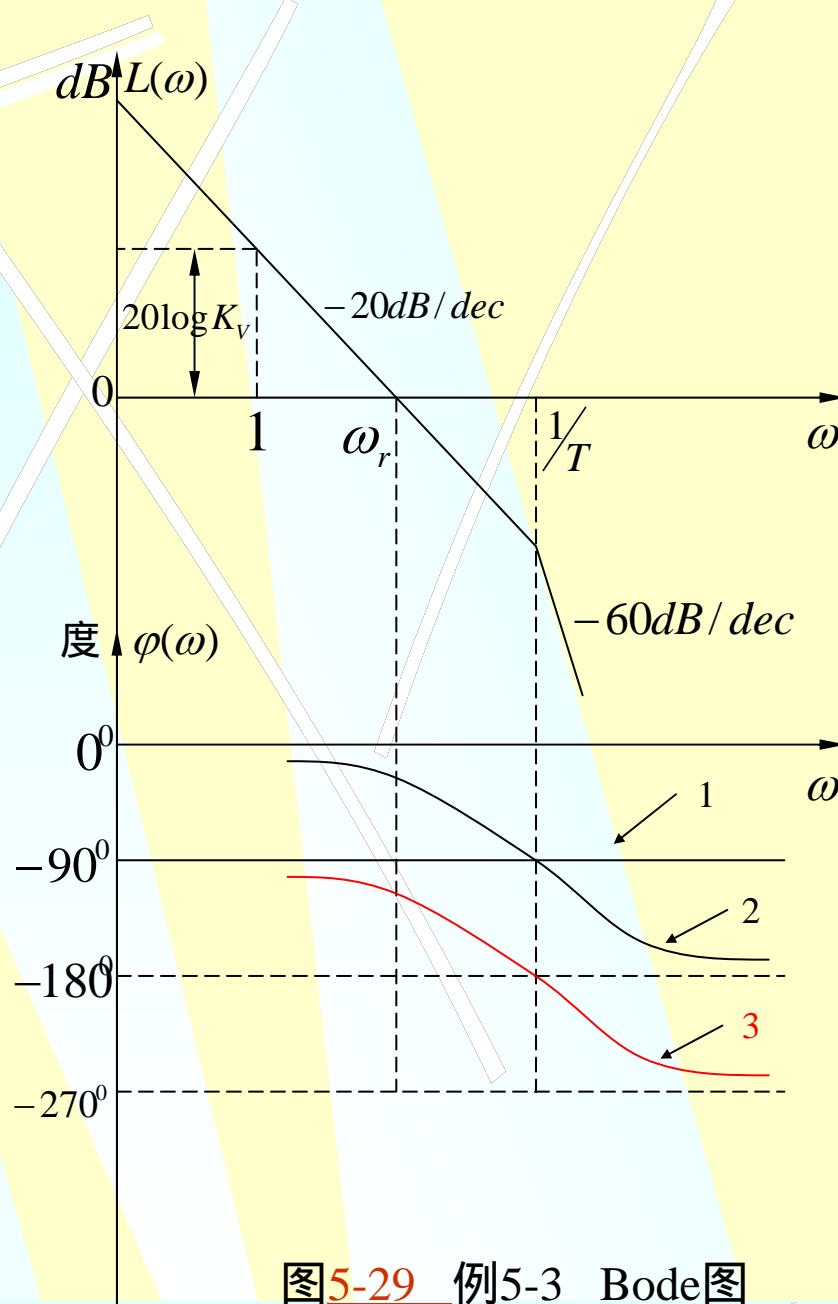


图5-29 例5-3 Bode图

斜率为 $-20\text{dB/dec}$ 的折线段的延长线（图中虚线）与横轴交点频率应为 $\omega_v$ ，从转折频率 $\frac{1}{T}$ 开始，对数频特性转折成斜率为 $-60\text{dB/dec}$ 的直线。

### (b) 对数相频特性

在图5-29上分别画出积分环节的相频特性（1）和振荡环节相频特性（2），然后将它们在纵轴方向上相加便得到系统开环相频特性曲线（3）。

**例5-4** 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{Ts + 1}$$

试绘制该系统开环频率特性的极坐标图和伯德图。

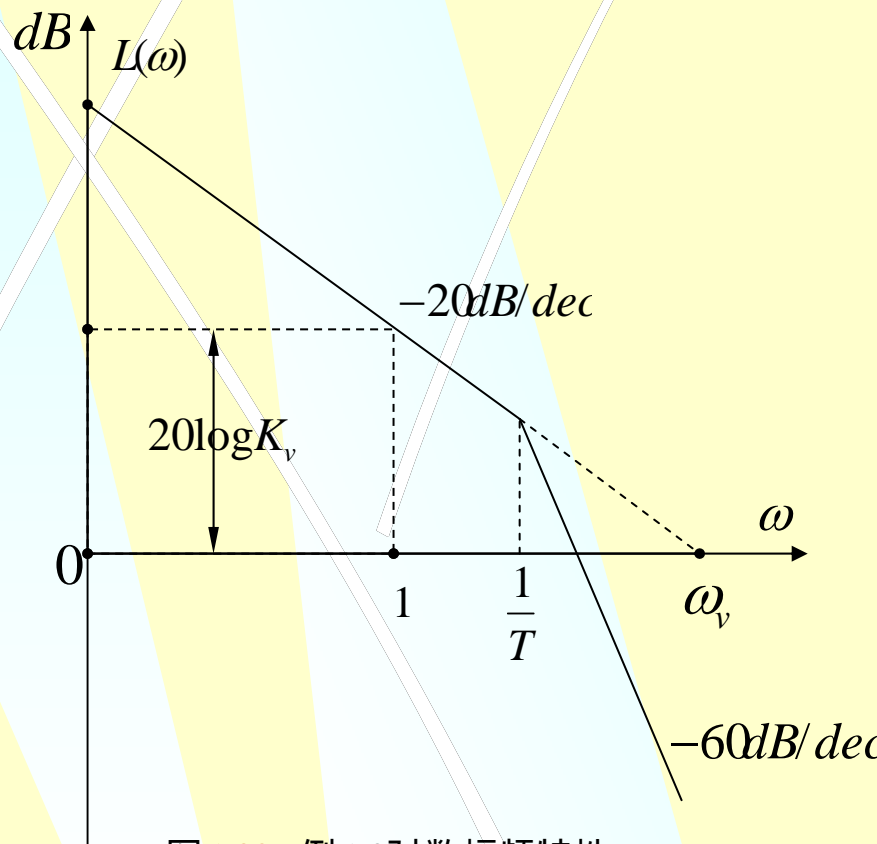


图5-30 例5-3对数幅频特性

解 该系统开环传递函数可写成

$$G(s)H(s) = K \cdot (\tau s + 1) \frac{1}{Ts + 1} \quad (5-99)$$

它由一个放大环节、一个比例微分环节和一个惯性环节串联组成，其对应的频率特性表达式为

$$G(j\omega)H(j\omega) = K \cdot (j\tau\omega + 1) \cdot \frac{1}{jT\omega + 1} \quad (5-100)$$

幅频特性和相频特性分别是

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = K \sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}} \quad (5-101)$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = \arctg \tau\omega - \arctg T\omega \quad (5-102)$$

## (1) 极坐标图

根据幅频特性和相频特性可得到当  $\omega \rightarrow 0$  和  $\omega \rightarrow \infty$  时的极限值分别为

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega)H(j\omega) = K \angle 0^\circ \quad (5-103)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega)H(j\omega) = K \frac{\tau}{T} \angle 0^\circ \quad (5-104)$$

当  $T > \tau$  时  $K \frac{\tau}{T} < K, \angle G(j\omega)H(j\omega) \leq 0^\circ$

当  $T < \tau$  时  $K \frac{\tau}{T} > K, \angle G(j\omega)H(j\omega) \geq 0^\circ$

当  $T = \tau$  时  $K \frac{\tau}{T} = K, \angle G(j\omega)H(j\omega) = 0^\circ$

即当惯性环节时间常数  $T$  大于比例微分环节的微分时间常数  $\tau$  时，随着频率增加，幅值衰减，相角滞后，系统具有低通性质；反之，当  $T < \tau$  时，随着频率增加，幅值加大，相角超前，系统具有高通性质；

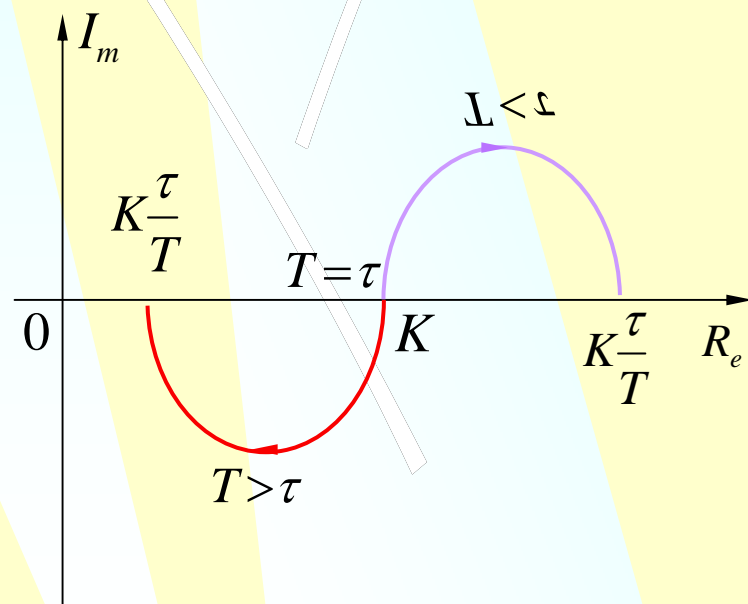


图5-31 例5-4极坐标图



而当  $T = \tau$  时，比例微分环节与惯性环节作用相互抵消，系统只起放大作用。三种情况的极坐标图如图 5-31 所示。

## (2) 伯德图

由式 ( 5-100 ) 知，系统开环对数幅频特性渐近线有两个转折频率  $\frac{1}{T}$  和  $\frac{1}{\tau}$ ，图 5-32 (a)、(b)、(c) 分别绘制了当  $T > \tau$ 、 $T < \tau$  和  $T = \tau$  三种情况下的伯德图。



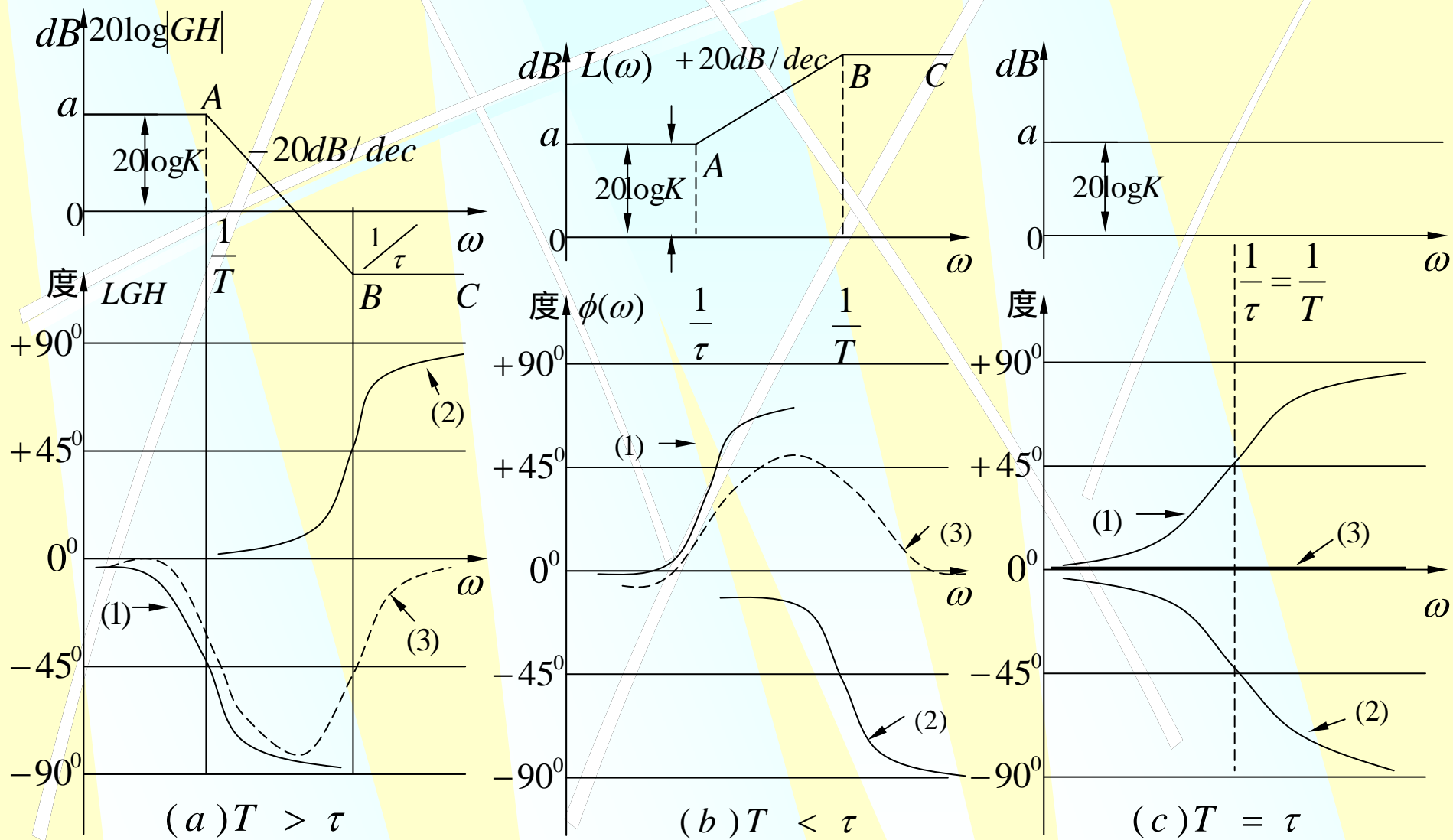


图5-32 例5-4 Bode图

**例5 - 5** 已知系统的开环传递函数如下，试绘制系统开环频率特性的极坐标图和伯德图。

$$G(s)H(s) = \frac{K_v e^{-\tau s}}{s(Ts + 1)}$$

**解：**该系统的开环频率特性表达式为

$$G(j\omega)H(j\omega) = K_v \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{jT\omega + 1} \cdot e^{-j\tau\omega}$$

它是由比例、积分、惯性和滞后环节串联组成。如果滞后时间常数很小而可以忽略不计时，系统的开环幅频和相频特性为

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = K_v \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -90^\circ - \arctg T\omega$$

对应的极坐标图和伯德图分别如图5—33和5—34所示。

当滞后环节时间常数较大而不能忽略时，系统的开环幅频特性由于 $|e^{-j\tau\omega}| = 1$  不受影响，但相频特性须加一滞后相角 $-57.3\tau\omega$ 度，即

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -90^\circ - \arctg T\omega - 57.3\tau\omega$$

对应的极坐标图和伯德图分别如图5 - 36和5 - 37所示。

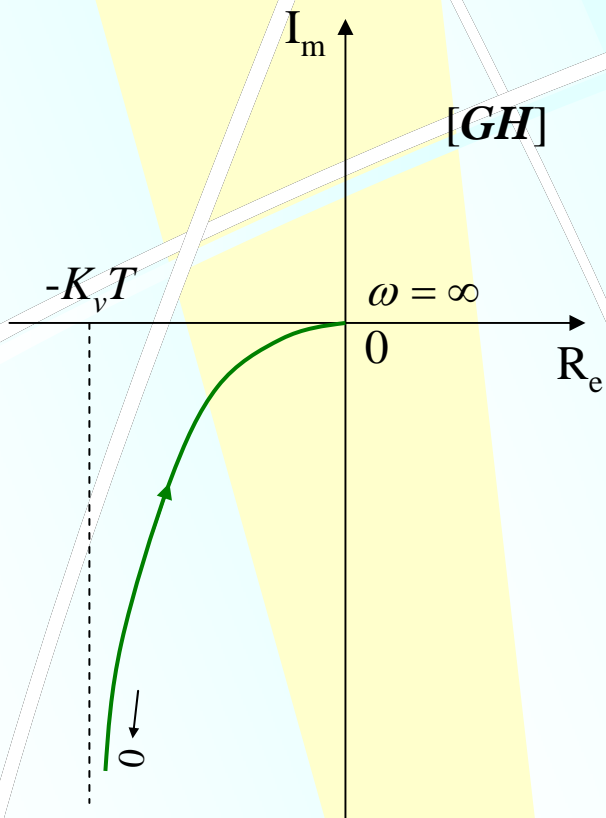


图5-33 例5-5极坐标图  
(无滞后环节)

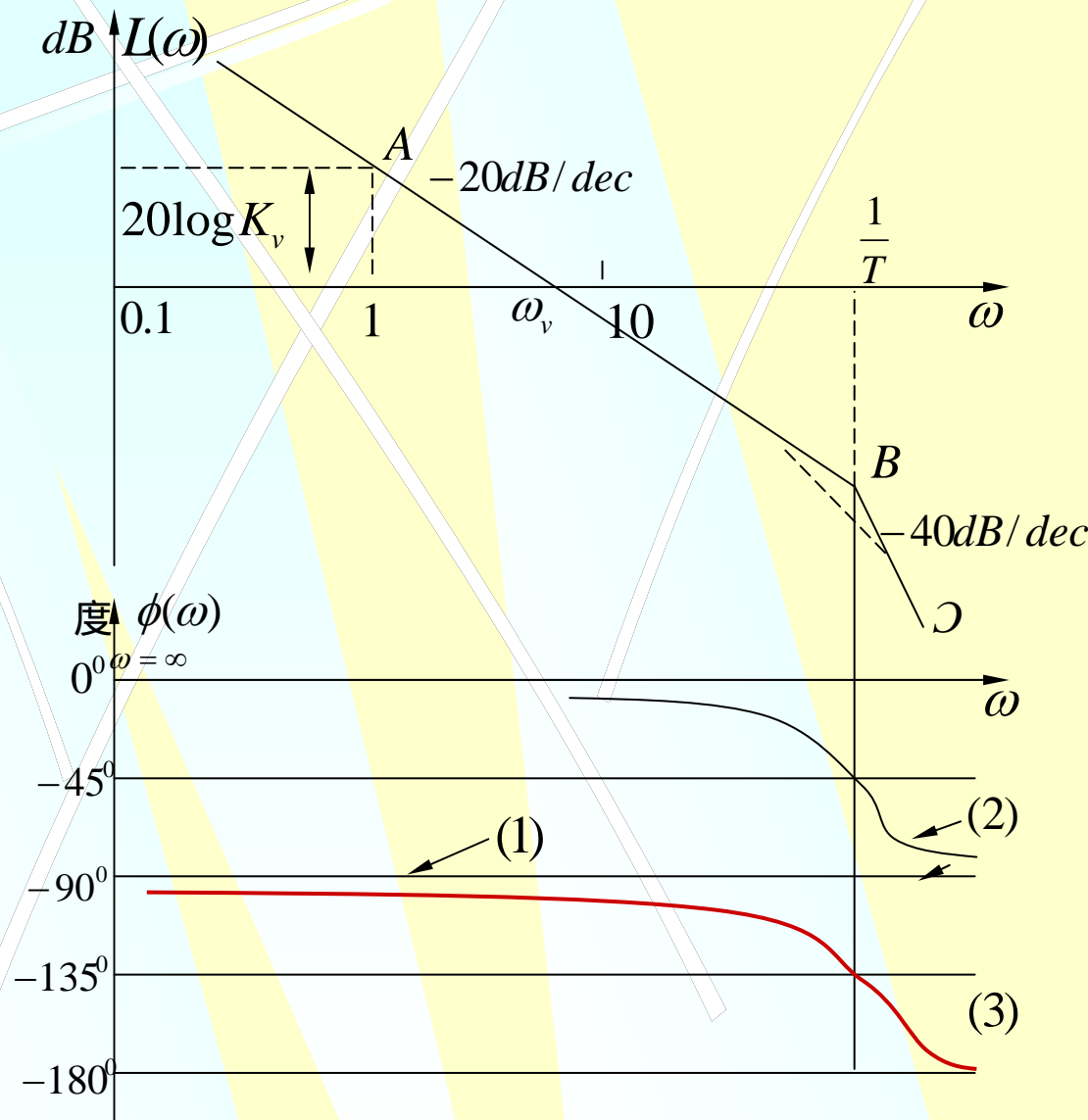


图5-34 例5-5 Bode图 (无滞后环节)

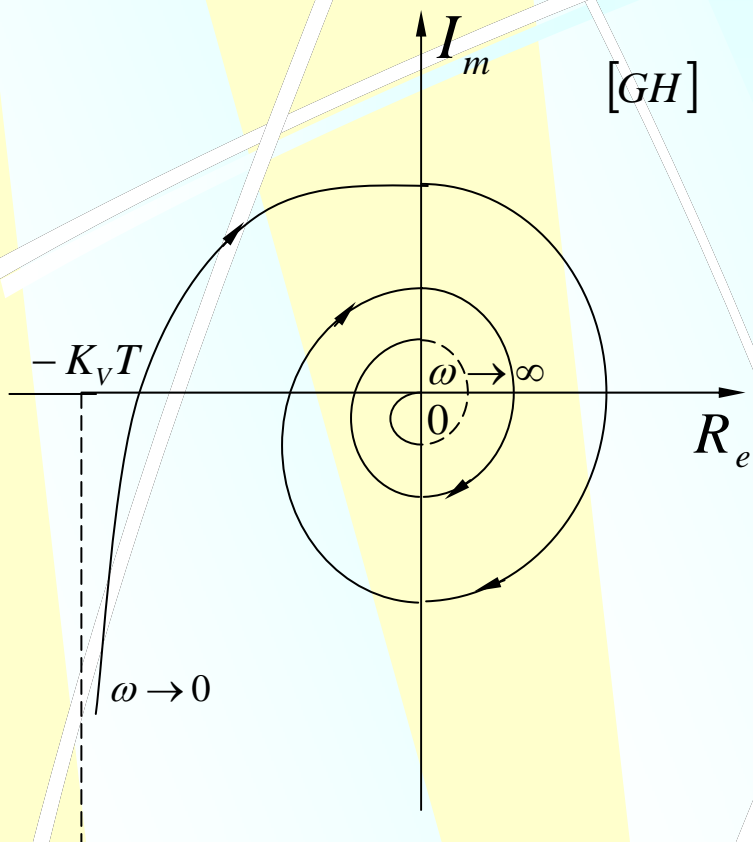


图5-35 例5-5极坐标图（有滞后环节）

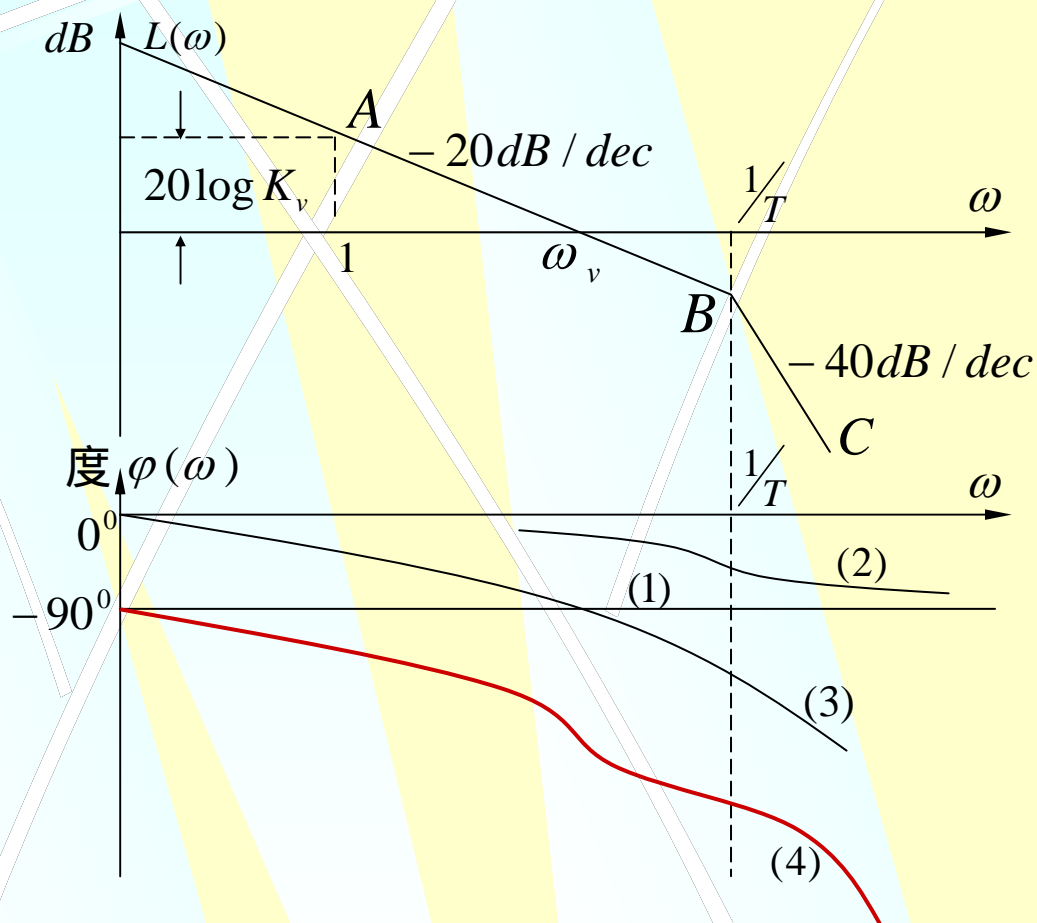


图5-36 例5-5 Bode图（有滞后环节）

比较图5-35与5-33和图5-36与5-34，会发现由于滞后环节的影响，频率特性的极坐标图和对数相频特性曲线形状发生了很显著的变化，它对系统的性能，特别是系统的稳定性将产生很大的影响，有关判别系统稳定性的奈奎斯特判据将在下节介绍，这里不再赘述。

## 5-4 奈奎斯特稳定判据

第三章已经介绍，闭环控制系统的稳定性由系统特征方程根的性质唯一确定。对于三阶以下系统，解出特征根就能判断系统是否稳定。三阶以上的高阶系统，求解特征根通常都很困难，前面介绍了两种判别系统稳定性的方法，基于特征方程的根与系数关系的劳斯判据和根轨迹法。

奈奎斯特（Nyquist）稳定判据（简称奈氏判据）是判断系统稳定性的又一重要方法。它是将系统的开环频率特性  $G(j\omega)H(j\omega)$  与复变函数  $F(s) = 1 + G(s)H(s)$  位于S平面右半部的零、极点数目联系起来的一种判据。奈氏判据是一种图解法，它依据的是系统的开环频率特性。由于系统的开环特性可用解析法或实验法获得，因此，应用奈氏判据分析系统的稳定性兼有方便和实用的优点。奈氏判据还有助于建立相对稳定性的概念。

## 一、幅角定理

幅角定理又称映射定理，它是建立在复变函数理论基础上的。由于奈氏判据是以幅角定理为依据的，因此有必要先简要地介绍幅角定理。

设有一复变函数

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) \quad (5-105)$$

称之为辅助函数，其中 $G(s)H(s)$ 是系统的开环传递函数。

通常可写成如下形式

$$G(s)H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (5-106)$$

式中  $p_i$  是系统的开环极点，将式 (5-106) 代入式 (5-105) 得

$$F(s) = \frac{k(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (5-107)$$

比较式 (5—107) 和式 (5—106) 可知，

辅助函数 $F(s)$ 的零点 $z_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 即闭环传递函数的极点，即系统特征方程 $1 + G(s)H(s) = 0$ 的根。因此，如果辅助函数 $F(s)$ 的零点都具有负的实部，即都位于S平面左半部，系统就是稳定的，否则系统便不稳定。



## (一) S平面与 $F(s)$ 平面的映射关系

假设复变函数 $(z)^A$ 为单值，且除了S平面上有限的奇点外，处处都为连续的正则函数，也就是说 $(z)^A$ 在S平面上除奇点外处处解析，那么，对于S平面上的每一个解析点，在 $F(s)$ 平面上必有一点（称为映射点）与之对应。

例如，当系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

则其辅助函数是

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s(s+1)}$$

除奇点 $s' = 0$ 和 $s'' = -1$ 外，在S平面上任取一点，如

$$s_1 = 1 + j2$$

则

$$F(s_1) = \frac{(1 + j2)^2 + (1 + j2) + 1}{(1 + j2)(1 + j2 + 1)} = 0.95 - j0.15$$



如图5—37所示，在  $F(s)$  平面上有点  $F(s_1) = 0.95 - j0.15$  与S平面上的点  $s_1$  对应， $F(s_1)$  就叫做  $s_1 = 1 + j2$  在  $F(s)$  平面上的映射点。

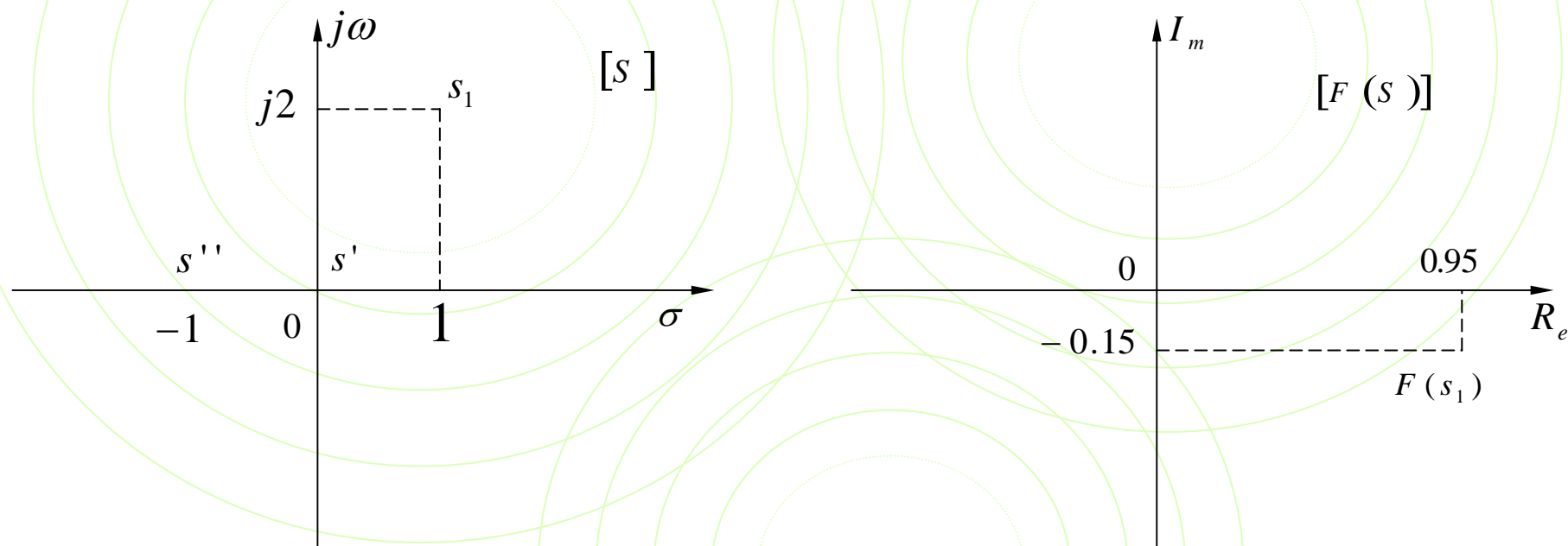
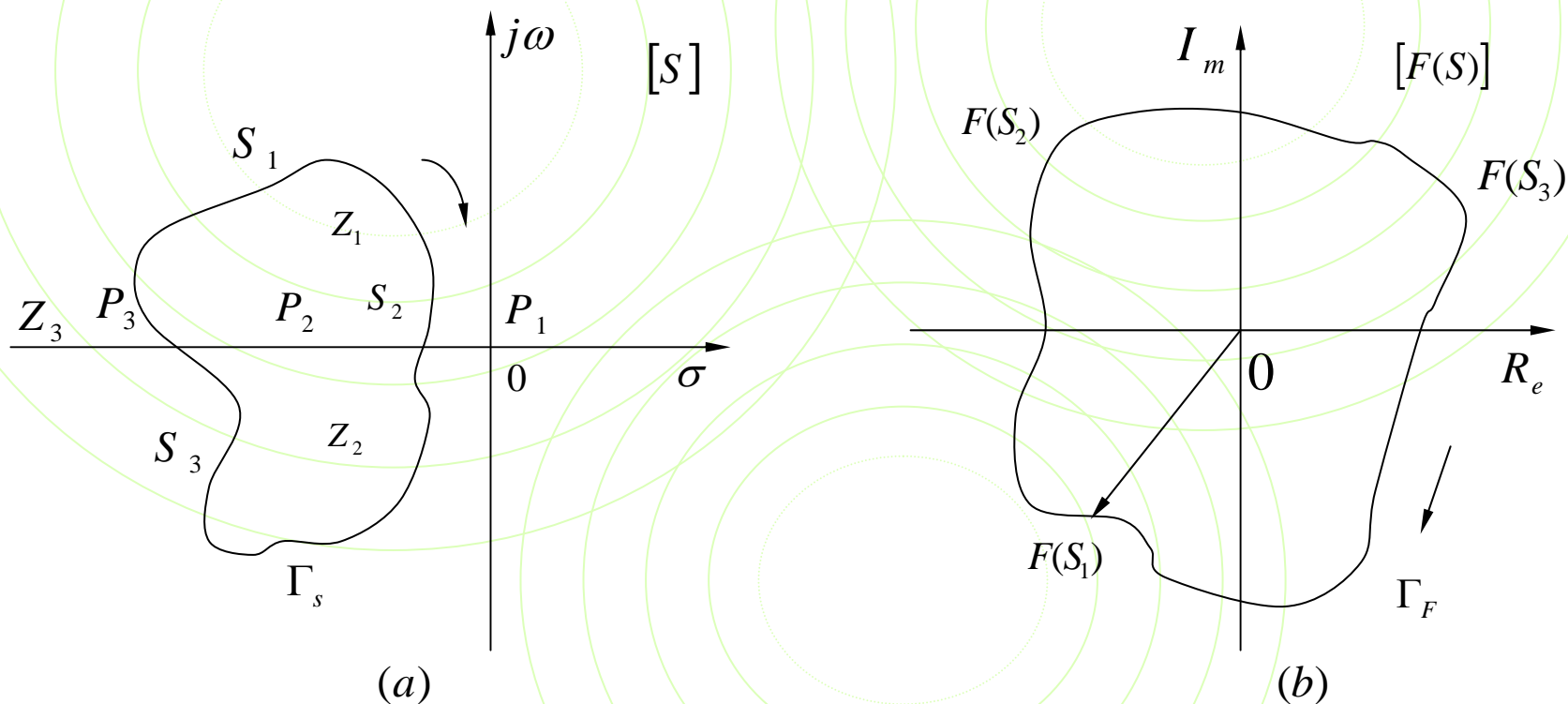


图5-37 S平面上的点在  $F(S)$  平面上的映射

如图5—38所示，如果解析点  $s_1$  在S平面上沿封闭曲线  $\Gamma_s$  ( $\Gamma_s$  不经过  $F(s)$  的奇点) 按顺时针方向连续变化一周，那么辅助函数  $F(s)$  在  $F(s)$  平面上的映射也是一条封闭曲线  $\Gamma_F$ ，但其变化方向可以是顺时针的，也可以是逆时针的，这要依据辅助函数  $F(s)$  的性质而定。



**图5-38**  $s$ 平面到  $F(s)$  平面的映射

## (二) 幅角定理 (映射定理)

设  $F(s)$  在  $S$  平面上, 除有限个奇点外, 为单值的连续正则函数, 若在  $S$  平面上任选一封闭曲线  $\Gamma_s$ , 并使  $\Gamma_s$  不通过  $F(s)$  的奇点, 则  $S$  平面上的封闭曲线  $\Gamma_s$  映射到  $F(s)$  平面上也是一条封闭曲线  $\Gamma_F$ 。当解析点  $s$  按顺时针方向沿  $\Gamma_s$  变化一周时, 则在  $F(s)$  平面上,  $\Gamma_F$  曲线按逆时针方向旋转的周数  $N$  (每旋转  $2\pi$  弧度为一周), 或  $\Gamma_F$  按逆时针方向包围  $F(s)$  平面原点的次数, 等于封闭曲线  $\Gamma_s$  内包含  $F(s)$  的极点数  $P$  与零点  $Z$  之差。即

$$N = P - Z \quad (5-108)$$

式中, 若  $N > 0$ , 则  $\Gamma_F$  按逆时针方向绕  $F(s)$  平面坐标原点  $N$  周; 若  $N < 0$ , 则  $\Gamma_F$  按顺时针绕  $F(s)$  平面坐标原点  $N$  周; 且若  $N = 0$ , 则  $\Gamma_F$  不包围  $F(s)$  平面坐标原点。

在图5—38中, 在  $S$  平面上有三个极点  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  和三个零点  $Z_1$ 、 $Z_2$ 、 $Z_3$ 。被  $\Gamma_s$  曲线包围的零点有  $Z_1$ 、 $Z_2$  两个, 即  $Z=2$ , 包围的极点只有  $P_2$ , 即  $P=1$ , 由式 (5-108) 得

$$N = P - Z = 1 - 2 = -1$$

说明  $\Gamma_s$  映射到  $F(s)$  平面上的封闭曲线  $\Gamma_F$  顺时针绕  $F(s)$  平面原点一周。

由幅角定理, 我们可以确定辅助函数  $F(s)$  被封闭曲线  $\Gamma_s$  所包围的极点数  $P$  与零点  $Z$  的差值  $P-Z$ 。

前面已经指出  $F(s)$  的极点数等于开环传递函数  $G(s)H(s)$  的极点数，因此当从  $F(s)$  平面上确定了封闭曲线  $\Gamma_F$  的旋转周数  $N$  以后，则在  $S$  平面上封闭曲线  $\Gamma_s$  包含的零点  $Z$ （即系统的闭环极点数）便可简单地由下式计算出来

$$Z = P - N \quad (5-109)$$

封闭曲线  $\Gamma_s$  和  $\Gamma_F$  的形状是无关紧要的，因为它不影响上述结论。

关于幅角定理的数学证明请读者参考有关书籍，这里仅从几何图形上简单说明。

设有辅助函数为

$$F(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)(s - z_3)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} \quad (5-110)$$

其零、极点在  $S$  平面上的分布如图 5—39 所示，在  $S$  平面上作一封闭曲线  $\Gamma_s$ ， $\Gamma_s$  不通过上述零、极点，在封闭曲线  $\Gamma_s$  上任取一点  $s_1$ ，其对应的辅助函数  $F(s_1)$  的幅角应为

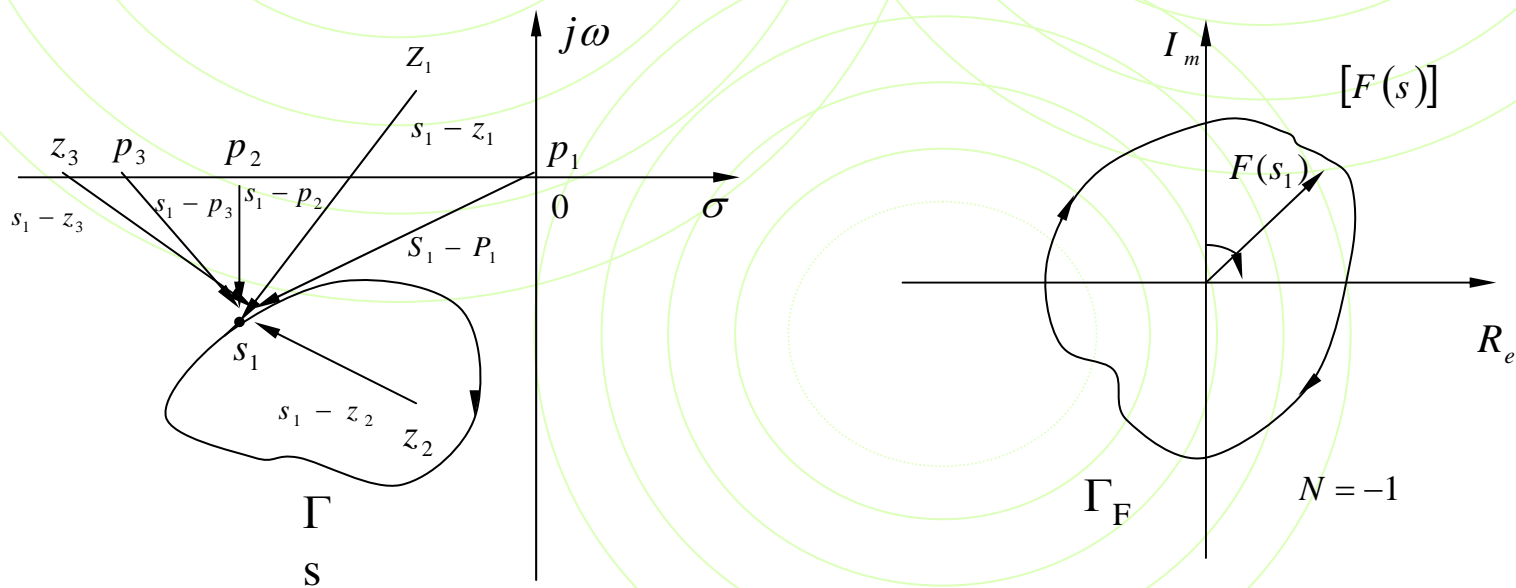
$$\angle F(s_1) = \sum_{j=1}^3 \angle(s_1 - z_j) - \sum_{i=1}^3 \angle(s_1 - p_i) \quad (5-111)$$

当解析点 $s_1$ 沿封闭曲线 $\Gamma_s$ 按顺时针方向旋转一周后再回到 $s_1$ 点，从图中可以发现，所有位于封闭曲线 $\Gamma_s$ 外面的辅助函数的零、极点指向 $s_1$ 的向量转过的角度都为0，而位于封闭曲线 $\Gamma_s$ 内的辅助函数的零、极点指向 $s_1$ 的向量都按顺时针方向转过2弧度（一周）。这样，对图5—39（a）， $Z=1$ ， $P=0$ ， $\angle F(s_1) = -2\pi$ ，即 $N = -1$ ， $F(s_1)$ 绕 $F(s)$ 平面原点顺时针旋转一周；对图5—39（b）， $Z=0$ ， $P=1$ ， $\angle F(s_1) = 2\pi$ ，即 $N=1$ ， $F(s_1)$ 绕 $F(s)$ 平面原点逆时针旋转一周；对图5—39（c）， $Z=1$ ， $P=1$ ， $\angle F(s_1) = 0$ ，即 $N=0$ ， $F(s_1)$ 不包围 $F(s)$ 平面原点。将上述分析推广到一般情况则有

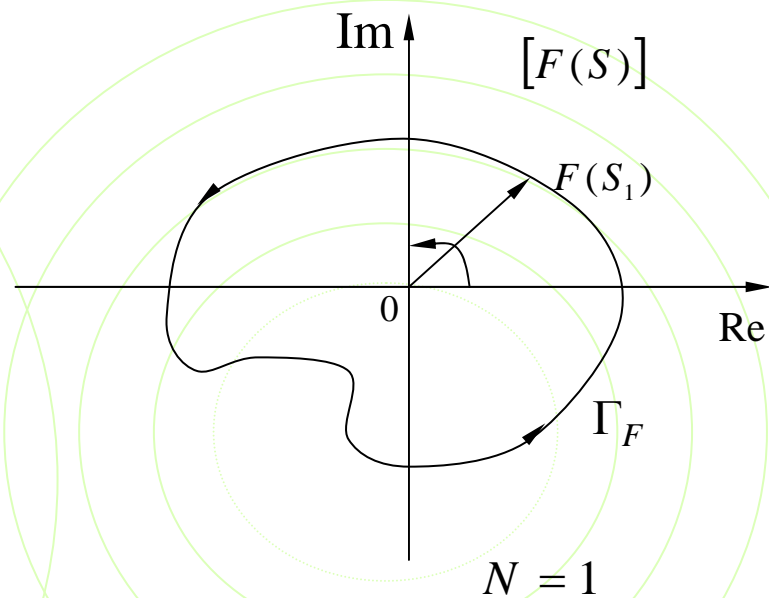
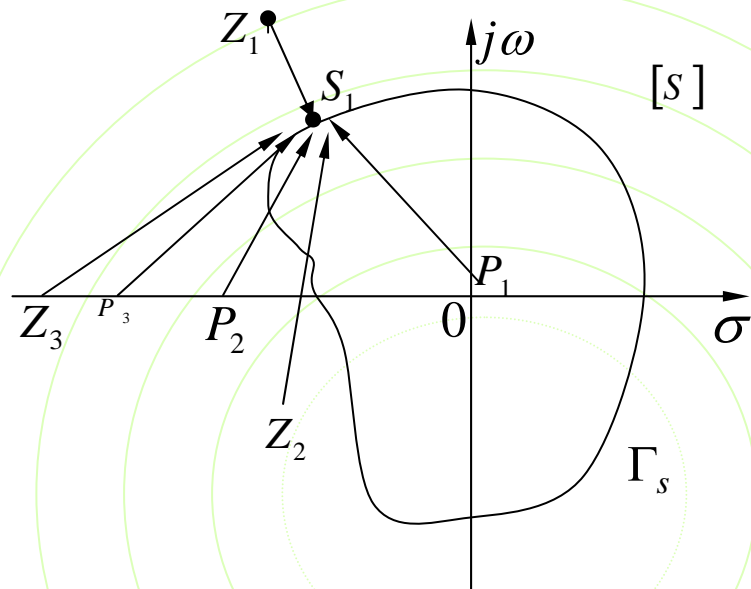
$$\angle F(s) = 2\pi(P - Z) = 2\pi N \quad (5-112)$$

由此得到幅角定理表达式为

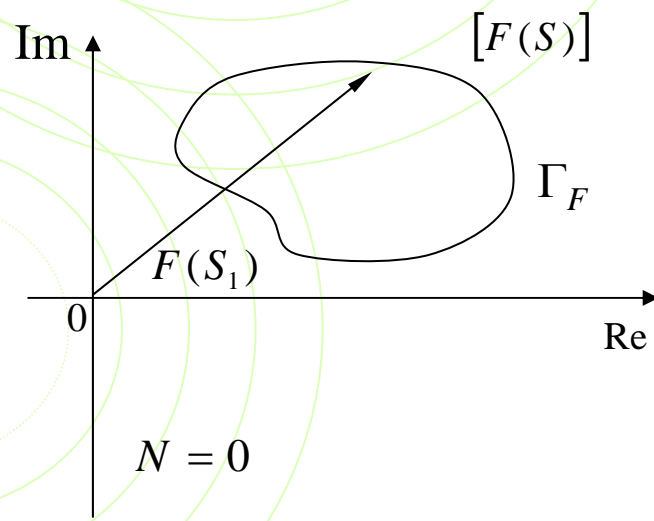
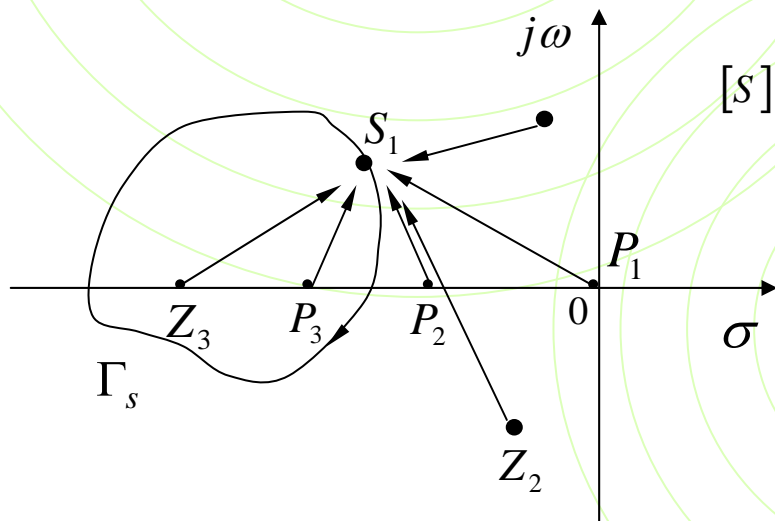
$$N = P - Z \quad (5-113)$$



**图 5-39** (a)  $Z = 1$ 、 $P = 0$ 、 $N = -1$ 、 $\angle F(s_1) = -2\pi$



**图 5-39** (b)  $Z = 0$ 、 $P = 1$ 、 $N = 1$ 、 $\angle F(S_1) = 2\pi$



**图 5-39** (c)  $Z = 1$ 、 $P = 1$ 、 $N = 0$ 、 $\angle F(S_1) = 0$

## 二、基于辅助函数 $F(s)$ 的奈氏判据

为了分析反馈控制系统的稳定性，只须判断是否存在S平面右半部的闭环极点。为此，在S平面上作一条完整的封闭曲线 $\Gamma_s$ ，使它包围S平面右半部且按顺时针环绕。如图5—40所示，该曲线包括S平面的整个虚轴（由 $\omega = -\infty$  到  $\omega = +\infty$ ）及右半平面上以原点为圆心，半径为无穷大的半圆弧组成的封闭轨迹。这一封闭无穷大半圆称作奈氏轨迹。显然，由奈氏轨迹包围的极点数 $P$ 和零点数 $Z$ ，就是 $F(s)$ 位于S平面右半部的极点数和零点数。

前面已经指出，辅助函数  $F(s)$  的极点等于系统的开环极点， $F(s)$  的零点等于系统的闭环极点。因此，如果奈氏轨迹中包围  $F(s)$  的零点数 $Z=0$ ，系统是稳定的，此时由  $F(s)$  映射到  $F(s)$  平面上的封闭曲线 $\Gamma_F$  逆时针绕坐标原点的周数应为

$$N=P \quad (5-114)$$

由此得到应用幅角定理分析系统稳定性的判据如下：

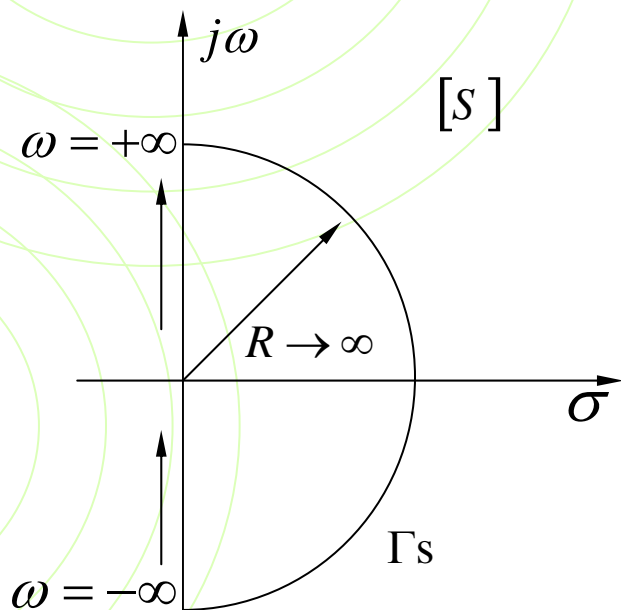


图5-40 Nyquist轨迹



若辅助函数 $F(s)$ 的解析点 $s$ 沿奈氏轨迹 $\Gamma_s$ 按顺时针连续环绕一周，它在 $F(s)$ 平面上的映射 $\Gamma_F$ 按逆时针方向环绕其原点 $P$ 周，则系统是稳定的，否则是不稳定的。

通常情况下，开环系统是稳定的，即 $S$ 平面右半部的开环极点数 $P=0$ 。此时系统稳定的充分条件是不包围 $F(s)$ 平面坐标原点，即 $N=0$ 。

### 三、基于开环传递函数 $G(s)H(s)$ 的奈氏判据

用辅助函数 $\mathbf{E}(z) = \mathbf{I} + \mathbf{C}(z)\mathbf{H}(z)$ 来分析系统的稳定性仍然不大方便，实际上，开环传递函数与辅助函数之间的关系非常简单，即

$$G(s)H(s) = F(s) - 1 \quad (5-115)$$

上式意味着将 $F(s)$ 平面的纵轴向右平移一个单位后构成的平面即为 $GH$ 平面（如图5-41）。 $F(s)$ 平面的坐标原点是 $GH$ 平面的 $(-1, j0)$ 点。因此， $\Gamma_F$ 绕 $F(s)$ 平面原点的周数等效于 $\Gamma_{GH}$ 绕 $GH$ 平面 $(-1, j0)$ 点的周数。

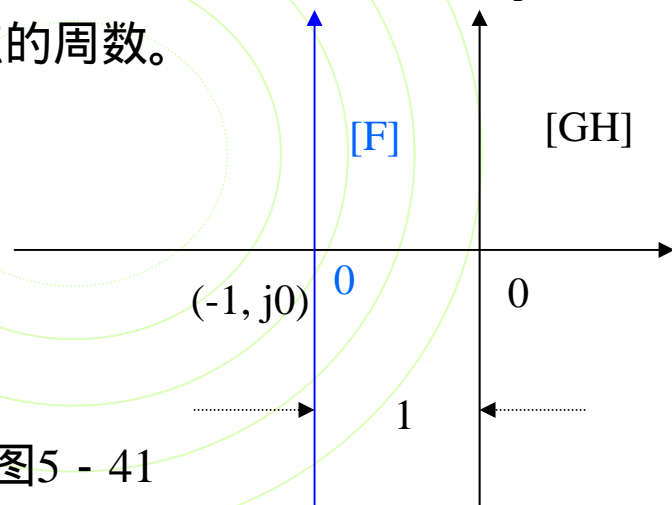


图5 - 41



由分析，得到基于开环传递函数  $G(s)H(s)$  的奈氏判据如下：

闭环系统稳定的充分必要条件是奈氏轨迹映射在GH平面上的封闭曲线  $\Gamma_{GH}$  逆时针包围  $(-1, jo)$  点  $P$  周，其中  $P$  为开环传递函数  $G(s)H(s)$  在  $S$  平面右半部的极点数。

当  $G(s)H(s)$  在  $S$  平面右半部没有极点时，即  $P=0$ ，闭环系统稳定的充分必要条件是  $\Gamma_{GH}$  在GH平面上不包围  $(-1, jo)$  点。

## 四、基于开环频率特性 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的奈氏判据

### (一) $G(s)H(s)$ 与 $G(j\omega)H(j\omega)$ 之间的关系

前面曾经指出，频率特性是  $s = j\omega$  特定情况下的传递函数。下面分两种情况来研究  $G(s)H(s)$  与  $G(j\omega)H(j\omega)$  之间的关系。

1、当  $G(s)H(s)$  在  $S$  平面虚轴上（包括原点）无极点时，奈氏轨迹可分成三个部分如图5—42所示，（1） $-\infty < \omega \leq 0$ ， $s$  沿负虚轴变化；（2） $0 \leq \omega < +\infty$ ， $s$  沿正虚轴变化；（3） $s = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{-j\phi}$ ， $s$  沿以原点为圆心，半径为无穷大的右半圆弧变化，其中  $\phi = \pi$ ，对应  $\omega$  由  $+\infty \rightarrow -\infty$  顺时针绕。

(1) 当  $s$  在  $S$  平面负虚轴上变化时， $s = -j\omega$ ，

$$\begin{aligned} |G(s)H(s)|_{s=-j\omega} &= G(-j\omega)H(-j\omega) \\ &= |G(j\omega)H(j\omega)| e^{-j\angle G(j\omega)H(j\omega)} \end{aligned} \quad (5-117)$$

在  $[GH]$  平面上的映射如图5—43中曲线（1）。

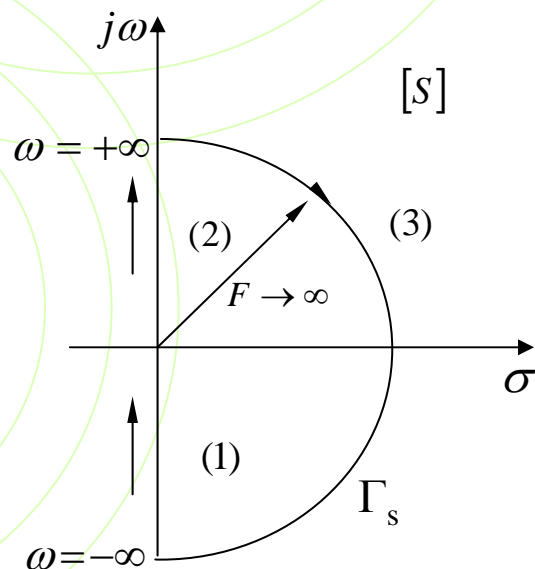
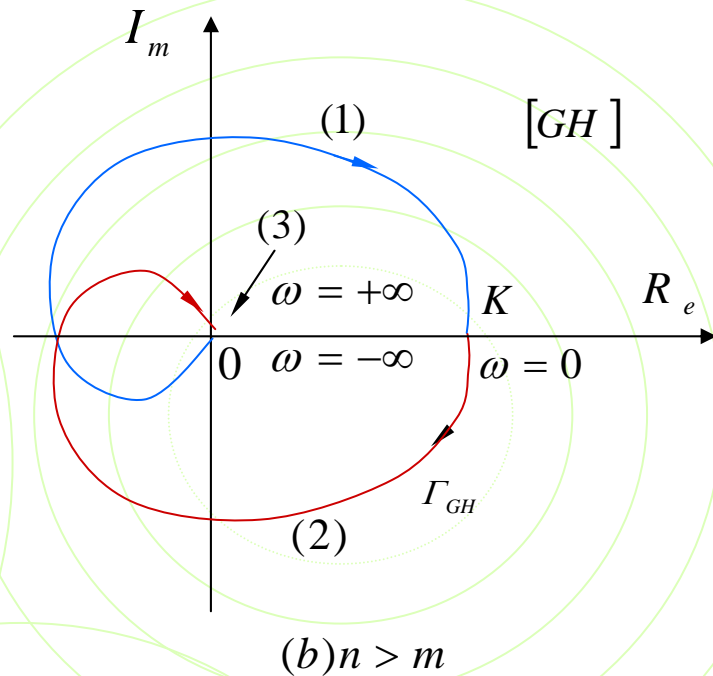
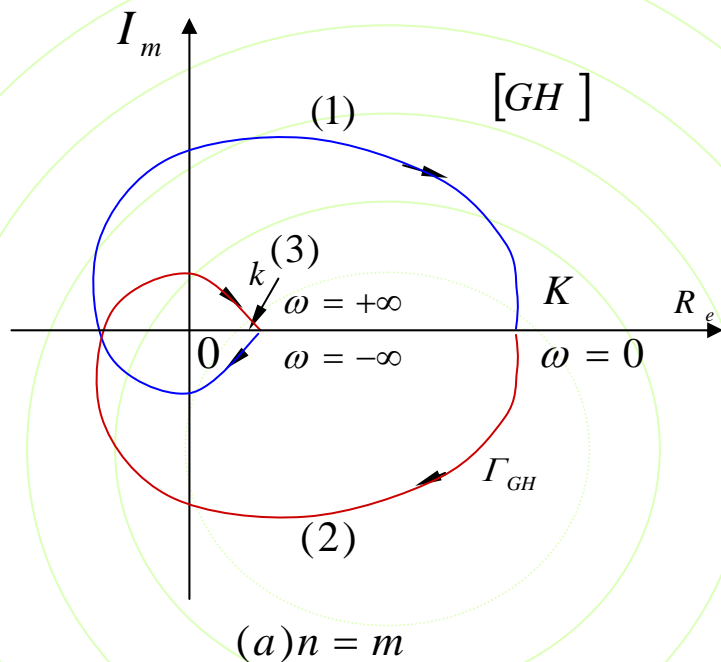


图5-42 Nyquist轨迹



**图5-43**  $\Gamma_s$  在GH平面上的映射

(2) 当 $s$ 在 $S$ 平面正虚轴上变化时,  $s = j\omega$

$$\begin{aligned} |G(s)H(s)|_{s=j\omega} &= G(j\omega)H(j\omega) \\ &= |G(j\omega)H(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)H(j\omega)} \end{aligned}$$

如图5-43中的曲线(2), 这正是系统的开环频率特性。由于正负虚轴在 $S$ 平面上以实轴为对称, 它们在 $GH$ 平面上的映射曲线(1)、(2)两部分也对称于实轴。

当 $\Gamma_s$  过平面原点时,  $s = jo$  , 它在GH平面上的映射为

$$|G(s)H(s)|_{s=jo} = G(jo)H(jo) = K \quad (5-118)$$

即S平面的原点在GH平面上的映射为常数K ( K为系统开环放大系数 )。

(3) 当s在 $\Gamma_s$  的第三部分上的变化时,  $s = \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{-j\phi}$  ,

$$\begin{aligned} G(s)H(s) \Big|_{s = \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{-j\phi}} &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \Big|_{s = \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{-j\phi}} \\ &= \left( \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{1}{R^{n-m}} \right) e^{j(n-m)\phi} \end{aligned} \quad (5-119)$$

当 $n=m$ 时 ,

$$G(s)H(s) \Big|_{s = \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{-j\phi}} = \frac{b_m}{a_n} = k \quad (5-120)$$

奈氏轨迹的第三部分 ( 无穷大半圆弧 ) 在GH平面上的映射为常数K ,  
如图5—43 ( a ) 所示。

$$\text{当 } n > m \text{ 时 , } G(s)H(s) \Big|_{s = \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{-j\phi}} = 0 \cdot e^{j(n-m)\phi} \quad (5-121)$$

$\Gamma_s$  的第三部分在GH平面上的映射是它的坐标原点 ( 图5—43 ( b ) )。

奈氏轨迹 $\Gamma_s$  在GH平面上的映射称为奈奎斯特曲线或奈氏曲线。

2、当  $G(s)H(s)$  在S平面的虚轴上（包括原点）有极点时，由于奈氏轨迹不能经过开环极点， $\Gamma_s$ 必须避开虚轴上的所有开环极点。增加第4部分曲线，如图5-44所示。其中（1）（2）和（3）部分的定义与图5—42相同。

第（4）部分的定义是： $s = \lim_{r \rightarrow 0} r e^{j\theta} \quad (-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$

表明s沿以原点为圆心，半径为无穷小的右半圆弧上逆时针变化（ $\omega$ 由 $0_- \rightarrow 0_+$ ）。这样， $\Gamma_s$ 既绕过了 $G(s)H(s)$  原点上的极点，又包围了整个右半S平面，如果在虚轴上还有其它极点，亦可采用同样的方法，将 $\Gamma_s$  绕过这些虚轴上的极点。

设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{k(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{s^v (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_{n-v})} \quad (5-122)$$

其中v称为无差度，即系统含积分环节的个数或位于原点的开环点数。当  $s = \lim_{r \rightarrow 0} r e^{j\theta}$  时，

$$\begin{aligned} G(s)H(s) \Big|_{s = \lim_{r \rightarrow 0} r e^{j\theta}} &= \frac{k(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{s^v (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \Big|_{\lim_{r \rightarrow 0} r e^{j\theta}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{K}{r^v} e^{-jv\theta} = \infty e^{-jv\theta} \end{aligned} \quad (5-123)$$

式(5-123)表明， $\Gamma_s$  的第(4)部分无穷小半圆弧在 GH平面上的映射为顺时针旋转的无穷大圆弧，旋转的弧度为  $v\pi$  弧度。图5—45 (a)、(b) 分别表示当  $v=1$  和  $v=2$  时系统的奈氏曲线，其中虚线部分是 $\Gamma_s$  的无穷小半圆弧在GH平面上的映射。

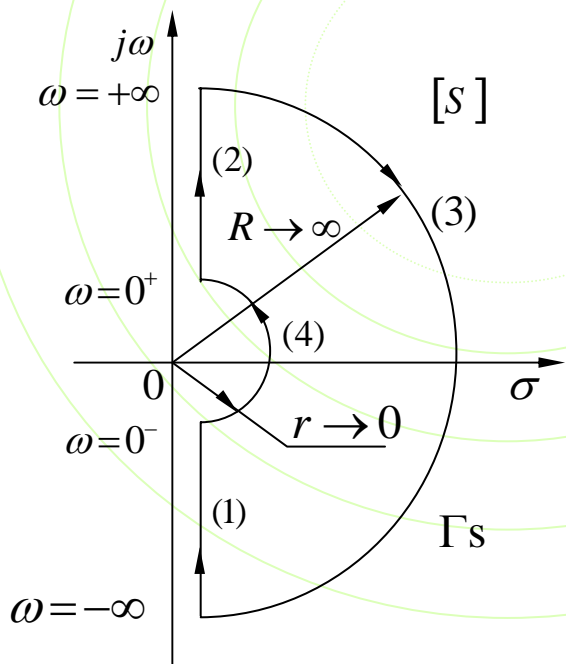


图5-44 虚轴上有开环极点时的奈氏轨迹

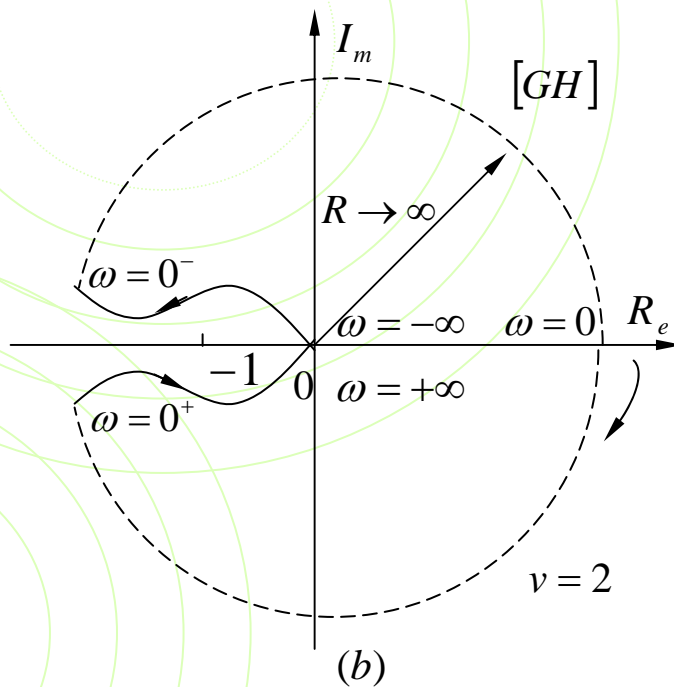
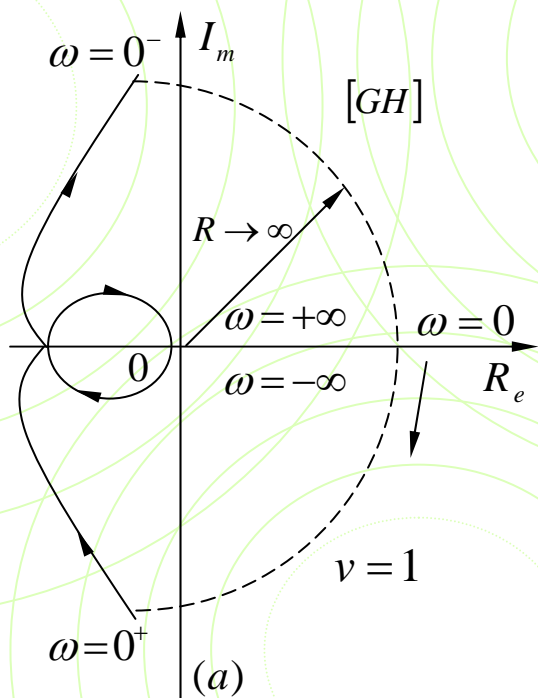


图5-45  $v \neq 0$  时的奈氏曲线

## (二) 基于 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的奈氏判据

从上面的分析可知，奈氏曲线  $\Gamma_{GH}$  实际上是系统开环频率特性极坐标图的扩展。当已知系统的开环频率特性  $G(j\omega)H(j\omega)$  后，根据它的极坐标图和系统的性质（是否含有积分环节、开环传递函数中分子分母的最高阶次等）便可方便地在 GH 平面上绘制出奈氏曲线  $\Gamma_{GH}$ 。由此我们得到基于开环频率特性的奈氏判据如下：

### 奈奎斯特稳定判据

闭环系统稳定的充分必要条件是，GH 平面上的开环频率特性  $G(j\omega)H(j\omega)$  当  $\omega$  由  $-\infty$  变化到  $+\infty$  时，按逆时针方向包围  $(-1, j0)$  点  $P$  周。

当位于 S 平面右半部的开环极点数  $P=0$  时，即当开环传递函数的全部极点均位于 S 平面左半部（包括原点和虚轴）时，闭环系统稳定的充分必要条件是奈氏曲线不包围 GH 平面的  $(-1, j0)$  点。



应用奈氏判据分析系统稳定性时，可能会遇到下列三种情况：

- (i) 当系统开环传递函数  $G(s)H(s)$  的全部极点都位于S平面左半部时（ $P=0$ ），如果系统的奈氏曲线不包围GH平面的  $(-1, j0)$  点（ $N=0$ ），则闭环系统是稳定的（ $z=p-N=0$ ），否则是不稳定的；
- (ii) 当系统开环传递函数  $G(s)H(s)$  有  $p$  个位于S平面右半部的极点时，如果系统的奈氏曲线  $\Gamma_{GH}$  逆时针包围  $(-1, j0)$  点的周数等于位于S平面右半部的开环极点数（ $N=P$ ），则闭环系统是稳定的（ $Z=P-N=0$ ），否则是不稳定的；
- (iii) 如果系统的奈氏曲线  $\Gamma_{GH}$  顺时针包围  $(-1, j0)$  点（ $N>0$ ），则闭环系统不稳定（ $Z=P-N>0$ ）。

综上，奈氏曲线  $\Gamma_{GH}$  是否包围GH平面的  $(-1, j0)$  点是判别系统是否稳定的重要依据（当然还须考虑是否存在S平面右半部的开环极点和曲线  $\Gamma_{GH}$  包围  $(-1, j0)$  点的方向）。当  $\Gamma_{GH}$  曲线恰好通过GH平面的  $(-1, j0)$  点（注意不是包围），此时如果系统无位于S平面右半部的开环极点，则系统处于临界稳定状态。



## 五、奈氏判据的应用

例5—6 试用奈氏判据分析例5—1系统的稳定性。

解 该系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad (T_1 > T_2)$$

其对应的频率特性是

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(jT_1\omega + 1)(jT_2\omega + 1)}$$

当  $\omega \rightarrow -\infty$  至  $+\infty$  时系统的奈氏曲线如图 5-46 所示。该系统的两个开环极点  $-\frac{1}{T_1}$  和  $-\frac{1}{T_2}$  均在 S 平面左半部，即 S 平面右半部的开环极点数  $P=0$ ，由图 5-46 可知，系统的奈氏曲线  $\Gamma_{GH}$  不包围  $(-1, j0)$  点 ( $N=0$ )，根据奈氏判据，位于 S 平面右半部的闭环极点数  $Z=P - N=0$ ，该闭环系统是稳定的

确定幅相曲线起点和终点，正确作出幅相曲线对于判断系统的稳定性很重要。

上述结论可从图 5—47所示的根轨迹图得到证明，从图5—47可知，无论K为何值根轨迹都在S平面左半部，系统总是稳定的。

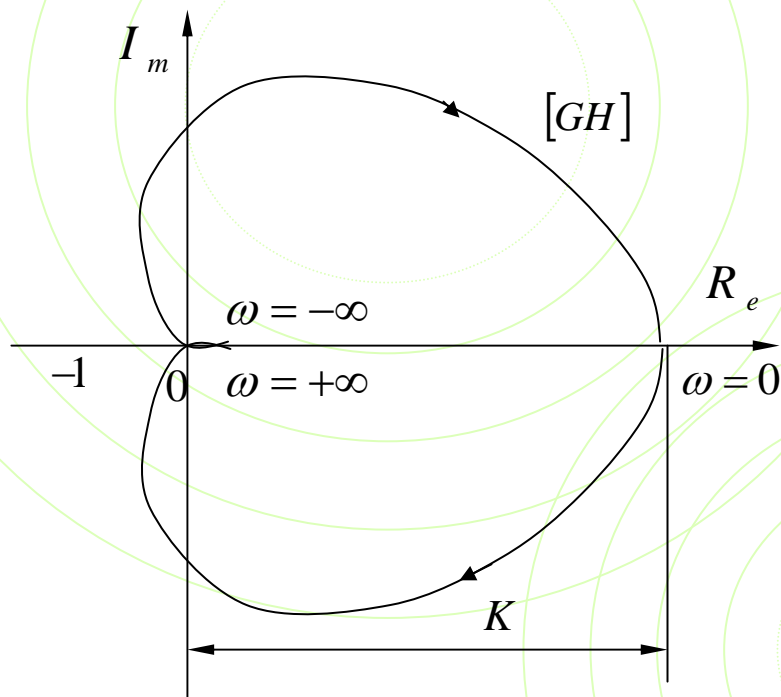


图5-46 例5-6奈氏曲线

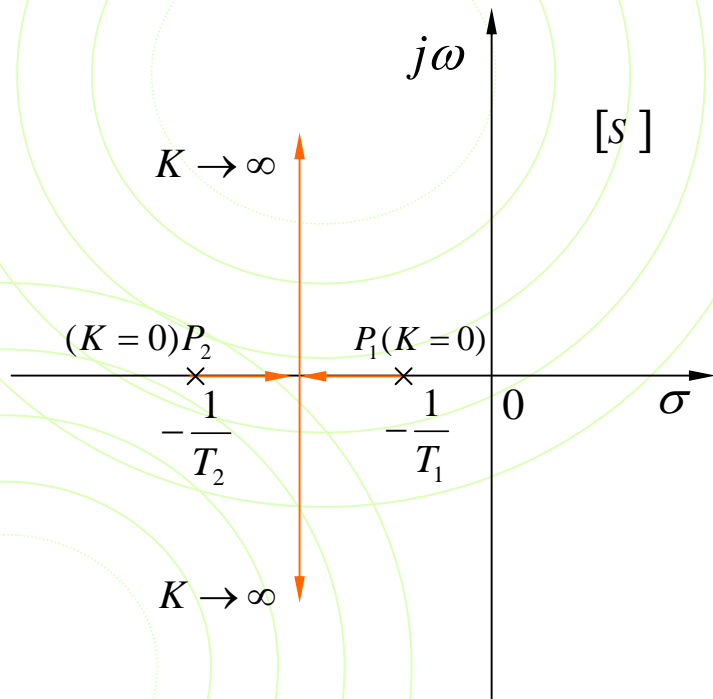


图5-47 例5-6根轨迹图

例5—7 试用奈氏判据分析例5—3系统的稳定性。

解 该系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_v}{s(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)} \quad (0 < \zeta < 1)$$

其对应的频率特性是

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega(1 - T^2\omega^2 + j2\zeta T\omega)}$$

当  $\omega$  由  $-\infty$  变至  $+\infty$  时，系统的奈氏曲线如图 5—48 所示。由于系统含有一个积分环节 ( $v=1$ )，当  $\omega$  由  $0^-$  至  $0^+$  时，对应奈氏曲线为顺时针环绕坐标原点的无穷大半圆（图 5—48 中虚线所示）。

开环传递函数无右半S平面的极点，即 $P=0$ ，系统是否稳定取决于奈氏曲线与负实轴的交点坐标值 $-\frac{K_v T}{2\xi}$ 的大小，当 $\frac{K_v T}{2\xi} < 1$ 时， $\Gamma_{GH}$ 不包围 $(-1, j0)$ 点，即 $N=0$ 图5-48 (a)，系统是稳定的；当 $\frac{K_v T}{2\xi} > 1$ 时，奈氏曲线 $\Gamma_{GH}$ 顺时针包围 $(-1, j0)$ 点两周，即 $N=-2$ ，图5-48 (b)，系统不稳定。

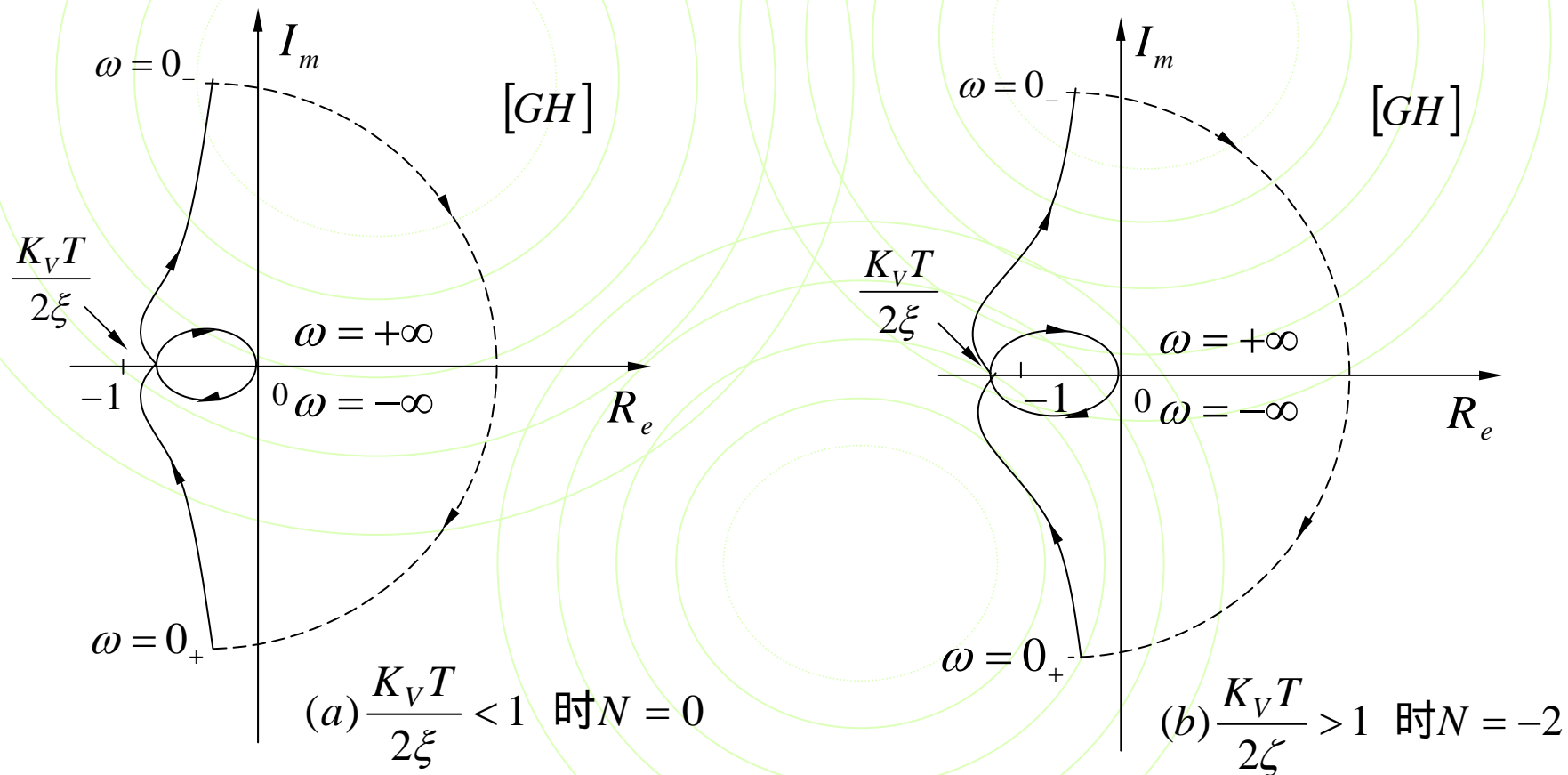


图5-48

例5-7奈氏曲线

例5—8 已知反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)}$$

试用奈氏判据分析当  $T < \tau$   $T = \tau$   $T > \tau$  时系统的稳定性。

解 系统的开环频率特性是

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(j\tau\omega + 1)}{-\omega^2(1 + jT\omega)}$$

其幅频特性和相频特性分别是

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{K \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}{\omega^2 \sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -180^\circ - \arctg T\omega + \arctg \tau\omega$$

当  $T < \tau$  时,  $\arctg T\omega < \arctg \tau\omega$ , 当  $\omega$  由0变至 $+\infty$ 时,  $|G(j\omega)H(j\omega)|$  由 $+\infty$ 变至0,  $\angle G(j\omega)H(j\omega)$  由 $-180^\circ$ 在第III象限内变化为 $-180^\circ$ , 其对应的奈氏曲线如图5-50(a)所示, 图中虚线表示的顺时针旋转的无穷大圆弧是开环零重极点在GH平面上的映射。由于奈氏曲线左端无穷远处是开口的, 它没有包围 $(-1, j0)$ 点 ( $N=0$ ), 系统无S平面右半部的开环极点 ( $P=0$ ), 由奈氏判据知, 当 $T < \tau$ 时, 该系统是稳定的。

(b) 当  $T = \tau$  时,  $\arctg T\omega = \arctg \tau\omega$ , 系统的相频特性  $\angle G(j\omega)H(j\omega) = -180^\circ$  与角频率  $\omega$  无关, 幅频特性  $|G(j\omega)H(j\omega)|$ , 当  $\omega$  由 0 变至  $+\infty$  时, 由  $\infty$  变至 0。如图5-50 (b) 所示, 除无穷大圆弧外, 奈氏曲线是穿过  $(-1, j0)$  点且与负实轴重合的, 系统是临界稳定状态。

当  $T = \tau$  时, 系统的根轨迹如图5-51 (b) 所示。由于两条根轨迹位于S平面的虚轴上, 系统是等幅振荡的临界稳定状态。

(c) 当  $T > \tau$  时,  $\arctg T\omega > \arctg \tau\omega$ , 当  $\omega$  由 0 变至  $+\infty$  时,  $|G(j\omega)H(j\omega)|$  由  $\infty$  变至 0,  $\angle G(j\omega)H(j\omega)$  由  $-180^\circ$  在第II象限内变化后再次变为  $-180^\circ$ , 其对应的奈氏曲线如图5-50 (c) 所示。由于奈氏曲线左端是封口的, 它顺时针包围了  $(-1, j0)$  点两周 ( $N=2$ ), 由奈氏判据知, 当  $T > \tau$  时, 该系统是不稳定的。当  $T > \tau$  时, 系统的根轨迹如图5—51 (c) 所示。由于有两条根轨迹全部位于S平面右半部, 无论K为何值, 该系统都是不稳定的。

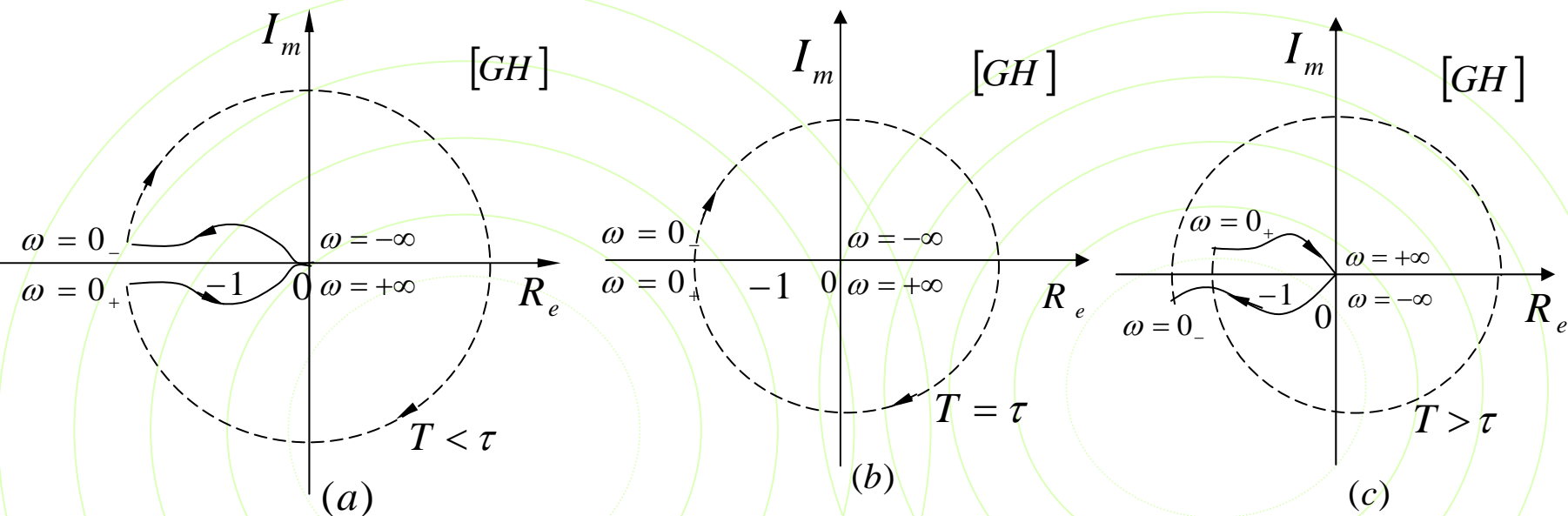


图5-50 例5-8系统的奈氏曲线

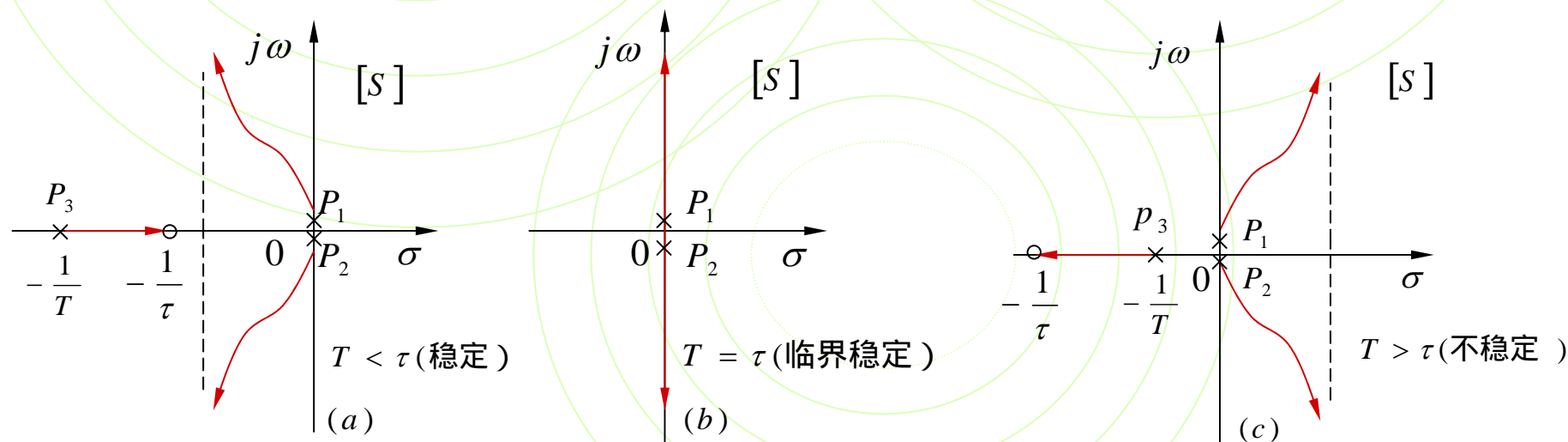


图5-51 例5-8系统的根轨迹图

# 根据对数频率特性图判断系统的稳定性

考虑s平面上单位圆与对数坐标平面的关系：

s平面上的单位圆

0dB线

单位圆内

0dB线以下

单位圆外

0dB线以上

负实轴

-  $\pi$  线

顺时针绕  $(-1, j0)$  点

由上至下穿越  $-\pi$  线（负穿越）

逆时针绕  $(-1, j0)$  点

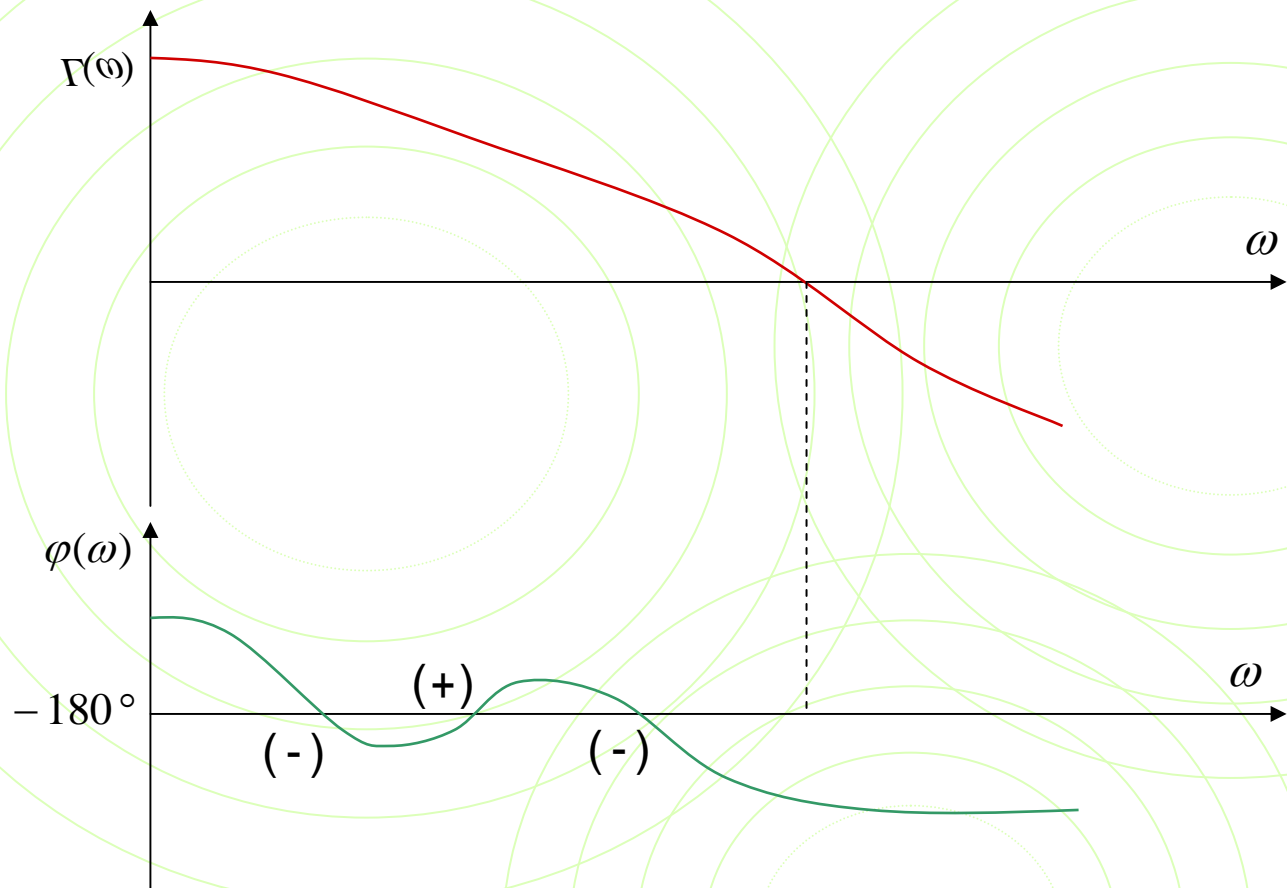
由下至上穿越  $-\pi$  线（正穿越）

越）

利用对数频率特性图判断系统稳定性的奈氏判据为

在对数幅频特性大于零的频段内，相频特性曲线穿越  $-\pi$  线的次数  $N = N^+ - N^-$ ，满足  $Z = P - 2N = 0$ ，则系统稳定。





$$N = N^+ - N^-$$

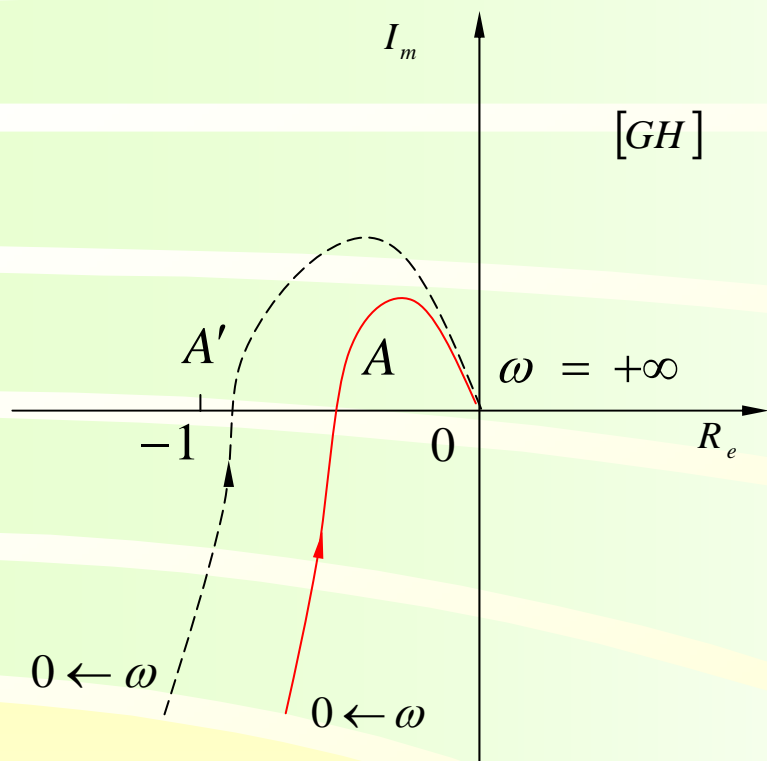
$$Z = P - 2N$$

# 5-5 控制系统的相对稳定性

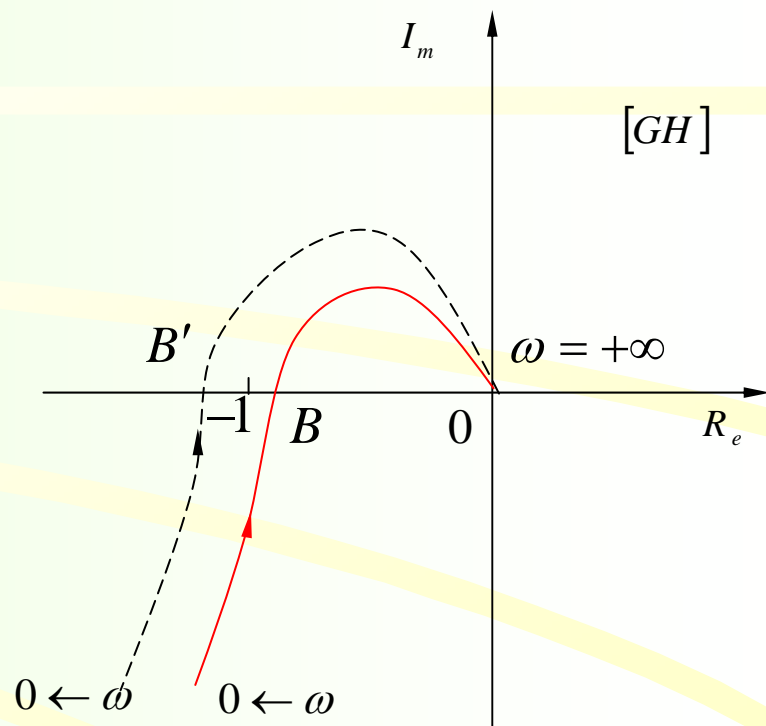
## 一、相对稳定性

在工程应用中，由于环境温度的变化、元件的老化以及元件的更换等，会引起系统参数的改变，从而有可能破坏系统的稳定性。因此在选择元件和确定系统参数时，不仅要考虑系统的稳定性，还要求系统有一定的稳定程度，这就是所谓自动控制系统的相对稳定性问题。

例如，图 5-52 (a) 和 (b) 所示的两个最小相位系统的开环频率特性曲线（实线）没有包围  $(-1, jo)$  点，由奈氏判据知它们都是稳定的系统，但图 5-52 (a) 所示系统的频率特性曲线与负实轴的交点 A 距离  $(-1, jo)$  点较远，图 5-52 (b) 所示系统的频率特性曲线与负实轴的交点 B 距离  $(-1, jo)$  点较近。假定系统的开环放大系统由于系统参数的改变比原来增加了百分之五十，则图5-52 (a) 中的A点移动到A' 点，仍在  $(-1, jo)$  点右侧，系统还是稳定的；而图5-52(b)中的B点则移到  $(-1, jo)$  点的左侧 (B' 点)，系统便不稳定了。可见，前者较能适应系统参数的变化，即它的相对稳定性比后者好。



(a)



(b)

图5-52 系统的相对稳定性

## 二、稳定裕度

通常用稳定裕度来衡量系统的相对稳定性或系统的稳定程度，其中包括系统的相角裕度和幅值裕度。

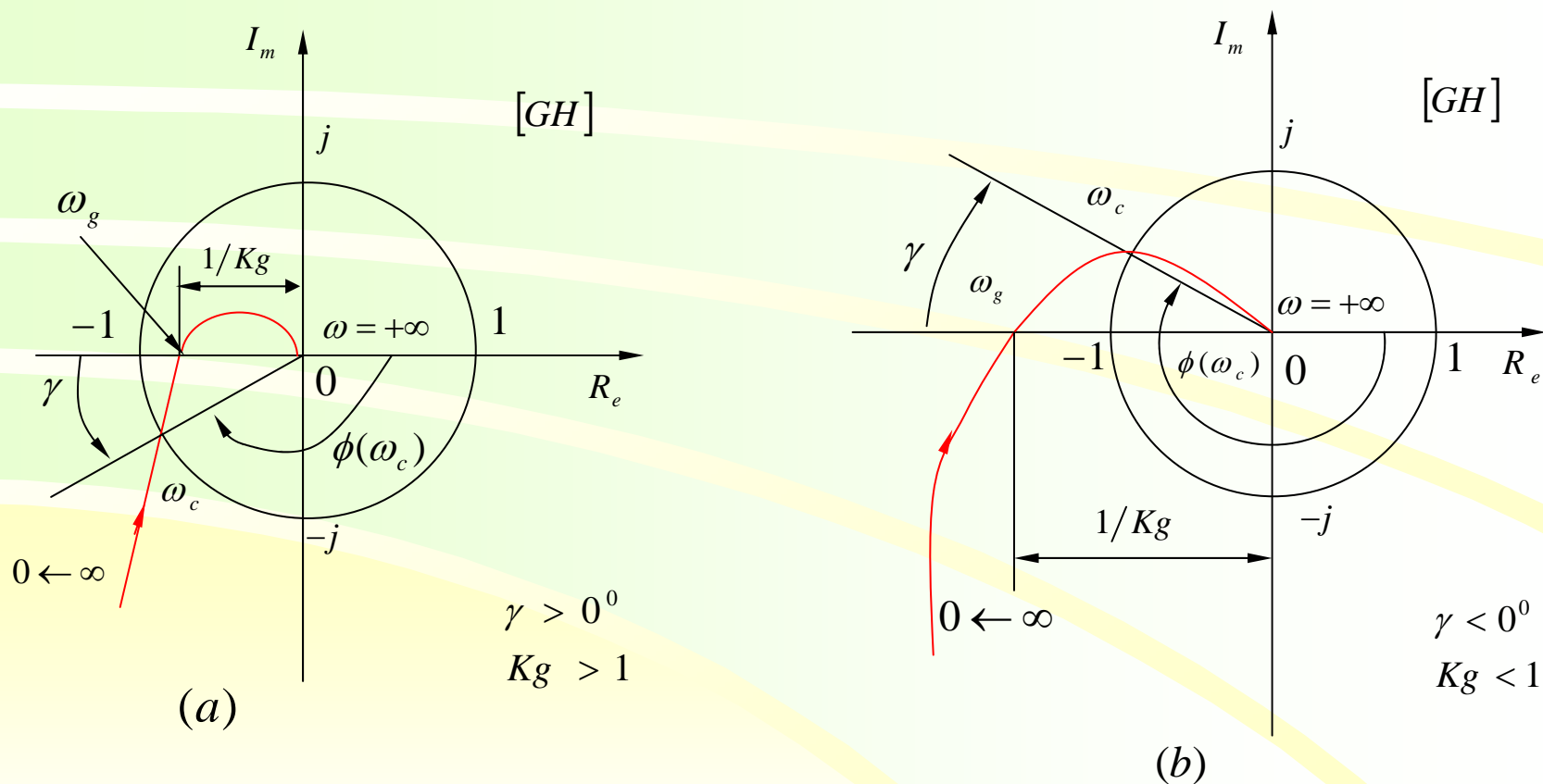


图5-53 最小相位系统的稳定裕度

## (一) 相角裕度

如图5—53所示，把GH平面上的单位圆与系统开环频率特性曲线的交点频率  $\omega_c$  称为幅值穿越频率或剪切频率，它满足

$$|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = 1 (0 \leq \omega_c \leq +\infty) \quad (5-124)$$

所谓相角裕度是指幅值穿越频率所对应的相移  $\phi(\omega_c)$  与  $-180^\circ$  角的差值，即

$$\gamma = \phi(\omega_c) - (-180^\circ) = \phi(\omega_c) + 180^\circ \quad (5-125)$$

对于最小相位系统，如果相角裕度  $\gamma > 0^\circ$ ，系统是稳定的（图5-53a），

且  $\gamma$  值愈大，系统的相对稳定性愈好。如果相角裕度  $\gamma < 0^\circ$ ，系统则不稳定（图 5-53（b））。当  $\gamma = 0^\circ$  时，系统的开环频率特性曲线穿过  $(-1, j0)$  点，系统处于临界稳定状态。

**相角裕度的含义** 使系统达到临界稳定状态时开环频率特性的相角  $\phi(\omega_c) = \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)$  减小（对应稳定系统）或增加（对应不稳定系统）的数值。

## (二) 幅值裕度

如图5-53所示，我们把系统的开环频率特性曲线与GH平面负实轴的交点频率称为相位穿越频率  $\omega_g$ ，显然它应满足

$$\angle G(j\omega_g)H(j\omega_g) = -180^\circ (0 \leq \omega_g \leq +\infty) \quad (5-126)$$

所谓幅值裕度  $K_g$  是指相位穿越频率所对应的开环幅频特性的倒数值，即

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|} \quad (5-127)$$

对于最小相位系统，当幅值裕度  $K_g > 1$  ( $|G(j\omega_g)H(j\omega_g)| < 1$ )，系统是稳定的(图5-53(a))，且  $K_g$  值愈大，系统的相对稳定性愈好。如果幅值裕度  $K_g < 1$  ( $|G(j\omega_g)H(j\omega_g)| > 1$ )，系统则不稳定(图5-53(b))。当  $K_g = 1$  时，系统的开环频率特性曲线穿过  $(-1, j0)$  点。是临界稳定状态。可见，求出系统的幅值裕度  $K_g$  后，便可根据  $K_g$  值的大小来分析最小相位系统的稳定性和稳定程度。

**幅值裕度的含义** 使系统到达临界稳定状态时开环频率特性的幅值

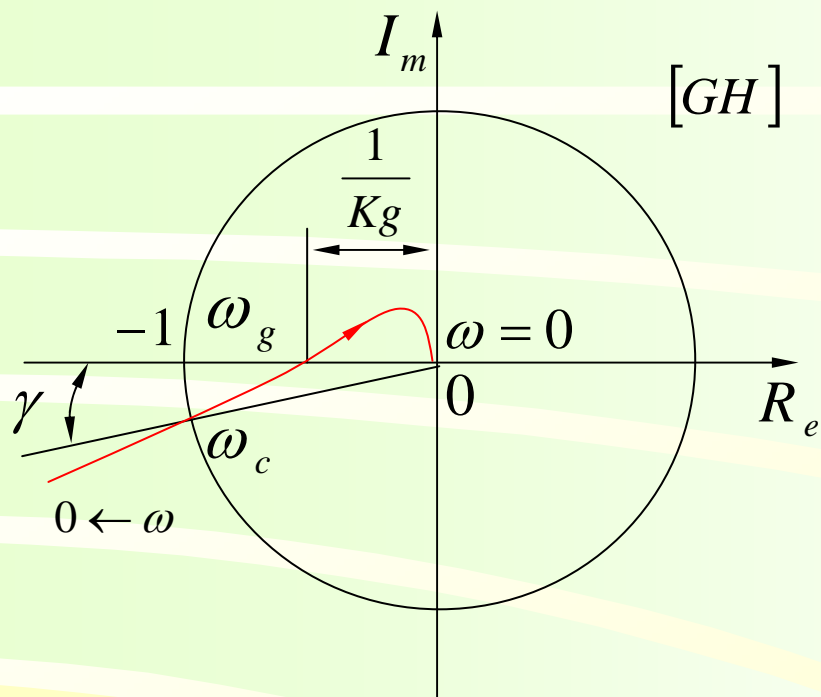
$|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|$  增大（对应稳定系统）或缩小（对应不稳定系统）的倍数。

幅值裕度也可以用分贝数来表示，

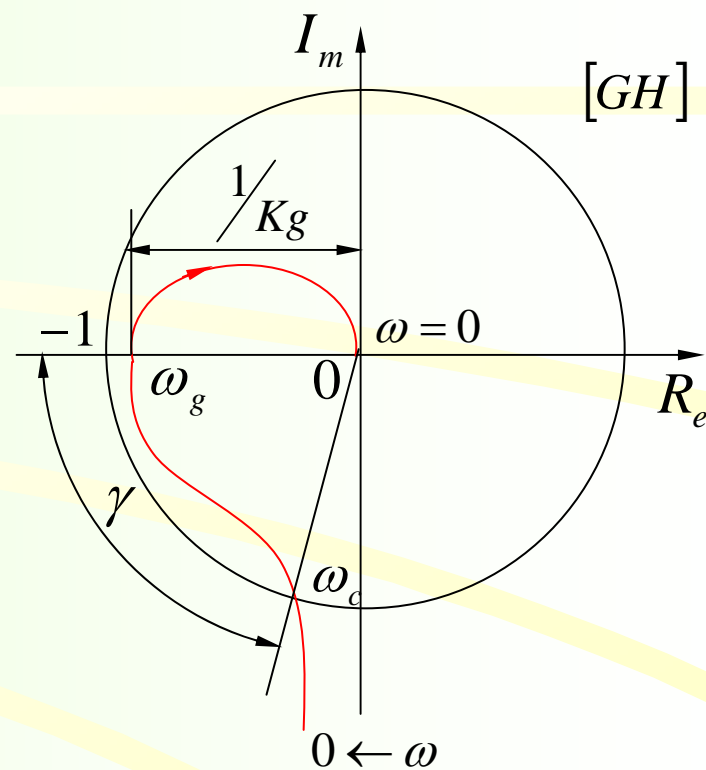
$$20 \lg K_g = -20 \lg |G(j\omega_g)H(j\omega_g)| \text{分贝} \quad (5-128)$$

因此，可根据系统的幅值裕度大于、等于或小于零分贝来判断最小相位系统是稳定、临界稳定或不稳定。

必须指出，系统相对稳定性的好坏不能仅从相角裕度或幅角裕度的大小来判断，必须同时考虑相角裕度和幅角裕度。这从图5-54（a）和（b）所示的两个系统可以得到直观的说明，图5-54（a）所示系统的幅值裕度大，但相角裕度小；相反，图5-54（b）所示系统的相角裕度大，但幅值裕度小，这两个系统的相对稳定性都不好。对于一般系统，通常要求相角裕度  $\gamma = 30^\circ \sim 60^\circ$ ，幅值裕度  $K_g \geq 2$ （6分贝）。



(a)  $Kg$  较大、 $\gamma$  较小



(b)  $\gamma$  较大、 $Kg$  较小

图5-54 稳定裕度的比较



### 三、相角裕度和幅值裕度的求解方法

通常有三种求解系统相角裕度和幅值裕度的方法，即解析法、极坐标图法和伯德图法。下面通过实例进行说明。

#### (一) 解析法

根据系统的开环频率特性，由式 (5-124) 和式 (5-125) 求出相角裕度；由式 (5-126) 和式 (5-127) 求出幅值裕度，如果幅值裕度用分贝数表示，则由式 (5-128) 求出。

例 5-9 已知最小相位系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{40}{s(s^2 + 2s + 25)}$$

试求出该系统的幅值裕度和相角裕度。

解 系统的开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{40}{j\omega(25 - \omega^2 + j2\omega)}$$

其幅频特性和相频特性分别是

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \frac{40}{\sqrt{(25 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$
$$\angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) = -90^\circ - \arctg \frac{2\omega_c}{25 - \omega_c^2}$$

由式 ( 5-124 ) 令  $|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = 1$  , 得

$$\omega_c = 1.82$$

由式 ( 5-125 ) 得

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) = 90^\circ - \arctg \frac{2 \times 1.82}{25 - 1.82^2} = 80.5^\circ$$

由式 ( 5 - 126 ) , 令  $\angle G(j\omega_g)H(j\omega_g) = -180^\circ$  得

$$\omega_g = 5$$

由式 ( 5 - 127 ) 得

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|} = 1.25$$

$$K_g (dB) = 20 \lg 1.25 = 1.94 (dB)$$

## (二) 极坐标图法

在GH平面上作出系统的开环频率特性的极坐标图，并作一单位圆，由单位圆与开环频率特性的交点与坐标原点的连线与负实轴的夹角求出相角裕度 $\gamma$ ；由开环频率特性与负轴交点处的幅值 $|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|$ 的倒数得到幅值裕度 $K_g$ 。

在上例中，先作出系统的开环频率特性曲线如图 5-55所示，作单位圆交开环频率特性曲线于A点，连接 OA，射线OA与负实轴的夹角即为系统的相角裕度 $\gamma \approx 80^\circ$ 。开环频率特性曲线与负实轴的交点坐标为 $(0.8, j0)$

由此得到系统的幅值裕度

$$K_g = \frac{1}{0.8} = 1.25$$

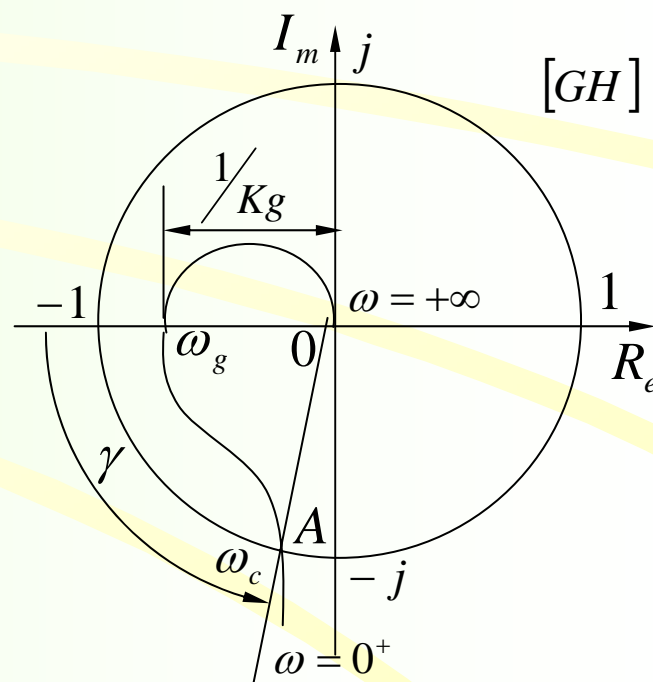


图5-55 例5-9极坐标图

### (三) 伯德图法

画出系统的伯德图，由开环对数幅频特性与零分贝线（即  $\omega$  轴）的交点频率  $\omega_c$ ，求出对应的相频特性与  $-180^\circ$  线的相移量，即为相角裕度  $\gamma$ 。当对应的相频特性位于  $-180^\circ$  线上方时， $\gamma > 0^\circ$ ；反之，当  $\omega_c$  对应的相频特性位于  $-180^\circ$  线下方时， $\gamma < 0^\circ$ 。然后，由相频率特性与  $-180^\circ$  线的交点频率  $\omega_g$ ，求出对应幅频特性与零分贝线的差值，即为幅值裕度  $K_g$  的分贝数。当  $\omega_g$  对应的幅频特性位于零分贝线下方时， $K_g > 0dB$ ，反之，当  $\omega_g$  对应的幅频特性位于零分贝线上方时， $K_g < 0dB$ 。

例5—9的伯德图如图5-56所示。从图中，可直接得到幅值穿越频率  $\omega_c \approx 2$ ，相角穿越频率  $\omega_g = 5$ ，相角裕度  $\gamma \approx 80^\circ$ ，幅值裕度  $K_g = 2dB$ 。

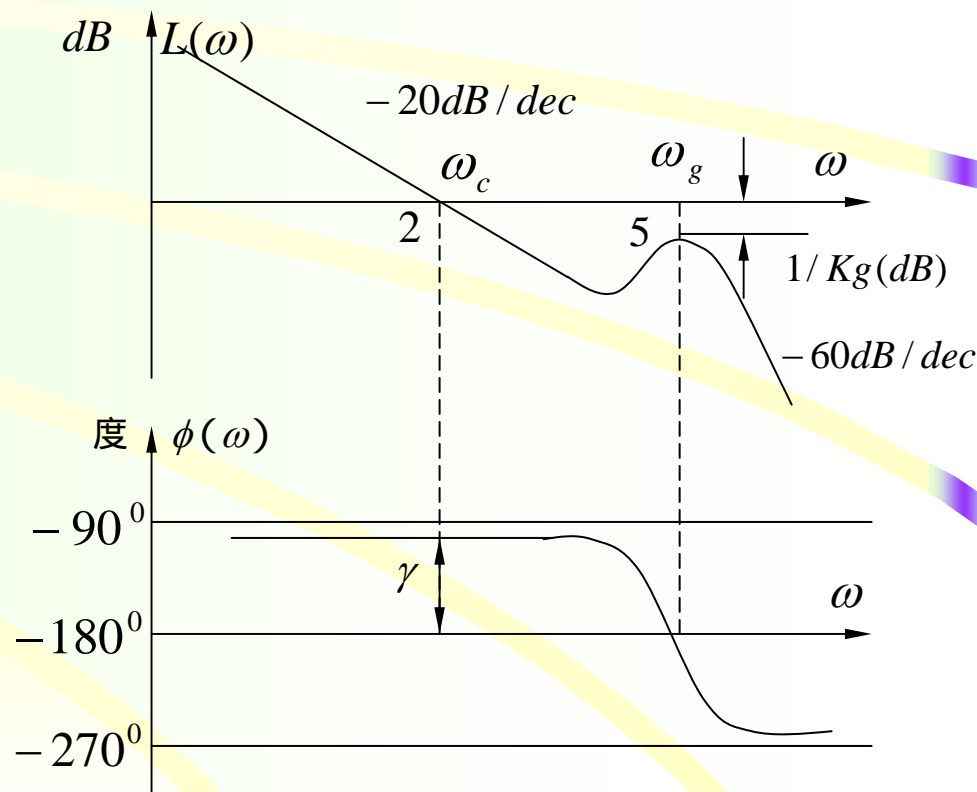


图5-56 例5-9题Bode图

比较上述三种解法可知：

**解析法** 比较精确，但计算步骤复杂，而且对于三阶以上的高阶系统，用解析法是很困难的。

**图解法** 以极坐标图和伯德图为基础的图解法，避免了繁锁的计算，具有简便、直观的优点，对于高阶系统尤为方便。不过图解法是一种近似方法，所得结果有一定误差，误差的大小视作图的准确性而定。伯德图法和极坐标法虽然都是图解法，但前者不仅可直接从伯德图上获得相角裕度 $\gamma$  和幅值裕度 $K_g$ ，而且还可直接得到相应的幅值穿越频率 $\omega_c$ 和相位穿频率 $\omega_g$ 。同时伯德图较极坐标图方便，因此在工程实践中得到更为广泛的应用。

## 四、稳定裕度与系统的稳定性

前面已经介绍，求出系统的稳定裕度可以定量分析系统的稳定程度。下面通过两个示例进一步说明。

例5-10 已知最小相位系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)} \quad (T \neq \tau)$$

试分析稳定裕度与系统稳定性之间的关系。

解 该系统的开环频率特性的极坐标图分别如图5-57(a) (当 $T > \tau$ 时)和图5-57(b) (当 $T < \tau$ 时)所示。由图5-57(a)可知，当 $T > \tau$ 时，系统的相角裕度 $\gamma < 0^\circ$ ，由图5-57(b)可知，当 $T < \tau$ 时，系统的相角裕度 $\gamma > 0^\circ$ 。系统的幅值裕度用解析法求解如下：

系统的幅频特性和相频特性分别为

$$\begin{aligned} |G(j\omega)H(j\omega)| &= \frac{K \sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}}{\omega^2 \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}} \\ \angle G(j\omega)H(j\omega) &= -180^\circ + \arctg \tau\omega - \arctg T\omega \\ &= -180^\circ - \arctg \frac{(T - \tau)\omega}{1 + T\tau\omega^2} \end{aligned}$$

令  $\angle G(j\omega_g)H(j\omega_g) = -180^\circ$  , 则有  $\arctg \frac{(T - \tau)\omega_g}{1 + T\tau\omega_g^2} = 0$  , 故  $\omega_g = 0$  或  $\omega_g = \infty (T \neq \tau)$   
 $\omega_g = 0$  对应S平面的坐标原点 , 舍去。  $\omega_g = \infty (T \neq \tau)$  , 由此求出系统的幅值裕

度为

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|} = \infty \quad (\omega_g = \infty)$$

可见 , 当  $\omega_g = \infty$  , 则  $K_g = \infty > 1$   $T > \tau$  时 ,  $\gamma < 0^\circ$  , 该系统不稳定 ;

$T < \tau$  时 ,  $\gamma > 0^\circ$  , 该系统是稳定的 , 结论与例5-8应用奈氏判据的结果一致。

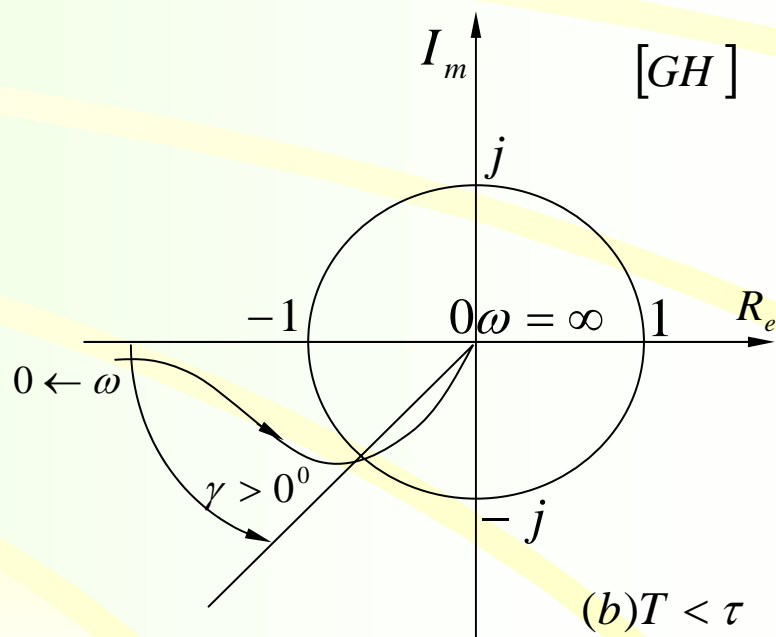
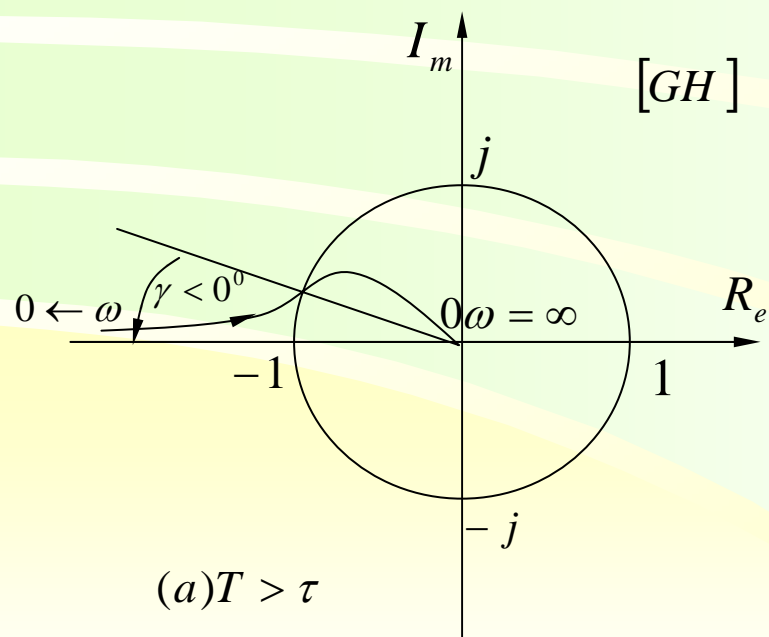


图5-57 例5-10极坐标图

**例5-11** 已知非最小相位系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(Ts - 1)}$$

试分析该系统的稳定性及其与系统稳定裕度之间的关系。

解 在一定的K值条件下，系统的开环频率特性如图5-58所示。由于该系统有一个为于右半部S平面的开环极点 ( $p=1$ )，奈氏曲线逆时针包围  $(-1, j0)$  点一周 ( $N=-1$ )，根据奈氏判据，该系统为稳定系统。

但由图解法求出该系统的相角裕度  $\gamma > 0^\circ$  , 幅值裕度  $K_g < 1$  , 这说明以相角裕度  $\gamma > 0^\circ$  和幅值裕度  $K_g > 1$  作为判别非最小相位系统稳定性的依据是不可靠的。

从上面示例可以看出，对于非最小相位系统，不能简单地用系统的相角裕度和幅值裕度的大小来判断系统的稳定性。但对于最小相位系统以相角裕度 $\gamma > 0^\circ$ 和幅值裕度 $K_g > 1$ （或 $K(\text{dB}) > 0$ ）作为系统稳定的充要条件是可靠的。

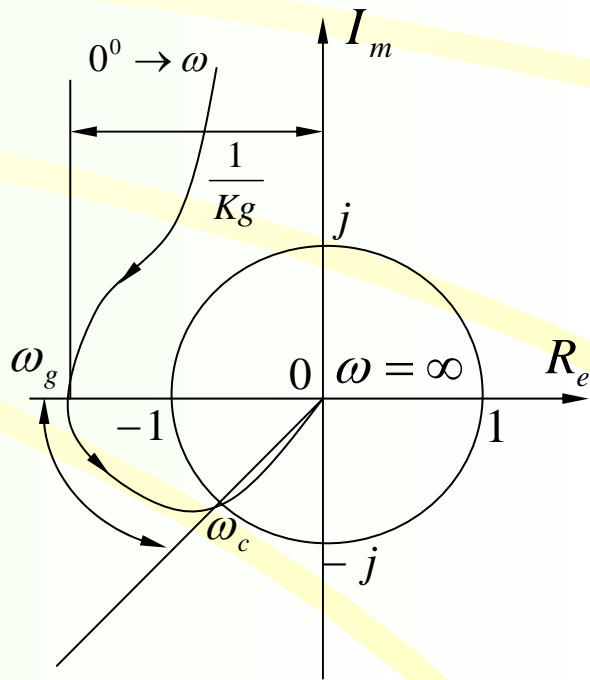


图5-58 例5-11极坐标图



## 5-6 闭环频率特性

通过本章前面几节的介绍，我们已经了解到系统的开环频率特性对分析系统的稳定性和稳定程度（即相对稳定性）具有十分重要的意义。但稳定性是系统能否正常工作的一个基本条件，为了研究自动控制系统的其它性能指标，

仅知道系统的开环频率特性是不够的。为此有必要进一步研究系统的闭环频率特性。一般情况下，求解系统的闭环频率特性十分复杂烦琐，在实际中通常都是采用图解法来求出系统的闭环频率特性。

### 一、向量作图法

如图5-59所示单位负反馈系统，其闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (5-129)$$

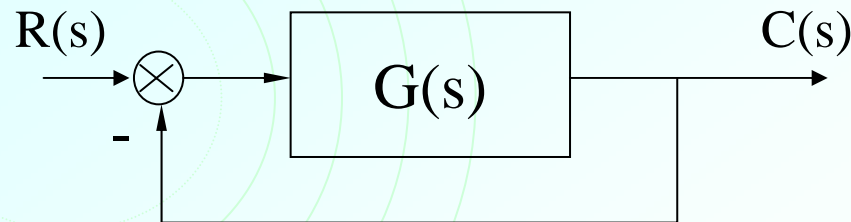


图5-59 单位反馈系统

用  $s = j\omega$  代入上式，就可得到系统的闭环频率特性表示为

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \quad (5-130)$$

式中  $G(j\omega)$  是单位负反馈系统的开环频率特性，它可以用  $s = j\omega$  代入系统的开环传递函数  $G(s)$  得到，也可以用实验方法获得。式 (5-130) 描述了系统的开环频率特性  $G(j\omega)$  与闭环频率特性  $\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}$  之间的关系。

设系统的开环频率特性如图5-60所示。由图可见，当  $\omega = \omega_1$  时

$$\begin{aligned} G(j\omega_1) &= \overrightarrow{OA} = |G(j\omega_1)| \angle G(j\omega_1) \\ &= |\overrightarrow{OA}| e^{j\phi} \end{aligned}$$

由此得到  $\omega = \omega_1$  时系统的闭环频率特性为

$$\frac{C(j\omega_1)}{R(j\omega_1)} = \frac{G(j\omega_1)}{1 + G(j\omega_1)} = \frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{QA}|} e^{j(\phi - \theta)}$$

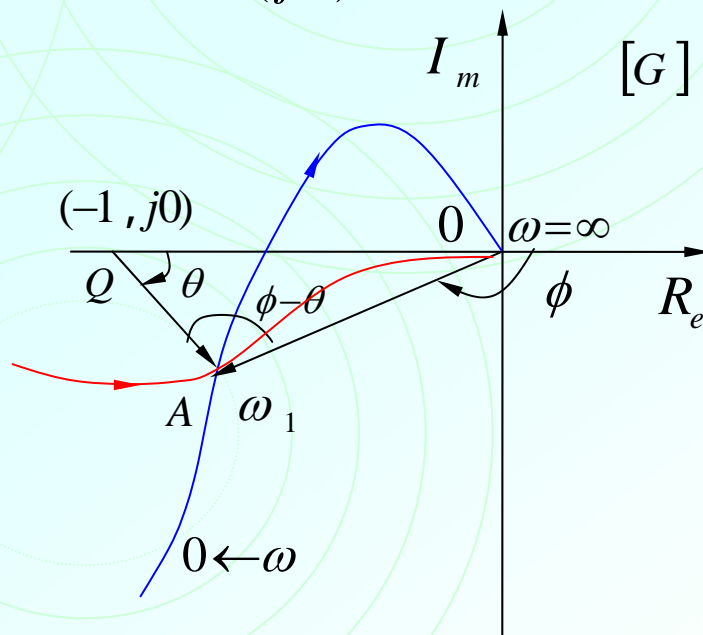


图5-60 向量作图法求闭环频率特性

上式表明，当  $\omega = \omega_1$  时，系统的闭环频率特性的幅值等于向量  $\overrightarrow{OA}$  与  $\overrightarrow{QA}$  的幅值之比，而闭环频率特性的相角等于向量  $OA$  与  $QA$  的相角差。这样，逐点测出不同频率处对应向量的幅值和相角，便可绘制如图5-61所示的闭环幅频特性  $A(\omega)$  和闭环相频特性  $\varphi(\omega)$ 。

应当指出，虽然向量作图法说明了开环频率特性  $G(j\omega)$  与闭环频率特性  $\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}$  之间的几何关系，但由于需要逐点测量和作图，十分不便，因而在实际应用中很少采用。

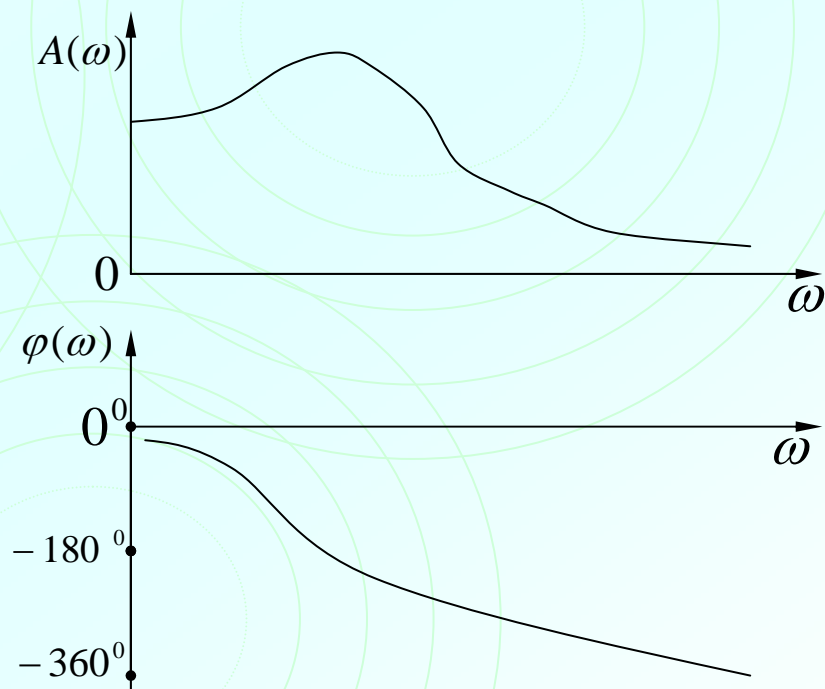


图5-61 系统的闭环幅频特性  $A(\omega)$  和闭环相频特性  $\varphi(\omega)$

## 二、等M圆图

由向量作图法和图5-60可看出，对于G平面上任一点A，总有一个闭环

幅值  $\left| \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \right|$  与之对应，如果令闭环幅值  $\left| \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \right|$  为一常数M，那么它在G平面上是一个什么样的图形呢？

设单位反馈系统的开环频率特性为

$$G(j\omega) = U + jV$$

式中U、V分别是G(j)的实部与虚部，它们都是角频率 的实函数，由此得到系统的闭环频率特性为

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} = \frac{U + jV}{1 + U + jV}$$

令

$$M = \left| \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \right| = \frac{|U + jV|}{|1 + U + jV|}$$

即

$$M^2 = \frac{U^2 + V^2}{(1 + U)^2 + V^2}$$

由此得到

$$(M^2 - 1)U^2 + 2M^2U + (M^2 - 1)V^2 + M^2 = 0 \quad (5-132)$$

若  $M=1$ ，则  $U = -\frac{1}{2}$ ，这是在G平面上过点  $(-\frac{1}{2}, j0)$  且平行于虚轴的直线方程，即  $U = -\frac{1}{2}$  是  $M=1$  在G平面上的等幅值轨迹。

若  $M \neq 1$ ，则式 (5-132) 可写成

$$U^2 + 2 \frac{M^2}{M^2 - 1} U + V^2 = -\frac{M^2}{M^2 - 1}$$
$$\left( U + \frac{M^2}{M^2 - 1} \right)^2 + V^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2} \quad (5-133)$$

这是一个标准圆方程，圆心坐标为  $(-\frac{M^2}{M^2 - 1}, j0)$ ，半径是  $\left| \frac{M}{M^2 - 1} \right|$ 。

当  $M > 1$  时，圆的半径  $\left| \frac{M}{M^2 - 1} \right|$  随  $M$  值的增加而减小，圆心位于负实轴上  $(-1, j0)$  点左侧且收敛于  $(-1, j0)$  点；当  $M < 1$  时，圆的半径  $\left| \frac{M}{M^2 - 1} \right|$  随  $M$  值的增加而增大，圆心位于正实轴上且收敛于  $(0, j0)$  点。当  $M=1$  时，它可看成是半径为无穷大且圆心位于实轴上无穷远的特殊圆。

由不同的  $M$  值在  $G$  平面上构成的这簇圆叫做等  $M$  圆或等幅值轨迹。由图5-62可看出，等  $M$  圆在  $G$  平面上是以实轴为对称的，它们的圆心均在实轴上。当  $M=1$  时，它是一条过  $(-\frac{1}{2}, j0)$  点且平行于虚轴的直线（无穷大圆弧）；当  $M>1$  时，等  $M$  圆簇均位于直线  $U=-\frac{1}{2}$  的左侧，且圆心由负实轴  $(-1, j0)$  点左侧收敛于  $(-1, j0)$  点；当  $M<1$  时，等  $M$  圆簇均位于直线  $U=-\frac{1}{2}$  的右侧，且圆心由正实轴收敛于  $(0, j0)$  点。

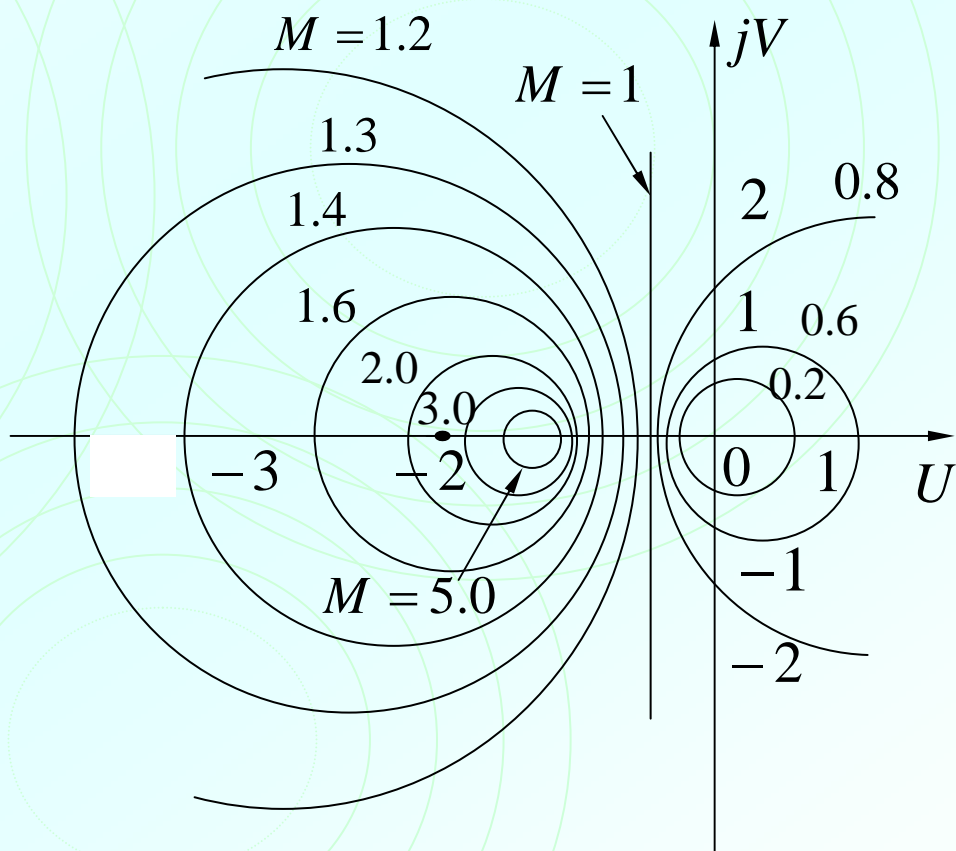


图5-62 等  $M$  圆图

在工程实践中，应用等M圆求取闭环幅频特性时，需先在透明纸上绘制出标准等M圆簇，然后按相同的比例尺在白纸或坐标纸上绘制出给定的开环频率特性 $G(j\omega)$ 的纸上重叠起来，并将它们的坐标重合，最后根据 $G(j\omega)$ 曲线与等M圆簇的交点得到对应的M值和 $\omega_r$ 值，便可绘制出闭环幅频特性 $A(\omega)$ （如图5-63和图5-64所示）。

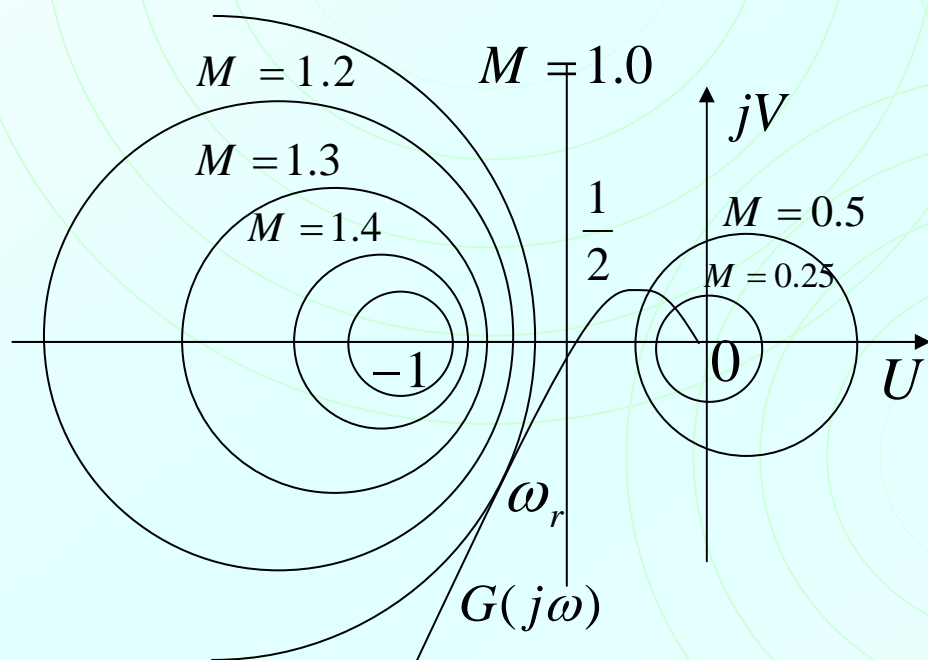


图5-63 利用等M圆图求取 $A(\omega)$

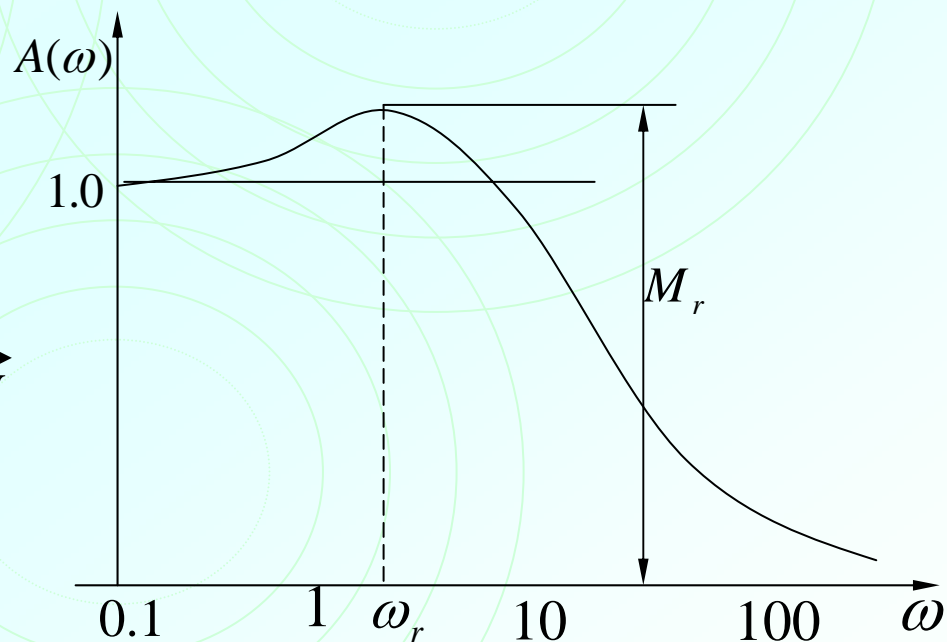


图5-64 控制系统闭环幅频特性图



需要指出，上述方法可直接得到 $G(j\omega)$ 与等M圆簇各交点处的M值，其对应的 $\omega$ 值还必须查表才能得到。方法是，先根据给定的开环频率特性 $G(j\omega)$ 表达式，分别由给定的 $M$ 值(按合适步长从小到大)计算出开环幅频特性 $|G(j\omega)|$ 和开环相频特性 $\angle G(j\omega)$ 的对应值，这只要编制一个简单程序，便可将所有数据计算和打印出来(如表5-1所示)。对照 $G(j\omega)$ 与等M圆簇各交点坐标位置查表得到对应的角频率 $\omega$ 值，最后将各交点的 $\omega$ 值和M值列表(如表5-2所示)标出，便可绘出如图5-64所示的闭环幅频特性 $A(\omega)$ 。

用等M圆求取闭环幅频特性不仅简单方便，而且可以在G平面上直接看到当开环频率特性曲线 $G(j\omega)$ 的形状发生某种变化时，闭环幅频特性 $A(\omega)$ 将会因之出现那些相应的变化，以及这些变化的趋势。由图5-63和图5-64还可看出，与 $G(j\omega)$ 曲线相切的圆所表示的M值就是闭环幅频特性的最大值，如果切点的M值大于1，则切点处的M值就是谐振峰值 $M_r$ ，对应的频率值就是谐振频率 $\omega_r$ 。谐振峰值 $M_r$ 和谐振频率 $\omega_r$ 是闭环幅频特性的两个重要特征量。它们与闭环系统的控制性能密切相关，有关内容将在§5-7中讨论。



### 三、等N圆图

用等M圆图和开环频率特性可以求出系统的闭环幅频特性 $A(\omega)$ 。用类似的方法进一步研究系统的闭环相频特性 $\theta(\omega)$ 及其在G平面上的图形。单位反馈系统的开环频率特性可以表示为

$$G(j\omega) = U + jV$$

则其闭环频率特性是

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} = \frac{U + jV}{1+U + jV}$$

用 $\theta$ 表示闭环频率特性的相角，则有

$$\theta = \angle \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \arctg \frac{V}{U} - \arctg \frac{V}{1+U}$$

即

$$\theta = \arctg \left[ \frac{\frac{V}{U} - \frac{V}{1+U}}{1 + \frac{V}{U} \cdot \frac{V}{1+U}} \right]$$

化简后有

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{V}{U^2 + U + V^2}$$

令

$$N = \operatorname{tg} \theta$$

则有

$$N = \frac{V}{U^2 + U + V^2}$$

整理后得到

$$\left(U + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(V - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N}\right)^2 \quad (5-134)$$

这也是一个标准圆方程，圆心坐是 $\left(-\frac{1}{2}, j\frac{1}{2N}\right)$ ，半径为 $\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N}\right)^2}$ 。当N或 $\theta(N = \operatorname{tg} \theta)$ 为一定值时，它在G平面上是一个圆，改变N或 $\theta$ 的大小，它们在G平面上就构成了如图 5-65所示的一簇圆，这簇圆的圆心都在虚轴左侧与虚轴距离 $\frac{1}{2}$ 为 $\frac{1}{2N}$ 且平行于虚轴的直线上，我们称这簇圆为等N圆或等相角轨迹。

由图 5-65 可看出，不管  $N$  值的大小如何，当  $U=V=0$  及  $U=-1, V=0$  时，方程 (5-134) 总是成立的。这就说明，等 $N$ 圆簇中每个圆都将通过点  $(-1, j0)$  和坐标原点  $(0, j0)$ 。

由图 5-65 还可看出，对于给定的  $\theta$  值对应的等 $N$  值轨迹，实际上并不是一个完整的圆，而只是一段圆弧，这是因为一个角度加上  $\pm 180^\circ$ （或  $\pm 180^\circ$  的倍数）其正切值相等的缘故。例如  $\theta = 30^\circ$  和  $\theta = 210^\circ$ （或  $-150^\circ$ ）的 $N$  值均为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，它们在 $G$ 平面上是属于同一个圆上的一段圆弧。等 $N$ 圆以实轴为对称，也对称于直线  $U = -\frac{1}{2}$ 。

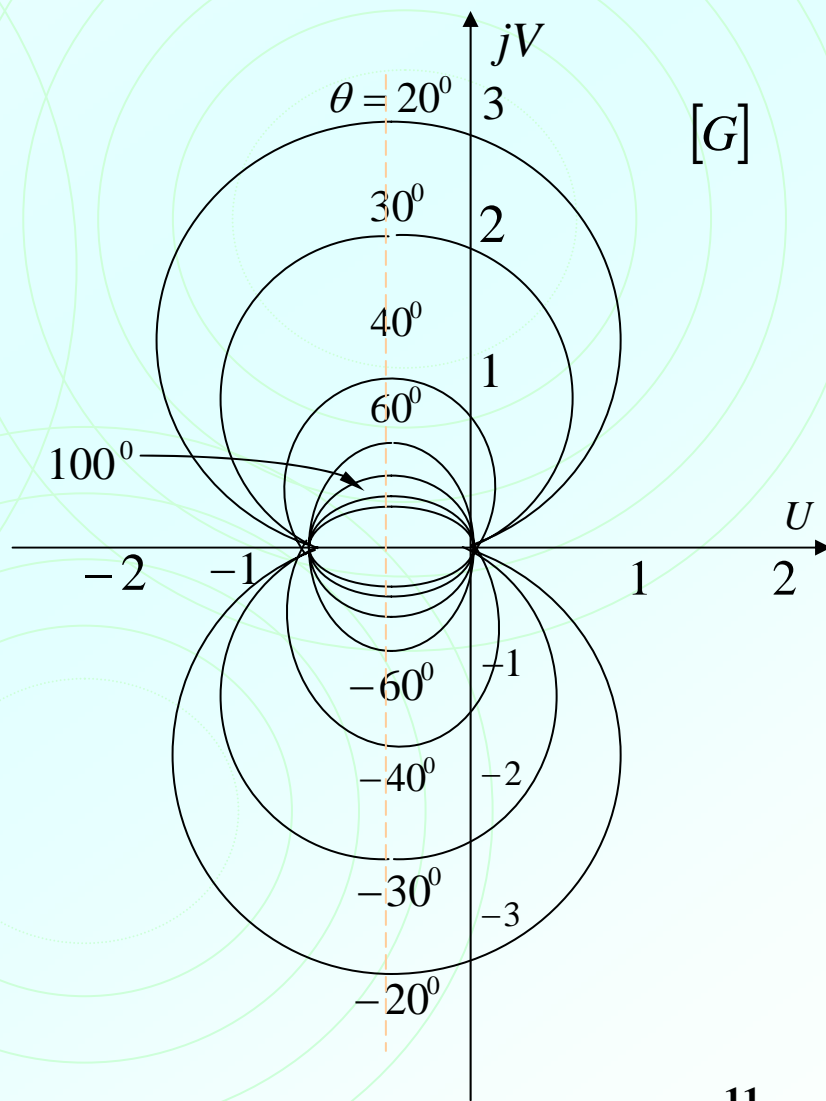


图5-65 等 $N$ 圆图

等  $N$  圆是多值的，即同一个  $N$  值有无穷多个 值与之对应，这些 值是  $\theta = \theta_0 \pm n \cdot 180^\circ$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )，它们都满足正切条件  $N = \tan$ 。因此，用等  $N$  圆来确定闭环系统的相角时，就必须确定适当的 值。应从对应于  $\theta = 0^\circ$  的零频率开始，逐渐增加频率直到高频，所得到的闭环相频曲线应该是连续的。

利用等  $N$  圆求取闭环相频特性与用等  $M$  圆图求取闭环幅频特性  $A(\omega)$  的方法和步骤完全相同，图5-66和5-67是用等  $N$  圆和开环频率特性曲线  $G(j\omega)$  求取闭环相频特性的一个示例。

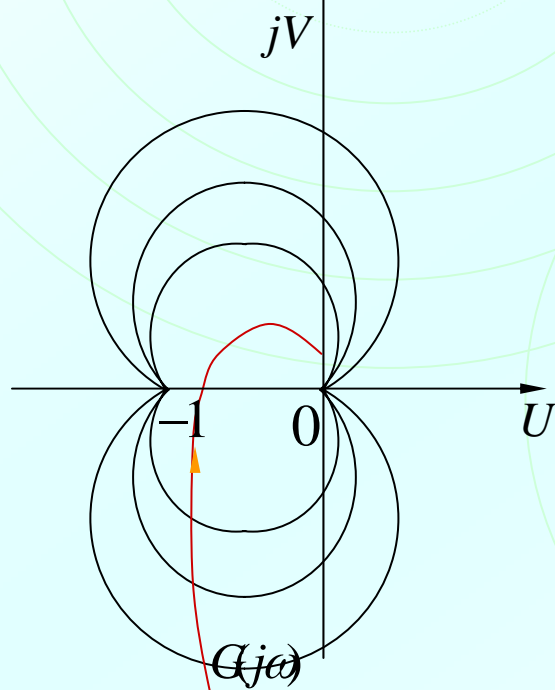


图5-66 利用等  $N$  圆图求取  $\theta(\omega)$

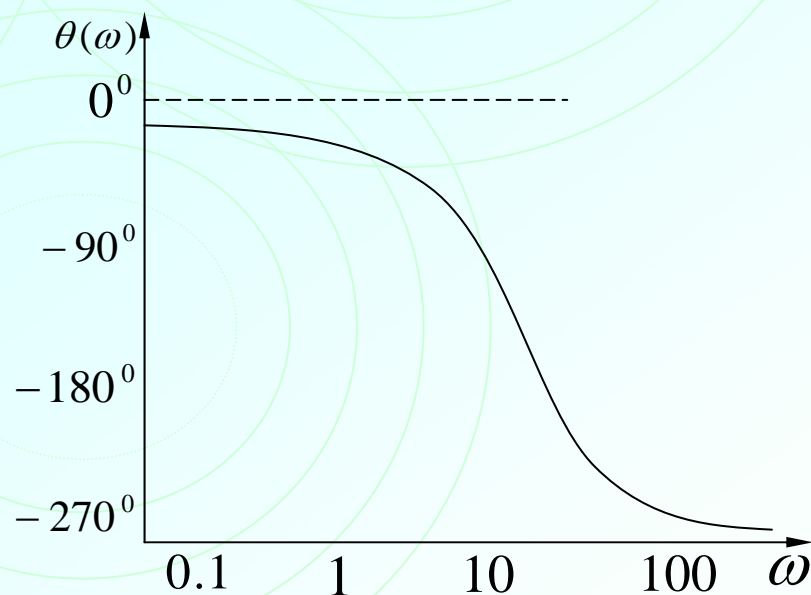


图5-67 控制系统的闭环相频特性曲线

## 四、非单位反馈系统的闭环频率特性

如图5-68所示的非单位反馈系统，其闭环频率特性为

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}$$

上式可写成

$$\begin{aligned}\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} &= \frac{G(j\omega)H(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} \cdot \frac{1}{H(j\omega)} \\ &= \frac{C_1(j\omega)}{R(j\omega)} \cdot \frac{1}{H(j\omega)}\end{aligned}\quad (5-135)$$

式 (5-135) 的方框图如图5-69所示，它是图5-68的等效方框图。

由式 (5-135) 得到非单位反馈系统的闭环幅频特性和相频特性分别为

$$\left| \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \right| = \left| \frac{C_1(j\omega)}{R(j\omega)} \right| \cdot \frac{1}{|H(j\omega)|}$$

或

$$20\lg \left| \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \right| = 20\lg \left| \frac{C_1(j\omega)}{R(j\omega)} \right| - 20\lg |H(j\omega)| \text{分贝} \quad (5-136)$$

$$\angle \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \angle \frac{C_1(j\omega)}{R(j\omega)} - \angle H(j\omega) \quad (5-137)$$

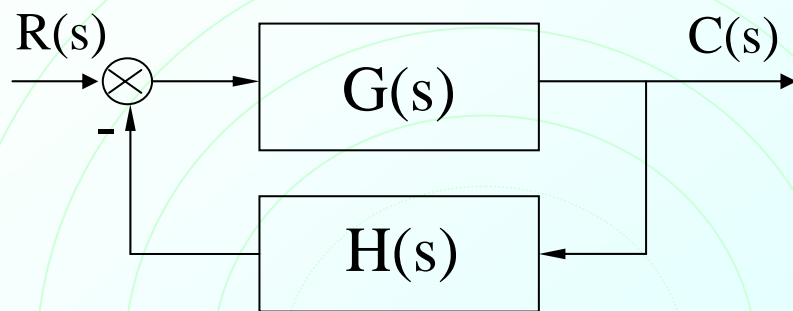


图5-68 非单位反馈系统框图

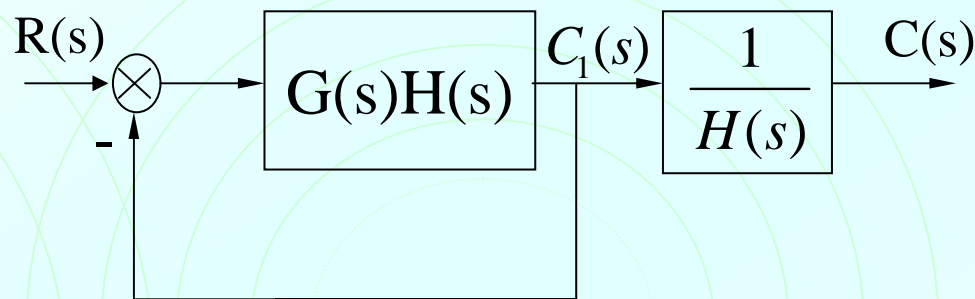


图5-69 非单位反馈系统等效框图

式 (5-136) 说明, 非单位反馈系统的对数闭环幅频特性等于由  $G(j\omega)H(j\omega)$  为前向通道的单位反馈系统的对数闭环幅频特性减去反馈通道  $H(j\omega)$  的对数幅频特性得到的差。式 (5-137) 说明, 非单位反馈系统的闭环相频特性等于由  $G(j\omega)H(j\omega)$  为前向通道的相频特性减去反馈通道  $H(j\omega)$  的相频特性得到的差。这样我们就可以利用等M圆和等N圆图先求出以  $G(j\omega)H(j\omega)$  为前向通道的单位反馈系统的闭环对数幅频特性和闭环相频特性, 再分别减去反馈通道  $H(j\omega)$  的对数幅频特性和相频率特性, 便可得到非单位反馈系统的闭环对数幅频特性和闭环相频特性。

## 5-7 频域响应和时域响应之间的关系

频域响应（频率特性）和时域响应都是描述控制系统固有特性的工具，因此两者之间必然存在着某种内在联系，这种联系通常体现在控制系统频率特性的某些特征量与时域性能指标之间的关系上。本节着重讨论系统闭环幅频特性的特征量与系统性能指标之间的关系。典型闭环幅频特性如图5-70所示，特性曲线随着频率变化的特征可用下述一些特征量加以概括：

- (1) 闭环幅频率特性的零频值  $\forall(0)$  ；
- (2) 谐振频率和相对谐振峰值  $M_r = \frac{A_{\max}}{A(0)}$  ；
- (3) 截止频率  $\omega_b$  和系统带宽  $(0 \sim \omega_b)$ 。

下面分别讨论这些特征量与系统性能指标之间的关系。



# 一、闭环幅频特性零频值 $A(0)$ 与系统无差度 $v$ 之间的关系

单位反馈系统的开环传递函数可写成下列形式

$$G(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n-v} (T_i s + 1)}$$

令

$$G_0(s) = \frac{\prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{\prod_{i=1}^{n-v} (T_i s + 1)}$$

则

$$G(s) = \frac{KG_0(s)}{s^v} \quad (5-138)$$

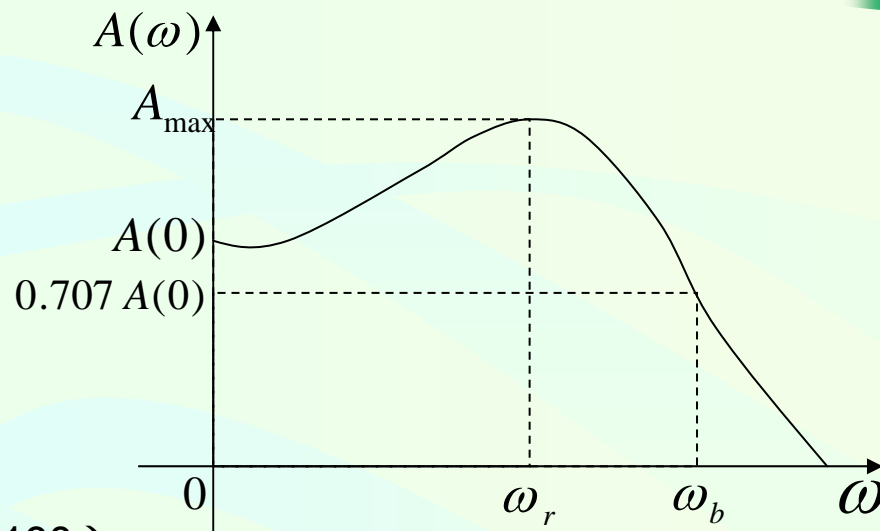


图5-70 典型闭环幅频特性

式中  $K$ —系统的开环放大系数；

$v$ —系统的无差度，即开环传递函数中积分环节的重数；

$G_0(s)$ —开环传递函数  $G(s)$  中除开环放大系数 $K$ 和积分项 $\frac{1}{s^v}$ 以外的表达式，它满足

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = 1$$



用  $s = j\omega$  代入式 (5-138) 得到系统的开环频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{KG_0(j\omega)}{(j\omega)^v}$$

对于单位反馈系统，闭环频率特性为

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}$$

即

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{K \frac{G_0(j\omega)}{(j\omega)^v}}{1 + K \frac{G_0(j\omega)}{(j\omega)^v}} = \frac{KG_0(j\omega)}{(j\omega)^v + KG_0(j\omega)} \quad (5-139)$$

由此得到系统闭环幅频特性的零频值是

$$A(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left| \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \right| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left| \frac{KG_0(j\omega)}{(j\omega)^v + KG_0(j\omega)} \right| \quad (5-140)$$

其中

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G_0(j\omega) = 1$$

当系统无差度  $\nu > 0$  时，由式 (5-140) 得

$$A(0) = 1$$

当系统无差度  $\nu = 0$  时，由式 (5—140) 得

$$A(0) = \frac{K}{1 + K} < 1 \quad (5-141)$$

综合分析，对于无差度  $\nu \geq 1$  的无差度系统，闭环幅频特性的零频值  $A(0) = 1$ ；而对于无差度  $\nu = 0$  的有差系统，闭环幅频特性的零频值  $A(0) < 1$ 。式 (5—141) 说明，系统开环放大系数  $K$  越大，闭环幅频特性的零频值  $A(0)$  愈接近于 1，有差系统的稳态误差将愈小。

## 二、谐振峰值 $M_r$ 与系统超调量 $\sigma_p$ 的关系

单位反馈的二阶控制系统的开环传递函数的标准形式为

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

其对应的闭环频率特性为

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \quad (5-142)$$

由5—2中的式(5—40)知,二阶系统的谐振峰值 $M_r$ 与阻尼比 $\zeta$ 之间的关系为

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5-143)$$

或写成

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{M_r^2}}}{2}} \quad M_r \geq 1 \quad (5-144)$$

对于二阶系统，系统的超调量  $\sigma_p$  为

$$\sigma_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100 \% \quad (5-145)$$

将式 (5—144) 代入式 (5—145) 便可得到二阶系统的相对谐振峰值  $M_r$  与系统超调量  $\sigma_p$  之间的关系为

$$\sigma_p = e^{-\pi \sqrt{\frac{M_r - \sqrt{M_r^2 - 1}}{M_r + \sqrt{M_r^2 - 1}}}} \times 100 \% \quad M_r \geq 1 \quad (5-146)$$

图 5-71是式 (5-146) 的关系曲线，由图可见，二阶系统的相对谐振峰值  $M_r = 1.2 \sim 1.5$  时，对应的系统超调量  $\sigma_p = 20 \sim 30\%$ ，这时系统可以获得较为满意的过渡过程。如果  $M_r > 2$ ，则系统的超调量  $\sigma_p$  将超过40%。

### 三、谐振频率 $\omega_r$ 及系统带宽与时域性能指标的关系

由5—2中的式 (5-39) 知, 二阶系统的谐振频率  $\omega_r$  与无阻尼自然振荡频率  $\omega_n$  和阻尼比  $\zeta$  之间的关系为

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad (5-147)$$

在第三章, 介绍了二阶系统的峰值时间  $t_p$  及过渡过程时间  $t_s$  与阻尼比  $\zeta$  之间的关系,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (5-148)$$

$$t_s = \frac{1}{\zeta \omega_n} \ln \frac{1}{0.05 \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (5-149)$$

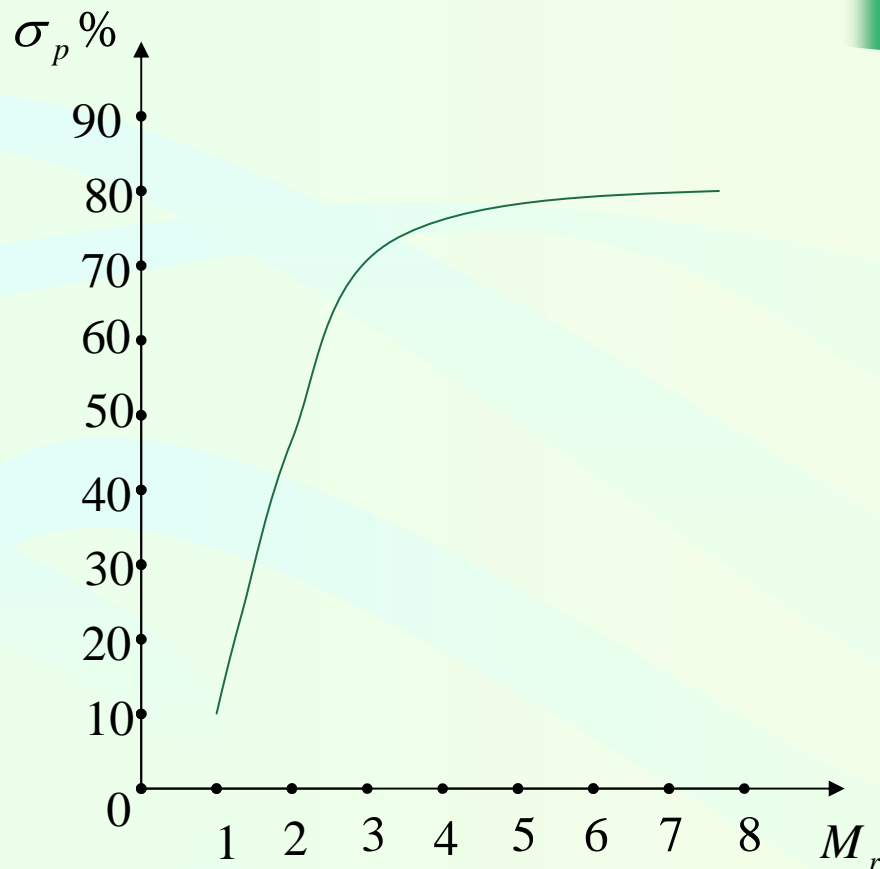


图5-71 超调量与相对谐振峰值的关系曲线

将式 (5-147) 的等号两边分别乘以式 (5-148) 和式 (5-149) 的等号两边得到

$$\omega_r t_p = \pi \sqrt{\frac{1 - 2\zeta^2}{1 - \zeta^2}} \quad (5-150)$$

和

$$\omega_r t_s = \frac{1}{\zeta} \sqrt{1 - 2\zeta^2} \ln \frac{1}{0.05 \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (5-151)$$

式 (5-150) 和式 (5-151) 说明, 对于给定的阻比  $\zeta$ , 二阶系统的峰值时间  $t_p$  和过渡过程时间  $t_s$  均与系统的谐振频率  $\omega_r$  成反比。即谐振频率  $\omega_r$  愈高, 系统的反应速度愈快。所以系统的谐振频率  $\omega_r$  是表征系统响应速度的量。

如图5—70所示, 系统的带宽是指系统的幅频特性  $A(\omega)$  由频率为零的零频值  $A(0)$  变化到  $\frac{1}{\sqrt{2}} A(0)$  时所对应的截止频率  $\omega_b$  的频率变化范围, 即  $0 \leq \omega \leq \omega_b$ 。

二阶系统的截止频率可由下式求出

$$\left| \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \right|_{\omega=\omega_b} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

由此得到截止频率  $\omega_b$  与阻尼自然振荡频率  $\omega_n$  及阻尼比  $\zeta$  的关系为

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}} \quad (5-152)$$

将式 (5 - 152) 等号两边分别乘以式 (5 - 148) 和式 (5 - 149) 两边得到和

$$\omega_b t_p = \pi \sqrt{\frac{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}{1 - \zeta^2}} \quad (5-153)$$

$$\omega_b t_s = \frac{1}{\zeta} \cdot \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}} \cdot \ln \frac{1}{0.05 \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (5 - 154)$$

式 (5-153) 和式 (5-154) 说明，对于给定的阻尼比 $\zeta$ ，二阶系统的截止频率 $\omega_b$ 与峰值时间 $t_p$ 和过渡过程时间 $t_s$ 也是成反比的。截止频率 $\omega_b$ 愈大，系统的响应速度愈快，反之亦然。所以，由截止频率 $\omega_b$ 决定的系统带宽也是表征系统响应速度的特征量，一般来说，频带宽的系统有利于提高系统的响应速度，但同时它又容易引入高频噪声，从抑制噪声的角度，系统带宽又不宜过大。

因此，在设计控制系统时，要恰当处理好这个矛盾，在全面衡量系统性能指标的基础上，选择适当的频带宽度。

## 四、相角裕度 $\gamma$ 与阻尼比 $\zeta$ 的关系

二阶系统的开环频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\zeta\omega_n)}$$

由5-4知，系统的幅值穿越频率  $\omega_c$  ( 又称剪切频率 )

满足  $|G(j\omega_c)| = 1$  , 因此

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_c \sqrt{\omega_c^2 + 4\zeta^2 \omega_n^2}} = 1$$

即

$$\omega_c^4 + 4\zeta^2 \omega_n^2 \omega_c^2 - \omega_n^4 = 0$$

由此得到

$$\left( \frac{\omega_c}{\omega_n} \right)^2 = \sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2 \quad (5 - 155)$$



二阶系统的相角裕度是

$$\gamma = 180^{\circ} - 90^{\circ} - \arctg \left( \frac{\omega_n}{2\xi\omega_n} \right) = \arctg \left( \frac{2\xi\omega_n}{\omega_c} \right) \quad (5-156)$$

将式 (5-155) 代入式 (5-156) 得到

$$\gamma = \arctg \frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{4\xi^2 + 1} - 2\xi^2}} \quad (5-157)$$

二阶欠阻尼系统的相角裕度  $\gamma$  与阻尼比之间的关系曲线如图5—72所示。

由图 5—72可以看出，在阻尼比  $\xi \leq 0.7$  的范围内，它们之间的关系可近似地用一条直线表示，即

$$\xi \approx 0.01\gamma$$

上式表明，选择  $30^{\circ} \sim 60^{\circ}$  的相角裕度时，对应的系统阻尼比约为  $0.3 \sim 0.6$ 。

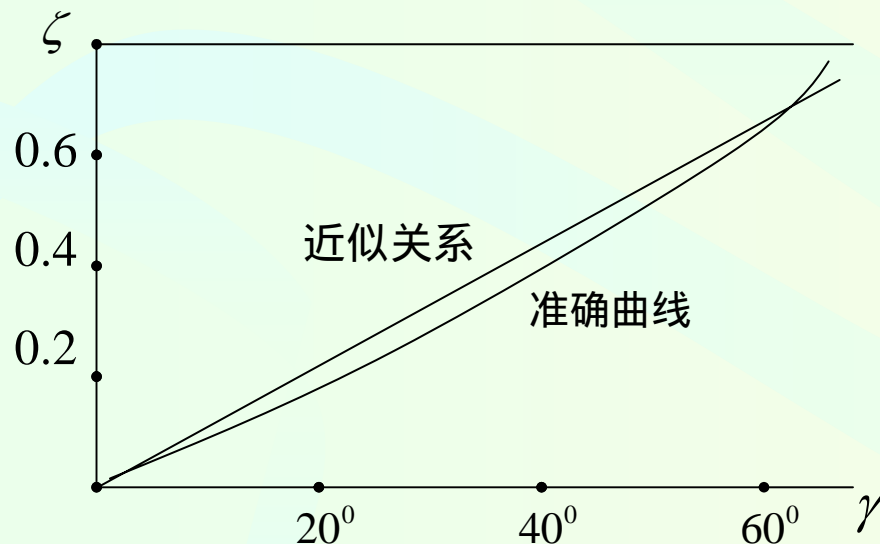


图5-72 相角裕度和阻尼比的关系

## 五、高阶系统的频域响应和时域响应

控制系统的频域和时域响应可由傅立叶积分进行变换，即

$$C(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \cdot R(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (5-159)$$

式中  $C(t)$  为系统的被控信号， $\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}$  和  $R(j\omega)$  分别是系统的闭环频率特性和控制信号的频率特性。一般情况下，直接应用式 (5—159) 求解高阶系统的时域响应是很困难的。在第三章和第四章我们介绍了主导极点的概念，对于具有一对主导极点的高阶系统，可用等效的二阶系统来表示，在这种情况下，

可以利用前面介绍的方法对高阶系统进行分析。实践证明，只要满足主导极点的条件，分析的结果是令人满意的。对于不具有一对主导极点的高阶系统，

除了利用式 (5—159) 的傅立叶变换外，可采用近似估算公式计算频域指标和频域指标间的关系 (p172)。

综上所述，控制系统的频域响应和时域响应之间的关系可大致概括如下：

(1) 对于零型 ( $v = 0$ ) 有差系统，闭环幅频特性的零频值  $A(0)$  反映了系统精度，即系统误差的大小。系统的开环放大  $K$  愈大， $A(0)$  愈接近于1，系统的稳态误差愈小，反之误差愈大。但系统的开环放大系数  $K$  太大，会对系统的稳定性产生不利影响。因此在系统设计中，应全面考虑性能指标的要求，恰当地选择系统参数。对于I型或I型以上 ( $v \geq 1$ ) 的无差系统，闭环幅频特性的零频值  $A(0) = 1$ 。

(2) 对于二阶系统或可以等效为二阶系统的高阶系统，相对谐振峰值  $M_r$  反映了系统的相对稳定性。当  $1 < M_r < 1.5$  时，相应的系统阻尼比约为  $0.35 < \zeta < 0.707$ ，系统的超调量是  $4.3\% < \sigma\% < 30\%$ ，这时可以获得比较满意的瞬态响应。当  $M_r > 1.5$  时，系统的阶跃响应将出现几次超调。

(3) 谐振频率  $\omega_r$  和截止频率  $\omega_b$  的大小反映了系统的响应速度。 $\omega_r$  与  $\omega_b$  的值愈大，系统响应速度愈快，反之愈慢。但频带太宽 ( $\omega_b$  的值大)，系统对高频噪声的滤波性能差，因此在系统设计中，必须兼顾系统的快速性和抗干扰能力，妥善处理好这一对矛盾。