

# 第四章 线性系统的根轨迹法

第一节 根轨迹的基本概念

第二节 根轨迹绘制的基本法则

第三节 广义根轨迹

第四节 系统性能分析

第五节 控制系统复域设计

## 4.3 广义根轨迹

- ◆ 常规根轨迹：以开环根轨迹增益 $Kr$ 为可变参数的根轨迹，大多数系统都属于这种情况。
- ◆ 广义根轨迹：除开环根轨增益为变化参数的根轨迹以外，其它情况下的根轨迹统称为广义根轨迹，包括：参数根轨迹、零度根轨迹等。

### 一、参数根轨迹

为分析系统方便或着重研究某个系统参数(如时间常数、反馈系数等)对系统性能的影响，可将这些参数作为可变参数绘制根轨迹。

以非开环根轨迹增益作为可变参数绘制的根轨迹称为参数根轨迹。

## 4.3 广义根轨迹

例 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{2}{s(Ts+1)(s+1)}$$

试绘制以时间常数  $T$  为可变参数的闭环系统根轨迹。

解 (1) 系统的特征方程  $s(Ts+1)(s+1)+2=0$

$$Ts^2(s+1)+s^2+s+2=0$$

用  $s^2+s+2$  除等式两边得

$$1 + \frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2} = 0$$

## 4.3 广义根轨迹

$$\text{令} \quad G'(s)H'(s) = \frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2}$$

$$\text{则有} \quad 1 + G'(s)H'(s) = 0$$

$G'(s)H'(s)$  ——系统的等效开环传递函数

等效开环传递函数的形式与绘制常规根轨迹的开环传递函数完全一致，区别在于时间常数 $T$ 取代了常规根轨迹中开环根轨迹增益 $K_r$ 的位置。

可根据绘制普通根轨迹的八条基本规则来绘制参数根轨迹。

## 4.3 广义根轨迹

$$G'(s)H'(s) = \frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2}$$

(2) 系统的等效开环传递函数的零点数为 $m=3$ ,极点数 $n=2$ , 即 $m>n$ 。

由规则一和规则二知, 该系统有3条连续且对称于实轴的根轨迹。根轨迹的终点( $T=\infty$ )是等效开环传递函数的三个零点, 即

$$z_1 = z_2 = 0, \quad z_3 = -1$$

$m>n$ , 在实际物理系统中一般不会出现, 然而在绘制参数根轨迹时, 等效开环传递函数却常常出现这种情况。

## 4.3 广义根轨迹

$$G'(s)H'(s) = \frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2}$$

有 $m-n$ 条根轨迹起始于 $s$ 平面的无穷远处（无限极点）。

3条根轨迹的起点： $p_1 = -0.5 + j1.322$      $p_2 = -0.5 - j1.322$     无穷远处

由规则四知，实轴上的根轨迹是实轴上 $-1$ 至 $-\infty$ 线段。

由规则六可求出两个起始角分别为

$$\theta_{p_1} = \mp 180^\circ + 70^\circ + 110^\circ + 110^\circ - 90^\circ = 20^\circ$$

$$\theta_{p_2} = -\theta_{p_1} = -20^\circ$$

## 4.3 广义根轨迹

$$G'(s)H'(s) = \frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2}$$

由规则七求出根轨迹与虚轴的两个交点，用 $s=j\omega$ 代入特征方程

$$-jT\omega^3 - (T+1)\omega^2 + j\omega + 2 = 0$$

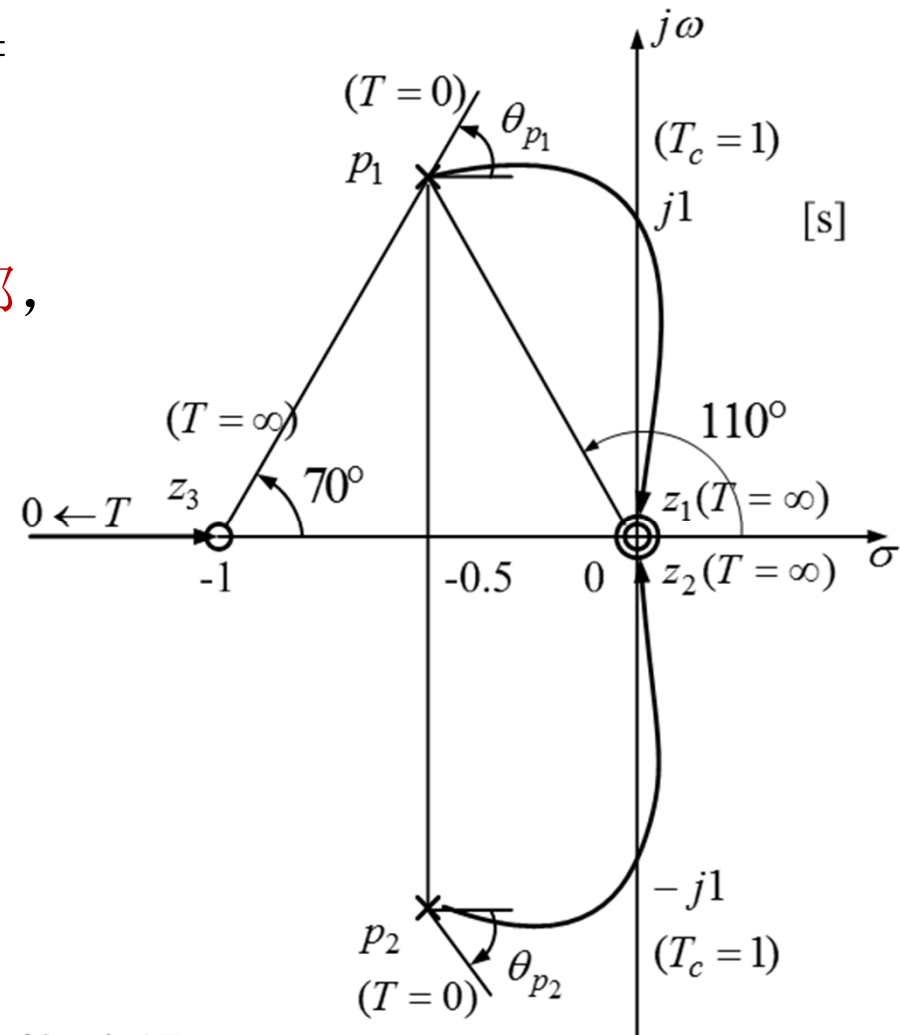
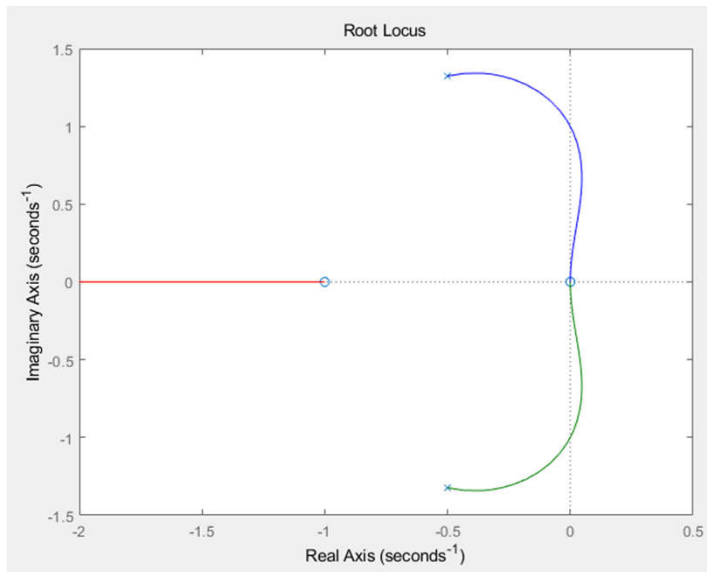
虚部方程和实部方程分别为 
$$\begin{cases} \omega - T\omega^3 = 0 \\ 2 - (T+1)\omega^2 = 0 \end{cases}$$

解 虚部方程得 $\omega$ 的合理值为  $\omega_c = \pm\sqrt{\frac{1}{T}}$

代入实部方程求得  $T_c = 1$  秒，所以  $\omega_c = \pm 1$  为根轨迹与虚轴的两个交点。

## 4.3 广义根轨迹

- 由根轨迹图可知，时间常数 $T=$   
系统处于临界稳定状态。
- $T > 1$ 时，根轨迹在 $s$ 平面右半部，  
系统不稳定。





## 4.3 广义根轨迹

绘制参数根轨迹的步骤：

(1) 先根据系统的特征方程  $1+G(s)H(s)=0$

求出系统的等效开环传递函数  $G'(s)H'(s)$ ，使  $G'(s)H'(s)$  与绘制普通根轨迹的开环传递函数有相同的形式，

$$G'(s)H'(s) = \frac{K_r' \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (\text{注：此处的零极点是等效开环传递函数的零极点})$$

$K_r'$  为除开环根轨迹增益  $K_r$  以外的任何参数，是绘制参数根轨迹的可变参数。

(2) 根据绘制普通根轨迹的八条基本规则和等效开环传递函数  $G(s)H(s)$  绘制出系统的参数根轨迹。

## 4.3 广义根轨迹

---

### 二、正反馈系统的根轨迹

正反馈系统的特征方程是  $1 - G(s)H(s) = 0$

$$\text{即 } G(s)H(s) = 1$$

绘制正反馈系统根轨迹的幅值条件和相角条件分别为

$$|G(s)H(s)| = 1$$

$$\angle G(s)H(s) = 0^\circ + k \cdot 360^\circ (k = 0, 1, 2, \dots)$$

## 4.3 广义根轨迹

---

$$1 - G(s)H(s) = 0$$

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

与负反馈系统根轨迹的幅值条件和相角条件相比，正反馈系统和负反馈系统的幅值条件相同；

负反馈系统的根轨迹遵循  $180^\circ$  相角条件，而正反馈系统的根轨迹遵循  $0^\circ$  相角条件。正反馈系统根轨迹又称为零度根轨迹。

由于相角条件不同，在绘制正反馈系统根轨迹时，需对绘制负反馈系统常规根轨迹的八条基本规则中与相角条件有关的三条规则作相应修改：

## 利用相角条件

- 1) 根轨迹的起点与终点;
- 2) 根轨迹的分支数、对称性和连续性;
- 3) 根轨迹的渐近线; @ $n-m$ 条
- 4) 根轨迹在实轴上的分布;
- 5) 根轨迹的分离点与分离角;

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_a &= \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} \\ \phi_a &= \frac{2k+1}{n-m} \pi \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[ \frac{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}{\prod_{j=1}^m (s - z_j)} \right] \bigg|_{s=d} &= 0 \\ (2k+1)\pi/l \quad (k=0,1,l-1) \end{aligned} \right. \quad \sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i}$$

- 6) 根轨迹的起始角和终止角; @复数零极点

$$\theta_{pl} = \mp 180^\circ + \sum_{j=1}^m \angle(p_l - z_j) - \sum_{i=1}^{l-1} \angle(p_l - p_i) - \sum_{i=l+1}^n \angle(p_l - p_i) \quad \theta_{zl} = \mp 180^\circ + \sum_{i=1}^n \angle(z_l - p_i) - \sum_{j=1}^{l-1} \angle(z_l - z_j) - \sum_{j=l+1}^m \angle(z_l - z_j)$$

- 7) 根轨迹与虚轴的交点。  $s=j\omega$ 、劳斯判据

$$8) \text{ 根之和 } \sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n p_i$$

## 4.3 广义根轨迹

(1) 正反馈系统根轨迹的渐近线与实轴正方向的夹角应为

$$\phi_a = \frac{2k\pi}{n-m} (k=0,1,2,\dots,n-m-1)$$

(2) 正反馈系统在实轴上的根轨迹是那些在其右侧的开环实零点和开环实极点的总数为偶数或零的线段。

(3) 正反馈系统的起始角和终止角应为

$$\theta_{p_l} = 0^\circ + \sum_{j=1}^m (p_l - z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n (p_l - p_i)$$

$$\theta_{z_l} = 0^\circ + \sum_{j=1}^n (z_l - p_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^m (z_l - z_j)$$

## 4.3 广义根轨迹

例 已知正反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+1)(s+2)}$$

试绘制该系统的根轨迹图。

解：

由修改后的规则三知，渐近线与实轴正方向的夹角分别是  $0^\circ$  ( $k=0$ )、 $120^\circ$  ( $k=1$ ) 和  $-120^\circ$  ( $k=2$ )。

由修改后的规则四知，实轴上的根轨迹是由0至 $+\infty$ 线段和由-1至-2线段。

## 4.3 广义根轨迹

在前例中，由规则五求出的极值方程的解有两个，即  $d_1 = -0.42$  和  $d_2 = -1.58$ 。

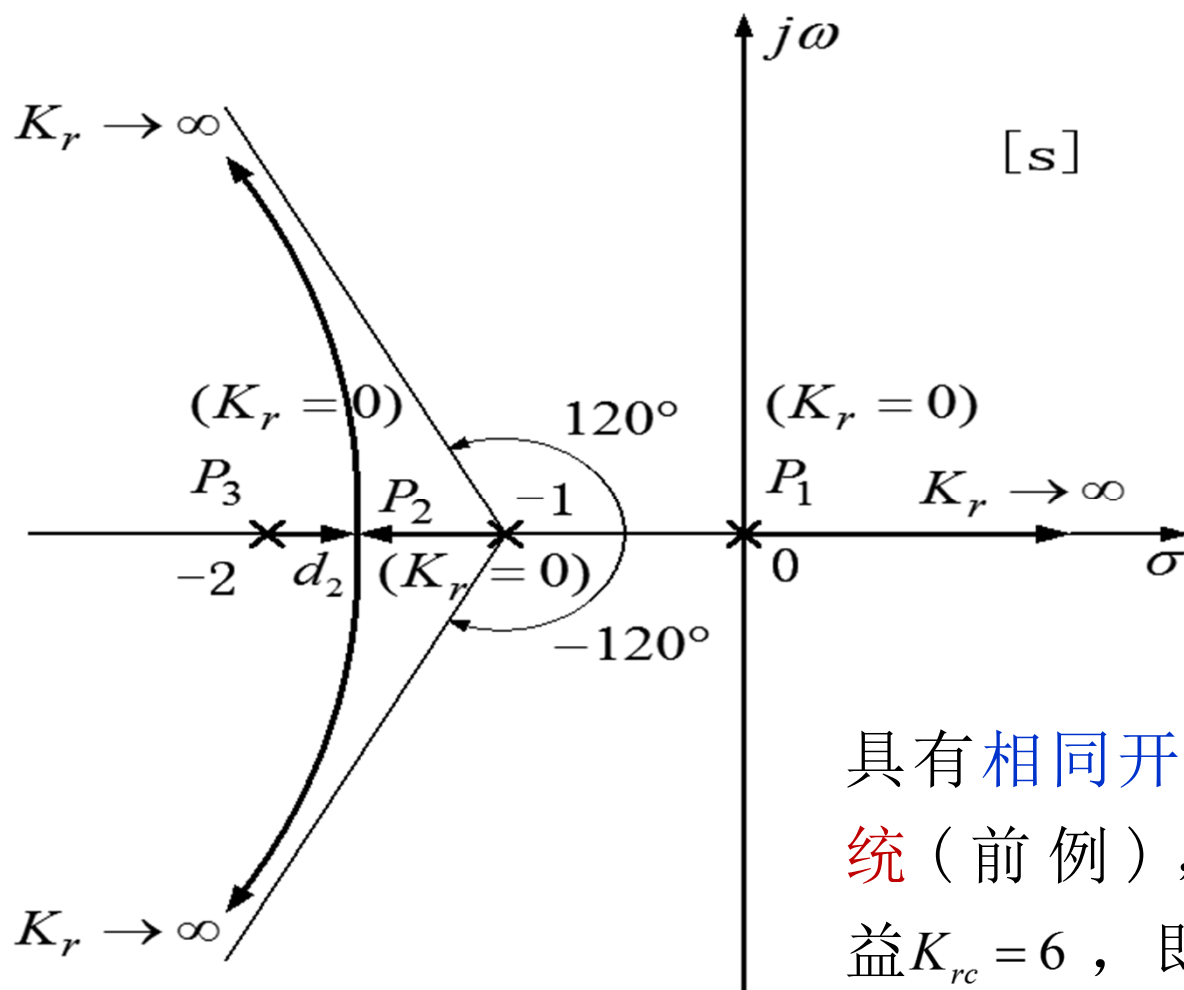
$$3d^2 + 6d + 2 = 0$$

- 对于前例的负反馈系统， $d_1$ 是根轨迹与实轴交点的合理值， $d_2$ 不在实轴的根轨迹上，舍去。
- 本例是正反馈系统，实轴上的根轨迹改变了， $d_2 = -1.58$ 在实轴的根轨迹上，是根轨迹与实轴交点（分离点）的合理值，而 $d_1 = -0.42$ 不在实轴的根轨迹上，舍去。

规则五没有改变，但在确定分离点时，应考虑规则四变化的影响。

本例无共轭复数开环零、极点，不存在起始角和终止角问题（规则六），根轨迹与虚轴也无交点。

## 4.3 广义根轨迹



3条根轨迹中，有一条从起点到终点全部位于 $s$ 平面右半部，无论 $K_r$ 为何值，系统都存在 $s$ 平面右半部的闭环极点，该正反馈系统总是不稳定的。

具有相同开环传递函数的负反馈系统（前例），它的临界根轨迹增益 $K_{rc} = 6$ ，即当 $K_r > 6$ 时系统是不稳定的，当 $K_r < 6$ 时系统稳定。



## 4.3 广义根轨迹

### 三、非最小相位系统的根轨迹

非最小相位系统一词源于对系统频率特性的描述，即在正弦信号的作用下，具有相同幅频特性的系统（或环节），最小相位系统的相位移最小，而非最小相位系统的相位移大于最小相位系统的相位移。

非最小相位系统，是指在 $s$ 平面右半部有开环极点和（或）开环零点的系统。

所有开环零点和极点都位于 $s$ 平面左半部的系统叫最小相位系统。

非最小相位系统：1)  $s$ 最高次幂系数为正 2)  $s$ 最高次幂系数为负

## 4.3 广义根轨迹

1) 产生非最小相位的 $s$ 最高次幂的系数为正

例 已知负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r(s+1)}{s(s-1)(s^2+2s+2)}$$

试绘制该系统的根轨迹图。

解 该系统有一个位于 $s$ 右平面的开环极点 ( $p_2 = 1$ ) ,  
是非最小相位系统。

系统特征方程的最高阶次是4，由规则一、二知该系统有4条连续且对称于实轴的根轨迹。4条根轨迹的起点分别是它的4个开环极点：

$$p_1 = 0 \quad p_2 = 1 \quad p_3 = -1 + j1 \quad p_4 = -1 - j1$$

## 4.3 广义根轨迹

根轨迹的1个终点是有限开环零点，即  $z_1 = -1$ ，其余3个终点均在无穷远处（无限零点）。

由规则三知，根轨迹的3条渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} = \frac{0 + 1 + (-1 - j) + (-1 + j) - (-1)}{3} = 0$$

渐近线与实轴正方向的夹角分别是  $60^\circ$  ( $k=0$ )， $180^\circ$  ( $k=1$ ) 和  $-60^\circ$  ( $k=2$ )。

由规则四知，实轴上的根轨迹是由0至1线段和-1至 $-\infty$ 线段。

## 4.3 广义根轨迹

由规则五的分离点方程可求出根轨迹与实轴的交点，即由方程

$$\left. \frac{d}{ds} \left[ \frac{s(s-1)(s^2+2s+2)}{s+1} \right] \right|_{s=d} = 0 \quad \text{得} \quad d^4 + 2d^3 + d^2 - \frac{2}{3} = 0$$

解方程得到4个根分别为  $d_1 = 0.53$ ,  $d_2 = -1.53$ ,  $d_{3,4} = -0.5 \pm j0.75$

$d_1$  和  $d_2$  为根轨迹与实轴交点的合理值， $d_1$  和  $d_2$  为根轨迹的分离点。

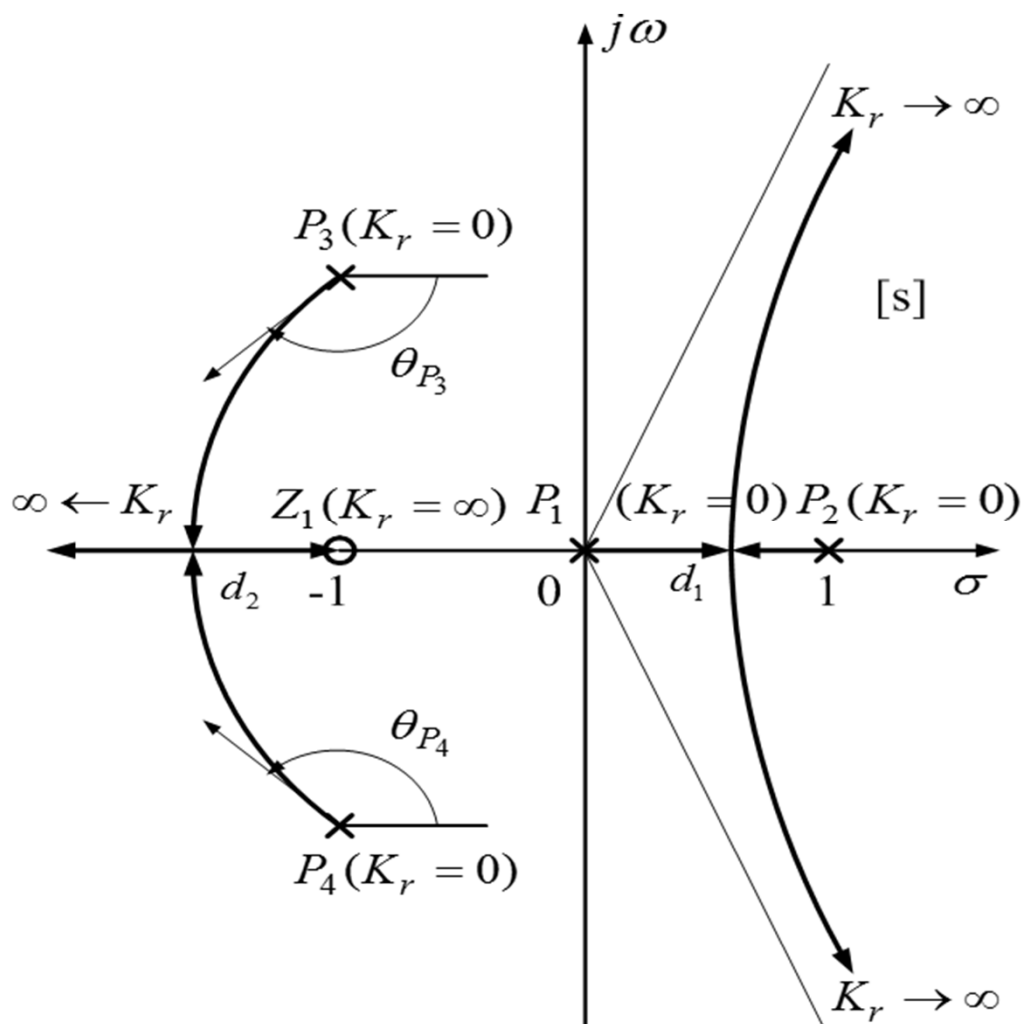
由规则六可求出共轭复数极点  $p_3$  和  $p_4$  的起始角分别为

$$\theta_{p_3} = \mp 180^\circ + 90^\circ - 135^\circ - 153.4^\circ - 90^\circ = -108.6^\circ$$

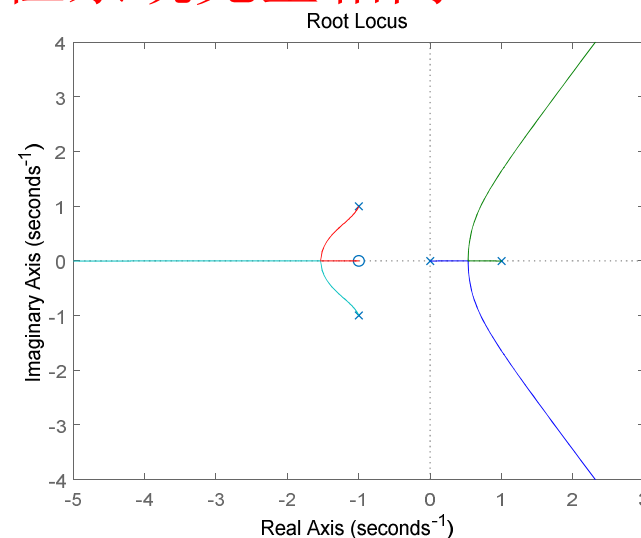
$$\theta_{p_4} = -\theta_{p_3} = 108.6^\circ$$

根轨迹与虚轴无交点。该系统的根轨迹如图。

## 4.3 广义根轨迹



$s$ 最高次幂为正的负反馈非最小相位系统除了有位于 $s$ 右平面的开环零、极点外，其绘制根轨迹的规则和步骤与最小相位系统完全相同。



## 4.3 广义根轨迹

2) 产生非最小相位的s最高次幂的系数为负

若某负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(1-\tau s)}{s(1+Ts)} \quad (\tau > 0, T > 0)$$

系统的特征方程为

$$1+G(s)H(s) = 1 + \frac{K(1-\tau s)}{s(1+Ts)} = 1 - \frac{K(\tau s-1)}{s(Ts+1)} = 1 - \frac{K\tau(s-\frac{1}{\tau})}{Ts(s+\frac{1}{T})} = 1 - \frac{K_r(s-\frac{1}{\tau})}{s(s+\frac{1}{T})} = 0$$

根轨迹方程与正反馈系统的一样，其幅值条件和相角条件分别为

$$\left| \frac{K_r(s-\frac{1}{\tau})}{s(s+\frac{1}{T})} \right| = 1 \quad \angle(s-\frac{1}{\tau}) - \angle s - \angle(s+\frac{1}{T}) = 2k\pi$$

## 4.3 广义根轨迹

例 已知负反馈系统的开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{K(1-0.5s)}{s(0.25s+1)}$$

试绘制系统的根轨迹。

解：将上面的开环传递函数化成标准形式，得

$$G(s)H(s) = \frac{-2K(s-2)}{s(s+4)} \stackrel{K'=2K}{=} \frac{-K'(s-2)}{s(s+4)}$$

将上式代入  $1+G(s)H(s)=0$  （负反馈），

$$\text{得根轨迹方程为 } G(s)H(s) = -\frac{K'(s-2)}{s(s+4)} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{K'(s-2)}{s(s+4)} = 1$$

上式说明本系统的根轨迹方程为正反馈的根轨迹方程，该系统的根轨迹必须按 $0^\circ$  根轨迹的绘制规则绘制。

## 4.3 广义根轨迹

$$\frac{K'(s-2)}{s(s+4)} \quad 0^\circ \text{ 根轨迹}$$

1.  $n=2$ , 系统有2个根轨迹分支, 根轨迹起始于  $p_1=0$ ,  $p_2=-4$  无起始角问题。
2.  $m=1$ , 根轨迹终止于  $z_1=2$  及无穷远点。无终止角问题。
3.  $n-m=1$ , 有1条渐近线, 渐近线与实轴交点的坐标为

$$\sigma_a = \frac{[0 + (-4)] - (2)}{2 - 1} = -6$$

渐近线与实轴正方向的夹角为  $\varphi = \frac{2\pi k}{n-m} = 0^\circ \quad (k=0)$

即渐近线与实轴正方向重合。



## 4.3 广义根轨迹

### 4. 实轴相关

$$\frac{K'(s-2)}{s(s+4)}$$

做出开环零、极点分布图，按（偶数）规则，根轨迹在实轴上的线段为（ $2 \sim \infty$ ）及（ $0 \sim -4$ ）。

分离点坐标：

$$\frac{1}{d-2} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d+4}$$
$$d_1 = 2 + 2\sqrt{3} = 5.46$$
$$d_2 = 2 - 2\sqrt{3} = -1.46$$

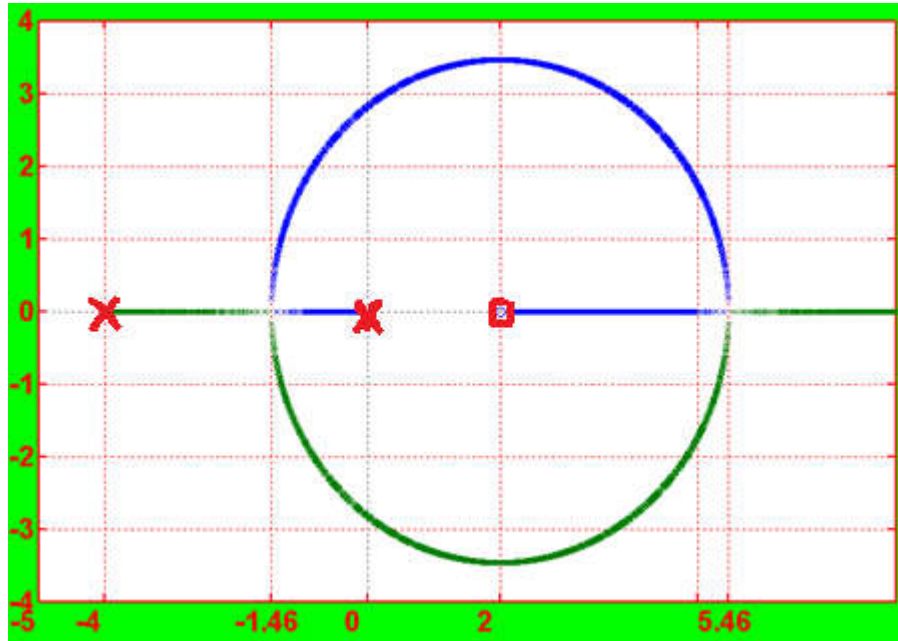
5. 虚轴相关 虚轴交点及临界参变量。令  $s = j\omega$  代入特征方程，得

$$s^2 + (4 - K')s + 2K' = 0 \quad \begin{cases} \operatorname{Re}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0 \\ \operatorname{Im}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2K' - \omega^2 = 0 \\ 4\omega - K'\omega = 0 \end{cases}$$

解得：  $\omega = 2.8$        $K' = 4$

绘制的给定系统的根轨迹

## 4.3 广义根轨迹



$$K' = 2K$$

$$0 < K < 2$$

当  $0 < K' < 4$  时，系统稳定工作。

当  $K' > 4$  时，系统不稳定工作。

$$K > 2$$

进一步扩展：

- 如果非最小相位系统  $s$  项最高次幂的系数为正，且系统是正反馈系统，绘制零度根轨迹。
- 如果非最小相位系统  $s$  项最高次幂的系数为负，且系统是正反馈系统，绘制 ??? 根轨迹。

负反馈

# 根轨迹七原则及其各种变化

★ 相角条件

180度根迹

零度根迹

	起终	数连	渐进	实轴	分离	角度	虚轴	备注
	起极 终零	Max (m,n)	$\Sigma p - \Sigma z$ /n-m ★	★	取反求导 公式 $\Sigma = \Sigma$ (2k+1) $\pi$ /l	★	s=jw 虚=0 劳斯判据	
常规根迹			(2k+1) $\pi$ /n-m	右边 奇数		$\theta=180+$ $\varphi=180+$		开环传函 $1+G(s)H(s)=0$
参数根迹			(2k+1) $\pi$ /n-m	右边 奇数		$\theta=180+$ $\varphi=180+$		等效开环传函 $1+G'(s)H'(s)=0$
非最小相位	s最高 次幂 系数 为正		(2k+1) $\pi$ /n-m	右边 奇数		$\theta=180+$ $\varphi=180+$		右边平面有零 点或/和极点
	s最高 次幂 系数 为负		2k $\pi$ / n-m	右边 偶数 或零		$\theta=0+$ $\varphi=0+$		右边平面有零 点或/和极点
正反馈根迹			2k $\pi$ / n-m	右边 偶数		$\theta=0+$ $\varphi=0+$		$1-G(s)H(s)=0$

非最小相位环节构成正反馈系统或系统特征方程与正反馈系统标准型一致的都按零度根迹处理。

# 本次课结束

---

## 重要知识点

- 1) 参数根轨迹的基本概念、绘制方法。★★★★
- 2) 绘制零度根轨迹的3个变化。★★★
- 3) 存在非最小相位系统时，正、负反馈系统的根轨迹的绘制方法。★★