第三章 线性系统的时域分析法

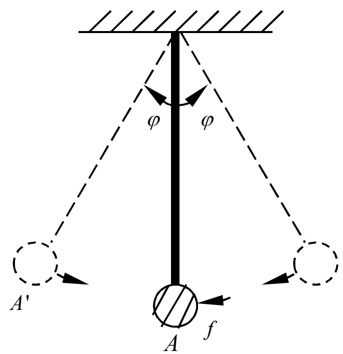
3.5 线性系统的稳定性分析

什么是稳定（性）？稳定的充要条件？如何判别是否稳定?

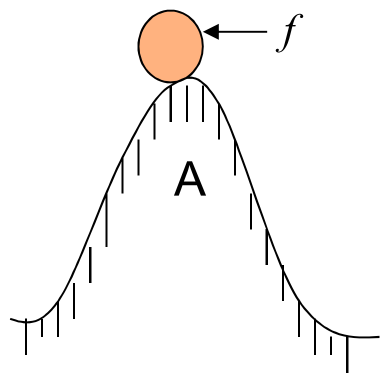
一、稳定的概念和定义

（1）平衡状态稳定　　——李雅普诺夫，1892年

在扰动的作用下，任何线性系统都会偏离平衡状态，产生初始偏差。在扰动消失后，系统由初始偏差状态恢复到原平衡状态的能力。



摆动示意图

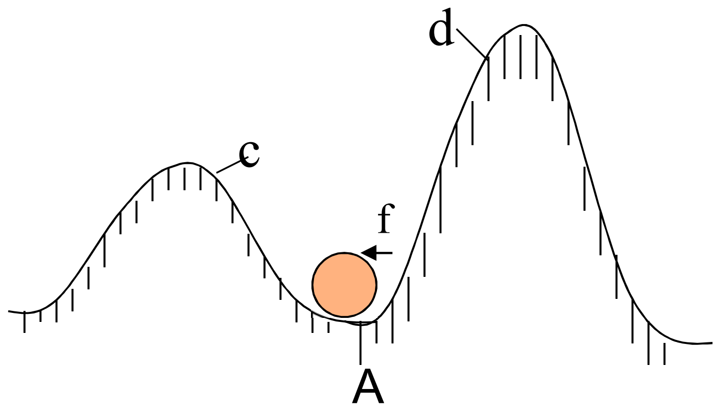


滚动示意图

3.5 线性系统的稳定性分析

- **大范围稳定系统** 在有界扰动作用下，不论扰动引起的初始偏差多大，当扰动消失后，系统都能回到平衡状态。

- **小范围稳定系统** 在有界扰动作用下，只有当扰动引起的初始偏差小于某一范围时，当扰动消失后，系统才能回到平衡状态，否则不能回到平衡状态。



线性系统：大、小范围内都稳定

非线性系统：有可能小范围稳定，大范围不稳定

(2) 运动稳定性

- 系统方程在不受任何外界输入作用下，系统方程的解在时间t趋于无穷时的渐近行为，衰减至零则稳定。

- 系统方程的解是系统齐次微分方程的解，这个解通常称为系统方程的一个“运动”，因此又称运动稳定性。

齐次方程

由微分方程的特征根决定

微分方程解= 特解 + 通解

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots e^{\lambda_n t}$$

对于线性系统而言，运动稳定性与平衡状态稳定性等价。

二、稳定的充要条件

- 线性系统的稳定性仅取决于系统的固有特性，与外作用无关。

- 在初始条件为零时，线性定常系统输入一个理想单位脉冲$\delta(t)$。系统的输出增量为脉冲响应$C(t)$，相当于系统受到一个扰动信号的作用，输出信号$C(t)$偏离原平衡工作点（原来为零）。

- 如果当t趋于∞时，系统的输出响应$C(t)$收敛到原来的零平衡状态，即

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = 0$$

输出增量为零，系统收敛到原平衡工作点，则线性系统是稳定的。

二、稳定的充要条件

设系统的闭环传递函数为 $\Phi(s)=\dfrac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_n}$

系统闭环特征方程： $a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_n=0$

如果特征方程的所有根互不相同，且有q个实数根和r对共轭复数根$-\zeta_k\omega_{nk}\pm j\omega_{nk}\sqrt{1-\zeta_k^2}$，则闭环传递函数可表示为：

$$\Phi(s)=\frac{K_r\prod_{j=1}^{m}(s-Z_j)}{\prod_{i=1}^{q}(s-P_i)\prod_{k=1}^{r}(s^2+2\zeta_k\omega_{nk}s+\omega_{nk}^2)}$$

在单位脉冲函数$\delta(t)$的作用下，系统输出增量的拉氏变换可表示为

$$C(s)=\Phi(s)R(s)=\frac{K_r\prod_{j=1}^{m}(s-Z_j)}{\prod_{i=1}^{q}(s-P_i)\prod_{k=1}^{r}(s^2+2\zeta_k\omega_{nk}s+\omega^2{}_{nk})}\bullet 1$$

将上式用部分分式法展开，并进行拉氏反变换得：

$$C(t)=\sum_{i=1}^{q}A_ie^{P_it}+\sum_{k=1}^{r}e^{-\zeta_k\omega_{nk}t}(B_k cos\omega_{dk}t+C_k sin\omega_{dk}t)$$

式中 $\omega_{dk}=\omega_{nk}\sqrt{1-\zeta^2}\quad(0<\zeta<1)$

$$C(t)=\sum_{i=1}^{q}A_ie^{P_it}+\sum_{k=1}^{r}e^{-\zeta_k\omega_{nk}t}(B_k cos\omega_{dk}t+C_k sin\omega_{dk}t)$$

- 当系统特征方程的根都具有负实部时，则各瞬态分量都是衰减的，且有 $\lim_{t\to\infty}C(t)=0$ ，此时系统是稳定的。

- 如果特征根中有一个或一个以上具有正实部，则该根对应的瞬态分量是发散的，此时有 $\lim_{t\to\infty}C(t)\to\infty$，系统是不稳定的。

3.5 线性系统的稳定性分析

- 如果特征根中具有一个或一个以上的零实部根，而其余的特征根均有负实部，则$C(t)$趋于常数或作等幅振荡，这时系统处于稳定和不稳定的临界状态，常称之为**临界稳定状态**。
- 对于大多数实际系统，当它处于临界状态时，也是不能正常工作的，所以临界稳定的系统在工程上属于不稳定系统。

——这一点在《现代控制理论》中属于李雅普诺夫稳定

线性定常系统稳定的充分必要条件：闭环系统特征方程的所有根都具有负实部，或者说闭环传递函数的所有极点均位于为S平面的左半部分（不包括虚轴）。

三、劳斯——赫尔维茨稳定判据

不需要求解特征方程，能否判别系统稳定性？

分析系统稳定性的其它方法：劳斯判据、奈氏判据、根轨迹图分析法、伯德图分析法等。

利用特征方程的各项系数进行代数运算，得出全部特征根具有负实部的条件，以此作为判别系统是否稳定的依据。

代数稳定判据

1、赫尔维茨判据　　德国，1895年

设系统的特征方程为

$$a_0 s^n + a_1 s^{n\text{-}1} + \ldots\ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

式中 $a_0 > 0$（当 $a_0 < 0$ 时，可将方程两边同乘以-1）。

若该方程的特征根为 $p_i\,(i=1,2,\cdots.n)$，该 n 个根可以是实数也可以是复数，则上式改写成为

$$s^n + \frac{a_1}{a_0} s^{n\text{-}1} + \ldots\ldots + \frac{a_{n-1}}{a_0} s + \frac{a_n}{a_0} = (s - p_1)(s - p_2)\ldots\ldots(s - p_n) = 0$$

$$s^n+\frac{a_1}{a_0}s^{n-1}+\ldots\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_0}s+\frac{a_n}{a_0}=(s-p_1)(s-p_2)\ldots\ldots(s-p_n)=0$$

韦达定理：

一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（a、b、c为实数且$a\neq 0$），两根x_1、x_2关系为：1）$x_1+x_2=-b/a$，2）$x_1x_2=c/a$

验证：

$$s^2+\frac{a_1}{a_0}s+\frac{a_2}{a_0}=(s-p_1)(s-p_2)=0$$

$$\frac{a_1}{a_0}=-(p_1+p_2) \qquad \frac{a_2}{a_0}=p_1p_2$$

3.5 线性系统的稳定性分析

$$s^n + \frac{a_1}{a_0} s^{n-1} + \ldots\ldots + \frac{a_{n-1}}{a_0} s + \frac{a_n}{a_0} = (s - p_1)(s - p_2)\ldots\ldots(s - p_n) = 0$$

拓展后，有：

$$\frac{a_1}{a_0} = -(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i$$

$$\frac{a_2}{a_0} = p_1 p_2 + p_1 p_3 + \cdots + p_2 p_3 + p_2 p_4 + \cdots + p_{n-1} p_n = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} p_i p_j$$

$$\frac{a_3}{a_0} = -\sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^{n} p_i p_j p_k$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{a_n}{a_0} = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} p_i$$

$$a_0 > 0$$

如果特征方程的根 $p_1, p_2, \cdots p_n$ 都具有负实部，则特征方程的所有系数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 必然都大于零。

系统稳定的必要条件是其特征方程的各项系数均为正，即

$a_i > 0$ （i=0,1,2,…,n）

- 根据**必要条件**，在判别系统的稳定性时，可检查系统特征方程的系数是否都大于零，若**有任何系数是负数或等于零**，则系统是**不稳定**的。
- 但是，当特征方程满足稳定的必要条件时，并不意味着系统一定是稳定的。

赫尔维茨判据：

线性系统稳定的充分必要条件是：系统特征方程各项系数大于零，且由系数构成的主行列式及其顺序主子式全部为正。

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n > 0$$

系统阶数较高，计算困难

2、劳斯判据　　　　英国，1876年

系统的特征方程写成如下标准形式

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (a_0 > 0)$$

➢ 将方程各项**系数**组成**劳斯表**

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	… … …
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	… … …
s^{n-2}					
s^{n-3}					
s^{n-4}					
$\vdots$					
s^2					
s^1					
s^0					

➢ 计算劳斯表的各系数

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	…… …… ……
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	…… …… ……
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	…… …… ……
s^{n-3}					
s^{n-4}					
$\vdots$					
s^2					
s^1					
s^0					

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

……

b_i

系数的计算一直进行到其余的b值**等于零**为止。

用同样的**前两行系数交叉相乘**的方法，可以计算c 行的系数。

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	…… …… ……
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	…… …… ……
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	…… …… ……
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	…… …… ……
s^{n-4}					
$\vdots$					
s^2					
s^1					
s^0					

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

…… …… …… ……

用同样的**前两行系数交叉相乘**的方法，可以计算 $d, \ldots \ldots e, f, g$ 各行的系数。

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	$\cdots\cdots\cdots$
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	$\cdots\cdots\cdots$
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdots\cdots\cdots$
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	$\cdots\cdots\cdots$
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4	$\cdots\cdots\cdots$
$\vdots$					
s^2	e_1	e_2			
s^1	f_1				
s^0	g_1				

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

$$\cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots$$

这个计算过程一直进行到n+1行（s^0）为止（等于a_n）。

劳斯判据： **劳斯判据与赫尔维茨判据在实质上是相同的**

1）劳斯表中**第一列系数为正（大于零）**，系统是**稳定**的。

2）如果**第一列出现小于零的系数**，系统是**不稳定**的。且第一列各系数符号的改变次数，代表特征方程的正实部根的数目。

$$
\begin{array}{llllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots\cdots\cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots\cdots\cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots\cdots\cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots\cdots\cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots\cdots\cdots \\
\vdots & & & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}
$$

3.5 线性系统的稳定性分析

例：系统特征方程： $s^4+2s^3+3s^2+4s\ +5=0$

用劳斯判据判别系统稳定性。

劳斯表：

$$
\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 3 & 5 \\
s^3 & 2 & 4 & \\
s^2 & \dfrac{2\times 3-1\times 4}{2}=1 & 5 & \\
s^1 & \dfrac{1\times 4-2\times 5}{1}=-6 & & \\
s^0 & 5 & &
\end{array}
$$

- 劳斯表第一列系数出现负数系统不稳定
- 劳斯表第一列系数变号两次，系统有两个正实部根。

例： 已知系统特征方程 $s^5+6s^4+14s^3+17s^2+10s+2=0$

用劳斯判据分析系统稳定性

列劳斯表

$$
\begin{array}{llll}
s^5 & 1 & 14 & 10 \\
s^4 & 6 & 17 & 2 \\
s^3 & \dfrac{6\times14-1\times17}{6}=\dfrac{67}{6} & \dfrac{6\times10-1\times2}{6}=\dfrac{58}{6} & \\
s^2 & \dfrac{\frac{67}{6}\times17-6\times\frac{58}{6}}{\frac{67}{6}}=\dfrac{791}{67} & 2 & \\
s^1 & \dfrac{\frac{791}{67}\times\frac{58}{6}-\frac{67}{6}\times2}{\frac{791}{67}}=\dfrac{6150}{791} & & \\
s^0 & 2 & &
\end{array}
$$

劳斯表第一列的系数符号均为正，故系统的是稳定的。

由于**判别**系统**是否稳定只与**劳斯表中**第一列系数的符号有关**，把劳斯表中某一行系数同乘以一个正数不会改变第一列系数的符号。

为简化运算，常把劳斯表的**某一行同乘以**一个**正数**后，再继续运算。

本例中，劳斯表可按如下方法计算：

s^5	1	14	10	
s^4	6	17	2	
s^3	67	58		（同乘以6）
s^2	791	134		（同乘以67）
s^1	36900			（同乘以791）
s^0	134			

由于第一列系数的符号均为正，故系统稳定，结论与前面一致。

例 已知系统的特征方程为

$$s^4 + 2s^3 + s^2 + s + 1 = 0$$

试用劳斯判据判断系统的稳定性。

解 列劳斯表如下

s^4	1	1	1
s^3	2	1	
s^2	(2*1 - 1*1)/2=1/2 1	1 2	
s^1	(1*1 - 2*2)/1= - 3		
s^0	2		

由于劳斯表第一列的系数出现负数，系统是**不稳定。**

系数变号两次，故特征方程**有两个根在S平面右半部分**。

四、 劳斯稳定判据的特殊情况

(1) 劳斯表某行的第一列系数等于零，该行其余各项不全为零的情况

——一个零

方法一：当劳斯表**某一行**的**第一列系数为零**，而**其余项不全为零**时，**可用一个很小的正数 ε 代替第一列的零项**，然后按照通常方法计算劳斯表中的其余项。

方法二：可以用(s+1)因子乘以原特征方程，然后按新的特征方程计算劳斯表。

例：系统特征方程：$s^4+s^3+2s^2+2s+5=0$

试用劳斯判据判断系统的稳定性

法一：劳斯表

$$
\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 2 & 5 \\
s^3 & 1 & 2 & \\
s^2 & 0 \approx \varepsilon & 5 & \\
s^1 & (2\varepsilon-5)/\varepsilon & & \\
s^0 & 5 & &
\end{array}
$$

当ε的取值**足够小时**，$(2\varepsilon\text{-}5)/\varepsilon \approx \text{-}5/\varepsilon$ 将取负值，故劳斯表**第一列系数变号两次**。

由劳斯判据可知，特征方程**有两个根具有正实部**，系统是**不稳定**的。

法二：在上例中用$(s+1)$乘以原特征方程得

$$(s^4+s^3+2s^2+2s+5)(s+1)=s^5+2s^4+3s^3+4s^2+7s+5=0$$

劳斯表为

s^5	1	3	7
s^4	2	4	5
s^3	2	9	（同乘以2）
s^2	-10	10	（同乘以2）
s^1	11		
s^0	10		

劳斯表第一列系数变号两次，其结论与前面是一致的。

(2) 劳斯表某行所有系数均为零的情况 ——一行零

如果劳斯表中**某一行各项系数均为零**，这说明在S平面内**存在以原点对称的特征根**。

例如 $P=\pm\sigma$，$P=\pm jw$，$P=\pm\sigma\pm jw$ 等等。

★系统不稳定

——特征根数量等于上一行的阶次

为了确定根的分布情况，可按下列步骤处理：

* 利用**该行的上一行的系数**构成**辅助方程。**

* 求**辅助方程对s的导数**，将**得到的方程系数代替原全部为零的行**，继续计算劳斯表。

- 辅助方程的次数通常为偶数，代表数值相同符号相反的根的数量。
- 特征方程中以**原点为对称**的根可由辅助方程求得。

例： 已知系统的特征方程为

$$s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16 = 0$$

分析系统的稳定性。

特征方程： $s^6+2s^5+8s^4+12s^3+20s^2+16s+16=0$

列劳斯表

s^6	1	8	20	16
s^5	2	12	16	
s^4	2	12	16	
s^3	0	0	0	

上表结果，s^3行的各项全为零。

为了求出 s^3~ s^0各行，由 s^4行的各项系数构成辅助方程。

$$\mathrm{A}(s)=2s^4+12s^2+16=0$$

将辅助方程对s求导得 $$\frac{d\mathrm{A}(s)}{ds}=8s^3+24s=0$$

$$\frac{dA(s)}{ds} = 8s^3 + 24s = 0$$

用上式各项系数作为 s^3行的各系数继续计算劳斯表得

s^6	1	8	20	16
s^5	2	12	16	
s^4	2	12	16	
s^3	8	24		
s^2	6	16		
s^1	8/3			
s^0	16			

稳定？

- 由于 s^3 行的各项均为零，表明**系统有共轭虚根**，所以系统是**不稳定**的。
- 共轭虚根可由辅助方程求得，即由

$$2s^4 + 12s^2 + 16 = 0$$

或 $$s^4 + 6s^2 + 8 = 0$$

解得 $$s_{1,2} = \pm j\sqrt{2}$$

$$s_{3,4} = \pm j2$$

应用劳斯判据分析系统的稳定性的步骤：

1、确定系统**是否满足稳定的必要条件**。当特征方程的系数**不满足** $a_i > 0(i=0,1,2,\ldots\ldots n)$时，系统是**不稳定**的。

2、当特征方程的系数**满足** $a_i > 0(i=0,1,2,\ldots\ldots n)$时，**计算劳斯表**。

当**劳斯表无特殊情况**，且**第一列系数都大于零**时，系统**稳定**；

当**劳斯表无特殊情况**，但**第一列出现小于零的系数**，系统**不稳定**。

3、若计算劳斯表时出现特殊情况（1）和（2），此时为确定极点的分布情况，可按情况（1）和（2）的方法处理。

在系统分析中，利用**劳斯判据**可以**根据系统特征方程的系数确定系统的稳定性**，同时还能给出系统的某些参数的取值范围。

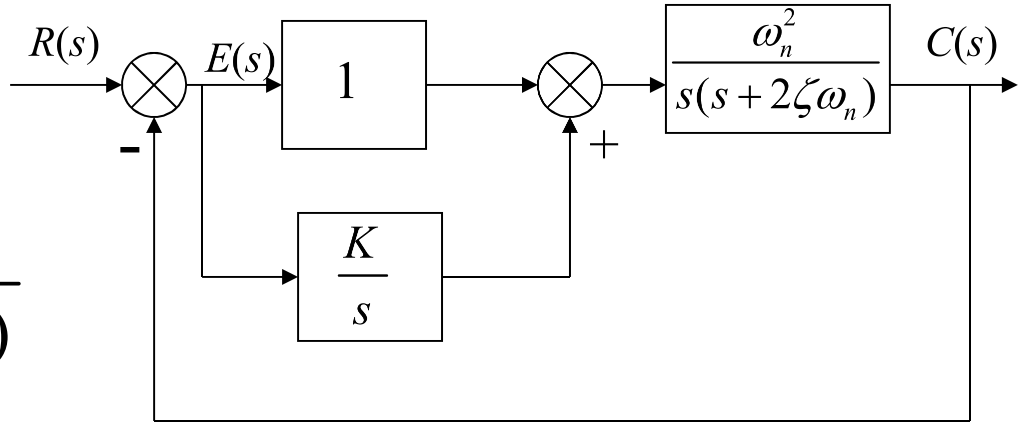
——正解问题　　　　　　——逆解问题

劳斯判据应用的局限性：

1）通常**只能提供系统绝对稳定性的结论**，而不能指出系统是否具有满意的动态过程。

2）当系统不稳定时，**不能提供改善系统稳定性的方法和途径。**

例 已知系统的结构图如下。当 $\zeta=0.2$，$\omega_n=86.6$时，试确定K为何值时系统稳定。



系统结构图

解 系统**开环传递函数**为

$$G(s)=\frac{\omega_n^2(s+K)}{s^2(s+2\zeta\omega_n)}$$

闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2(s+K)}{s^3+2\zeta\omega_n s^2+\omega_n^2 s+K\omega_n^2}$$

特征方程为 $s^3+2\zeta\omega_n s^2+\omega_n^2 s+K\omega_n^2=0$

将$\zeta=0.2$，$\omega_n=86.6$代入特征方程得

$$s^3+34.6s^2+7500s+7500K=0$$

$$s^3+34.6s^2+7500s+7500K=0$$

由特征方程列劳斯表

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 7500 \\ s^2 & 34.6 & 7500K \\ s^1 & \dfrac{34.6\times 7500-7500K}{34.6} & \\ s^0 & 7500K & \end{array}$$

要使系统稳定，必须满足

$$7500K>0 \qquad \frac{34.6\times 7500-7500K}{34.6}>0$$

解不等式得 $K>0$， $K<34.6$

要使不等式成立，参数K的取值范围是 $0<K<34.6$

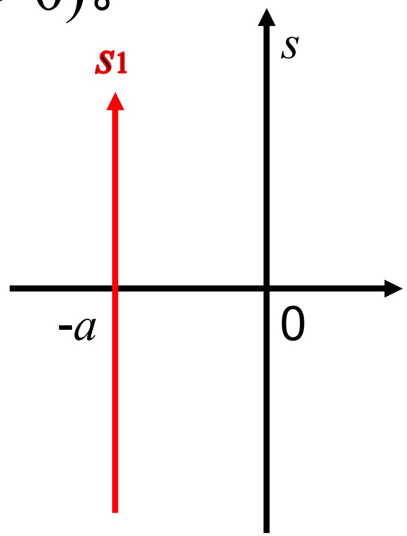
五、劳斯稳定判据的应用

1）稳定判据能回答特征方程式的根在s平面上的分布情况，但不能确定根的具体数据。

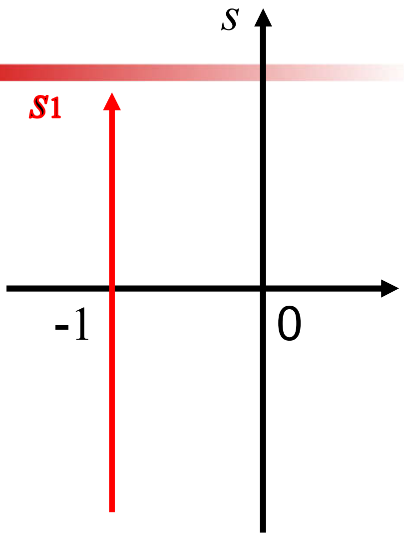
2）希望实际系统在s左半平面上的根距离虚轴有一定的距离a。

3）引入新的坐标系s_1，以及新变量s_1，且$s_1=s+a$ $(a>0)$。

4）将$s_1=s+a$ 代入原特征方程，得到以s_1为变量的新特征方程，对新方程用劳斯判据，判别系统的特征根是否在s_1的左侧，即 $s=-a$左侧。



估计一个稳定系统的各个根中最右侧的根距离虚轴有多远，从而了解系统稳定的“程度”。



例：用劳斯判据检验下列特征方程

$$2S^3 + 10S^2 + 13S + 4 = 0$$

是否有根在*s*的右半平面，并检验有几个根在垂线 *s*=−1 的右方。

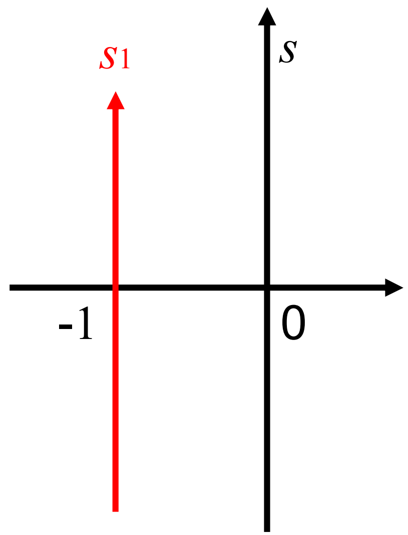
解：列劳斯表

$$\begin{array}{lll} S^3 & 2 & 13 \\ S^2 & 10 & 4 \\ S^1 & \dfrac{130-8}{10} = 12.2 & \\ S^0 & 4 & \end{array}$$

第一列全为正，所有的根均位于左半平面，系统稳定。

引入新的坐标系s_1，以及新变量s_1，且$s_1=s+a$ $(a>0)$。 $s=-1$ $a=1$

令 $s_1=s+1$ 代入特征方程：



$$2S^3+10S^2+13S+4=0$$

$$2(s_1-1)^3+10(s_1-1)^2+3(s_1-1)+4=0$$

$$2s_1^3+4s_1^2-s_1-1=0$$

劳斯表

s_1^3	2	-1
s_1^2	4	-1
s_1^1	-0.5	
s_1^0	-1	

第一列的系数符号变化了一次，表示原方程有一个根在 $S=-1$ 垂线的右侧

本次课结束

1)掌握系统稳定的本质，以及充要条件 ☆☆

2)重点掌握劳斯判据，利用劳斯判据判定系统稳定性正问题和逆问题 ☆☆☆☆

3)掌握利用劳斯判据判断部分区域根的数量 ☆☆☆