

系统的稳态分量**反映系统跟踪控制信号的准确度或抑制扰动信号的能力**，用**稳态误差**来描述。

在系统的分析、设计中，稳态误差是一项重要的性能指标，它与系统本身的结构、参数及外作用的形成有关，也与元件的不灵敏、零点漂移、老化及各种传动机械的间隙、摩擦等因素有关。本章只讨论由于系统结构、参数及外作用等因素所引起的稳态误差。

➤ 给定稳态误差（由给定输入引起的稳态误差）

对于**随动系统**，给定输入变化，要求系统输出量以一定的精度跟随输入量的变化，因而**用给定稳态误差来衡量**系统的稳态性能。

➤ 扰动稳态误差（由扰动输入引起的稳态误差）

对**恒值系统**，给定输入通常是不变的，需要分析输出量在扰动作用下所受到的影响，因而**用扰动稳态误差来衡量**系统的稳态性能。

本章介绍稳态误差的概念和计算方法，研究稳态误差的规律性以及减小或消除稳态误差的途径。

一、稳态误差的定义

系统的**误差 $e(t)$** 一般定义为**输出量的希望值与实际值之差**。

对图3-22所示的典型系统，其误差定义有两种形式：

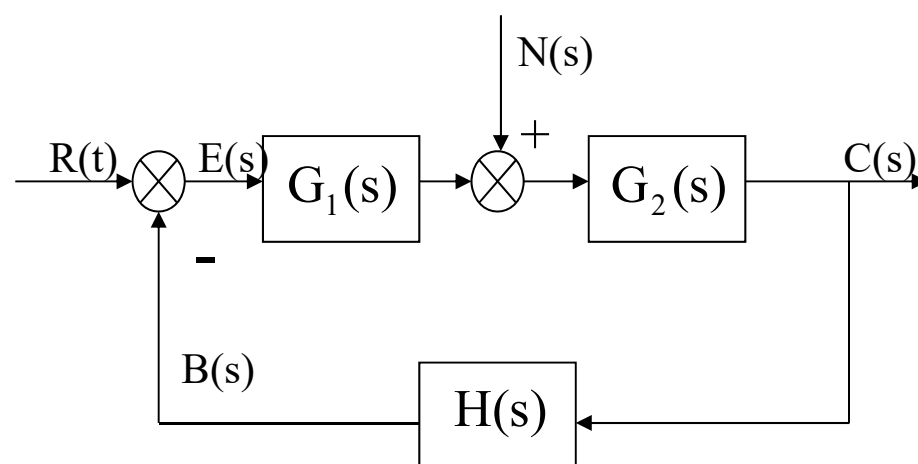


图3-22 反馈系统结构图

$$(1) \quad e(t) = C_r(t) - C(t)$$

式中， $C_r(t)$ 为系统输出量的希望值， $C(t)$ 为输出量的实际值。

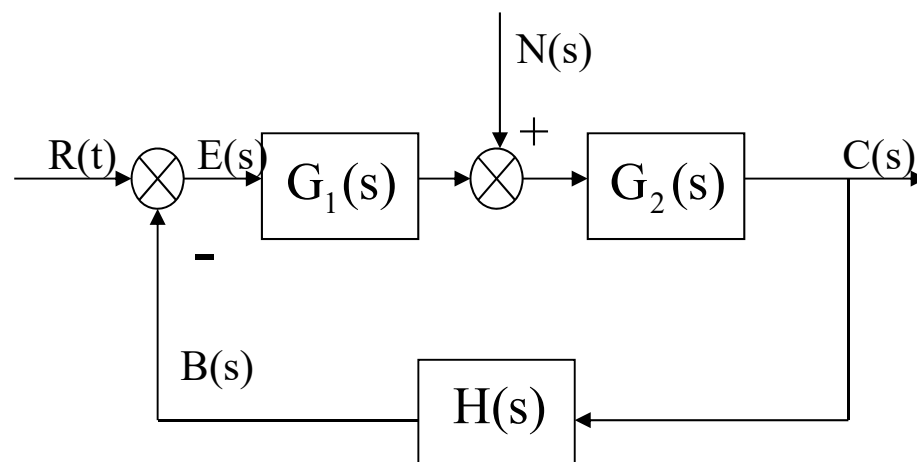


图3-22 反馈系统结构图

$$(2) \quad e(t) = r(t) - b(t)$$

其中，系统输出量的希望值是给定输入 $r(t)$ ，而输出量的实际值为系统主反馈信号 $b(t)$ 。通常 $H(s)$ 是测量装置的传递函数，故此时误差就是给定输入与测量装置的输出量之差。

第一种形式的误差是**从系统输出端来定义**的，它在性能指标提法中经常使用，**但在实际系统中无法测量**，因而，一般只有数学意义。

而第二种形式的误差是**从系统的输入端来定义**的，它在系统中是**可以测量**的，因而**具有实用性**。

对于单位反馈系统，要求输出量 $C(t)$ 的变化规律与给定输入 $r(t)$ 的变化规律完全一致，所以给定输入 $r(t)$ 也就是输出量的希望值 $C_r(t)$ ，即 $C_r(t) = r(t)$ 。此时，上述两种定义统一为

$$e(t) = r(t) - c(t) \quad (3-31)$$

对于单位反馈系统，误差的两种定义形式是一致的。

对于非单位反馈系统，若设第（1）种形式的误差为 $E'(s)$ ，第（2）种形式的误差为 $E(s)$ ，则不难证明 $E(s)$ 与 $E'(s)$ 之间存在如下关系

$$E'(s) = \frac{E(s)}{H(s)}$$

可见，两种定义对非单位反馈系统是存在差异的，但**两种定义下的误差之间具有确定的关系**，即误差 $E'(s)$ 可以直接或间接地由 $E(s)$ 来确定。从本质上看，它们**都能反映控制系统的控制精度**。在下面的讨论中，我们将采用第二种误差定义。

$E(t)$ 通常也称为系统的**误差响应**，它**反映了系统在输入信号和扰动信号作用下整个工作过程中的精度**。误差响应中也**包含有瞬态分量和稳态分量**两个部分，如果所研究的系统是稳定的，那么当时间 t 趋于无穷大时，瞬态分量趋近于零，剩下的只是稳态分量。

稳态误差的定义：稳态系统误差信号的稳态分量称为系统的稳态误差，以 e_{ss} 表示。

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (3-32)$$

二、输入作用下的稳态误差

在图3-22所示系统中，如果不计扰动输入的影响，可以求得系统的给定稳态误差。此时，系统的结构图可简化为图3-23。

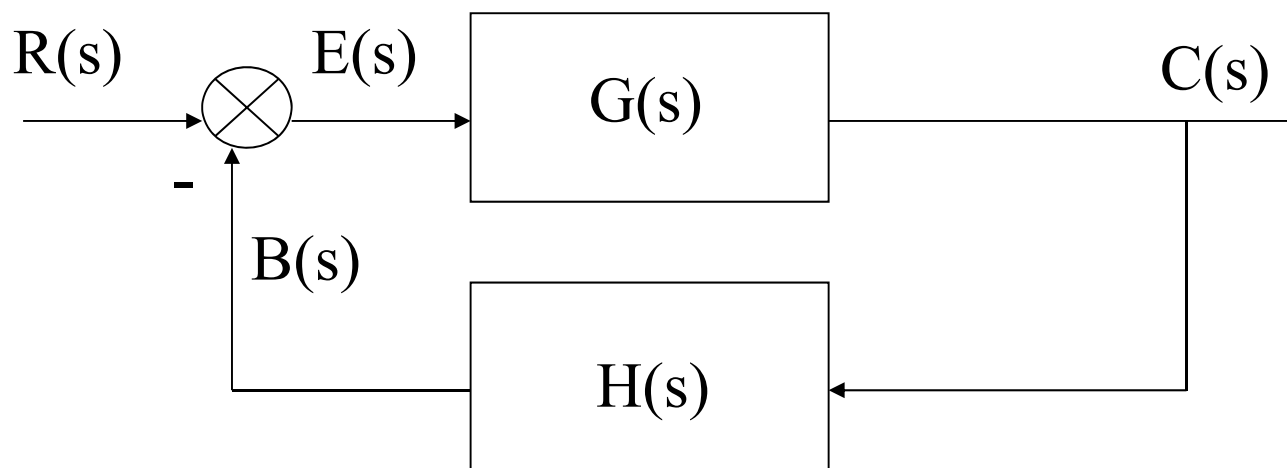


图3-23 给定输入作用下系统结构图

由图3-23可知

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \cdot R(s)$$

由误差的定义可知

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - B(s) = R(s) - H(s)C(s) \\ &= \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \cdot R(s) = \Phi_{er}(s)R(s) \end{aligned}$$

式中

$$\Phi_{er}(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

称为给定输入作用下系统的**误差传递函数**。

应用拉氏变换的终值定理可以方便地求出系统的稳态误差。

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3-33)$$

式 **(3-33)** 是确定给定稳态误差的一个基本公式。它表明，在给定输入作用下，系统的稳态误差与系统的结构、参数和输入信号的形式有关，对于一个给定的系统，当给定输入的形式确定后，系统的**稳态误差将取决于以开环传递函数描述的系统结构。**

为了分析稳态误差与系统结构的关系，可以根据开环传递函数 $G(s)H(s)$ 中串联的积分环节来规定控制系统的类型。

设系统的**开环传递函数**为

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n-v} (T_i s + 1)} \quad (3-34)$$

式中

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} s^v G(s)H(s)$$

称为系统的开环放大环节或开环增益。

式 (3-34) 分母中的 s^ν 表示开环传递函数在 origin 处有重极点，或者说有 ν 个积分环节串联。当 $\nu = 0, 1, 2, \dots$ 时，分别称系统为0型、1型、2型……系统。**分类是以开环传递函数中串联的积分环节数目为依据**的，而 $C(s)H(s)$ 中其它零、极点对分类没有影响。

下面分析系统在不同典型输入信号作用下的稳态误差。

1、 单位阶跃输入时的稳态误差

对于单位阶跃输入, $R(s)=1/s$,由式 (3-33) 求得系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)}$$

令

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$$

称 K_p 为稳态位置误差系数。

稳态误差可表示为

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (3-35)$$

因此，在单位阶跃输入下，给定稳态误差决定于系统的位置稳态误差。

对于0型系统, $\nu = 0$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} = K$$

对于1型系统（或高于1型的系统）, $\nu \geq 1$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (T_i s + 1)} = \infty$$
$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

可见，由于**0型系统**中没有积分环节，它对阶跃输入的稳态误差为一定值，**误差的大小与系统的开环放大系数K成反比**，K越大， e_{ss} 越小，**只要K不是无穷大，系统总有误差存在。**

对实际系统来说，通常是允许存在稳态误差的，但不允许超过规定的指标。为了降低稳态误差，可在稳定条件允许的前提下，增大系统的开环放大系数，**若要求系统对阶跃输入的稳态误差为零，则必须选用1型或高于1型的系统。**

2、单位斜坡输入时的稳态误差

对于单位斜坡输入 $R(s) = \frac{1}{s^2}$, 此时系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)}$$

令

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$$

称 K_v 为稳态速度误差系数。

于是稳态误差可表示为

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \quad (3-36)$$

因此，在单位斜坡输入下，**给定稳态误差决定于速度误差系数。**

对于0型系统， $\nu = 0$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} = 0$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty$$

对于1型系统, $\nu = 1$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s \prod_{i=1}^{n-1} (T_i s + 1)} = K$$
$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}$$

对于2型系统 (或高于2型的系统) ,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^\nu \prod_{i=\nu}^{n-\nu} (T_i s + 1)} = \infty$$
$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

上面的计算表明，在单位斜坡输入作用下：

- 0型系统的稳态误差为 ∞ ；
- 1型系统的稳态误差为一定值，且误差与开环放大系数成反比。
为了使稳态误差不超过规定值，可以增大系统的K值；
- 2型或高于2型系统的稳态误差总为零。

因此，对于单位斜坡输入，要使系统的稳态误差为一定值或为零，必需 $v \geq 1$ ，也即系统必须有足够积分环节。

3、单位抛物线输入时的稳态误差

对于单位抛物线输入 $R(s) = \frac{1}{s^3}$, 此时系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)}$$

令

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$$

称 K_a 为稳态加速度误差系数。

于是稳态误差可表示为

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

对于0型系统, $\nu = 0$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} = 0$$

于是稳态误差可表示为

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

对于1型系统, $\nu = 1$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s \prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} = 0$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

对于2型系统, $\nu = 2$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^2 \prod_{i=1}^{n-2} (T_i s + 1)} = K$$
$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{K}$$

对于3型系统 (或高于3型的系统) , $\nu \geq 3$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{\prod_{i=1}^{n-\nu} (T_i s + 1)} = \infty$$
$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = 0$$

上面的计算表明，在单位抛物线输入作用下：

- **0型和1型系统的稳态误差为 ∞ ；**
- **2型系统**的稳态误差为一定值，且**误差与开环放大系数成反比。**
- **3型或高于3型系统的稳态误差总为零。**但是，此时要使系统稳定则比较困难。

在各种典型输入信号作用下，不同类型系统的给定稳态误差如表3-1所示。

系统类别	静态误差系数			阶跃输入 $r(t)=R\cdot I(t)$	斜坡输入 $r(t)=R\ t$	加速度输入 $r(t)=\frac{Rt^2}{2}$
γ	K_p	K_γ	K_a	$e_{ss} = \frac{R}{1 + K_p}$	$e_{ss} = \frac{R}{K_\gamma}$	$e_{ss} = \frac{R}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{R}{1 + K}$	∞	∞
I	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$	∞
II	∞	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$
	∞	∞	∞	0	0	0

表3-1 输入信号作用下的稳态误差

若给定的**输入信号不是单位信号时**，则**将系统对单位信号的稳态误差成比例的增大**，就可以得到相应的稳态误差。若给定**输入信号是上述典型信号的线性组合**，则系统相应的**稳态误差就由叠加原理求出**。

例如，若输入信号为

$$r(t) = A + Bt + \frac{1}{2}Ct^2$$

则系统的总稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p} + \frac{B}{K_v} + \frac{C}{K_a}$$

综上所述，**稳态误差系数** K_p 、 K_v 和 K_a **描述了系统对减小和消除稳态误差的能力**，因此，它们是系统稳态特性的一种表示方法。

提高开环放大系数 K 或增加开环传递函数中的积分环节数，都可以达到减小或消除系统稳态误差的目的。但是，这两种方法都受到系统稳定性的限制。

因此，**对于系统的准确性和稳定性必须统筹兼顾、全面衡量。**

此外，由以上讨论可知，

当 $\nu = 1$ 时，系统相对 $R(s) = \frac{A}{s}$ 的稳态误差为零；

当 $\nu = 2$ 时，系统相对 $R(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2}$ 的稳态误差为零；

当 $\nu = 3$ 时，系统相对 $R(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3}$ 的稳态误差为零；

因此，当开环系统含有 ν 个串联积分环节时，称系统对给定输入 $r(t)$ 是 ν 阶无差系统，而 ν 称为**系统的无差度**。

例 3-9 设图3-24所示系统的输入信号 $r(t)=10+5t$ ，试分析系统的稳定性并求出其稳态误差。

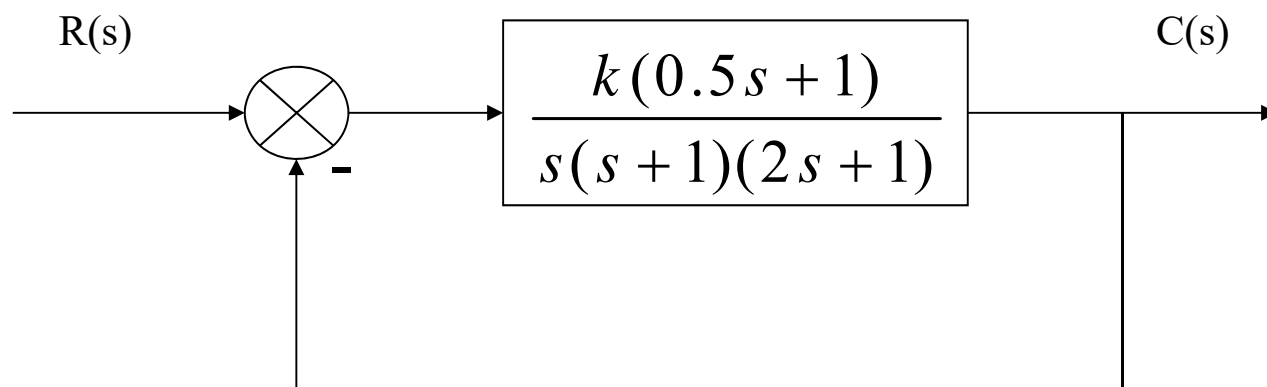


图3-24 例3-9系统结构图

解 由图3-24求得系统的特征方程为

$$2s^3 + 3s^2 + (1 + 0.5K)s + K = 0$$

由特征方程列劳斯表

s^3	2	$1 + 0.5K$
s^2	3	K
s^1	$\frac{3(1 + 0.5K) - 2K}{3}$	
s^0	K	

要使系统稳定，必须

$$K > 0, \quad 1 + 0.5K > 0, \quad 3(1 + 0.5K) - 2K > 0$$

解得 $K > 0$, $K > -2$, $K < 6$

所以, 当 $0 < K < 6$ 时, 系统是稳定的。

由图3-24可知, 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(0.5s + 1)}{s(s + 1)(2s + 1)}$$

系统的稳态误差系数分别为

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(0.5s + 1)}{s(s + 1)(2s + 1)} = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K(0.5s + 1)}{s(s + 1)(2s + 1)} = K$$

所以，系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{10}{1 + K_p} + \frac{5}{K_v} = \frac{5}{K}$$

上述结果表明，**系统的稳态误差与K成反比，K值越大，稳态误差越小**，但K值的增大受到稳定性的限制，当 $K > 6$ 时，系统将不稳定。

下面根据线性系统的叠加原理，以图3-25所示系统来讨论由扰动输入所产生的稳态误差。按照前面给出的误差信号的定义可得扰动输入引起的误差为

$$E(s) = R(s) - B(s) = -H(s)C(s)$$

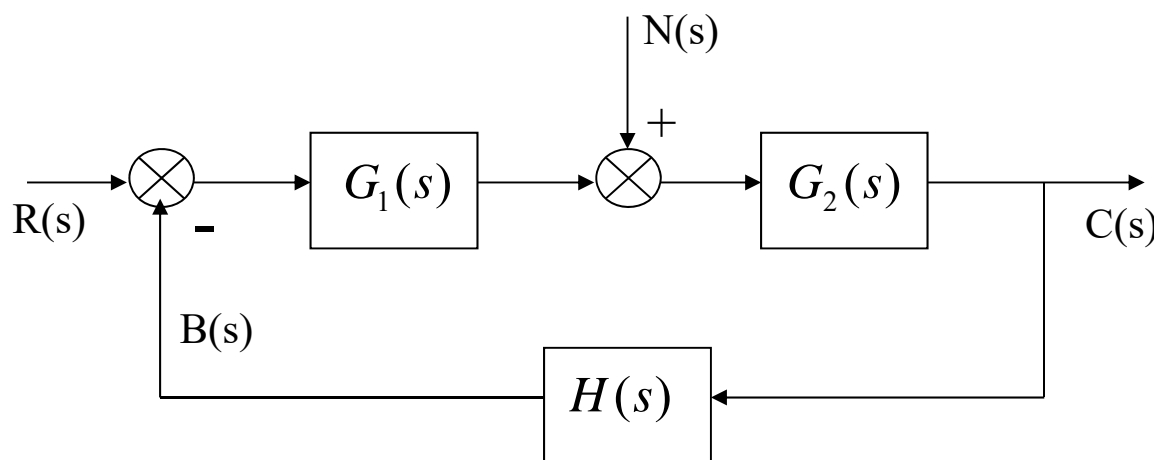


图3-25 扰动输入作用下系统结构图

而此时系统的输出为

$$C(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot N(s)$$

所以

$$E(s) = -\frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot N(s) = \Phi_{en}(s) \cdot N(s)$$

式中

$$\Phi_{en}(s) = -\frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

称为扰动输入作用下系统的误差传递函数。

此时，系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{sG_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot N(s)$$

例 3-10 设控制系统如图3-26所示, 其中 $G_1(s) = \frac{K_1}{1 + T_1 s}$, $G_2(s) = \frac{K_2}{s(1 + T_2 s)}$, 给定输入 $r(t) = R_r(s) \cdot 1(t)$, 扰动输入 $n(t) = R_n(t) \cdot 1(t)$ (R_r 和 R_n 均为常数), 试求系统的稳态误差。

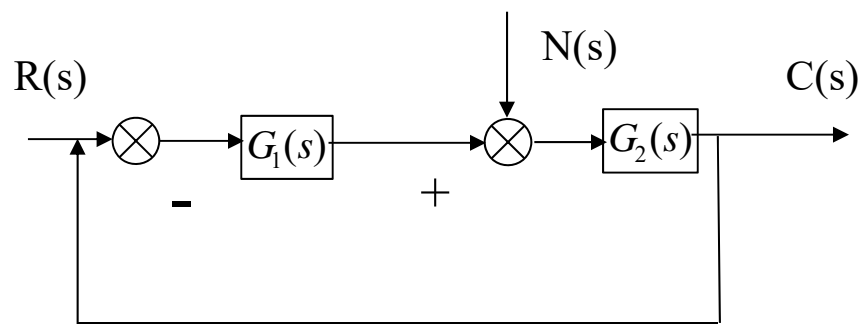


图3-26 例3-10系统结构图

解： 当系统同时受到给定输入和扰动输入的作用时，其稳定误差为给定稳态误差和扰动稳态误差的叠加。

令 $n(t)=0$ 时，求得给定输入作用下的误差传递函数为

$$\Phi_{er}(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

所以给定误差为

$$\begin{aligned} e_{ssr} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot R(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(1 + T_1s)(1 + T_2s)}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s) + K_1K_2} \cdot \frac{R_r}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

令 $r(t)=0$ 时，求得扰动输入作用下的误差传递函数为

$$\Phi_{en}(s) = -\frac{G_2(s)}{1 + G(s)G_2(s)}$$

所以扰动稳态误差为

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{sG_2(s) \cdot N(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{s \cdot K_2(1 + T_1s)}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s) + K_1K_2} \cdot \frac{R_n}{s} = -\frac{R_n}{K_1}$$

由上式计算可以看出， $r(t)$ 和 $n(t)$ 同是阶跃信号，由于在系统中的作用点不同，故它们产生的稳态误差也不相同。此外，由扰动稳态误差的表达式可见，**提高系统前向通道中扰动信号作用点之前的环节的放大系数（即 K_1 ），可以减小系统的扰动稳态误差。**

该系统总的稳态误差为

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn} = -\frac{R_n}{K_1}$$

为了分析系统中串联的积分环节对稳态误差的影响，我们假设图3-26中

$$G_1(s) = \frac{K_1}{s(1 + T_1s)} \quad G_2(s) = \frac{K_2}{1 + T_2s}$$

给定输入和扰动输入保持不变。这时，系统的稳态误差可按上述相同的方法求出，即

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = 0$$

$$\begin{aligned} e_{ssn} &= \lim_{s \rightarrow 0} - \frac{s G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s)} \cdot N(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} - \frac{s^2 K_1 (1 + T_2 s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) + K_1 K_2} \cdot \frac{R_n}{s} = 0 \end{aligned}$$

系统的总误差为

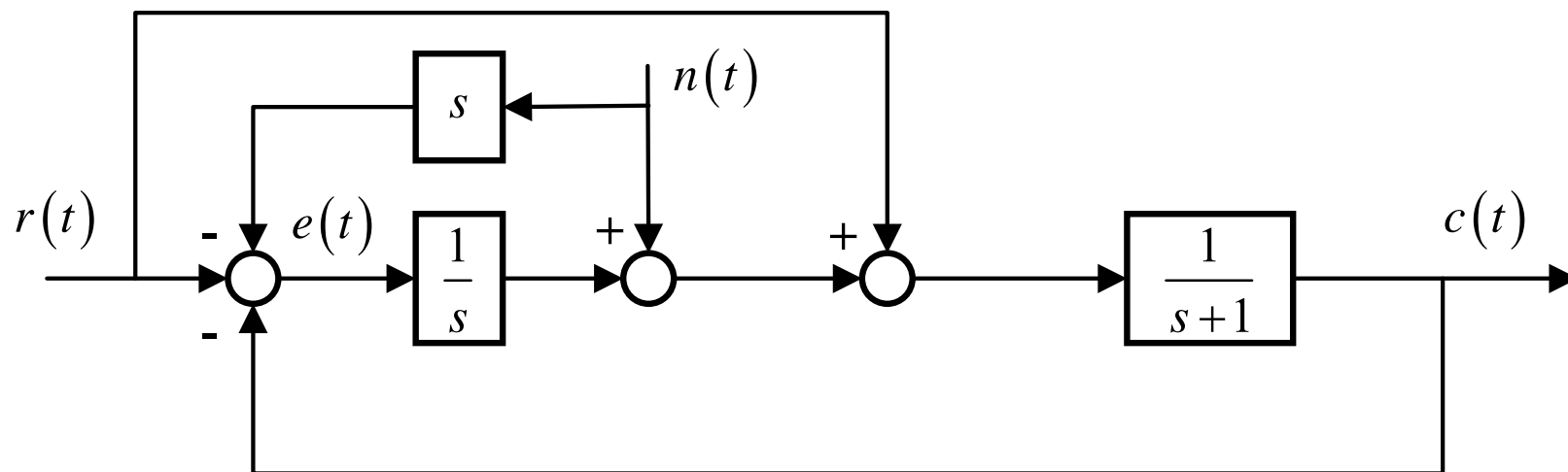
$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn} = 0$$

比较以上两次计算的结果可以看出，**若要消除系统的给定稳态误差，则系统前向通道中串联的积分环节都起作用。若要消除系统的扰动稳态误差，则在系统前向通道中只有扰动输入作用点之前的积分环节才起作用。**因此，若要消除由给定输入和扰动输入同时作用于系统所产生的稳态误差，则串联的积分环节应集中在前向通道中扰动输入作用点之前。

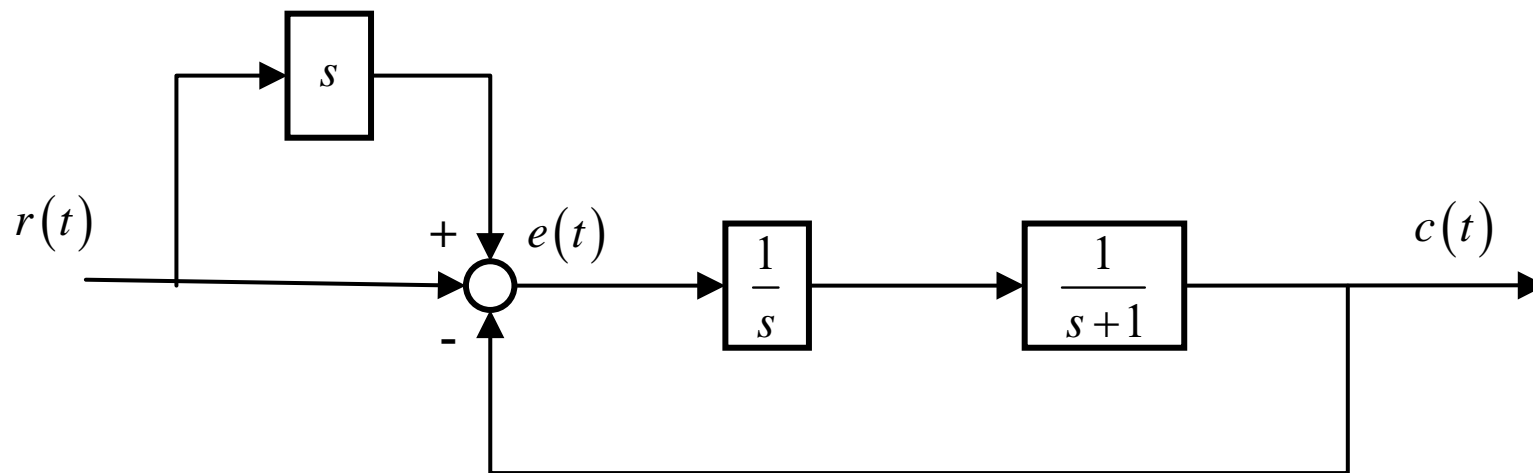
对于非单位反馈系统，当 $H(s)$ 为常数时，以上分析的有关结论同样适用。前面定义了相对于给定输入的无差度，同样也可以定义**相对于扰动输入的无差度**。当系统的 $G_1(s)$ 中含有 γ_1 个串联的积分环节时称系统相对于扰动输入是 γ_1 阶无差系统，而 γ_1 称为系统相对于扰动输入的**无差度**。

对本例中的前一种情况，系统对扰动输入的无差度为0，而后一种情况，系统对扰动的无差度是1。显然，当谈及一个系统的无差度时应指明系统对哪一种输入作用而言，否则，可能会得出错误的结论。

例1：设复合控制系统如图， $r(t) = 1+t$ ， $n(t)=0.1\sin 100t$ 。
试求系统在 $r(t)$ 和 $n(t)$ 同时作用下的稳态误差。



解：令 $n(t) = 0$ ，结构图变换后如下图：



闭环传递函数为：

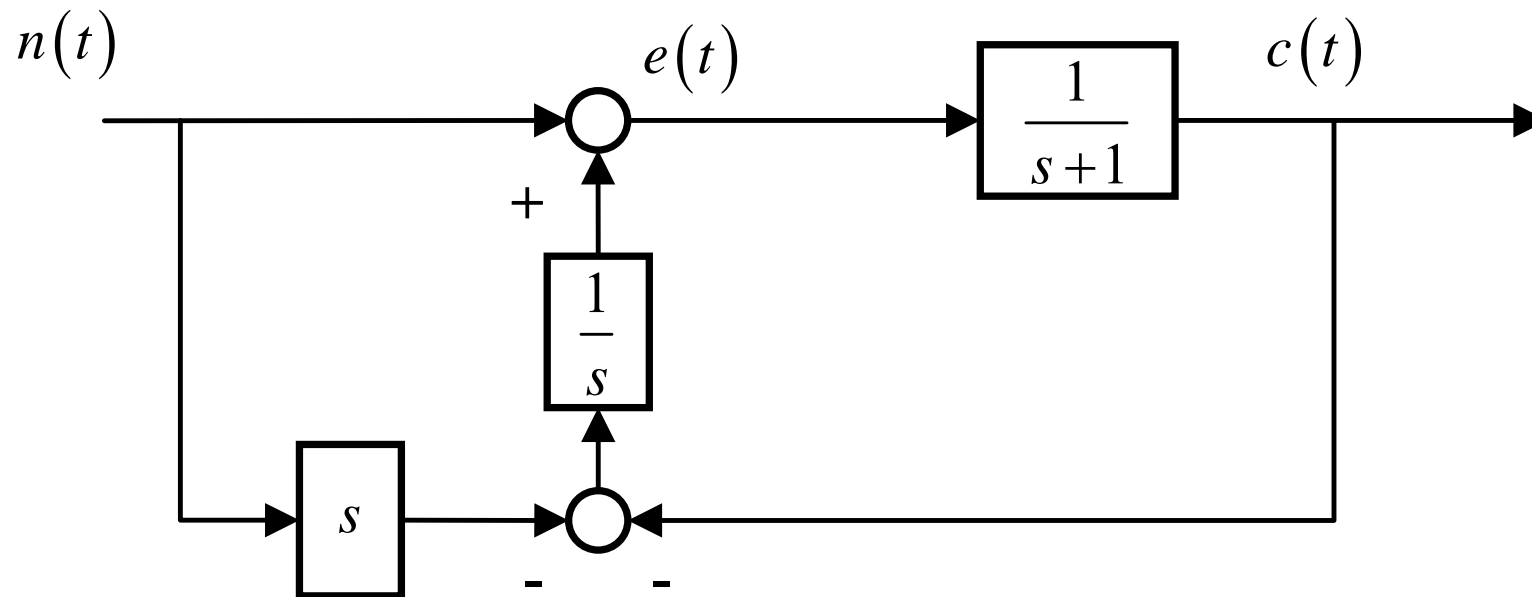
$$\Phi(s) = \frac{s+1}{s^2 + s + 1}$$

开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{\Phi(s)}{1 - \Phi(s)} = \frac{s+1}{s^2}$$

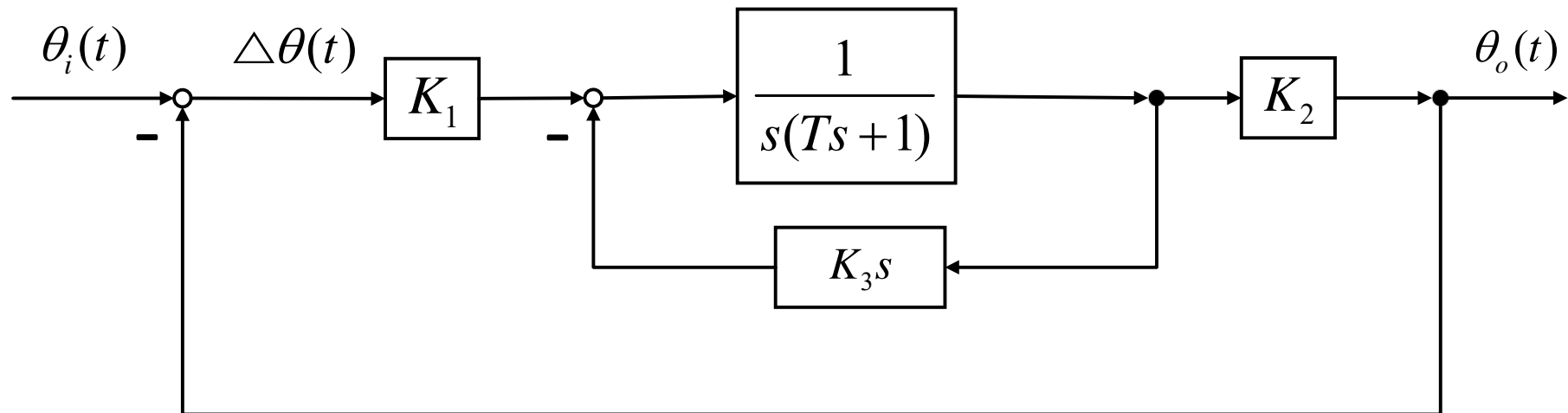
系统为II型系统，对于 $r(t) = 1+t$ ，系统的稳态误差为0

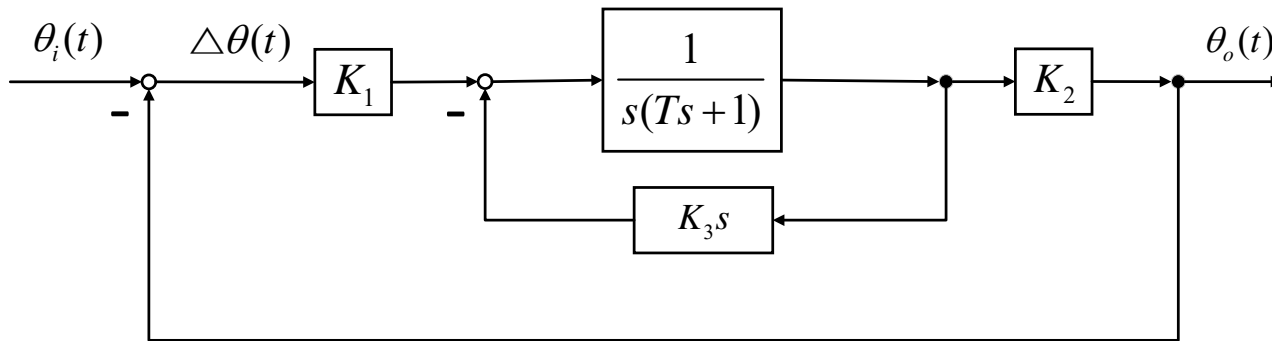
解：令 $r(t) = 0$ ，结构图变换后如下图：



从结构图可见，扰动输入对输出没有影响，所以稳态误差为0

例2：位置随动系统如图， $K_1 = 500$ ， $K_2 = 0.1$ ， $K_3 = 1$ ， $T = 0.003$ 。求（1）闭环传递函数（2）当输入以 $\omega_r = 10$ 转动时，输出转角稳态误差 $\Delta\theta(\infty)$





开环传递函数 $G(s) = \frac{K_1 K_2}{Ts^2 + s + K_3 s}$

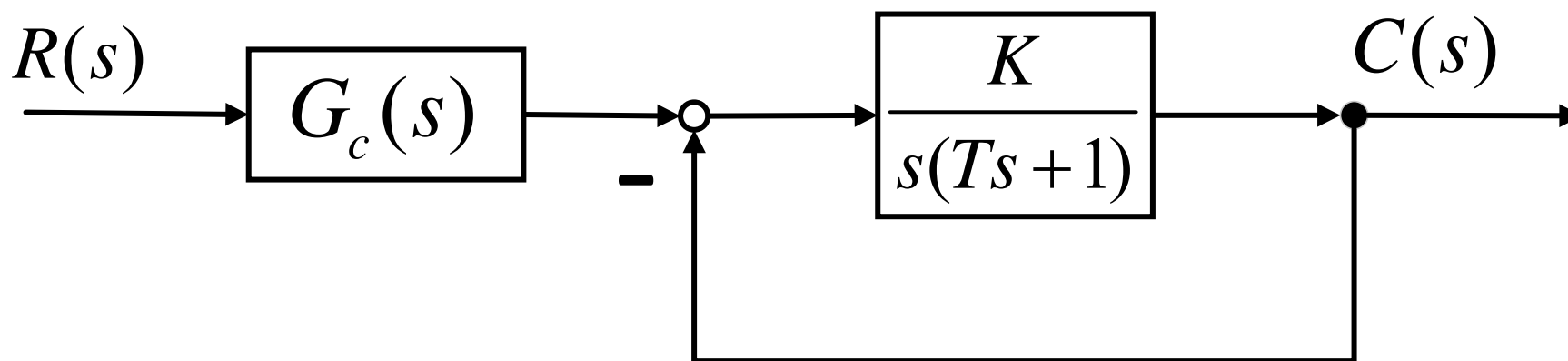
闭环传递函数 $\Phi(s) = \frac{K_1 K_2}{Ts^2 + (1 + K_3)s + K_1 K_2} = \frac{50}{0.003s^2 + 2s + 50}$

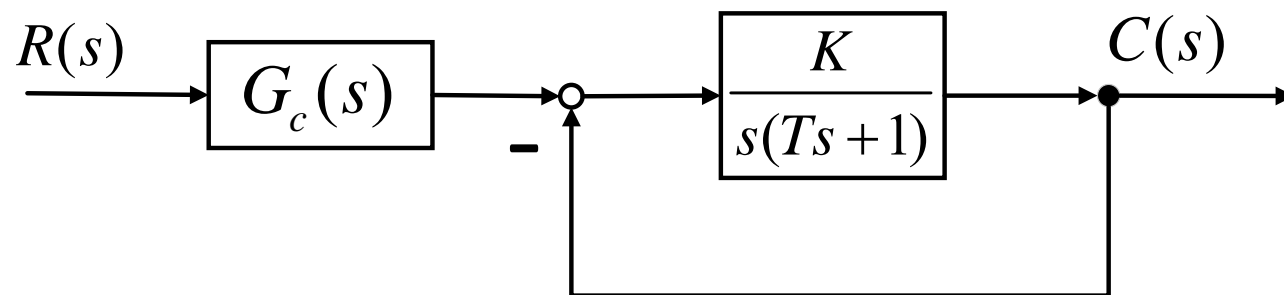
输入: $\Theta_i = \frac{10}{s^2}$

误差: $\Delta\Theta(s) = \Theta_o(s) - \Theta_i(s) = \frac{0.003s^2 + 2s}{0.003s^2 + 2s + 50} \Theta_i(s)$

$$\Delta\theta(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Delta\Theta(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{0.003s^2 + 2s}{0.003s^2 + 2s + 50} \frac{10}{s^2} = 0.4$$

例3：系统结构图如图，输入 $r(t) = 1 + at$ ， $G_c(s)$ 为比例微分控制器，且比例为1，误差定义为 $E(s) = R(s) - C(s)$ 。试证明通过适当调节比例微分时间常数 τ ，可使系统对输入 $r(t)$ 的稳态误差为零。





比例微分 $G_c(s) = 1 + \tau s$ 闭环传递函数 $\Phi(s) = \frac{K(1 + \tau s)}{s(Ts + 1) + K}$

特征方程 $Ts^2 + s + K = 0$

误差函数 $E(s)$

$$= R(s) - C(s)$$

$$= \left[1 - \frac{K(1 + \tau s)}{s(Ts + 1) + K} \right] R(s)$$

$$= \frac{s(Ts + 1 - K\tau)}{Ts^2 + s + K} R(s)$$

$$R(s) = \frac{1}{s} + \frac{a}{s^2} = \frac{s + a}{s^2}$$

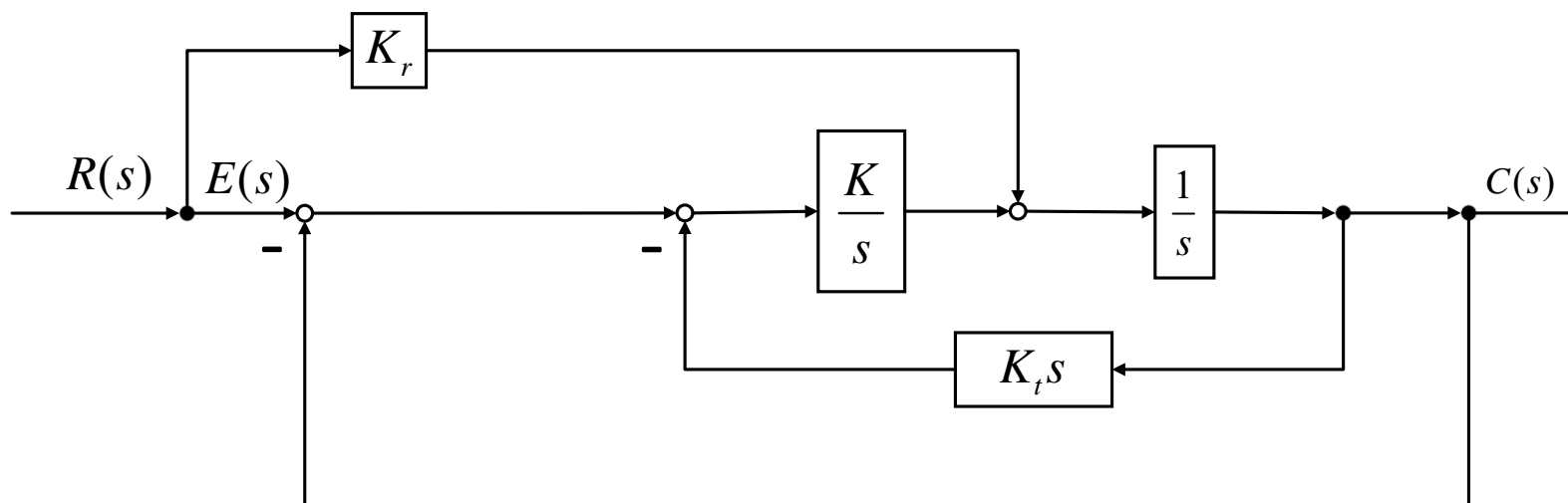
$$e_{ss}(\infty)$$

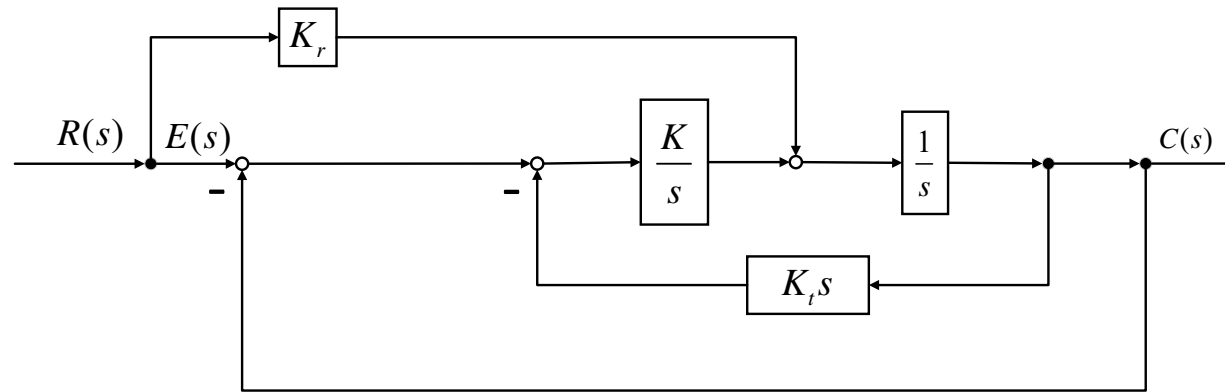
$$= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(Ts + 1 - K\tau)(s + a)}{Ts^2 + s + K}$$

$$= \frac{a(1 - K\tau)}{K}$$

例4：系统结构图如图，已知 $K_r = 0$ ， $r(t) = 1(t)$ ，系统的超调量 $s\% = 16.3\%$ ；而当 $K_r = 0$ ， $r(t) = t$ 时，系统的稳态误差 $e(\infty) = 0.25$ 。要求：（1）确定系统的结构参数 K 及 K_t （2）设计 K_r 使系统在 $r(t) = t$ 时无稳态误差





(1) $K_r = 0$, $r(t) = 1(t)$ 时的 K 及 K_t

$$G(s) = \frac{K}{s(s + KK_t)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}$$

$$K_v = \frac{K}{KK_t} = \frac{1}{K_t}$$

$$\omega_n = \sqrt{K}$$

$$2\xi\omega_n = KK_t$$

$$\sigma = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} = 0.163$$

$$\xi = \sqrt{\frac{(\ln \sigma)^2}{\pi^2 + (\ln \sigma)^2}} = 0.5$$

$$e_{ss}(\infty) = \frac{1}{K_v} = K_t = 0.25$$

$$K = \frac{2\xi\sqrt{K}}{K_t} = 4\sqrt{K}$$

$$K = 16$$

(2) $p_1 = \frac{K_r}{s}$, $p_2 = \frac{16}{s^2}$

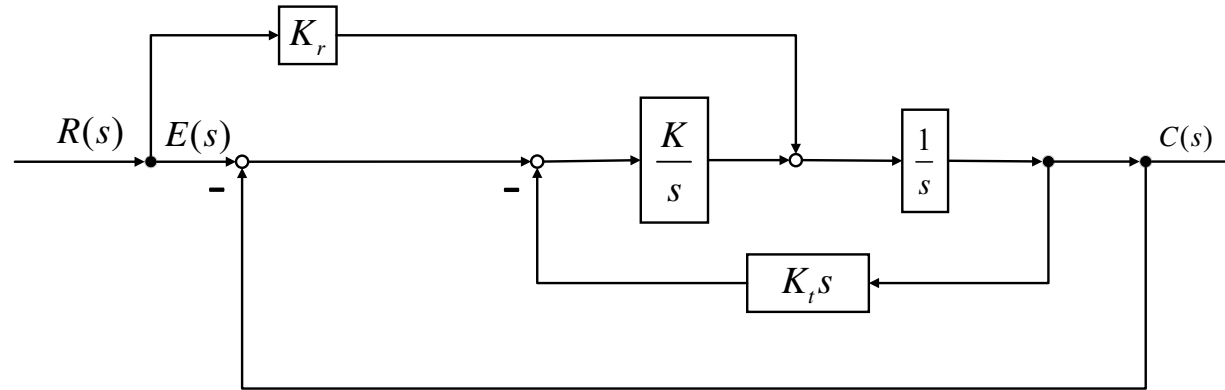
$$L_1 = -\frac{4s}{s^2}, \quad L_2 = -\frac{16}{s^2}$$

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 = 1 + \frac{4s}{s^2} + \frac{16}{s^2}$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 1$$

$$\Phi(s) = \frac{p_1\Delta_1 + p_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{K_r s + 16}{s^2 + 4s + 16}$$

$$G_a(s) = \frac{\Phi(s)}{1 - \Phi(s)} = \frac{K_r s + 16}{s[s + (4 - K_r)]}$$



开环传递函数
$$G_a(s) = \frac{\Phi(s)}{1 - \Phi(s)} = \frac{K_r s + 16}{s[s + (4 - K_r)]}$$

对于斜坡输入，II型系统不产生稳态误差

故 $K_r = 4$

$$G_a(s) = \frac{\Phi(s)}{1 - \Phi(s)} = \frac{4s + 16}{s^2}$$

四、减小或消除稳态误差的方法

前面的讨论表明，为了减小系统的稳态误差，可以增加开环传递函数中的串联积分环节的数目或提高系统的开环放大系数。但是，串联的积分环节一般不超过2，而开环放大系数也不能任意增大，否则系统将可能不稳定，

为了进一步减小系统稳态误差，可以采用**加前馈控制的复合控制方法**，即从给定输入或扰动输入处**引出一个前馈控制量**，加到系统中去，通过适当选择补偿装置和作用点，就可以达到减小或消除稳态误差的目的。

在图3-27所示系统中，为了消除由 $r(t)$ 引起的稳态误差，可在原反馈控制的基础上，从给定输入处引出前馈量经补偿装置 $G_c(s)$ ，对系统进行开环控制。此时系统误差信号的拉氏变换式为

$$E(s) = R(s) - G_2(s)[G_1(s)E(s) + G_c(s)R(s)]$$

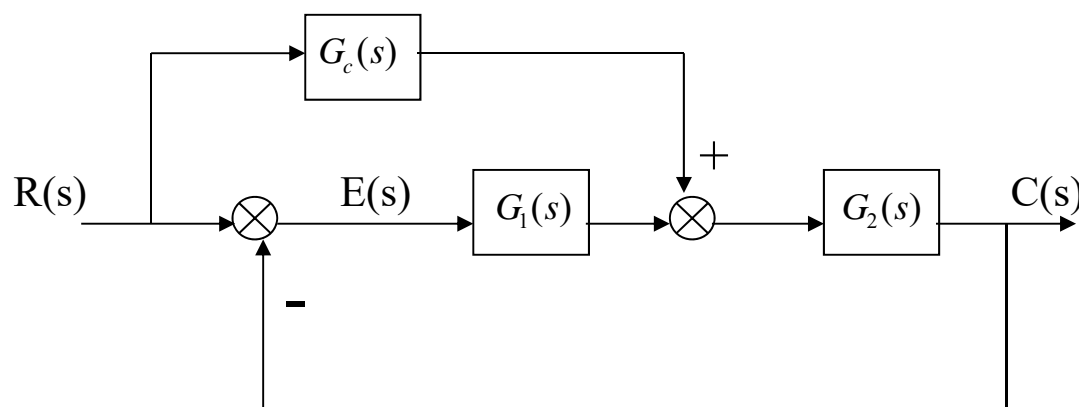


图3-27 按给定输入补偿的复合控制

经整理得

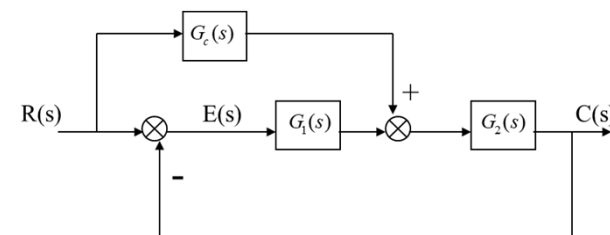
$$E(s) = \frac{[1 - G_2(s)G_c(s)]}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot R(s)$$

显然，如果选择补偿装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1}{G_2(s)}$$

则系统给定的稳态误差为零。

$$\text{若 } G_1(s) = \frac{k_1}{T_1s + 1}, G_2(s) = \frac{k_2}{s(T_2s + 1)}, r(t) = V_0t$$



不引入补偿装置, 则系统开环传递函数

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{k_1k_2}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

为 I 型系统,所以在速度输入信号作用下,存在常值稳态误差

$$e_{ss} = \frac{V_0}{k_1k_2}$$

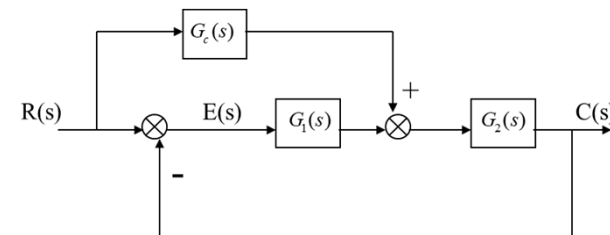
引入按输入补偿的作用 $G_c(s)$,则

$$E(s) = R(s) - \frac{[G_1(s) + G_c(s)] \cdot G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot R(s)$$

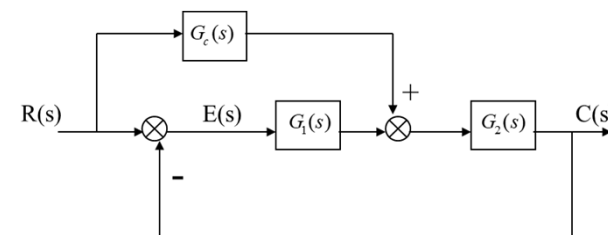
$$= \frac{1 - G_c(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot R(s)$$

如果选 $G_c(s) = \frac{1}{G_2(s)} = \frac{s(T_2s + 1)}{k_2}$ 则 $E(s) = 0$

但 $G_c(s) = \frac{s(T_2s + 1)}{k_2}$ 在物理上难以实现。



如果取 $G_c(s) = \frac{s}{k_2}$, 则



$$E(s) = \frac{1 - \frac{s}{k_2} G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot R(s) = \frac{1 - \frac{s}{k_2} \frac{k_2}{s(T_2s + 1)}}{1 + \frac{k_1 k_2}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}} \cdot R(s)$$

$$r(t) = V_0 t \rightarrow R(s) = \frac{V_0}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

这样即实现稳态补偿。

在图3-28所示系统中，为了**消除由 $n(t)$ 引起的稳态误差**，可在原反馈控制的基础上，**从扰动输入引出前馈量**经补偿装置 $G_c(s)$ 加到系统中，若设 $r(t)=0$ ，则系统的输出 $C(s)$ 就是系统的误差信号。系统输出的拉氏变换式为

$$C(s) = G_2(s)[N(s) - G_1(s)G_c(s)N(s) - G_1(s)C(s)]$$

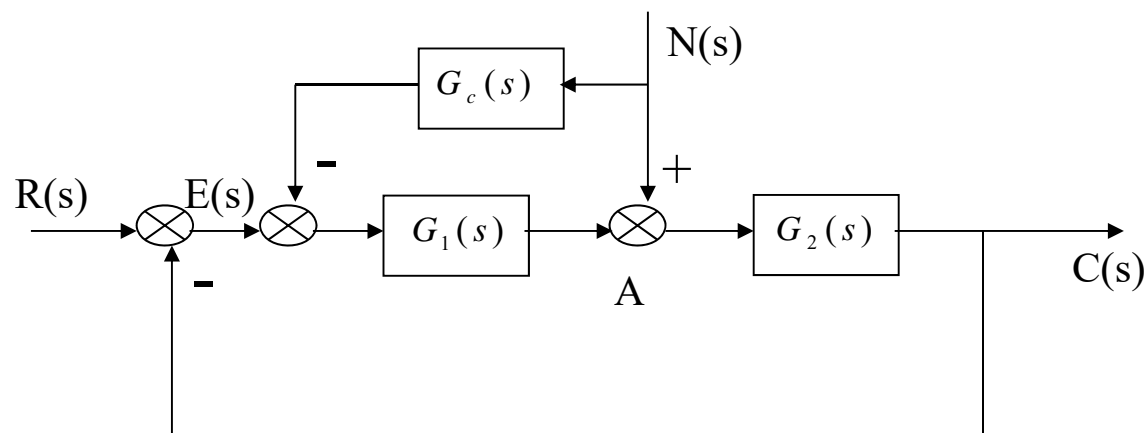


图3-28 按扰动输入补偿的复合控制

经整理得

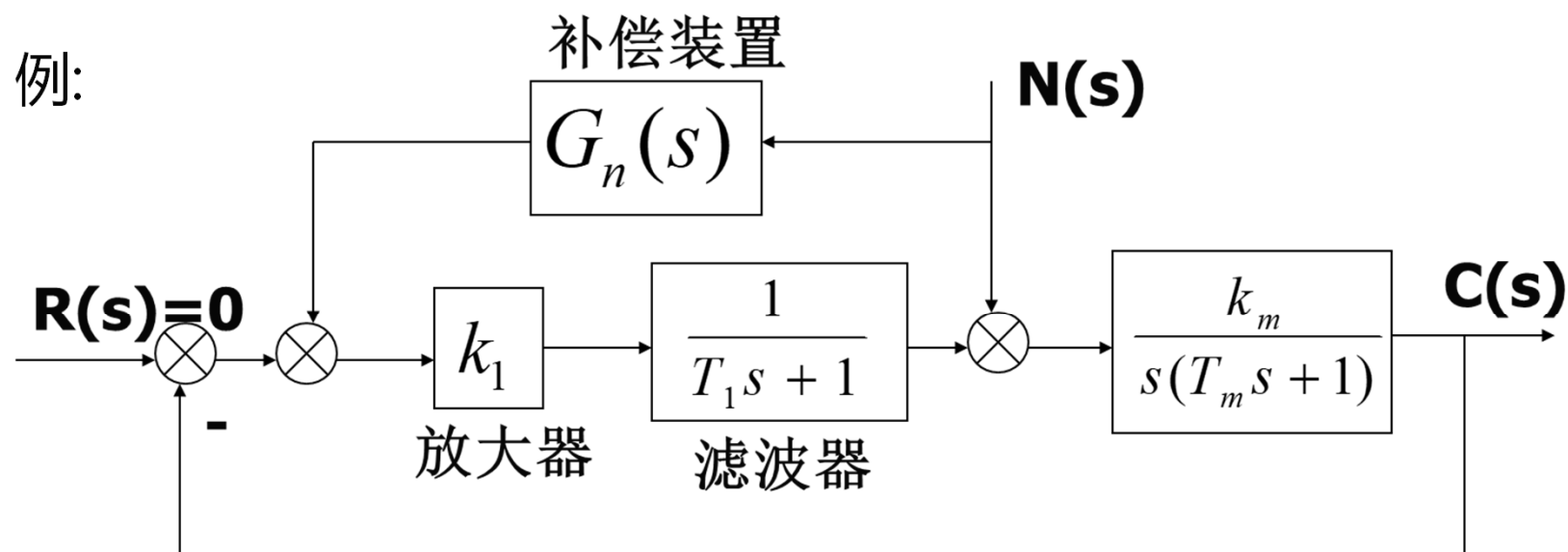
$$C(s) = \frac{G_2(s)[1 - G_1(s)G_c(s)]}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot N(s)$$

显然，如果选择补偿装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1}{G_1(s)}$$

则可使输出不受扰动 $n(t)$ 的影响，故系统的扰动稳态误差为零。

从结构上看，当满足 $G_c(s) = \frac{1}{G_1(s)}$ 时，扰动信号经两条通道到达A点，两个分支信号正好大小相等，符号相反，因而实现了对扰动的全补偿。



系统输出:

$$C_n(s) = \frac{\frac{k_m}{s(T_m s + 1)} \cdot \left[1 + G_n(s) \cdot \frac{k_1}{T_1 s + 1}\right]}{1 + \frac{k_1 k_m}{s(T_1 s + 1)(T_m s + 1)}} \cdot N(s)$$

若选 $G_n(s) = -\frac{1}{k_1} \cdot (T_1 s + 1)$, 则系统的输出不受扰动的影响,但不容易物理实现。因为一般物理系统的传递函数都是分母的阶次高于或等于分子的阶次。

如果选 $G_n(s) = -\frac{1}{k_1}$, 则在稳态情况下,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} c_n(t) &= c_n(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot c_n(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{k_m}{s(T_m s + 1)} \cdot [1 + (-\frac{1}{k_1}) \cdot \frac{k_1}{T_1 s + 1}]}{1 + \frac{k_1 k_m}{s(T_1 s + 1)(T_m s + 1)}} \cdot N(s) = 0 \end{aligned}$$

这就是稳态全补偿, 实现很方便。

由于物理上**可实现系统的传递函数总是满足分母的阶次大于或等于其分子的阶次**，要求构造出分子的阶次大于或等于其分母阶次的补偿装置，这通常是不可能的。此外，由于传递函数的元件参数随着时间的推移也会发生变化，这就使得全补偿条件不可能成立。所以，实际上只能实现近似补偿。

可以证明，**前馈控制加入前后，系统的特征方程保持不变**，因此，**系统的稳定性将不会发生变化**。