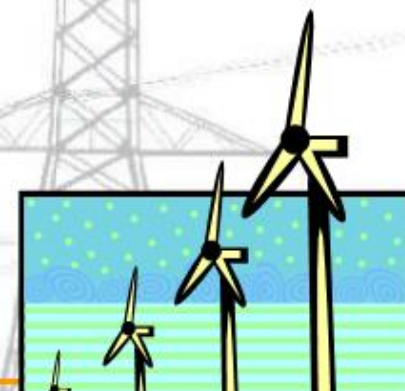




東南大學
Southeast University

电力系统稳态分析

东南大学电气工程学院





第四章 复杂电力系统潮流的计算机算法

4.1 电力网络方程

4.2 功率方程及其迭代解法

4.3 牛顿—拉夫逊法潮流计算

4.4 P-Q分解法潮流计算

* 4.5 潮流计算中稀疏技术的运用

* 4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介



概述

- 基本要求

本章着重介绍运用电子计算机计算电力系统潮流分布的方法。它是复杂电力系统稳态和暂态运行的基础。

- 运用计算机计算的步骤

一般包括建立数学模型，确定解算方法，制定框图和编制程序，本章着重前两步。



概述

1

• 建立数学模型

- 节点电压方程、导纳矩阵的形成与修改

2

• 功率方程、节点分类及约束条件

3

• 迭代法计算潮流

- 功率方程的非线性性质
- 高斯—赛德尔法：用于潮流计算速度慢、易于收敛

4

• 牛顿—拉夫逊法计算潮流

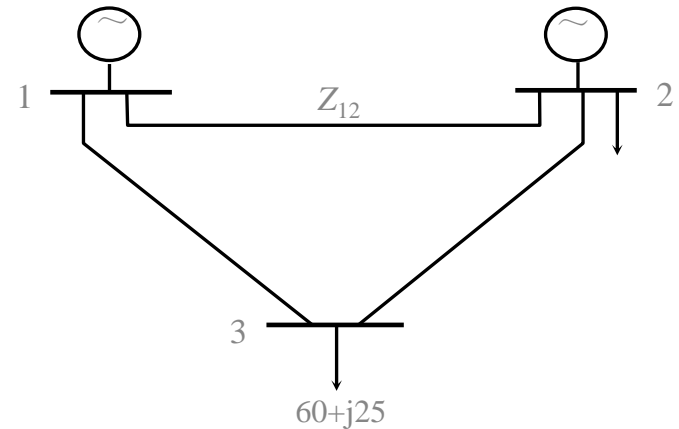
- 原理：局部线性化；用于潮流计算速度快、但注意初值选择
- 直角坐标法、极坐标法、P-Q分解法



概述

◆ 电力网络方程

将网络的有关参数和变量及其相互关系归纳起来所组成的、可反映网络性能的数学方程式组。根据电路理论，符合这种要求的方程组有：**节点电压方程**、**回路电流方程**、**割集电压方程**等。



◆ 电力系统潮流计算

1) 其本质为**电路计算**，因此，一切求解电路问题的方法均可用于求解电力系统潮流分布；

2) 电力系统潮流计算的特点：网络结构**参数已知**，**节点功率**（而不是电流）已知。



4.1 电力网络方程

◆ 由前三章内容及电路知识，可知潮流计算的一般步骤：
(求解节点电压和支路功率)

- ▶ 1) 计算各元件参数及等值电路
- ▶ 2) 由实际接线方式将各元件联接形成电网的等值电路
- ▶ 3) 由电路知识写出相应的网络方程，如节点电压方程

(由基尔霍夫电流定律，节点的注入电流等于所有与节点直接相连支路的流出电流之和)：

$$I_B = Y_B U_B$$



4.1 电力网络方程

- ◆ 由前三章内容及电路知识，可知潮流计算的一般步骤：
(求解节点电压和支路功率)

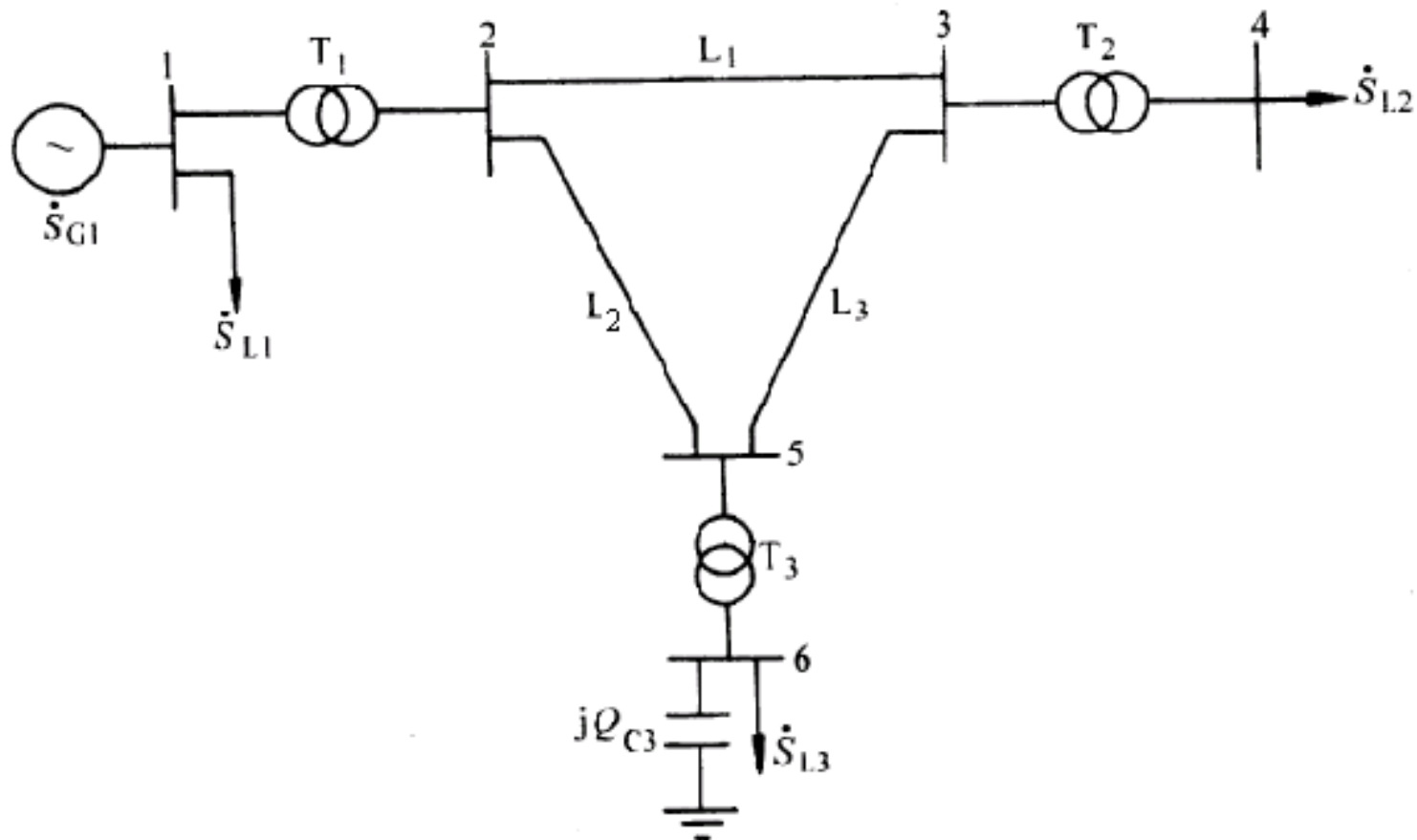
- ▶ 3) 由电路知识写出相应的网络方程，如节点电压方程：

$$I_B = Y_B U_B$$

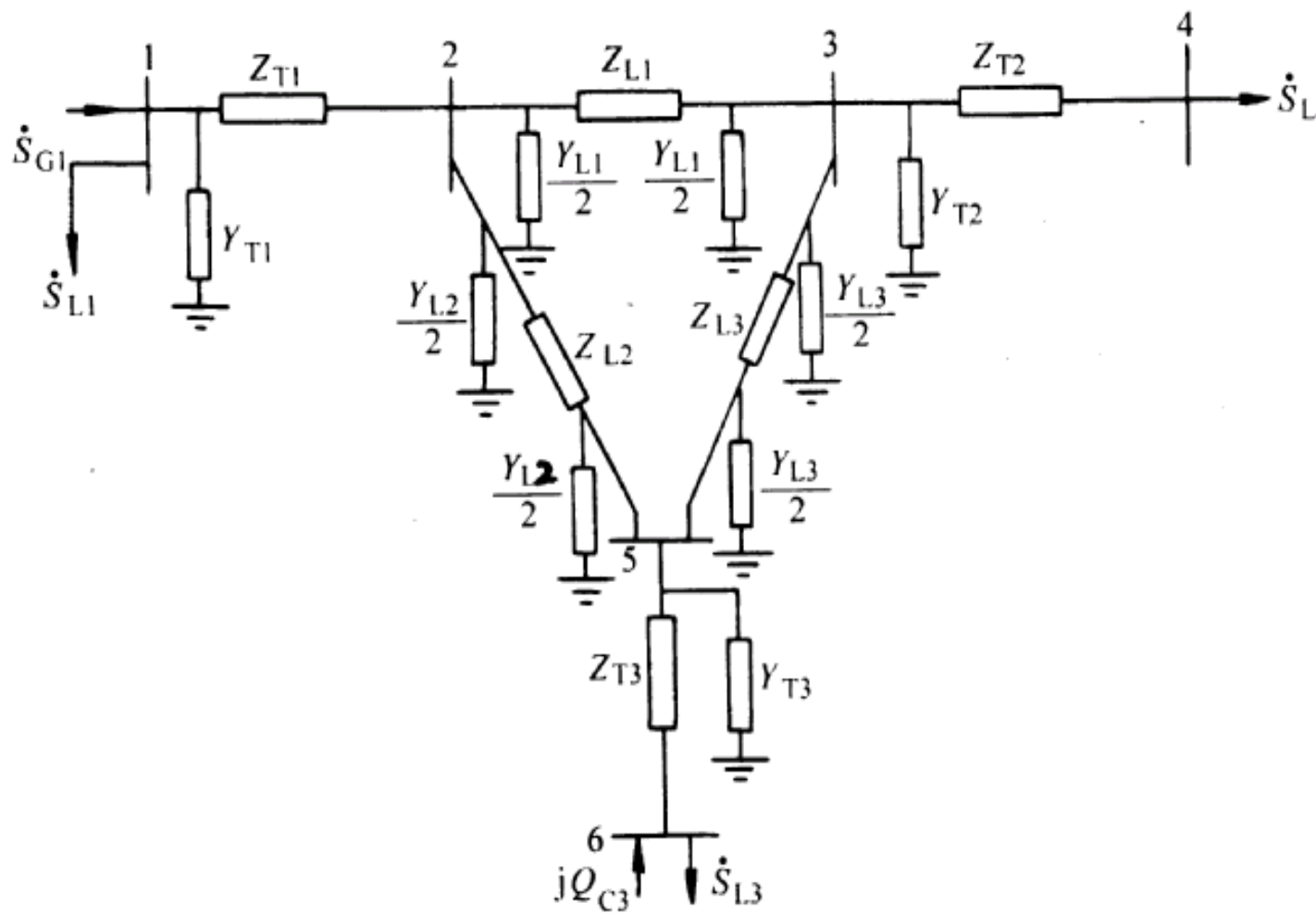
这个方程为**已知**节点导纳矩阵 Y_B ，节点注入电流 I_B 及**待求量**节点电压 U_B 的线性方程。

- ▶ 4) 线性代数求解，得出 U_B ，进而就可以求出各支路的电流。

◆ 电力网图:



◆ 等效网络:





◆ 1) 计算节点注入功率:

节点注入复功率是由此节点的所有电源功率和所有负荷功率复数求和所得到的

$$\dot{S}_i = \sum \dot{S}_{Gi} - \sum \dot{S}_{Li}$$

注入功率以流入网络为正，流出为负。

上图中: $\dot{S}_1 = \dot{S}_{G1} - \dot{S}_{L1}$ $\dot{S}_4 = -\dot{S}_{L2}$

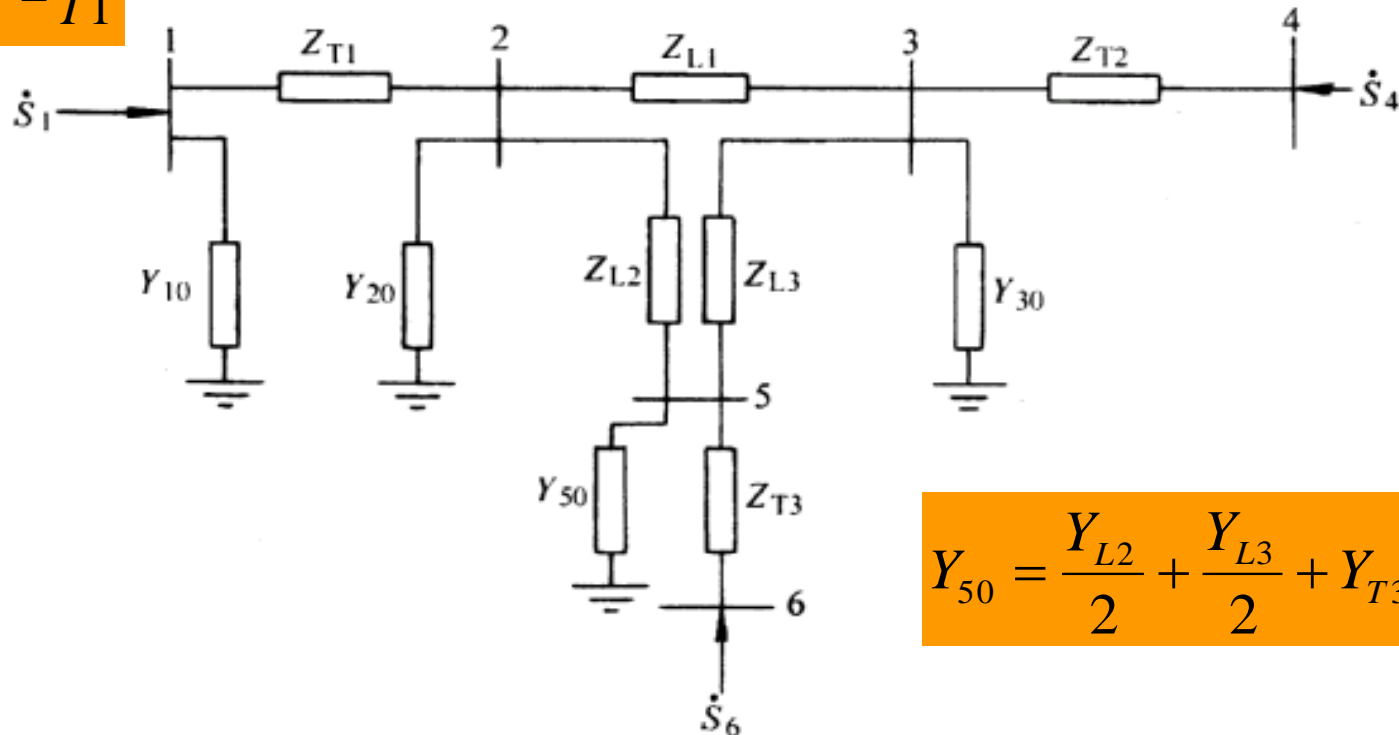
$$\dot{S}_6 = jQ_{C3} - \dot{S}_{L3}$$

◆ 2) 将接在同一节点的所有对地导纳支路合并成一个支路。

$$Y_{10} = Y_{T1}$$

$$Y_{20} = \frac{Y_{L1}}{2} + \frac{Y_{L2}}{2}$$

$$Y_{30} = \frac{Y_{L1}}{2} + \frac{Y_{L3}}{2} + Y_{T2}$$



$$Y_{50} = \frac{Y_{L2}}{2} + \frac{Y_{L3}}{2} + Y_{T3}$$



- ◆ 3) 为方便计算和解决环形网络变压器变比不匹配，造成参数难以归算的问题，对变压器采用非标准变比的变压器等效电路——**Π**型等效电路。

4.1.1 节点电压方程



◆ N+1个节点的节点电压方程：

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{Y}_B \mathbf{U}_B$$

节点注入电流列向量（各节点电源电流和负荷电流之和）：

$$\mathbf{I}_B = [\dot{I}_1 \dot{I}_2 \cdots \dot{I}_n]^T$$

节点电压列向量（各节点对地的电压）：

$$\mathbf{U}_B = [\dot{U}_1 \dot{U}_2 \cdots \dot{U}_n]^T$$

导纳矩阵：

$$\mathbf{Y}_B = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix}$$

4.1.1 节点电压方程



◆ 展开形式为：

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 + \cdots + Y_{1n}\dot{U}_n \\ \dot{I}_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 + \cdots + Y_{2n}\dot{U}_n \\ &\vdots \\ \dot{I}_n &= Y_{n1}\dot{U}_1 + Y_{n2}\dot{U}_2 + \cdots + Y_{nn}\dot{U}_n \end{aligned}$$



4.1.1 节点电压方程

◆节点电压方程

- 节点数 $n+1$ ，节点电压方程数 n 个，不计“地”节点
- 网络支路数 b ，回路电流方程数 $b-n$ 个
- 一般 $b > 2n$ ，节点电压方程数少于回路电流方程数
- 对于交差跨接的非平面网络，可方便建立节点电压方程
- 导纳矩阵修改方便



4.1.1 节点电压方程

The diagram illustrates the structure of the node voltage equation matrix \mathbf{Y} . The matrix is shown as a square with a diagonal line from the top-left to the bottom-right. The elements are arranged as follows:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix}$$

Annotations:

- A pink callout box labeled "互导纳" (Mutual Conductance) points to the off-diagonal elements Y_{ij} (where $i \neq j$).
- A blue callout box labeled "自导纳" (Self Conductance) points to the diagonal elements Y_{ii} .



4.1.1 节点电压方程

◆ 节点导纳矩阵 Y_B 的形成及元素定义：

▶ 1) 对角元素 Y_{ii} (自导纳)：

$$Y_{ii} = \frac{\dot{I}_i}{\dot{U}_i} (U_j = 0, j \neq i) = y_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_{ij}$$

自导纳 Y_{ii} 在数值上就等于在节点 i 施加单位电压，其他节点全部接地时，经节点 i 注入网络的电流。



4.1.1 节点电压方程

◆ 节点导纳矩阵 Y_B 的形成及元素定义:

► 1) 对角元素 Y_{ii} (自导纳):

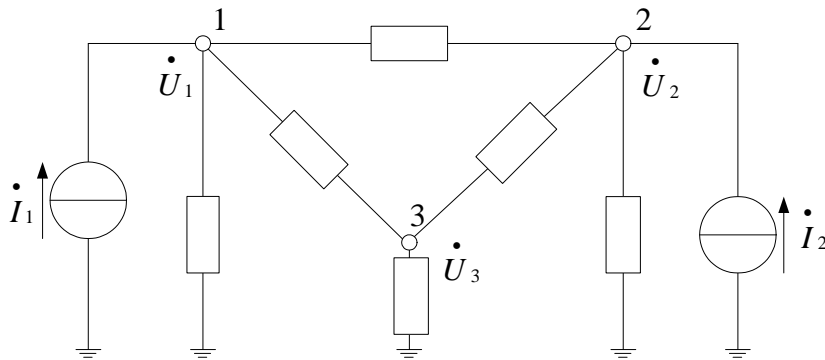


图4-1 电力系统等值网络

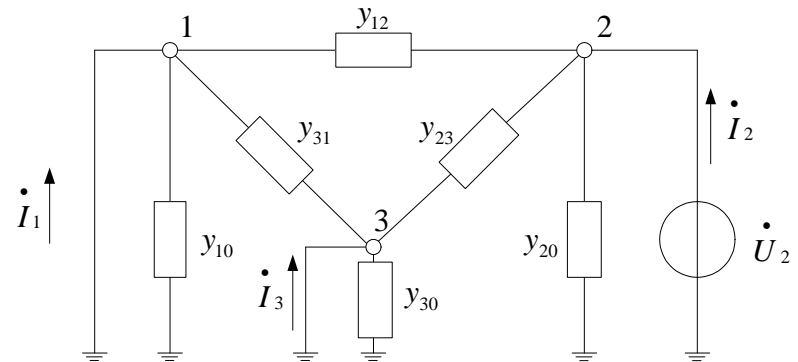


图4-2 节点导纳矩阵中自导纳和互导纳的确定

$$Y_{22} = (\dot{I}_2 / \dot{U}_2)_{(\dot{U}_1 = \dot{U}_3 = 0)} = y_{20} + y_{21} + y_{23}$$



4.1.1 节点电压方程

◆ 节点导纳矩阵 Y_B 的形成及元素定义：

▶ 2) 非对角元素 Y_{ij} (互导纳)：

$$Y_{ij} = \frac{\dot{I}_i}{\dot{U}_j} \left(\dot{U}_i = 0, i \neq j \right) = Y_{ji} = -y_{ij}$$

-- 互导纳 Y_{ij} 数值上就等于在节点 **j** 施加单位电压，其他节点**全部接地**时，经节点 **i** 注入网络的电流。

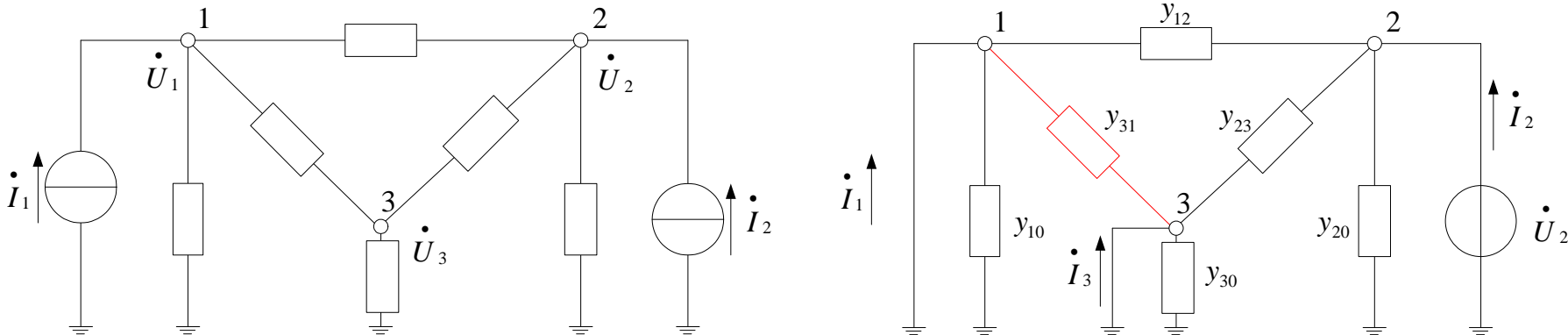
-- Y_{ji} 等于 Y_{ij} 。如果节点 **i**、**j** 之间没有直接联系，则互导纳 $Y_{ji} = Y_{ij} = 0$ 。



4.1.1 节点电压方程

◆ 节点导纳矩阵 Y_B 的形成及元素定义：

► 2) 非对角元素 Y_{ji} (互导纳)：



-- 互导纳的这些性质决定了节点导纳矩阵是一个对称的稀疏矩阵。随着网络节点数的增加，非零元素相对愈来愈少，节点导纳矩阵的稀疏度，即零元素数与总元素数的比值也愈来愈高。



4.1.1 节点电压方程

- ◆ 节点导纳矩阵 Y_B 的阶数、非零元素个数、数值及其对称性：
 - ▶ 1) 节点导纳矩阵是**方阵**，其**阶数**就等于网络中 c 除参考节点（大地）外的节点数 n 。
 - ▶ 2) 节点导纳矩阵是**稀疏矩阵**，稀疏度 = 零元素 / 总元素；其**各行非零对角元素个数**就等于与该行相对应节点所连接的不接地支路数。
 - ▶ 3) 节点导纳矩阵的对角元素 Y_{ii} 等于**所有与节点 i 相连的支路导纳之和**。



4.1.1 节点电压方程

- ◆ 节点导纳矩阵 Y_B 的阶数、非零元素个数、数值及其对称性：
 - ▶ 4) 节点导纳矩阵的非对角元素 Y_{ij} 等于连接节点 i、j 支路导纳的负值。
 - ▶ 5) 由于 $Y_{ji} = Y_{ij}$ ，所以节点导纳矩阵一般是对称矩阵。



4.1.1 节点电压方程

◆ 节点阻抗矩阵 Z_B

$$I_B = Y_B U_B$$

$$Z_B I_B = U_B$$



$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \vdots \\ \dot{U}_n \end{bmatrix}$$



4.1.1 节点电压方程

◆ 节点阻抗矩阵 Z_B 元素的物理意义

$$Z_B I_B = U_B$$

$Z_B = Y_B^{-1}$: 节点阻抗矩阵

Z_{ii} : 节点i的自阻抗或输入阻抗

Z_{ij} : 节点i、j间的互阻抗或转移阻抗



4.1.1 节点电压方程

◆ 节点阻抗矩阵 Z_B 的形成及元素定义：

▶ 1) 对角元素 Z_{ii} (自阻抗)：

$$Z_{ii} = (\dot{U}_i / \dot{I}_i)_{(\dot{I}_j=0, j \neq i)}$$

自阻抗数值上就等于经节点*i*注入**单位电流**，其它节点**都不注入电流时**，节点*i*的电压。

即从节点*i*向整个网络看进去的对地总阻抗。



4.1.1 节点电压方程

◆ 节点阻抗矩阵 Z_B 的形成及元素定义：

▶ 2) 非对角元素 Z_{ji} (互阻抗)：

$$Z_{ji} = (\dot{U}_j / \dot{I}_i)_{(\dot{I}_j=0, j \neq i)}$$

互阻抗数值上就等于经节点*i*注入单位电流，其它节点都不注入电流时，节点*j*的电压。



4.1.1 节点电压方程

◆ 节点阻抗矩阵 Z_B 的特点:

- ▶ 1) 节点阻抗矩阵是**方阵**，其**阶数**就等于网络中出参考节点（大地）外的节点数 n 。
- ▶ 2) 因为网络中各节点相互间有直接、间接的联系，节点 i 有注入电流而其他各节点注入电流都为零时，网络中出参考节点外，其他节点电压都不为零，所以节点阻抗矩阵是**满阵**。
- ▶ 3) 由于非对角元素 $Z_{ji} = Z_{ij}$ ，所以节点阻抗矩阵也是**对称矩阵**。



4.1.2 回路电流方程

◆ 一般形式

► 运用回路阻抗矩阵建立的回路电流方程：

$$E_L = Z_L I_L$$

Z_L : 回路阻抗矩阵

I_L : 回路电流的列向量（习惯取顺时针的电流流向为正）

E_L : 回路电压源电势的列向量，与 I_L 方向一致为正。



4.1.2 回路电流方程

◆ 一般形式

► 假设系统有 m 个独立回路，将回路阻抗矩阵 Z_L 展开得：

$$\begin{bmatrix} \dot{E}_a \\ \dot{E}_b \\ \dot{E}_c \\ \vdots \\ \dot{E}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} & \cdots & Z_{am} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} & \cdots & Z_{bm} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} & \cdots & Z_{cm} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{ma} & Z_{mb} & Z_{mc} & \cdots & Z_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \\ \dot{I}_c \\ \vdots \\ \dot{I}_m \end{bmatrix}$$



4.1.2 回路电流方程

◆ 一般形式

► 回路阻抗矩阵 Z_L :

Z_{ii} : 自阻抗, 环绕回路*i*的所有支路阻抗的总和。

Z_{ij} : 互阻抗, 所有回路都取网孔回路、其中电流都取同一流向时, 回路*j*和回路*i*共有阻抗的负值。则有: $Z_{ij} = Z_{ji}$ 。

当回路*i*, *j*没有共有阻抗, 且不计及两支路间互感, 则有: $Z_{ij} = Z_{ji} = 0$ 。故 Z_L 为**对称的稀疏矩阵**。



4.1.2 回路电流方程

◆ 一般形式

► 回路电流方程的另一种表达方式:

$$Z_L^{-1} E_L = Z_L^{-1} Z_L I_L = I_L$$

如令: $Z_L^{-1} = Y_L$, 则有:

$$Y_L E_L = I_L$$

其中: Y_L 称为回路导纳矩阵



4.1.2 回路电流方程

◆ 回路电流方程的另一种表达方式

► 假设系统有 m 个独立回路，将回路导纳矩阵 Y_L 展开：

$$\begin{bmatrix} Y_{aa} & Y_{ab} & Y_{ac} & \cdots & Y_{am} \\ Y_{ba} & Y_{bb} & Y_{bc} & \cdots & Y_{bm} \\ Y_{ca} & Y_{cb} & Y_{cc} & \cdots & Y_{cm} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{ma} & Y_{mb} & Y_{mc} & \cdots & Y_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_a \\ \dot{E}_b \\ \dot{E}_c \\ \vdots \\ \dot{E}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \\ \dot{I}_c \\ \vdots \\ \dot{I}_m \end{bmatrix}$$



4.1.2 回路电流方程

◆ 回路电流方程的另一种表达方式

► 回路导纳矩阵 Y_L :

Y_{ii} : 自导纳, 除回路*i*外其他回路电压源电势都为零时, 回路*i*电流与电压源电势的比值

Y_{ij} : 互导纳, 除回路*i*外其他回路电压源电势都为零时, 回路*i*电流与回路*j*电压源电势的比值

由于网络中各回路间都有直接和间接的联系, 故 Y_L 为**对称的满矩阵**。



4.1.3 节点导纳矩阵的形成和修改

◆ 节点导纳矩阵的形成

- ▶ 1) 节点导纳矩阵是方阵，其**阶数**就等于网络中除参考节点（大地）外的节点数 n 。
- ▶ 2) 节点导纳矩阵是稀疏矩阵，其**各行非零对角元素个数**就等于与该行相对应节点所连接的不接地支路数。
- ▶ 3) 节点导纳矩阵的对角元素 Y_{ii} 等于**所有与节点 i 相连的支路导纳之和**。



4.1.3 节点导纳矩阵的形成和修改

◆ 节点导纳矩阵的形成

- ▶ 4) 节点导纳矩阵的非对角元素 Y_{ij} 等于连接节点 i 、 j 支路导纳的负值。
- ▶ 5) 由于 $Y_{ij}=Y_{ji}$ ，所以节点导纳矩阵一般是对称矩阵。
- ▶ 6) 网络中的变压器，如运用变压器等值电路模型表示，仍可按上述原则计算。



4.1.3 节点导纳矩阵的形成和修改

◆ 节点导纳矩阵的修改

► 1) 从原有网络节点*i*引出一新支路，增加的新节点为*j*，支路导纳 y_{ij} ，则：

- $n=n+1$
- $Y_{jj}=y_{ij}$
- $Y_{ij}=Y_{ji}=-y_{ij}$
- $Y_{ii}=Y_{ii}+y_{ij}$
- $Y_{kj}=Y_{jk}=0$

($k=1, \dots, n, k \neq i, j$)

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1i} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2i} & \dots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{i1} & Y_{i2} & \dots & Y_{ii} & \dots & Y_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{ni} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ Y_{ij} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & Y_{ji} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{jj} \end{bmatrix}$$



4.1.3 节点导纳矩阵的形成和修改

◆ 节点导纳矩阵的修改

► 2) 从原有网络节点i、j间增加一支路，支路导纳 y_{ij} ，则：

- $n=n$
- $Y_{ii}=Y_{ii}+y_{ij}$
- $Y_{jj}=Y_{jj}+y_{ij}$
- $Y_{ij}=Y_{ij}-y_{ij}$
- $Y_{ji}=Y_{ji}-y_{ij}$

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1i} & \dots & Y_{1j} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2i} & \dots & Y_{2j} & \dots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{i1} & Y_{i2} & \dots & \boxed{Y_{ii}} & \dots & \boxed{Y_{ij}} & \dots & Y_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{j1} & Y_{j2} & \dots & \boxed{Y_{ji}} & \dots & \boxed{Y_{jj}} & \dots & Y_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{ni} & \dots & Y_{nj} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix}$$



4.1.3 节点导纳矩阵的形成和修改

◆ 节点导纳矩阵的修改

► 3) 从原有网络节点i、j间切除一支路，支路导纳 y_{ij} ，则：

- $n=n$
- $Y_{ii}=Y_{ii}-y_{ij}$
- $Y_{jj}=Y_{jj}-y_{ij}$
- $Y_{ij}=Y_{ij}+y_{ij}$
- $Y_{ji}=Y_{ji}+y_{ij}$



4.1.3 节点导纳矩阵的形成和修改

◆ 节点导纳矩阵的修改

► 4) 原有网络节点*i*、*j*间的导纳由 y_{ij} 变为 y_{ij}' ，则：

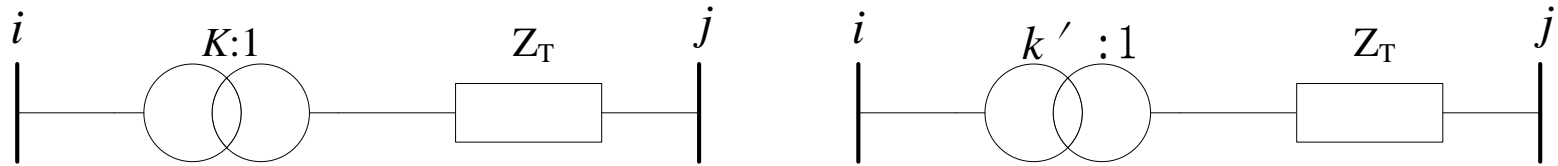
- $n=n$
- $Y_{ii}=Y_{ii}-y_{ij}+y_{ij}'$
- $Y_{jj}=Y_{jj}-y_{ij}+y_{ij}'$
- $Y_{ij}=Y_{ij}+y_{ij}-y_{ij}'$
- $Y_{ji}=Y_{ji}+y_{ij}-y_{ij}'$



4.1.3 节点导纳矩阵的形成和修改

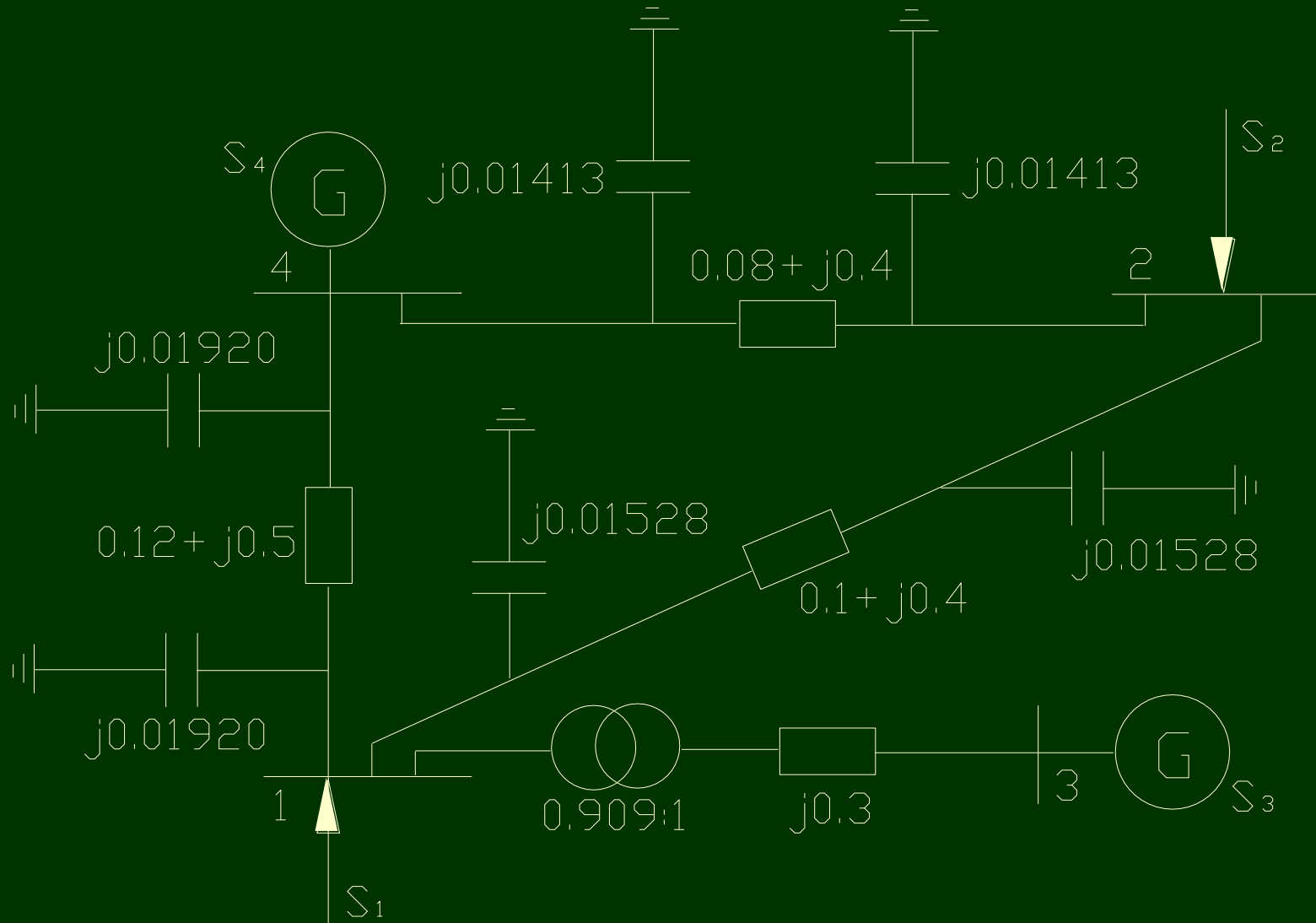
◆ 节点导纳矩阵的修改

► 5) 原有网络节点*i*、*j*间变压器的变比由*k*改变为*k'*，则：

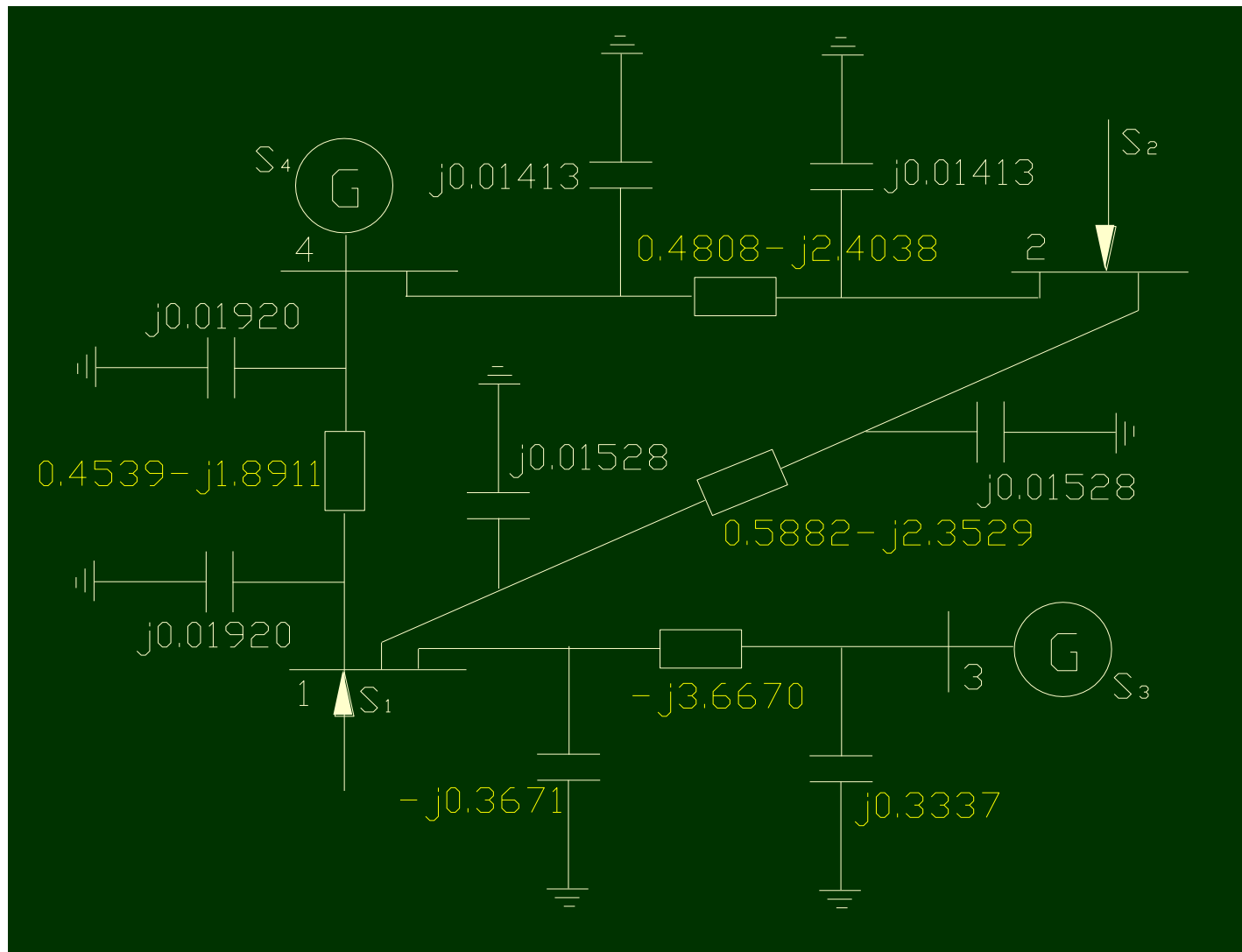


- $n = n$
- $Y_{ii} = Y_{ii} + \left(\frac{1}{k'^2} - \frac{1}{k^2}\right) \frac{1}{Z_T}$
- $Y_{jj} = Y_{jj}$
- $Y_{ij} = Y_{ij} - \left(\frac{1}{k'} - \frac{1}{k}\right) \frac{1}{Z_T}$
- $Y_{ji} = Y_{ji} - \left(\frac{1}{k'} - \frac{1}{k}\right) \frac{1}{Z_T}$

节点导纳矩阵的形成例题



$$Y = \begin{bmatrix} 1.0421 - j8.2429 & -0.5882 + j2.3529 & j3.6666 & -0.4539 + j1.8911 \\ -0.5882 + j2.3529 & 1.0690 - j4.7274 & 0 & -0.4808 + j2.4038 \\ j3.6666 & 0 & -j3.3333 & 0 \\ -0.4539 + j1.8911 & -0.4808 + j2.4038 & 0 & 0.9346 - j4.2616 \end{bmatrix}$$





4.1.4 节点阻抗矩阵的形成和修改

◆ 节点阻抗矩阵的形成

- ▶ 节点阻抗矩阵即节点导纳矩阵的逆阵，原则上，可先形成节点导纳矩阵，之后通过**矩阵求逆**的方法求取。
- ▶ 实际中，采用**支路追加法**形成节点阻抗矩阵。



4.1.4 节点阻抗矩阵的形成和修改

◆ 采用支路追加法形成节点阻抗矩阵

► 支路追加法的相关概念：

- 联通线图的树：包含该线图全部节点但不包含任何回路的联通子图；
- 树支，链支：属于树的支路称树支，否则称链支；
- 若增加树支，将增加节点数而不增加回路数；
- 若增加链支，将增加回路数而不增加节点数。



4.1.4 节点阻抗矩阵的形成和修改

◆ 采用支路追加法形成节点阻抗矩阵（设原网络有 m 个节点，并已形成 m 阶阻抗矩阵 ZB_m ）

► 1) 追加树支：

- 网络节点 i 追加树支 z_{ij} 后，网络中增加一新节点 j ，阻抗矩阵阶数增加为 $m+1$ ；
- 原 m 阶子阵所有元素不变；
- 新增加第 j 列非对角元： $Z_{1j}=Z_{1i}$, $Z_{2j}=Z_{2i}$, \dots , $Z_{ij}=Z_{ii}$, \dots , $Z_{mj}=Z_{mi}$ ；
- 新增加第 j 列非对角元： $Z_{j1}=Z_{1j}$, $Z_{j2}=Z_{2j}$, \dots , $Z_{ji}=Z_{ij}$, \dots , $Z_{jm}=Z_{mj}$ ；（矩阵对称性）
- 新增第 j 行、 j 列对角元： $Z_{jj}=Z_{ii}+Z_{ij}$



4.1.4 节点阻抗矩阵的形成和修改

◆ 采用支路追加法形成节点阻抗矩阵（设原网络有 m 个节点，并已形成 m 阶阻抗矩阵 Z_{Bm} ）

▶ 2) 追加链支：

- 网络节点 i ， j 间追加链支 z_{ij} 后，网络中节点数不增加；
- 原 m 阶阻抗矩阵 Z_{Bm} 中元素需要改变；
- 节点阻抗矩阵 Z_{Bm} 中元素计算公式可归纳为：

$$Z'_{pq} = Z_{pq} - \frac{Z_{p1}Z_{1q}}{Z_{11}} \quad (p = 1, 2, \dots, m; q = 1, 2, \dots, m)$$



4.1.4 节点阻抗矩阵的形成和修改

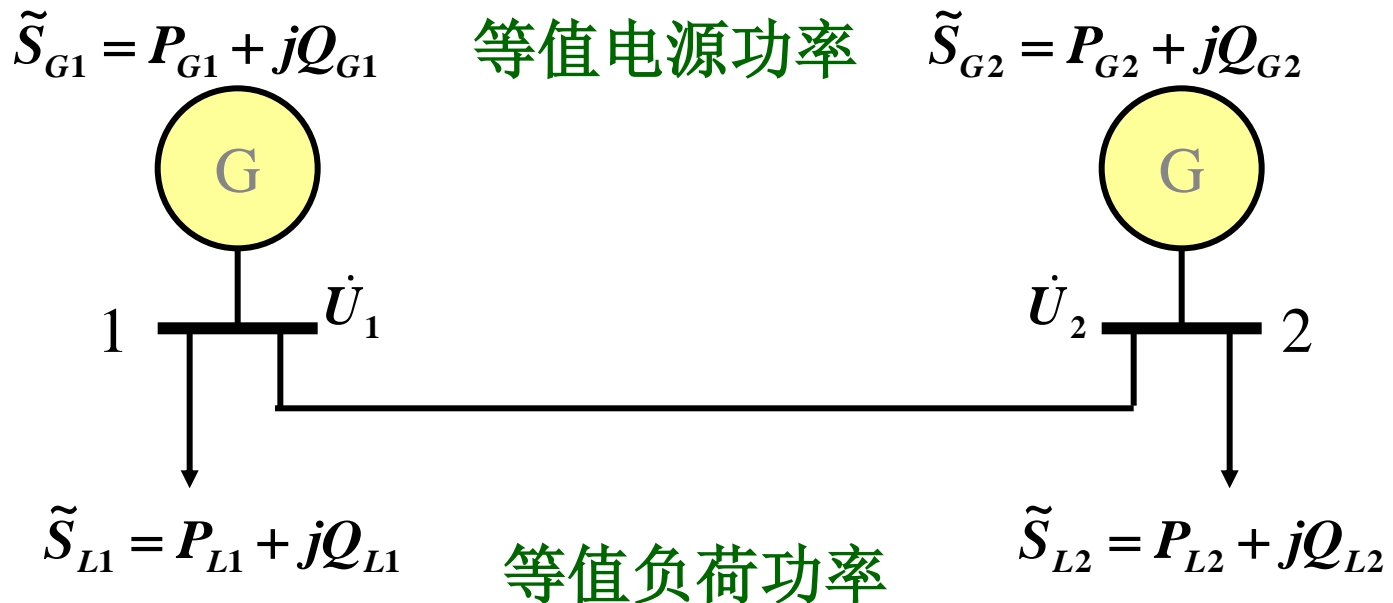
- ◆ 采用支路追加法形成节点阻抗矩阵（设原网络有 m 个节点，并已形成 m 阶阻抗矩阵 Z_{Bm} ）
 - ▶ 3) 追加变压器：
 - 采用变压器等值电路后，原则上可按上述方法接入网络，但每追加一台变压器需追加三个支路，计算量大；
 - 简捷方法：直接追加变压器支路。



4.2 功率方程及其迭代解法

◆ 功率方程和变量、节点的分类

► 功率方程

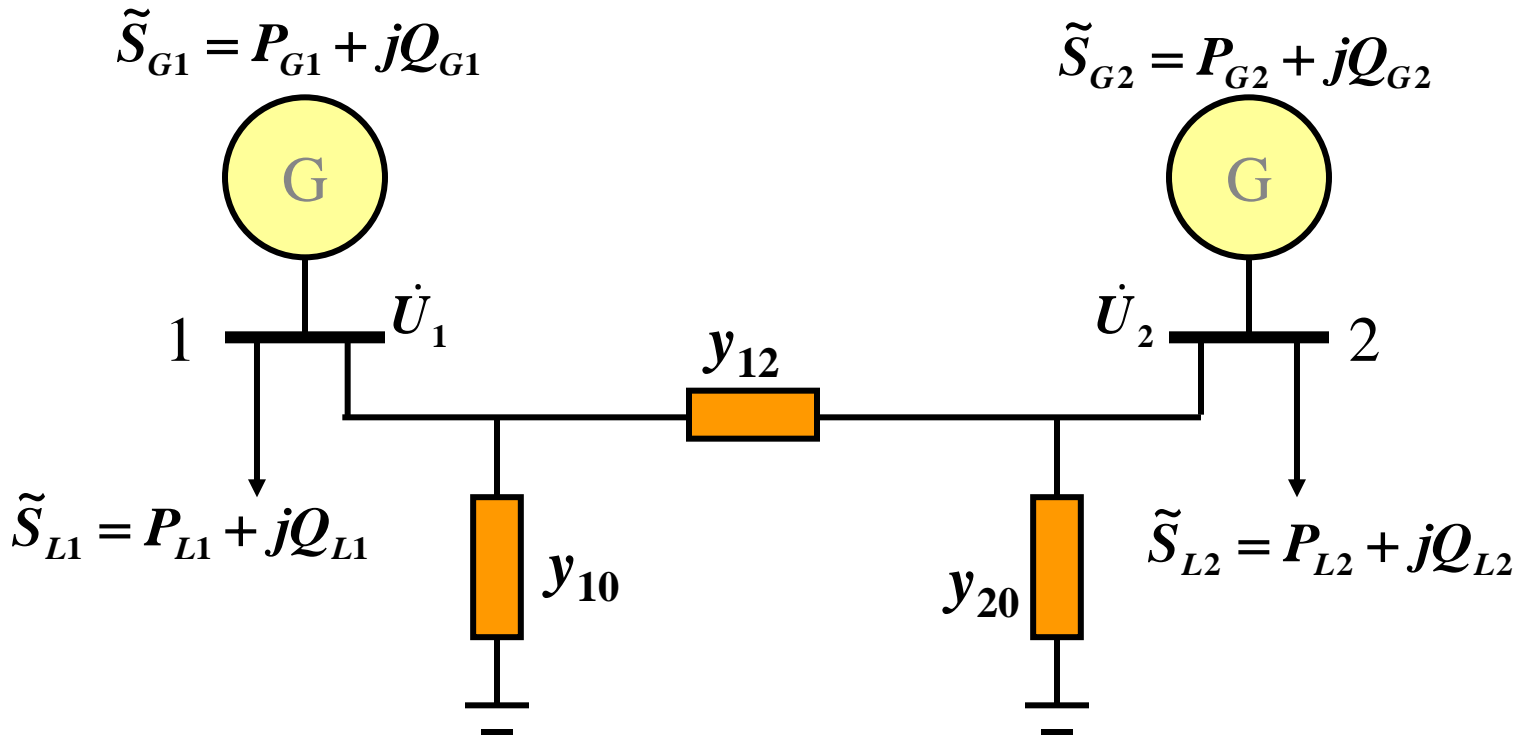


(a) 简单系统



4.2.1 功率方程和变量、节点的分类

◆ 功率方程

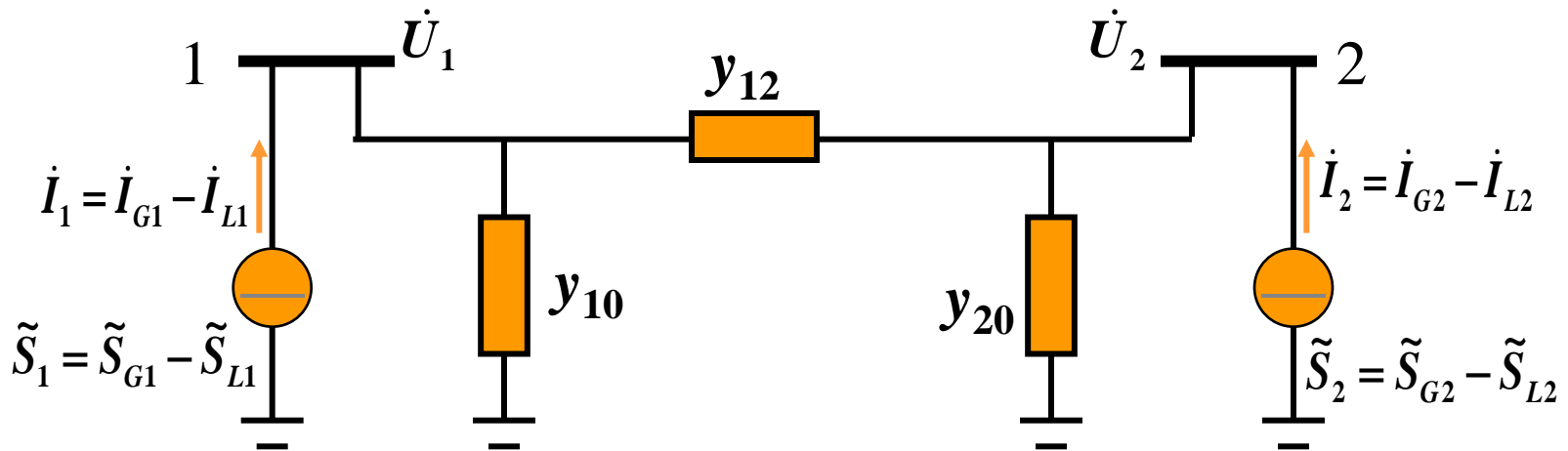


(b) 简单系统的等值网络



4.2.1 功率方程和变量、节点的分类

◆ 功率方程



(c) 注入功率和注入电流

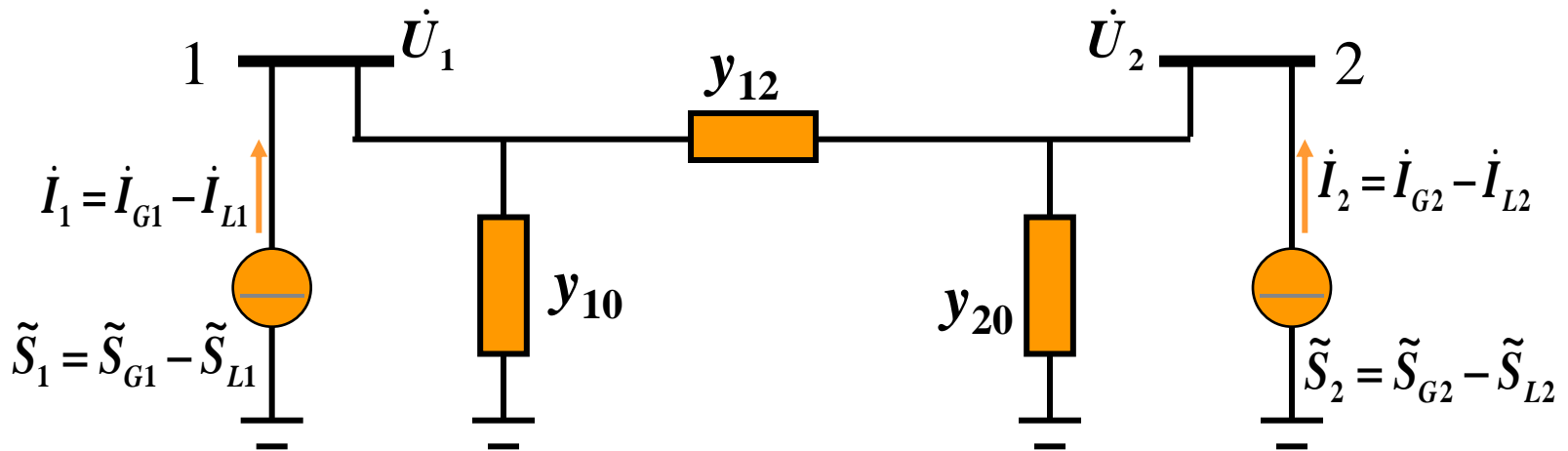
$$Y_{11} = Y_{22} = y_{10} + y_{12} = y_{20} + y_{12} = y_s e^{-j(90^\circ - \alpha_s)}$$

$$Y_{12} = Y_{21} = -y_{12} = -y_m e^{-j(90^\circ - \alpha_m)}$$



4.2.1 功率方程和变量、节点的分类

◆ 功率方程



(c) 注入功率和注入电流

$$Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 = \dot{I}_1 = \frac{\dot{S}_1^*}{U_1}$$

$$Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 = \dot{I}_2 = \frac{\dot{S}_2^*}{U_2}$$

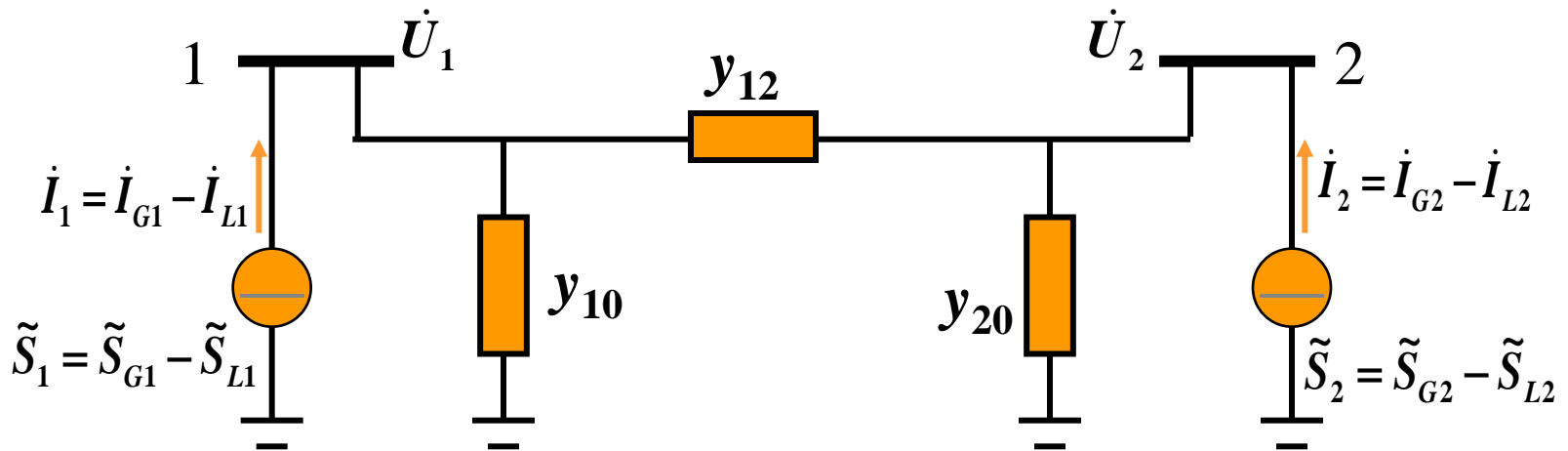
$$\dot{U}_1 = U_1 e^{j\delta_1}$$

$$\dot{U}_2 = U_2 e^{j\delta_2}$$



4.2.1 功率方程和变量、节点的分类

◆ 功率方程



(c) 注入功率和注入电流

$$S_1^* = Y_{11} \dot{U}_1^* \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2^* \dot{U}_1$$

$$\dot{S}_1 = Y_{11}^* \dot{U}_1^* \dot{U}_1 + Y_{12}^* \dot{U}_2^* \dot{U}_1$$

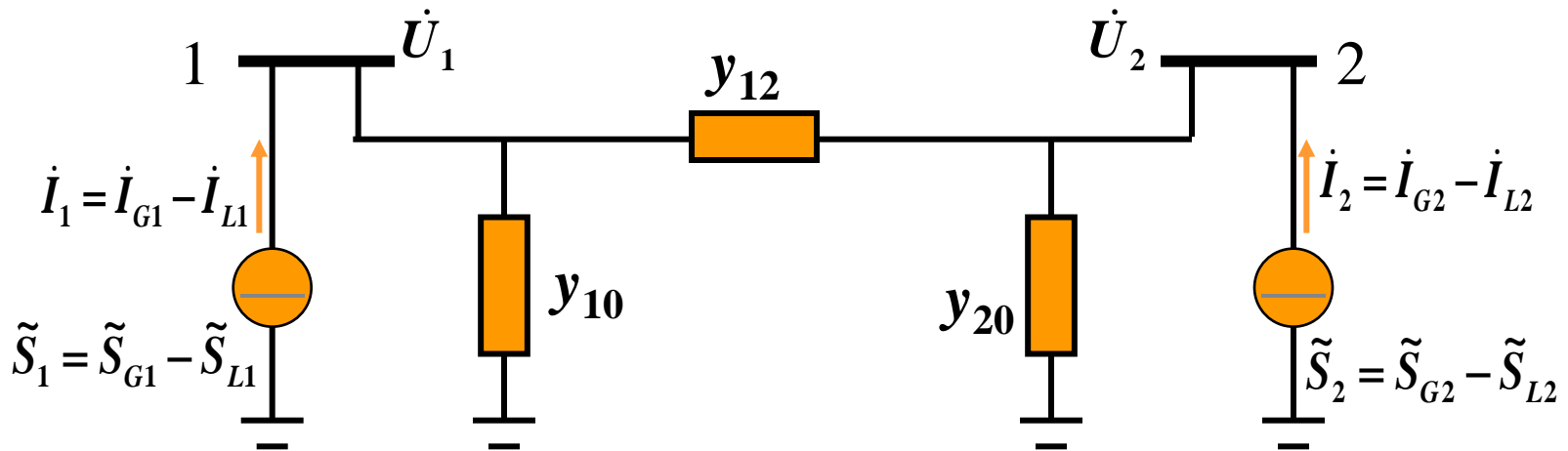
$$S_2^* = Y_{21} \dot{U}_1^* \dot{U}_2 + Y_{22} \dot{U}_2^* \dot{U}_2$$

$$\dot{S}_2 = Y_{21}^* \dot{U}_1^* \dot{U}_2 + Y_{22}^* \dot{U}_2^* \dot{U}_2$$



4.2.1 功率方程和变量、节点的分类

◆ 功率方程



(c) 注入功率和注入电流

$$P_1 + jQ_1 = y_s e^{j(90^\circ - \alpha_s)} U_1^2 - y_m e^{j(90^\circ - \alpha_m)} U_2 U_1 e^{j(\delta_1 - \delta_2)}$$

$$P_2 + jQ_2 = -y_m e^{j(90^\circ - \alpha_m)} U_2 U_1 e^{-j(\delta_1 - \delta_2)} + y_s e^{j(90^\circ - \alpha_s)} U_2^2$$



4.2.1 功率方程和变量、节点的分类

◆ 功率方程

$$\begin{aligned}P_1 &= P_{G1} - P_{L1} = y_s \cos(90^\circ - \alpha_s) U_1^2 - y_m U_1 U_2 \cos(90^\circ - \alpha_m + \delta_1 - \delta_2) \\&= y_s \sin \alpha_s U_1^2 + y_m U_1 U_2 \sin[(\delta_1 - \delta_2) - \alpha_m]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_2 &= P_{G2} - P_{L2} = y_s \cos(90^\circ - \alpha_s) U_2^2 - y_m U_2 U_1 \cos(90^\circ - \alpha_m + \delta_2 - \delta_1) \\&= y_s U_2^2 \sin \alpha_s + y_m U_2 U_1 \sin[(\delta_2 - \delta_1) - \alpha_m]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_1 &= Q_{G1} - Q_{L1} = y_s \sin(90^\circ - \alpha_s) U_1^2 - y_m U_1 U_2 \sin(90^\circ - \alpha_m + \delta_1 - \delta_2) \\&= y_s U_1^2 \cos \alpha_s - y_m U_1 U_2 \cos[(\delta_1 - \delta_2) - \alpha_m]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_2 &= Q_{G2} - Q_{L2} = y_s \sin(90^\circ - \alpha_s) U_2^2 - y_m U_2 U_1 \sin(90^\circ - \alpha_m + \delta_2 - \delta_1) \\&= y_s U_2^2 \cos \alpha_s - y_m U_2 U_1 \cos[(\delta_2 - \delta_1) - \alpha_m]\end{aligned}$$



4.2.1 功率方程和变量、节点的分类

◆ 功率方程

$$P_1 = P_{G1} - P_{L1} = y_s \sin \alpha_s U_1^2 + y_m U_2 U_1 \sin(\delta_1 - \delta_2 - \alpha_m)$$

$$Q_1 = Q_{G1} - Q_{L1} = y_s \cos \alpha_s U_1^2 - y_m U_2 U_1 \cos(\delta_1 - \delta_2 - \alpha_m)$$

$$P_2 = P_{G2} - P_{L2} = y_s \sin \alpha_s U_2^2 + y_m U_2 U_1 \sin(\delta_2 - \delta_1 - \alpha_m)$$

$$Q_2 = Q_{G2} - Q_{L2} = y_s \cos \alpha_s U_2^2 - y_m U_2 U_1 \cos(\delta_2 - \delta_1 - \alpha_m)$$

◆ 有功、无功功率平衡关系式

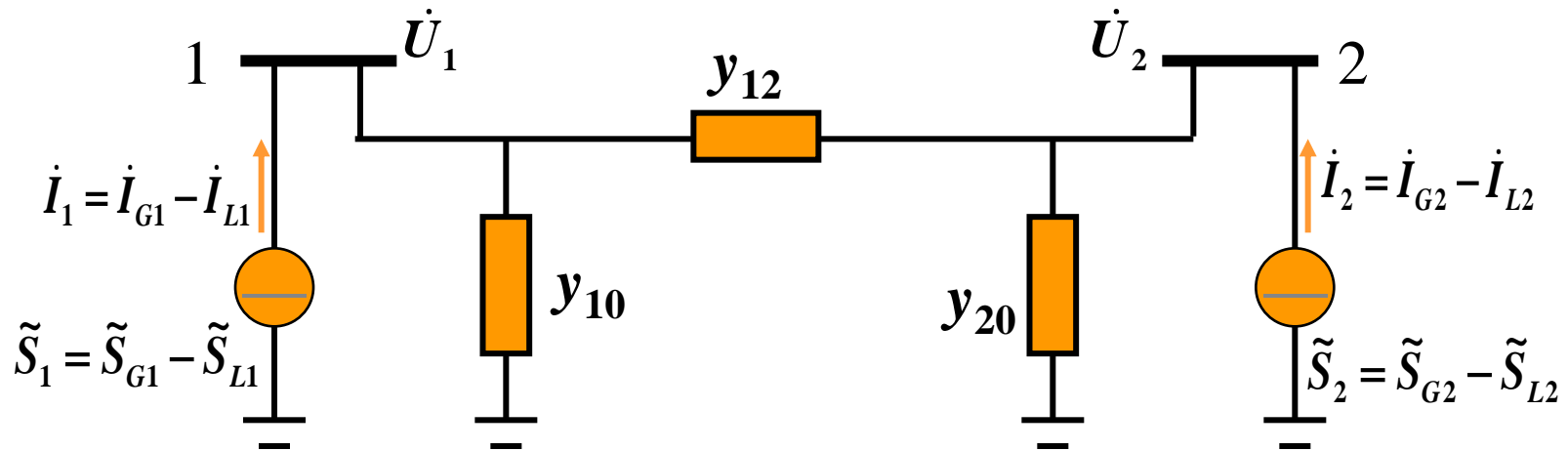
$$P_{G1} + P_{G2} = P_{L1} + P_{L2} + y_s \sin \alpha_s (U_1^2 + U_2^2) - 2y_m U_2 U_1 \cos(\delta_1 - \delta_2) \sin \alpha_m$$

$$Q_{G1} + Q_{G2} = Q_{L1} + Q_{L2} + y_s \cos \alpha_s (U_1^2 + U_2^2) - 2y_m U_2 U_1 \cos(\delta_1 - \delta_2) \cos \alpha_m$$



4.2.1 功率方程和变量、节点的分类

◆ 功率方程



决定功率大小的是**相对相位角**或**相对功率角**: $(\delta_1 - \delta_2)$

有功、无功功率损耗为:

$$\Delta P = y_s \sin \alpha_s (U_1^2 + U_2^2) - 2y_m U_2 U_1 \cos(\delta_1 - \delta_2) \sin \alpha_m$$

$$\Delta Q = y_s \cos \alpha_s (U_1^2 + U_2^2) - 2y_m U_2 U_1 \cos(\delta_1 - \delta_2) \cos \alpha_m$$



4.2.1 功率方程和变量、节点的分类

◆ 变量的类型

除网络参数外，共有十二个变量：

- ▶ 1) 负荷消耗的有功、无功功率—— P_{L1} 、 P_{L2} 、 Q_{L1} 、 Q_{L2} 。取决于用户，不可控变量或扰动变量，用列向量 d 表示。
- ▶ 2) 电源发出的有功、无功功率—— P_{G1} 、 P_{G2} 、 Q_{G1} 、 Q_{G2} 。控制变量，用列向量 μ 表示。
- ▶ 3) 母线或节点电压的大小和相位角—— U_1 、 U_2 、 δ_1 、 δ_2 。状态变量或受控变量， $U \rightarrow Q$ ， $\delta \rightarrow P$ ，用列向量 x 表示。



4.2.1 功率方程和变量、节点的分类

◆ 变量的类型

- ▶ 对于 n 个节点，变量数增为 $6n$ ，其中 d 、 μ 、 x 各 $2n$ 个。
- ▶ 将上述变量进行分类后，只要已知或给定扰动变量和控制变量，就可运用功率方程式解出状态变量 U ， δ 。
- ▶ 但是当 δ_1 、 δ_2 变化同样大小时，功率的数值不变，从而不可能求出绝对相位角，相应的功率损耗也不能确定。

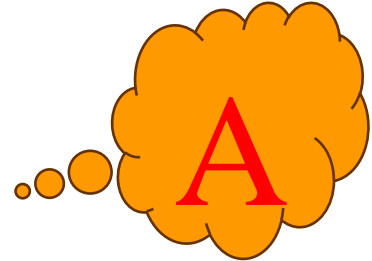




4.2.1 功率方程和变量、节点的分类

◆ 节点待求变量的设定

为克服上述困难，在一个具有 n 个节点的系统中，对变量的给定稍作调整：



▶ 1) 只给定 $(n-1)$ 对控制变量 P_{Gi} 、 Q_{Gi} ，余下一对控制变量 P_{Gs} 、 Q_{Gs} 待定，以使系统功率保持平衡；

▶ 2) 给定一对 δ_s 、 U_s ，其中：

$$\dot{U}_s = U_s \angle \delta_s = 1.0 \angle 0^\circ$$

P_{Li} 、 Q_{Li} 均为已知。

▶ 3) 求解 $(n-1)$ 对状态变量及一对待定的控制变量



4.2.1 功率方程和变量、节点的分类

◆ 节点的分类

- ▶ 1) **PQ节点**: P_{Li} 、 Q_{Li} ; P_{Gi} 、 Q_{Gi} , 即相应的 P_i 、 Q_i 给定, 待求 U_i 、 δ_i 。如按给定有功、无功发电的发电厂母线和没有其他电源的变电所母线。
- ▶ 2) **PU节点**: P_{Li} 、 P_{Gi} , 从而 P_i 给定; Q_{Li} 、 U_i 给定。即相应的 P_i 、 U_i 给定, 待求 Q_{Gi} 、 δ_i 。如有一定无功储备电源变电所母线(很少, 甚至没有)。
- ▶ 3) **平衡节点**: 一般只有一个。设 s 节点为平衡节点, 则: P_{Ls} 、 Q_{Ls} ; U_s 、 δ_s 给定, $U_s = 1.0$, $\delta_s = 0$ 。待求 P_{Gs} 、 Q_{Gs} 。



N个节点的功率方程

◆ 节点注入电流:

$$\dot{I}_i = \left(\frac{\dot{S}_i}{\dot{U}_i} \right)^* = \frac{P_i - jQ_i}{U_i^*}$$

◆ 节点电压方程:

$$\left(\frac{P_i + jQ_i}{\dot{U}_i} \right)^* = \sum_{j=1}^n Y_{ij} \dot{U}_j$$

■ 功率方程:

$$P_i - jQ_i = U_i^* \sum_{j=1}^n Y_{ij} \dot{U}_j$$



N个节点的功率方程

- ◆ 1) 节点电压以直角坐标表示的功率方程:

$$\dot{U}_i = e_i + jf_i$$

$$Y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$$

代入功率方程，则：

$$P_i - jQ_i = (e_i - jf_i) \sum_{j=1}^n (G_{ij} + jB_{ij}) (e_j + jf_j)$$



N个节点的功率方程

- ◆ 将功率方程的实部、虚部分开表示：

$$P_i = e_i \sum_{j=1}^n (G_{ij} e_j - B_{ij} f_j) + f_i \sum_{j=1}^n (G_{ij} f_j + B_{ij} e_j) \quad (4-36a)$$

$$Q_i = f_i \sum_{j=1}^n (G_{ij} e_j - B_{ij} f_j) - e_i \sum_{j=1}^n (G_{ij} f_j + B_{ji} e_j) \quad (4-36b)$$



N个节点的功率方程

◆ 2) 节点电压以极坐标表示的功率方程:

$$\dot{U}_i = U_i e^{j\delta_i} = U_i \cos \delta_i + jU_i \sin \delta_i$$

$$\dot{U}_j = U_j e^{j\delta_j} = U_j \cos \delta_j + jU_j \sin \delta_j$$

代入功率方程:

$$P_i - jQ_i$$

$$= (U_i \cos \delta_i - jU_i \sin \delta_i) \sum_{j=1}^n (G_{ij} + jB_{ij}) (U_j \cos \delta_j + jU_j \sin \delta_j)$$



N个节点的功率方程

- ◆ 将功率方程的实部、虚部分开表示：

$$P_i = U_i \sum_{j=1}^n U_j (G_{ij} \cos \delta_{ij} + B_{ij} \sin \delta_{ij}) \quad (4-43a)$$

$$Q_i = U_i \sum_{j=1}^n U_j (G_{ij} \sin \delta_{ij} - B_{ij} \cos \delta_{ij}) \quad (4-43b)$$

节点功率的变化与节点电压的相对相位角有关

$$\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j$$



求解得出的解应满足如下约束条件：

控制变量

$$P_{Gi \min} < P_{Gi} < P_{Gi \max}$$

$$Q_{Gi \min} < Q_{Gi} < Q_{Gi \max}$$

无电源的节点： $P_{Gi} = 0$ 、 $Q_{Gi} = 0$

节点状态变量

$$U_{i \min} < U_i < U_{i \max}$$

良好的电压质量

$$|\delta_i - \delta_j| < |\delta_i - \delta_j|_{\max}$$

保证系统的稳定性

扰动变量

P_{Li} 、 Q_{Li} 不可控



4.2.2 高斯-赛德尔迭代法

◆ 高斯-赛德尔迭代法既可解线性方程，也可解非线性方程

设有方程组：

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = y_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = y_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = y_3$$



可改写为：

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} (y_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} (y_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}} (y_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)$$



4.2.2 高斯-赛德尔迭代法

◆ 高斯-赛德尔迭代法既可解线性方程，也可解非线性方程

将方程组写为迭代形式：

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} (y_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} (y_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} (y_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)})$$



4.2.2 高斯-赛德尔迭代法

◆ 若式中： a_{ij} 对应 Y_{ij} ； x_i 对应 U_i ； y_i 对应 $\left(\frac{\tilde{S}_i}{U_i}\right)^*$ ；

有： $Y_B U_B = \left(\frac{S}{U}\right)_B^*$ ，则对于第*i*个节点：

$$Y_{ii}\dot{U}_i + \sum_{j \neq i}^n Y_{ij}\dot{U}_j = \frac{P_i - jQ_i}{U_i^*}$$

$$\Rightarrow \dot{U}_i = \frac{1}{Y_{ii}} \left[\frac{P_i - jQ_i}{U_i^*} - \sum_{j \neq i}^n Y_{ij}\dot{U}_j \right]$$



4.2.2 高斯-赛德尔迭代法

- ◆ 此时可用迭代法求解。如设节点1为平衡节点，其余为PQ节点，则有：

$$\dot{U}_2^{(k+1)} = \frac{1}{Y_{22}} \left[\frac{P_2 - jQ_2}{U_2^{*(k)}} - Y_{21}\dot{U}_1 - Y_{23}\dot{U}_3^{(k)} - \dots - Y_{2n}\dot{U}_n^{(k)} \right]$$

$$\dot{U}_3^{(k+1)} = \frac{1}{Y_{33}} \left[\frac{P_3 - jQ_3}{U_3^{*(k)}} - Y_{31}\dot{U}_1 - Y_{32}\dot{U}_2^{(k+1)} - \dots - Y_{3n}\dot{U}_n^{(k)} \right]$$

.....



4.2.2 高斯-赛德尔迭代法

- ◆ 此时可用迭代法求解。如设节点1为平衡节点，其余为PQ节点，则有：

$$\dot{U}_i^{(k+1)} = \frac{1}{Y_{ii}} \left[\frac{P_i - jQ_i}{U_i^{*(k)}} - Y_{i1}\dot{U}_1 - \dots - Y_{ii-1}\dot{U}_{i-1}^{(k+1)} - Y_{ii+1}\dot{U}_{i+1}^{(k)} \dots - Y_{in}\dot{U}_n^{(k)} \right]$$

.....

$$\dot{U}_n^{(k+1)} = \frac{1}{Y_{nn}} \left[\frac{P_n - jQ_n}{U_n^{*(k)}} - Y_{n1}\dot{U}_1 - Y_{n2}\dot{U}_2^{(k+1)} - \dots - Y_{nn-1}\dot{U}_{n-1}^{(k+1)} \right]$$



4.2.2 高斯-赛德尔迭代法

◆ 此时可用迭代法求解。如设节点1为平衡节点，其余为PQ节点，则计算求解步骤为：

- ▶ 1) 先假设一组 $\dot{U}_i^{(0)} (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ ，一般 $\dot{U}_i^{(0)} = 1.0 \angle 0^\circ$ ；
- ▶ 2) 计算 $\dot{U}_i^{(1)} (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ ；
- ▶ 3) 检验 $\left| \dot{U}_i^{(k+1)} - \dot{U}_i^{(k)} \right| < \varepsilon, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ ， ε 为事先给定的允许误差；如该式不满足，则回到步骤2)。



4.2.2 高斯-赛德尔迭代法

◆ 对各类节点的计算和处理:

由于节点的类型不同，已知条件和求解对象不同，约束条件不同，在计算过程中的处理不同:

► 1) PQ节点：按标准迭代式直接迭代;

► 2) PV节点：已知的式 P_p 和 U_p ，求解的是 Q_p ， δ_p ；
按标准迭代式算出 $U_p^{(k)}$ ， $\delta_p^{(k)}$ 后，首先修正:

$\dot{U}_p^{(k)} = U_p \angle \delta_p^{(k)}$ ，然后修正:

$$Q_p^{(k)} = \text{Im}[\dot{U}_p^{(k)*} I_p^{(k)}] = \text{Im}[\dot{U}_p^{(k)*} (Y_{p1} U_1 + \sum_{j=2}^{p-1} Y_{pj} U_j^{(k+1)} + \sum_{j=p}^n Y_{pj} U_j^{(k)})]$$



4.2.2 高斯-赛德尔迭代法

◆ 对各类节点的计算和处理:

► 检查无功是否越限, 如越限, 取限值, 此时: PV→PQ

$$Q_{p \min} \leq Q_p^{(k)} \leq Q_{p \max}$$

► 然后再用 $Q_p^{(k)}$ 计算 $U_p^{(k+1)}$:

$$\dot{U}_p^{(k+1)} = \frac{1}{Y_{pp}} \left[\frac{P_p - jQ_p^{(k)}}{\dot{U}_p^{*(k)}} - Y_{p1}\dot{U}_1 - \dots - Y_{pp-1}\dot{U}_{p-1}^{(k+1)} - Y_{pp+1}\dot{U}_{p+1}^{(k)} \dots - Y_{pn}\dot{U}_n^{(k)} \right]$$



4.2.3 牛顿—拉夫逊迭代法

- ◆ 牛顿拉夫逊算法的核心是将非线性方程的求解转换成相应线性修正方程的迭代求解。
- ◆ 设一维非线性方程： $f(x) = y$
- ◆ x 为满足该方程的真解， $x^{(0)}$ 是该方程的初始近似解，称为初值。令 $\Delta x = x - x^{(0)}$ 。称为修正量。已知初值 $x^{(0)}$ ，如果求出 Δx ，那么就得到了方程的真解 x ：

$$x = x^{(0)} + \Delta x$$



4.2.3 牛顿—拉夫逊迭代法

- ◆ 非线性方程可以表示为

$$f(x) = f(x^{(0)} + \Delta x) = y$$

- ◆ 将 $f(x)$ 在 $x^{(0)}$ 处展为泰勒级数:

$$f(x^{(0)} + \Delta x) = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})\Delta x + f''(x^{(0)})\frac{\Delta x^2}{2!} + \cdots = y$$

- ◆ 忽略式中的高次项

$$f(x^{(0)} + \Delta x) = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})\Delta x = y$$

$$y - f(x^{(0)}) = f'(x^{(0)})\Delta x$$



4.2.3 牛顿—拉夫逊迭代法

◆ 求得修正量:
$$\Delta x^{(0)} = \frac{y - f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$$

◆ 一次近似解:
$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)}$$

◆ 以 $x^{(1)}$ 为新的初值代入修正方程，求得新的修正量：

$$\Delta x^{(1)} = \frac{y - f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})}$$

◆ 二次近似解
$$x^{(2)} = x^{(1)} + \Delta x^{(1)}$$



4.2.3 牛顿—拉夫逊迭代法

- ◆ 不断重复上述步骤，至第 k 次迭代时，
- ◆ 求得 $\Delta x^{(k)} \rightarrow 0$ 时，有 $f(x^{(k+1)}) \rightarrow y$
- ◆ 从而 $x^{(k+1)}$ 即是非线性方程的解。
- ◆ 非线性方程的**收敛标准**：给定任意小正数 ε ，当方程的近似修正量满足：
- ◆ $|\Delta x^{(k)}| < \varepsilon_1$ 或 $|y - f(x^{(k+1)})| < \varepsilon_2$
- ◆ 称已满足收敛标准，即可用近似解 $x^{(k+1)}$ 作为真解



4.2.3 牛顿—拉夫逊迭代法

$$f(x) = y$$

非线性函数

$$f(x^{(0)} + \Delta x^{(0)}) = y$$

设解的初值为 x_0 ，与真解的误差为 Δx_0

$$f(x^{(0)} + \Delta x^{(0)}) \approx f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})\Delta x^{(0)} = y$$

泰勒展开

$$\Delta x^{(1)} = \frac{y - f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)}$$

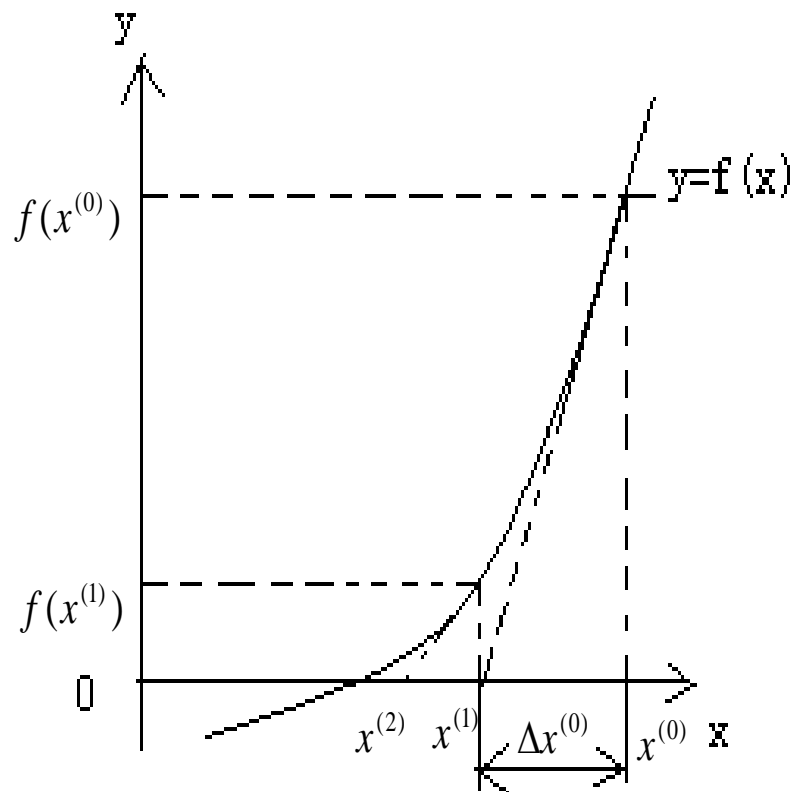
$$\begin{aligned} y - f(x^{(k)}) &= J^{(k)} \Delta x^{(k)} \\ J^{(k)} &= f'(x^{(k)}) \end{aligned}$$

——修正方程式

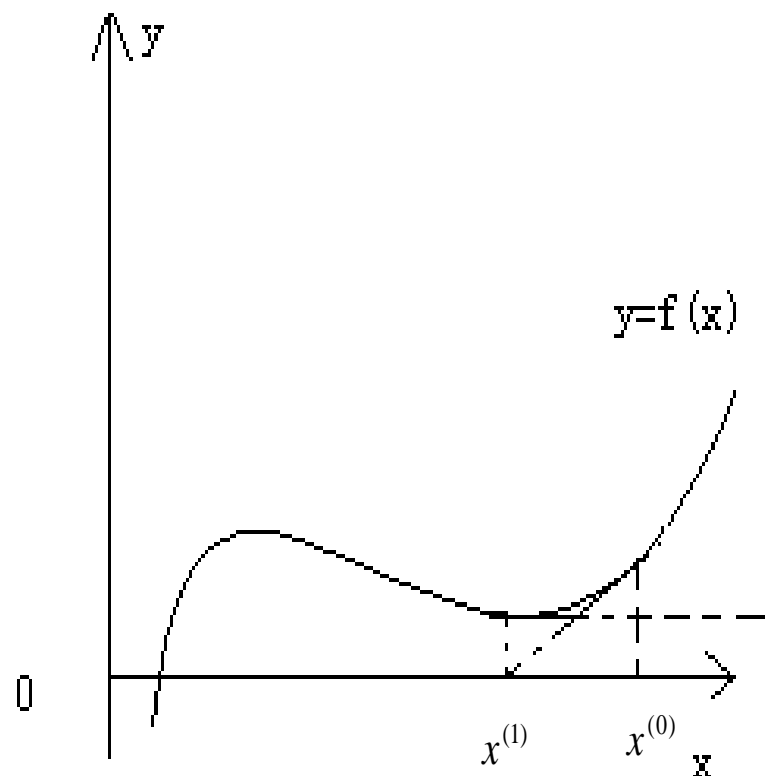
雅可比因子



4.2.3 牛顿-拉夫逊迭代法



(a) 初值选择适当 收敛



(b) 初值选择不当 不收敛



4.2.3 牛顿—拉夫逊迭代法

◆ 牛顿—拉夫逊迭代法（N阶非线性方程）：

► 非线性方程组：

$$f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = Y_1$$

$$f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) = Y_2$$

.....

$$f_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = Y_n$$

近似解： $X_1^{(0)}$, $X_2^{(0)}$, \dots , $X_n^{(0)}$

近似解与精确值的差值： ΔX_1 , ΔX_2 , \dots , ΔX_n



4.2.3 牛顿—拉夫逊迭代法

◆ 牛顿—拉夫逊迭代法（N阶非线性方程）：

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \begin{aligned} & f_1(X_1^{(0)} + \Delta X_1, X_2^{(0)} + \Delta X_2, \dots, X_n^{(0)} + \Delta X_n) = y_1 \\ & f_2(X_1^{(0)} + \Delta X_1, X_2^{(0)} + \Delta X_2, \dots, X_n^{(0)} + \Delta X_n) = y_2 \\ & \dots\dots\dots \\ & f_n(X_1^{(0)} + \Delta X_1, X_2^{(0)} + \Delta X_2, \dots, X_n^{(0)} + \Delta X_n) = y_n \end{aligned} \end{aligned}$$

将上式按泰勒级数展开：

$$\begin{aligned} & f_i(X_1^{(0)} + \Delta X_1, X_2^{(0)} + \Delta X_2, \dots, X_n^{(0)} + \Delta X_n) \\ & = f_i(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}) + \frac{\partial f_i}{\partial X_1} \bigg|_0 \Delta X_1 + \frac{\partial f_i}{\partial X_2} \bigg|_0 \Delta X_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial X_n} \bigg|_0 \Delta X_n + \phi_i = y_i \end{aligned}$$



4.2.3 牛顿—拉夫逊迭代法

◆ 牛顿—拉夫逊迭代法（常用于解非线性方程）：

► 由此可得：

$$f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_0 \Delta x_1 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_0 \Delta x_2 + \dots + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_0 \Delta x_n = y_1$$

$$f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_0 \Delta x_1 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_0 \Delta x_2 + \dots + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_0 \Delta x_n = y_2$$

...

...

$$f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_0 \Delta x_1 + \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right|_0 \Delta x_2 + \dots + \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_0 \Delta x_n = y_n$$



4.2.3 牛顿—拉夫逊迭代法

◆ 牛顿—拉夫逊迭代法（常用于解非线性方程）：

► 线性方程或修正方程组为：

$$\begin{bmatrix} y_1 - f_1(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}) \\ y_2 - f_2(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}) \\ \vdots \\ y_n - f_n(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial X_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_1}{\partial X_2} \right|_0 & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial X_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \right|_0 & \dots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \right|_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial X_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_n}{\partial X_2} \right|_0 & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial X_n} \right|_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \\ \vdots \\ \Delta X_n \end{bmatrix}$$



4.2.3 牛顿—拉夫逊迭代法

◆ 牛顿—拉夫逊迭代法（常用于解非线性方程）：

► 线性方程或修正方程组的矩阵形式为：

$$\Delta f = J \cdot \Delta x \quad J - f_i \text{ 的雅克比矩阵}$$

1) 将 $x_i^{(0)}$ 代入，算出 Δf , J 中各元素，代入上式方程组，解出 $\Delta x_i^{(0)}$ ；

2) 修正 $x_i^{(1)} = x_i^{(0)} + \Delta x_i^{(0)}$ ，算出 Δf , J 中各元素，代入上式方程组，解出 $\Delta x_i^{(1)}$ ，直至：

$$\left| \Delta f(\mathbf{x}^{(k)}) \right| < \varepsilon_1 \quad \text{或} \quad \left| \Delta \mathbf{x}^{(k)} \right| < \varepsilon_2 \circ$$



4.3 牛顿—拉夫逊法潮流计算

◆ 潮流计算时的修正方程式:

► 网络中各类节点的编号:

- 设系统中有 n 个节点, 编号为 $1, 2, 3, \dots, n$;
- 网络中有一个平衡节点, 编号为 s ;
- 网络中有 $m-1$ 个PQ节点, 编号为 $1, 2, \dots, m$, 其中包含编号为 s 的平衡节点;
- 网络中有 $n-m$ 个PV节点, 编号为 $m+1, m+2, \dots, n$;



4.3 牛顿—拉夫逊法潮流计算

◆ 潮流计算时的修正方程式：

► 节点电压用直角坐标表示：

$$\sum_{j=1}^n [e_i(G_{ij}e_j - B_{ij}f_j) + f_i(G_{ij}f_j + B_{ij}e_j)] = P_i$$

(m-1)个PQ节点+(n-m)个PV节点，共n-1个

$$\sum_{j=1}^n [f_i(G_{ij}e_j - B_{ij}f_j) - e_i(G_{ij}f_j + B_{ij}e_j)] = Q_i$$

(m-1)个PQ节点

$$e_i^2 + f_i^2 = U_i^2$$

(n-m)个PV节点



4.3 牛顿—拉夫逊法潮流计算

◆ 潮流计算时的修正方程式：

► 节点电压用直角坐标表示：

相应的：

$$\Delta P_i = P_i - \sum_{j=1}^n [e_i(G_{ij}e_j - B_{ij}f_j) + f_i(G_{ij}f_j + B_{ij}e_j)]$$

$$\Delta Q_i = Q_i - \sum_{j=1}^n [f_i(G_{ij}e_j - B_{ij}f_j) - e_i(G_{ij}f_j + B_{ij}e_j)]$$

$$\Delta U_i^2 = U_i^2 - (e_i^2 + f_i^2)$$



4.3 牛顿—拉夫逊法潮流计算

◆ 潮流计算时的修正方程式：

► 节点电压用直角坐标表示的修正方程式：

$$\begin{array}{c}
 \text{PQ节点} \\
 \left[\begin{array}{c} \Delta P_1 \\ \Delta Q_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta Q_2 \\ \vdots \end{array} \right] \\
 \\
 \text{PV节点} \\
 \left[\begin{array}{c} \Delta P_p \\ \Delta U_p^2 \\ \Delta P_n \\ \Delta U_n^2 \end{array} \right]
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 H_{11} & N_{11} & H_{12} & N_{12} & H_{1p} & N_{1p} & H_{1n} & N_{1n} \\
 J_{11} & L_{11} & J_{1p} & L_{1p} & J_{1p} & L_{1p} & J_{1n} & L_{1n} \\
 H_{21} & N_{21} & H_{22} & N_{22} & H_{2p} & N_{2p} & H_{2n} & N_{2n} \\
 J_{21} & L_{21} & J_{22} & L_{22} & J_{2p} & L_{2p} & J_{2n} & L_{2n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 H_{p1} & N_{p1} & H_{p2} & N_{p2} & H_{pp} & N_{pp} & H_{pn} & N_{pn} \\
 R_{p1} & S_{p1} & R_{p2} & S_{p2} & R_{pp} & S_{pp} & R_{pn} & S_{pn} \\
 H_{n1} & N_{n1} & H_{n2} & N_{n2} & H_{np} & N_{np} & H_{nn} & N_{nn} \\
 R_{n1} & S_{n1} & R_{n2} & S_{n2} & R_{np} & S_{np} & R_{nn} & S_{nn}
 \end{array} \right]
 \left[\begin{array}{c} \Delta f_1 \\ \Delta e_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta e_2 \\ \dots \\ \Delta f_p \\ \Delta e_p \\ \Delta f_n \\ \Delta e_n \end{array} \right]
 \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{2(m-1)}$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{2(n-m)}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{2(m-1)}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{2(n-m)}$



4.3 牛顿—拉夫逊法潮流计算

◆ 潮流计算时的修正方程式：

► 用直角坐标表示的修正方程：

$$H_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial f_j} \qquad N_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial e_j}$$

$$J_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial f_j} \qquad L_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial e_j}$$

$$R_{ij} = \frac{\partial U_i^2}{\partial f_j} \qquad S_{ij} = \frac{\partial U_i^2}{\partial e_j}$$



4.3 牛顿—拉夫逊法潮流计算

◆ 潮流计算时的修正方程式:

► 用直角坐标表示的修正方程中雅克比矩阵的非对角元:

$$H_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial f_j} = -B_{ij}e_i + G_{ij}f_i \quad N_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial e_j} = G_{ij}e_i + B_{ij}f_i$$

$$J_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial f_j} = -B_{ij}f_i - G_{ij}e_i = -N_{ij} \quad L_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial e_j} = G_{ij}f_i - B_{ij}e_i = H_{ij}$$

$$R_{ij} = \frac{\partial U_i^2}{\partial f_j} = 0 \quad S_{ij} = \frac{\partial U_i^2}{\partial e_j} = 0$$



4.3 牛顿—拉夫逊法潮流计算

◆ 潮流计算时的修正方程式：

► 节点注入电流表示式：

$$\begin{aligned} I_i &= Y_{ii} \dot{U}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} Y_{ij} \dot{U}_j \\ &= [(G_{ii}e_i - B_{ii}f_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} (G_{ij}e_j - B_{ij}f_j)] + j[(G_{ii}f_i + B_{ii}e_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} (G_{ij}f_j + B_{ij}e_j)] \\ &= a_{ii} + jb_{ii} \end{aligned}$$



4.3 牛顿—拉夫逊法潮流计算

◆ 潮流计算时的修正方程式:

► 用直角坐标表示的修正方程中雅克比矩阵的对角元:

$$H_{ii} = \frac{\partial P_i}{\partial f_i} = -B_{ii}e_i + G_{ii}f_i + b_{ii} \quad N_{ii} = \frac{\partial P_i}{\partial e_i} = G_{ii}e_i + B_{ii}f_i + a_{ii}$$

$$J_{ii} = \frac{\partial Q_i}{\partial f_i} = -G_{ii}e_i - B_{ii}f_i + a_{ii} \quad L_{ii} = \frac{\partial Q_i}{\partial e_i} = -B_{ii}e_i + G_{ii}f_i - b_{ii}$$

$$R_{ii} = \frac{\partial U_i^2}{\partial f_i} = 2f_i \quad S_{ii} = \frac{\partial U_i^2}{\partial e_i} = 2e_i$$



4.3 牛顿—拉夫逊法潮流计算

◆ 潮流计算时的修正方程式：

► 用极坐标表示的修正方程：

$$\begin{array}{c} \text{PQ节点} \\ \text{PV节点} \end{array} \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta Q_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta Q_2 \\ \vdots \\ \Delta P_p \\ \Delta P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & N_{11} & H_{12} & N_{12} & H_{1p} & H_{1n} \\ J_{11} & L_{11} & J_{12} & L_{12} & J_{1p} & J_{1n} \\ H_{21} & N_{21} & H_{22} & N_{22} & H_{2p} & H_{2n} \\ J_{21} & L_{21} & J_{22} & L_{22} & J_{2p} & J_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{p1} & N_{p1} & H_{p2} & N_{p2} & H_{pp} & H_{pn} \\ H_{n1} & N_{n1} & H_{n2} & N_{n2} & H_{np} & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_1 \\ \Delta U_1 / U_1 \\ \Delta \delta_2 \\ \Delta U_2 / U_2 \\ \vdots \\ \Delta \delta_p \\ \Delta \delta_n \end{bmatrix}$$

$\xleftarrow{2(m-1)}$
 $\xrightarrow{2(n-m)}$
 $\xleftarrow{2(m-1)}$
 $\xrightarrow{2(n-m)}$



4.3 牛顿—拉夫逊法潮流计算

◆ 潮流计算时的修正方程式：

► 用极坐标表示的修正方程：

$$H_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} \quad N_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial U_j} U_j$$

$$J_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_j} \quad L_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial U_j} U_j$$



4.3 牛顿—拉夫逊法潮流计算

◆ 潮流计算时的修正方程式:

► 用极坐标表示的修正方程中雅克比矩阵的非对角元:

$$H_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} = U_i U_j (G_{ij} \sin \delta_{ij} - B_{ij} \cos \delta_{ij})$$

$$J_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_j} = -U_i U_j (G_{ij} \cos \delta_{ij} + B_{ij} \sin \delta_{ij})$$

$$N_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial U_j} U_j = U_i U_j (G_{ij} \cos \delta_{ij} + B_{ij} \sin \delta_{ij})$$

$$L_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial U_j} U_j = U_i U_j (G_{ij} \sin \delta_{ij} - B_{ij} \cos \delta_{ij})$$



4.3 牛顿—拉夫逊法潮流计算

◆ 潮流计算时的修正方程式：

► 用极坐标表示的修正方程中雅克比矩阵的对角元：

$$H_{ii} = \frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = -U_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} U_j (G_{ij} \sin \delta_{ij} - B_{ij} \cos \delta_{ij})$$

$$J_{ii} = \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = U_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} U_j (G_{ij} \cos \delta_{ij} + B_{ij} \sin \delta_{ij})$$

$$N_{ii} = \frac{\partial P_i}{\partial U_i} U_i = U_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} U_j (G_{ij} \cos \delta_{ij} + B_{ij} \sin \delta_{ij}) + 2U_i^2 G_{ii}$$

$$L_{ii} = \frac{\partial Q_i}{\partial U_i} U_i = U_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} U_j (G_{ij} \sin \delta_{ij} - B_{ij} \cos \delta_{ij}) - 2U_i^2 B_{ii}$$



4.3 牛顿—拉夫逊法潮流计算

◆ 潮流计算时的修正方程式中雅可比矩阵的特点

- ▶ 1) 雅可比矩阵各元素均是节点电压相量的函数，在迭代过程中，各元素的值将随着节点电压相量的变化而变化。因此迭代过程中要不断重新计算雅可比矩阵各元素的值；
- ▶ 2) 雅可比矩阵各非对角元素均与 $Y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$ 有关，当 $Y_{ij} = 0$ ，这些非对角元素也为0，将雅可比矩阵进行分块，每块矩阵元素均为 2×2 阶子阵，分块矩阵与节点导纳矩阵有相同的稀疏性结构；
- ▶ 3) 非对称矩阵。



4.3 牛顿—拉夫逊法潮流计算

◆ 潮流计算的具体步骤

- ▶ 1) 形成节点导纳矩阵 Y_B ;
- ▶ 2) 设各节点电压的初值 $e_i^{(0)}$ 、 $f_i^{(0)}$ 或 $U_i^{(0)}$ 、 $\delta_i^{(0)}$;
- ▶ 3) 根据各节点电压的初值求修正方程式中的不平衡量 $\Delta P_i^{(0)}$ 、 $\Delta Q_i^{(0)}$ 以及 $\Delta U_i^{(0)}$;²
- ▶ 4) 根据各节点电压的初值求修正方程式的系数矩阵——雅克比矩阵的各个元素 $H_{ij}^{(0)}$ 、 $N_{ij}^{(0)}$ 、 $J_{ij}^{(0)}$ 、 $L_{ij}^{(0)}$ 以及 $R_{ij}^{(0)}$ 、 $S_{ij}^{(0)}$;



4.3 牛顿—拉夫逊法潮流计算

◆ 潮流计算的具体步骤

► 5) 解修正方程式，求各节点电压的变化量，即修正量 $\Delta e_i^{(0)}$ 、 $\Delta f_i^{(0)}$ 或 $\Delta U_i^{(0)}$ 、 $\Delta \delta_i^{(0)}$ ；

► 6) 计算各节点电压的新值，即修正后值：

$$e_i^{(1)} = e_i^{(0)} + \Delta e_i^{(0)}; \quad f_i^{(1)} = f_i^{(0)} + \Delta f_i^{(0)}$$

$$\text{或: } U_i^{(1)} = U_i^{(0)} + \Delta U_i^{(0)}; \quad \delta_i^{(1)} = \delta_i^{(0)} + \Delta \delta_i^{(0)} ;$$

► 7) 运用各节点电压的新值自第三步开始进入下一次迭代；

► 8) 计算平衡节点功率和线路功率。

输入数据

(1)形成节点导纳矩阵
(2) 设置初值

(3)求修正方程式
的常数项向量

$$\Delta P_i^{(0)}, \Delta Q_i^{(0)}, (\Delta U^2)^{(0)}$$

(4)用节点电压的初始
值求出雅可比矩阵元素

(5)求解修正方程式，
求出变量的修正向量

$$\Delta e_i^{(0)}, \Delta f_i^{(0)} \text{ 或 } \Delta U_i^{(0)}, \Delta \theta_i^{(0)}$$

(6)求出节点
电压新值

$$\left. \begin{aligned} e_i^{(1)} &= e_i^{(0)} + \Delta e_i^{(0)} \\ f_i^{(1)} &= f_i^{(0)} + \Delta f_i^{(0)} \end{aligned} \right\}$$

N

(7) 检查是否收敛?

Y

(8) 计算支路功率分
布，PV节点无功功率
和平衡节点注入功率



4.4 P-Q分解法潮流计算

- ◆ 快速解耦潮流（P-Q解耦潮流）计算派生于以极坐标表示的牛顿—拉夫逊法潮流。主要区别在修正方程式和计算步骤。
- ◆ 牛顿—拉夫逊算法的工作量主要是由于每次迭代都要重新形成雅可比矩阵，重新进行因子表分解，并求解修正方程。当电力网络较大，节点数较多时，雅可比矩阵的阶数很高，使计算机工作量很大，存储量也很大。
- ◆ 快速解耦潮流算法就是结合电力网络的特点，对牛顿拉夫逊算法进行合理的简化和改进的一种潮流算法。



4.4 P-Q分解法潮流计算

◆ 潮流计算时的修正方程

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \vdots \\ \Delta P_p \\ \Delta P_n \\ \hline \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1p} & H_{1n} & N_{11} & N_{12} & \cdots \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2p} & H_{2n} & N_{21} & N_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ H_{p1} & H_{p2} & \cdots & H_{pp} & H_{pn} & N_{p1} & N_{p2} & \cdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \cdots & H_{np} & H_{nn} & N_{n1} & N_{n2} & \cdots \\ \hline J_{11} & J_{12} & \cdots & J_{1p} & J_{1n} & L_{11} & L_{12} & \cdots \\ J_{21} & J_{22} & \cdots & J_{2p} & J_{2n} & L_{21} & L_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_1 \\ \Delta \delta_2 \\ \vdots \\ \Delta \delta_p \\ \Delta \delta_n \\ \hline \Delta U_1 / U_1 \\ \Delta U_2 / U_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

(n-1)
(m-1)

(n-1)
(m-1)



4.4 P-Q分解法潮流计算

◆ 潮流计算时的修正方程

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ J & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U/U \end{bmatrix}$$

► 1) 对修正方程式的第一步简化（**解耦**）：

高压网络中，各元件的 $X \gg R$ ， $\delta \rightarrow P$ ，相应的有 $J \approx 0$ ； $U \rightarrow Q$ ， $N \approx 0$ 。

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U/U \end{bmatrix}$$



4.4 P-Q分解法潮流计算

◆ 潮流计算时的修正方程

► 2) 对修正方程式的第二步简化

高压网络中，各元件的 $X \gg R$ ，使 $G_{ij} \ll B_{ij}$ ，再加上系统稳定性的要求，即 $|\delta_i - \delta_j| < |\delta_i - \delta_j|_{\max}$ ， $|\delta_i - \delta_j|_{\max} = (10^\circ \sim 20^\circ)$ 。则有：

$$\cos \delta_{ij} \approx 1 \quad G_{ij} \sin \delta_{ij} \ll B_{ij}$$

$$H_{ij} \approx -U_i U_j B_{ij} \quad H_{ii} = U_i \sum_{j=1}^n U_j B_{ij} - U_i^2 B_{ii} \approx -Q_i - U_i^2 B_{ii}$$

\Rightarrow

$$L_{ij} \approx -U_i B_{ij} \quad L_{ii} = -\sum_{j=1}^n U_j B_{ij} - U_i B_{ii} \approx Q_i - U_i B_{ii}$$



4.4 P-Q分解法潮流计算

◆ 潮流计算时的修正方程

► 3) 对修正方程式的第三步简化

$U_i^2 B_{ii}$ 为 $R \ll X$ 情况下，除节点 i 外其余节点都接地时，由节点 i 注入的无功功率。

$$B_{ij} U_i^2 \gg Q_i$$

因此， H_{ii} , L_{ii} 又进一步简化为：

$$\begin{cases} H_{ii} = -U_i^2 B_{ii} \\ L_{ii} = -U_i B_{ii} \end{cases}$$



4.4 P-Q分解法潮流计算

◆ 潮流计算时的修正方程

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 / U_1 \\ \Delta P_2 / U_2 \\ \vdots \\ \Delta P_n / U_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \Delta \delta_1 \\ U_2 \Delta \delta_2 \\ \vdots \\ U_n \Delta \delta_n \end{bmatrix}$$

简写为：

$$\Delta P / U = -B' U \Delta \delta$$



4.4 P-Q分解法潮流计算

◆ 潮流计算时的修正方程

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_1 / U_1 \\ \Delta Q_2 / U_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_m / U_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \vdots \\ \Delta U_m \end{bmatrix}$$

简写为：

$$\Delta Q / U = -B'' \Delta U$$



4.4 P-Q分解法潮流计算

- ◆ P-Q分解法的特点（与牛顿-拉夫逊法比较）：
 - ▶ 1) 以一个 $n-1$ 阶和一个 $m-1$ 阶系数矩阵代替原有的 $n-m-2$ 阶系数矩阵，提高了计算速度，降低了对存储量的要求；
 - ▶ 2) 以在迭代过程中保持不变的系数矩阵 B' 和 B'' 替代变化的系数矩阵 J ，大幅提高了计算速度；
 - ▶ 3) 以对称的系数矩阵 B' 和 B'' 替代不对称的系数矩阵 J ，大幅降低了求逆等运算量和所需的存储量。



4.4 P-Q分解法潮流计算

◆ 快速解耦潮流算法解算步骤如下：

- ▶ 1) 形成系数矩阵 B' , B'' ，并求其逆阵；
- ▶ 2) 设置各节点电压的初值 $\delta_i^{(0)} (i = 2, \dots, n, i \neq s)$ 和 $U_i^{(0)} (i = 2, \dots, m, i \neq s)$ ；
- ▶ 3) 将初值代入有功功率方程式，求出有功不平衡量 $\Delta P_i^{(0)}$ ，得到 $\Delta P_i^{(0)} / U_i^{(0)} (i = 2, \dots, n, i \neq s)$ ；
- ▶ 4) 解有功功率电压相角修正方程式，求各节点电压相角的修正量 $\Delta \delta_i^{(0)} (i = 2, \dots, n, i \neq s)$ ；



4.4 P-Q分解法潮流计算

◆ 快速解耦潮流算法解算步骤如下：

► 5) 求各节点电压相角的新值：

$$\delta_i^{(1)} = \delta_i^{(0)} + \Delta\delta_i^{(0)} (i = 2, \dots, n, i \neq s)$$

► 6) 将初值代入无功功率方程式，求出无功不平衡量

$$\Delta Q_i^{(0)}, \Delta Q_i^{(0)} / U_i^{(0)} (i = 2, \dots, n, i \neq s) ;$$

► 7) 解无功功率电压幅值修正方程式，求各节点电压模值的修正量 $\Delta U_i^{(0)} (i = 2, \dots, n, i \neq s) ;$

► 8) 求各节点电压模值新值

$$U_i^{(1)} = U_i^{(0)} + \Delta U_i^{(0)} (i = 2, \dots, n, i \neq s)$$



4.4 P-Q分解法潮流计算

◆ 快速解耦潮流算法解算步骤如下：

- ▶ 9) 将各节点电压迭代值作为新的初始值自第三步开始进入下一次迭代；
- ▶ 10) 计算平衡节点功率和线路功率。

牛顿拉夫逊法与PQ分解法的比较



- ◆ 与牛顿拉夫逊法相比，PQ分解潮流算法的修正方程用两个常数阵 \mathbf{B}' 、 \mathbf{B}'' 代替原来变化的高阶的雅可比矩阵 \mathbf{J} ，不需每次迭代后修改；可以进行P，Q解耦计算；系数矩阵 \mathbf{B}' 、 \mathbf{B}'' 为对称阵。因此可以提高计算速度，降低存储容量。
- ◆ 快速解耦潮流算法和牛顿一拉夫逊潮流算法的收敛判据相同，因此推导修正方程式所作的假设并不影响算法的计算精度。
- ◆ 一般情况下，采用P-Q解耦潮流计算时的迭代次数较采用牛顿一拉夫逊法时多，但每次迭代所需的时间则较采用牛顿一拉夫逊法时少，以致总的计算速度仍是P-Q解耦法快。
- ◆ 如果不满足 $\mathbf{R} \ll \mathbf{X}$ 的条件，快速解耦潮流算法会导致不收敛。



4.5 潮流计算中稀疏技术的运用

◆ 概述

- ▶ 1) 矩阵的稀疏度为矩阵中的零元素与矩阵总元素之比
；
- ▶ 2) 电力网络特点决定了电网的导纳矩阵是稀疏的（如：
对于节点数为10、100、1000的网络，节点导纳矩阵的稀疏度分别为50%—60%，95%—96%，99.5%—99.6%）；
- ▶ 3) 迭代法修正方程式中的雅克比矩阵与导纳矩阵有同样的结构，也必将高度稀疏



4.5 潮流计算中稀疏技术的运用

◆ 稀疏技术

所谓稀疏技术，是指选择算法和编制程序时，尽可能避免存储稀疏矩阵中的零元素和避免对这些零元素进行运算的技术。具体而言，包括以下几方面：

- ▶ 稀疏存储:对于稀疏矩阵只存储其非零元素
- ▶ 因子表技术
- ▶ 网络节点编号优化技术



4.5 潮流计算中稀疏技术的运用

◆ 稀疏矩阵的存贮技术

▶ 1) 按坐标存贮的方案:

- 按矩阵元素在矩阵中的位置存贮;
- D1AG、OFFD、IROW、ICOL分别表示对角元、非对角元、行号、列号;
- 需占用 $(n+3N)$ 个存贮单元, n 为对角元数, N 为非零非对角元数;
- 简单、直观, 便于检索, 不便于参与运算。



4.5 潮流计算中稀疏技术的运用

◆ 稀疏矩阵的存贮技术

► 1) 按坐标存贮的方案

$$\begin{bmatrix} 15 & 10 & 4 & & & \\ 8 & 11 & & & & \\ 5 & & 20 & 7 & & 14 \\ & & 9 & 12 & 3 & \\ & & & 2 & 22 & 17 \\ & & 13 & & 16 & 18 \end{bmatrix}$$

i) 矩阵的对角元将自左上至右下存贮在一个一维数组内;

顺序号I	1	2	3	4	5	6
D1AG	15	11	20	12	22	18

ii) 矩阵的非对角元按如下方式存贮:

顺序号m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OFFD	10	4	8	5	7	14	9	3	2	17	13	16
IROW	1	1	2	3	3	3	4	4	5	5	6	6
ICOL	2	3	1	1	4	6	3	5	4	6	3	5



4.5 潮流计算中稀疏技术的运用

◆ 稀疏矩阵的存贮技术

► 2) 按顺序存贮的方案:

- 对角元存贮同按坐标存贮的方案;
- 非对角元分行按从左至右自上而下的顺序存贮, 且由另一数组存贮IROW;
- 需占用 $(2n+2N)$ 个存贮单元, n 为对角元数, N 为非零非对角元数;
- 不如坐标存贮方案简单、直观, 但便于检索, 便于参与运算, 且所需存贮单元数少于坐标存贮方案。



4.5 潮流计算中稀疏技术的运用

◆ 稀疏矩阵的存贮技术

► 2) 按顺序存贮的方案

$$\begin{bmatrix} 15 & 10 & 4 & & & \\ 8 & 11 & & & & \\ 5 & & 20 & 7 & & 14 \\ & & 9 & 12 & 3 & \\ & & & 2 & 22 & 17 \\ & & 13 & & 16 & 18 \end{bmatrix}$$

i) 矩阵的对角元将自左上至右下存贮在一个一维数组内;

顺序号I	1	2	3	4	5	6
D1AG	15	11	20	12	22	18

ii) 矩阵的非对角元按如下方式存贮:

顺序号I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OFFD	10	4	8	5	7	14	9	3	2	17	13	16
IROW	2	3	1	1	4	6	3	5	4	6	3	5

顺序号I	1	2	3	4	5	6
D1AG	1	3	4	7	9	11



4.5 潮流计算中稀疏技术的运用

◆ 稀疏矩阵的存贮技术

▶ 3) 按链表存贮的方案:

- 链表，是指用以表示同一行（列）中各非零非对角元链接顺序的表格；
- 对角元存贮方式同按坐标存贮和按顺序存贮方案，非零对角元因有了链表，不再要求按顺序存贮，此外仍需一数组存贮IROW；
- OFFD、ICOL、IROW含义同按顺序存贮方案；



4.5 潮流计算中稀疏技术的运用

◆ 稀疏矩阵的存贮技术

▶ 3) 按链表存贮的方案:

- NEXT是链表，其中存放的数表示同一 m 行中，从左至右，下一个非零非对角元的顺序号 l ;
- NEXT为零时，表示该行中不再有非零非对角元;
- 更加所存的矩阵参与运算，但需要增加 N 个存贮单元用以存放NEXT数组，这一方案的应用正日益广泛。



4.5 潮流计算中稀疏技术的运用

◆ 稀疏矩阵的存贮技术

► 3) 按链表存贮的方案

$$\begin{bmatrix} 15 & 10 & 4 & & & \\ 8 & 11 & & & & \\ 5 & & 20 & 7 & & 14 \\ & & 9 & 12 & 3 & \\ & & & 2 & 22 & 17 \\ & & 13 & & 16 & 18 \end{bmatrix}$$

i) 矩阵的对角元存贮同顺序存贮方案;

ii) 矩阵的非对角元按如下方式存贮:

顺序号m	1	2	3	4	5	6
IROW	3	1	2	5	8	9

顺序号I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OFFD	8	5	10	4	9	7	3	2	13	14	16	17
ICOL	1	1	2	3	3	4	5	4	3	6	5	6
NEXT	0	6	4	0	7	10	0	12	11	0	0	0



4.5 潮流计算中稀疏技术的运用

◆ 因子表的形成与应用

► 以高斯消元法形成因子表

设修正方程为：

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = b_3 \end{cases}$$

改写为矩阵方程式：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$



4.5.2 因子表的形成与应用

◆ 以高斯消元法形成因子表

► 1) 将其中第一式进行规格化: $x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)}$

其中: $a_{12}^{(1)} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$, $a_{13}^{(1)} = \frac{a_{13}}{a_{11}}$, $b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}}$ 。上标 (n) 表示运算次数。

2) 消去第二、第三式中的 x_1

i) 消去第二式中的 x_1 :

$$(a_{21} - a_{21})x_1 + (a_{22} - a_{21}a_{12}^{(1)})x_2 + (a_{23} - a_{21}a_{13}^{(1)})x_3 = b_2 - a_{21}b_1^{(1)}$$

将其写作: $a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)}$



4.5.2 因子表的形成与应用

◆ 以高斯消元法形成因子表

► 2) 消去第二、第三式中的 x_1

i) 消去第二式中的 x_1 : $a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)}$

$$\text{式中: } a_{22}^{(1)} = a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}$$

$$a_{23}^{(1)} = a_{23} - \frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}}$$

$$b_2^{(1)} = b_2 - b_1 \frac{a_{21}}{a_{11}}$$



4.5.2 因子表的形成与应用

◆ 以高斯消元法形成因子表

► 2) 消去第二、第三式中的 x_1

ii) 同理，消去第三式中的 x_1 ： $a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)}$

$$\text{式中： } a_{32}^{(1)} = a_{32} - \frac{a_{31}a_{12}}{a_{11}}$$

$$a_{33}^{(1)} = a_{33} - \frac{a_{31}a_{13}}{a_{11}}$$

$$b_3^{(1)} = b_3 - b_1 \frac{a_{31}}{a_{11}}$$



4.5.2 因子表的形成与应用

◆ 以高斯消元法形成因子表

► 2) 消去第二、第三式中的 x_1

iii) 将消元后的第二式规格化: $x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)}$

式中:
$$a_{23}^{(2)} = \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

$$b_2^{(2)} = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$



4.5.2 因子表的形成与应用

◆ 以高斯消元法形成因子表

► 3) 消去消元后第三式中的 x_2

$$(a_{32}^{(1)} - a_{32}^{(1)})x_2 + (a_{33}^{(1)} - a_{32}^{(1)}a_{23}^{(2)})x_3 = b_3^{(1)} - a_{32}^{(1)}b_2^{(2)}$$

可将其写作： $a_{33}^{(2)}x_3 = b_3^{(2)}$

$$\text{式中： } a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - b_2^{(1)} \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

将第二次消元后的第三式进行规格化：

$$x_3 = b_3^{(3)}, \quad \text{式中： } b_3^{(3)} = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$$



4.5.2 因子表的形成与应用

◆ 以高斯消元法形成因子表

► 高斯消元前进过程结束后所得的方程组可改写为：

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_3 = b_3^{(3)} \\ X_2 + a_{23}^{(2)} X_3 = b_2^{(2)} \\ X_1 + a_{12}^{(1)} X_2 + a_{13}^{(1)} X_3 = b_1^{(1)} \end{cases}$$

可由第一式求得 x_3 ，代入第二式求得 x_2 ，再将 x_3 、 x_2 代入第三式求得 x_1 ，即高斯消元法的回代过程。



4.5.2 因子表的形成与应用

◆ 以三角分解法形成因子表

- ▶ 所谓三角分解法即任何方阵A都可分解为一个下三角矩阵L与一个上三角矩阵R的乘积，即 $A=LR$ 。而如其中之一，例如R的所有对角元都等于1，就可单值地确定这两个三角矩阵。

以三阶矩阵为例，将 $A=LR$ 展开为：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



4.5.2 因子表的形成与应用

◆ 以三角分解法形成因子表

▶ 等号右侧两个矩阵相乘，得：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}r_{12} & l_{11}r_{13} \\ l_{21} & l_{21}r_{12} + l_{22} & l_{21}r_{13} + l_{22}r_{23} \\ l_{31} & l_{31}r_{12} + l_{32} & l_{31}r_{13} + l_{32}r_{23} + l_{33} \end{bmatrix}$$

▶ 由第一列可得： $l_{11} = a_{11}$; $l_{21} = a_{21}$; $l_{31} = a_{31}$

▶ 由第二列可得： $l_{11}r_{12} = a_{12}$; $l_{21}r_{12} + l_{22} = a_{22}$; $l_{31}r_{12} + l_{32} = a_{32}$

解得： $r_{12} = a_{12} / l_{11}$; $l_{22} = a_{22} - l_{21}r_{12}$; $l_{32} = a_{32} - l_{31}r_{12}$

▶ 由第三式可得： $l_{11}r_{13} = a_{13}$; $l_{21}r_{13} + l_{22}r_{23} = a_{23}$; $l_{31}r_{13} + l_{32}r_{23} + l_{33} = a_{33}$

解得： $r_{13} = a_{13} / l_{11}$; $r_{23} = (a_{23} - l_{21}r_{13}) / l_{22}$; $l_{33} = a_{33} - l_{31}r_{13} - l_{32}r_{23}$



4.5.2 因子表的形成与应用

◆ 以三角分解法形成因子表

- 运用求得L、R中各元素就可组成原矩阵A的因子表。
因子表的下三角部分记录的是L中的所有非对角元，上三角部分纪录的是R中的所有非对角元，对角线上记录L中各对角元的倒数。这时，因子表具有如下形式：

$$\begin{bmatrix} 1 / l_{11} & r_{12} & r_{13} \\ l_{21} & 1 / l_{22} & r_{23} \\ l_{31} & l_{32} & 1 / l_{33} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} d_{11} & r_{12} & r_{13} \\ l_{21} & d_{12} & r_{23} \\ l_{31} & l_{32} & d_{13} \end{bmatrix}$$



4.5.2 因子表的形成与应用

◆ 以三角分解法形成因子表

► 对n阶矩阵，因子表中的上三角、下三角和对角因子分别如下式所示：

$$\begin{cases} r_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} r_{kj}) / l_{ii} (i < j) \\ l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} r_{kj} (i > j) \\ d_{ii} = 1 / (a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} r_{ki}) \end{cases}, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \\ i \neq j \end{matrix}$$



4.5.2 因子表的形成与应用

◆ 因子表的应用

高斯消元法和三角分解法都可直接用于解线性方程组： $AX = b$ 。先按因子表定义一系列因子矩阵，然后运用这些矩阵先对下三角矩阵L进行运算：

► 1) 求 D_1L :

$$D_1L = \begin{bmatrix} 1 / l_{11} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$



4.5.2 因子表的形成与应用

◆ 因子表的应用

► 2) 求 $L_1 D_1 L$:

$$L_1 D_1 L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -l_{21} & 1 & \\ -l_{31} & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & l_{22} & \\ 0 & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

► 3) 求 $D_2 L_1 D_1 L$:

$$D_2 L_1 D_1 L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 / l_{22} & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & l_{22} & \\ 0 & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$



4.5.2 因子表的形成与应用

◆ 因子表的应用

► 4) 求 $L_2 D_2 L_1 D_1 L$:

$$L_2 D_2 L_1 D_1 L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

► 5) 求 $D_3 L_2 D_2 L_1 D_1 L$:

$$D_3 L_2 D_2 L_1 D_1 L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 / l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



4.5.2 因子表的形成与应用

◆ 因子表的应用

再运用上三角矩阵R进行运算：

► 1) 求 R_2R :

$$R_2R = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & -r_{23} \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ & 1 & r_{23} \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

► 2) 求 R_1R_2R :

$$R_1R_2R = \begin{bmatrix} 1 & -r_{12} & -r_{13} \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & -r_{13} \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$



4.5.2 因子表的形成与应用

◆ 因子表的应用

► 综上可得：

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_3 & L_2 & D_2 & L_1 & D_1 \end{bmatrix} LR = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_3 & L_2 & D_2 & L_1 & D_1 \end{bmatrix} A = U$$

式中，U为单位矩阵，从而可得：

$$R_1 R_2 D_3 L_2 D_2 L_1 D_1 = A^{-1}$$

$$R_1 R_2 D_3 L_2 D_2 L_1 D_1 b = X$$

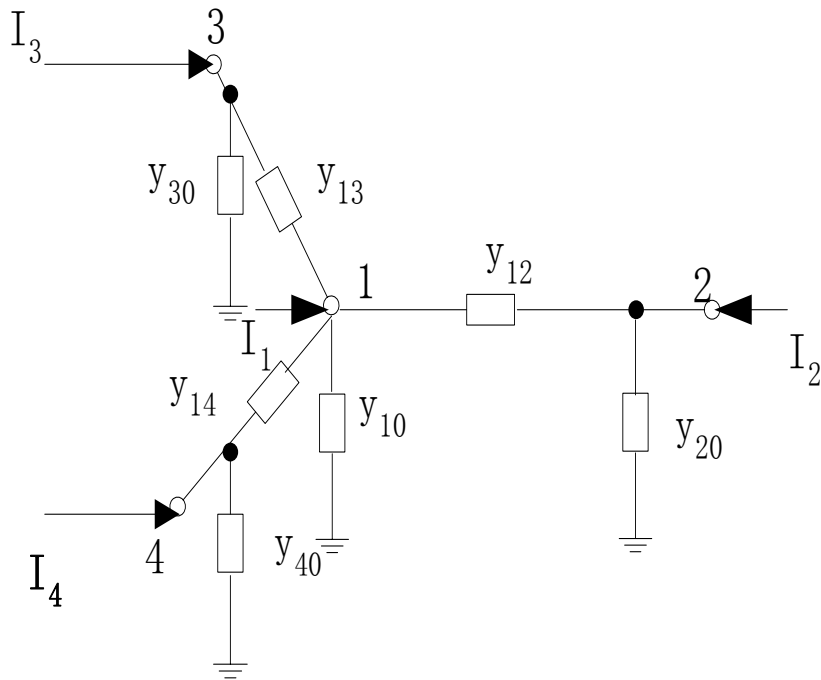
这就是运用因子表、因子矩阵结算线性方程组的基本原理。A矩阵前乘 $D_3 L_2 D_2 L_1 D_1$ 相当于消元过程，再前乘 $R_1 R_2$ 相当于回代过程。



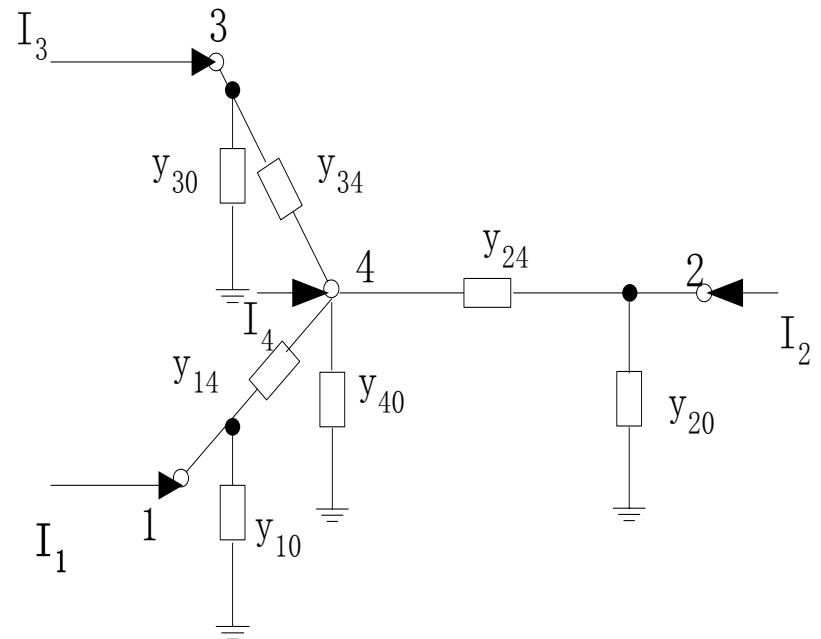
4.5.3 节点编号顺序的优先

◆ 节点编号顺序与稀疏度的关系

设四节点网络的节点编号分别如图 (a) (b)所示。



(a)



(b)



4.5.3.1 节点编号顺序与稀疏度的关系

◆ 对应这两种编号方案的节点方程分别为：

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & & \\ Y_{31} & & Y_{33} & \\ Y_{41} & & & Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} Y_{11} & & & Y_{14} \\ & Y_{22} & & Y_{24} \\ & & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \end{bmatrix}$$

分别进行三次、一次消元运算消去系数矩阵中第一列后，这两个系数矩阵中非零元素的分布将如下式所示。

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & \Delta & \Delta \\ & \Delta & * & \Delta \\ & \Delta & \Delta & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} * & & & * \\ & * & & * \\ & & * & * \\ & * & * & * \end{bmatrix}$$

“*”表示原非零元：“Δ”表示消元后新出现的非零元，称注入



4.5.3.1 节点编号顺序与稀疏度的关系

- ◆ 再分别进行三次、两次消元运算，消去其中第二、第三列，得上三角矩阵中的非零元素分布如下式：

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & \Delta & \Delta \\ & & * & \Delta \\ & & & * \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} * & & & * \\ & * & & * \\ & & * & * \\ & * & * & * \end{bmatrix}$$

- 按方案一编号时，需经六次消元进入回代；
- 按方案二编号时，仅需三次消元就可进入回代。
- 方案二回代过程也较简单。



4.5.3.1 节点编号顺序与稀疏度的关系

- ◆ 再分别进行三次、两次消元运算，消去其中第二、第三列，得上三角矩阵中的非零元素分布如下式：

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & \Delta & \Delta \\ & & * & \Delta \\ & & & * \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} * & & & * \\ & * & & * \\ & & * & * \\ & * & * & * \end{bmatrix}$$

- 差别关键在于消元过程中是否会出现注入元，取决于网络节点编号的顺序；
- 为保持节点导纳矩阵的稀疏度，降低对存储空间的需求、减少运算量，必须尽可能优化节点编号的顺序。



4.5.3 节点编号顺序的优先

◆ 高斯消元与消去节点的关系

- ▶ 以高斯消元法逐列消元，对应于以消去节点法逐个消去节点；
- ▶ 消元过程中的注入元，在物理意义上对应于由于消去某节点而出现新的互联支路导纳。



4.5.3 节点编号顺序的优先

◆ 节点编号的最优顺序: 三种节点优化编号方法（三种节点优化编号方法编号结果不同）：

► 1) 静态优化法—按静态联结支路数的多少编号

统计好网络中节点联结的支路数后，按联结支路数的多少由少到多，顺序编号。



4.5.3 节点编号顺序的优先

◆ 节点编号的最优顺序: 三种节点优化编号方法（三种节点优化编号方法编号结果不同）：

▶ 2) 半动态优化法—按动态联结支路数的多少编号

这种方法最常用。先只编一个联结支路数最小的节点号，并立即将其消去；再编消去第一个节点后联结支路数最少的节点号，再立即将其消去……依此类推。所以要这样是由于消去某节点后，可能因出现新增支路而使余下节点联结的支路数发生变化，不宜一次将所有节点号都编就。



4.5.3 节点编号顺序的优先

◆ 节点编号的最优顺序: 三种节点优化编号方法（三种节点优化编号方法编号结果不同）：

▶ 3) 动态优化法—按动态增加支路数的多少编号

这种方法不常用。运用这种方法时，不首先进行节点编号，而是首先寻找消去后出现的并为其编号，且立即将其消去；然后再寻找第二个消去后出现的新支路数最少的节点，为其编号，也立即将其消去……依此类推。这样可保证逐个消去节点时出现的新支路数(即注入元数)最少。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 状态估计简介:

- ▶ 状态估计就是根据可获取的量测数据估算动态系统内部状态的方法。
- ▶ 状态估计是由美国MIT的F. C. Schweppe教授于20世纪70年代引入电力系统的，利用的是基本加权最小二乘法。
- ▶ 电力系统状态估计主要指实时潮流的状态估计。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 状态估计简介:

- ▶ 电力系统状态估计的作用是，对给定的系统构成及量测配置，能估计出系统的真实状态:各母线上的电压相角与模值及各元件上的潮流。
- ▶ 状态估计为建立一个高质量的数据库提供数据信息，以便于进一步实现在线潮流、安全分析及经济调度等功能。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 状态估计方法与原理简介:

▶ 1) 网络接线分析

又称网络拓扑(Network topology)。其任务是实时处理开关信息的变化,根据电网中开关、刀闸等逻辑设备的状态以及各种元件的连接关系产生电网计算用的母线和网络模型,并随之分配量测量和注入量等数据,给应用程序提供新结线方式下的信息与数据。其是状态估计计算的基础,同时,接线分析也可以用于调度员潮流、预想事故分析和调度员培训模拟等网络分析应用软件。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 状态估计方法与原理简介:

► 2) 可观测性分析及量测配置评价与优化

i) 可观测性分析: 状态估计计算是在特定的网络接线及量测量配置情况下进行的, 在计算之前, 应当对系统量测是否可以在该网络接线下进行状态估计计算加以分析, 以免状态估计计算无法进行。这种分析就是可观测性分析。可观测性分析有两类算法:一类是逻辑(拓扑)方法, 另一类是数值分析方法。通常数值分析方法比较直接, 但所需时间比较多。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 状态估计方法与原理简介:

► 2) 可观测性分析及量测配置评价与优化

ii) 状态估计与常规潮流计算的区别: 常规潮流计算程序的输入通常是负荷母线的注入功率 P 、 Q , 以及电压可控母线的 P, U 值, 一般是根据给定的 n 个输入量测量 z 求解 n 个状态量 x 。而状态估计则不同, 在实际应用中, 我们可以获取其他一些量测量, 譬如线路上的功率潮流值 P 、 Q 等, 这样, 量测量 z 的维数 m 总大于未知状态量 x 的维数 n 。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 状态估计方法与原理简介:

► 2) 可观测性分析及量测配置评价与优化

ii) 状态估计与常规潮流计算的区别: 从计算方法上, 状态估计采用了与常规潮流完全不同的方法, 一般是根据一定的估计准则, 按估计理论的处理方法进行计算。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 状态估计方法与原理简介:

► 2) 可观测性分析及量测配置评价与优化

ii) 状态估计与常规潮流计算的区别: 从计算方法上, 状态估计采用了与常规潮流完全不同的方法, 一般根据一定的估计准则, 按估计理论的处理方法计算。

iii) 量测与量测冗余度: 量测冗余度是指量测量个数 m 与待估计的状态量个数 n 的比值 m/n 。一般情况下, 这一比值大于1, 意味着量测有冗余。冗余量测的存在是状态估计可以实现提高数据精度的基础。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 状态估计方法与原理简介:

► 2) 可观测性分析及量测配置评价与优化

iii) 量测与量测冗余度: 关键量测被定义为, 若失去该量测, 系统不可观测。关键量测有如下性质, 关键量测上的残差为零, 即关键量测点为精确拟合点。关键量测的存在使原先的若干可观察岛联系起来, 保证了整个系统的可观察性。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 状态估计方法与原理简介:

► 2) 可观测性分析及量测配置评价与优化

iii) 量测与量测冗余度: 关键量测组又称为坏数据组 (Bad Data Groups) 或最小相关集 (Minimally Dependent Set)。关键量测组被定义为, 如果从关键量测组中去掉一个量测, 则剩余量测成为关键量测。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 状态估计方法与原理简介:

► 3) 状态估计的数学描述

状态估计的**量测量**主要来自于SCADA的实时数据:

$$z = [P_{ij} \quad Q_{ij} \quad P_i \quad Q_i \quad U_i]^T$$

式中: z 为量测向量, 维数为 m ; P_{ij} 为支路 ij 有功潮流测量; Q_{ij} 为支路 ij 无功潮流测量; P_i 为母线 i 有功注入功率量测量; Q_i 为母线 i 无功注入功率量测量; U_i 为母线 i 的电压幅值量测量。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 状态估计方法与原理简介:

► 3) 状态估计的数学描述

待求的状态量是母线电压: $X = [\theta_i \ U_i]^T$ 。式中: x 为状态向量, θ_i 为母线 i 的电压相角; U_i 为母线 i 的电压幅值。

量测方程是用状态量表达的量测量:

$$h(X) = \begin{bmatrix} P_{ij}(\theta_{ij}, U_{ij}) \\ Q_{ij}(\theta_{ij}, U_{ij}) \\ P_i(\theta_{ij}, U_{ij}) \\ Q_i(\theta_{ij}, U_{ij}) \\ U_i(U_i) \end{bmatrix}$$



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 状态估计方法与原理简介:

▶ 3) 状态估计的数学描述

对量测量与状态量, 考虑到量测误差的存在, 电力系统状态估计问题的非线性量测方程为:

$$z = h(x) + v$$

式中: z 是 $m \times 1$ 量测向量, $h(x)$ 是 $m \times 1$ 非线性量测函数向量, v 是 $m \times 1$ 量测误差向量, x 为 $n \times 1$ 状态向量, m 、 n 分别是量测量及状态量的个数。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 状态估计方法与原理简介:

▶ 3) 状态估计的数学描述

量测方程中，量测量的维数大于状态量的维数，而且，量测量存在随机误差，因此，方程组存在矛盾方程。这样，不能直接解出状态量的实际数值，但可以用拟合的办法根据带误差的量测量求出系统状态在某种估计意义上的最优估计值。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 最优潮流简介:

► 1) 概述

- 60年代初期法国学者Carpentfen提出最优潮流的概念;
- 把电力系统经济调度和潮流计算有机地融合在一起。
即以潮流方程为基础, 进行经济与安全、有功与无功的全面优化。
- 从数学角度看最优潮流是一个大型的多约束非线性规划问题。它的关键技术是计算函数不等式约束, 解决非线性收敛问题和考虑离散变量问题。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 最优潮流简介:

▶ 1) 概述

- 最优潮流问题可描述为在满足等式约束(潮流方程)和不等式约束(安全限制)的条件下, 求得一组控制变量和状态变量的值, 使系统的目标函数达到最优。
- 最常用的目标函数: 系统发电费用最小, 有功网损最小。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 最优潮流简介:

▶ 1) 概述

- 最优潮流是一种同时考虑安全性和经济性的分析方法，因此它在电力系统安全运行、经济调度、电网规划、电力系统可靠性分析、电力市场环境下的电力系统运行等方面都得到了广泛的应用。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 最优潮流简介:

► 2) 最优潮流的数学模型

最优潮流在数学上属优化类问题。优化问题的数学模型可描述为确定一组最优控制变量 u ，在满足等式约束和不等式约束的条件下，使目标函数达到极值(可为极大值或极小值)。通常的数学描述为：

$$\text{目标函数: } \min f(x)$$

$$\text{约束条件: } g(x) = 0$$

$$h(x) \leq 0$$



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 最优潮流简介:

► 2) 最优潮流的数学模型

目标函数: $\min f(x)$

约束条件: $g(x) = 0$

$h(x) \leq 0$

目标函数中的 x 包括系统的控制变量和状态变量。
 $g(x)$ 是等式约束, $h(x)$ 是不等式约束, 它分为变量不等式和函数不等式两种。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 最优潮流简介:

▶ 3) 最优潮流的主要求解方法简介

最优潮流是一类有约束的非线性规划问题，其求解过程是一个迭代过程。对处理约束条件方法不同和对迭代过程中修正量处理的不同，派生出不同的最优潮流的经典求解方法。主要有简化梯度法、牛顿法、解耦法、内点法等。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 最优潮流简介:

▶ 3) 最优潮流的主要求解方法简介

简化梯度法是以极坐标形式的牛顿-拉夫逊法潮流计算为基础，对等约束采用拉格朗日乘子法处理，对不等约束用Kuhn-Tucker罚函数处理，只对控制变量沿负梯度方向进行寻优，具有一阶收敛性。这种方法原理和程序都较为简单，但它计算量大，另罚因子数值的选取对算法的收敛速度影响很大。该法是最初研究的最优潮流方法。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 最优潮流简介:

▶ 3) 最优潮流的主要求解方法简介

牛顿法最优潮流是一种具有二阶收敛特性的算法。该法是对全变量进行修正即包括控制变量和状态变量。它除了利用目标函数的一阶导数外，还利用了目标函数的二阶导数，考虑了梯度变化的趋势，其搜索方向比梯度法好，能较快找到最优点。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 最优潮流简介:

▶ 3) 最优潮流的主要求解方法简介

牛顿法最优潮流法充分利用了电力网络的物理特征，应用了稀疏技术，同时直接对拉格朗日函数的KuhnTucker条件进行牛顿法迭代求解，收敛速度快。该方法已经进入了实用化阶段。



4.6 电力系统状态估计与最优潮流简介

◆ 最优潮流简介:

▶ 3) 最优潮流的主要求解方法简介

最优潮流解耦法把最优潮流的整体最优问题分解为有功优化和无功优化两个子优化问题，交替迭代求解，最终达到有功、无功综合优化。该方法对两个子问题可用不同的优化方法求解。这种方法使规模很大的问题变成两个规模较小的子问题串行迭代求解，可节约内存，提高计算速度。

直流法潮流计算(补充)

直流法潮流计算



- ◆ 一种把非线性电力系统潮流问题简化为线性电路问题的潮流近似解法
- ◆ 速度快、精度低
- ◆ 只能计算有功分布
- ◆ 适合处理断线分析、形成线性规划求解的优化问题
- ◆ 应用于规划和实时运行

直流法潮流计算模型(1)



◆ 线路ij上的潮流



取

$$u_i = u_i e^{j\theta_i}$$

$$u_j = u_j e^{j\theta_j}$$

$$y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$$

上式



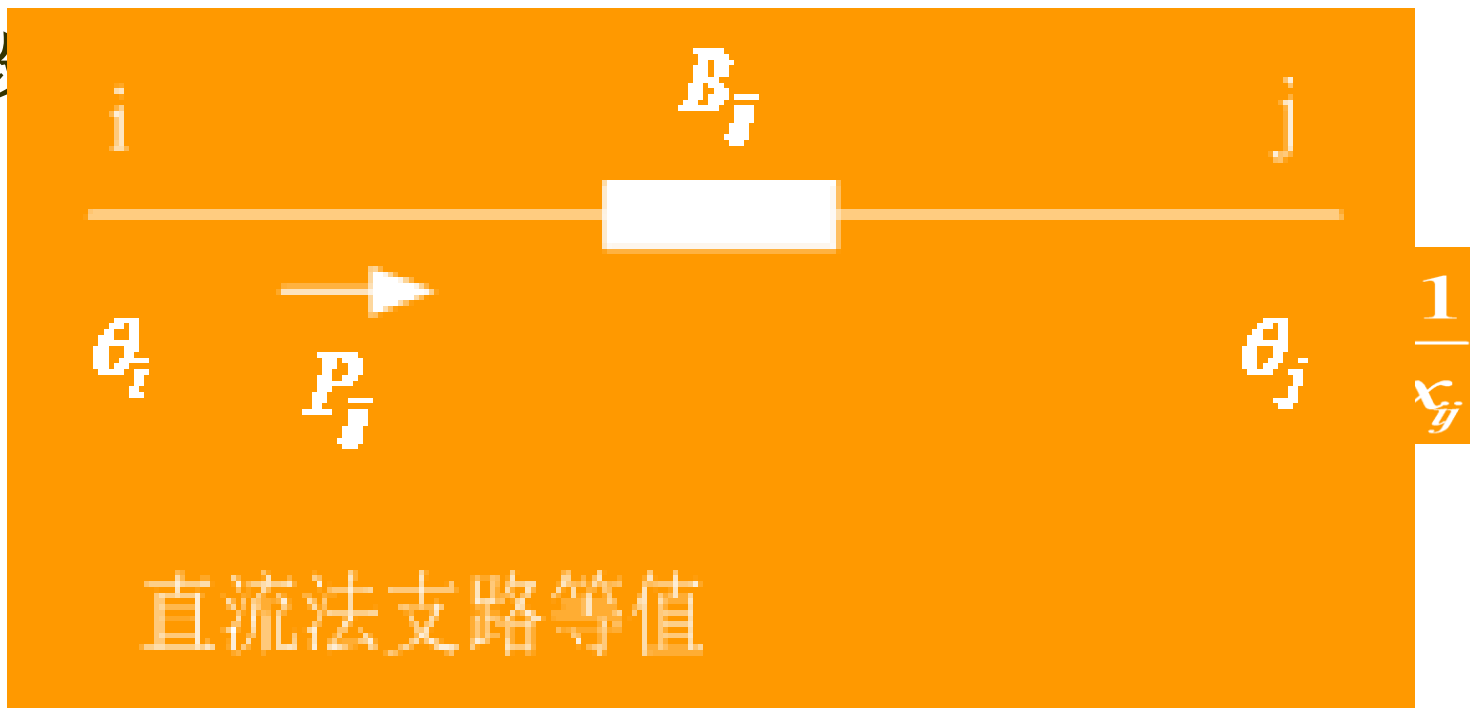
因有



直流法潮流计算模型(2)



◆ 该



④忽略所有对地支路

$$B_o = B_{jo} = 0$$

则

$$P_{ij} = \frac{1}{x_{ij}} (\theta_i - \theta_j)$$

$$Q_{ij} \approx 0$$



直流法潮流计算模型(3)



◆ 这里j表示连接节点i的所有节点。如i与j无联系，则

$$\frac{1}{x_{ij}} = 0$$

上式表示为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

或

$$B_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x_{ij}}$$

$$i \neq ref$$

$$B_{ii} = 0$$

$$i = ref$$

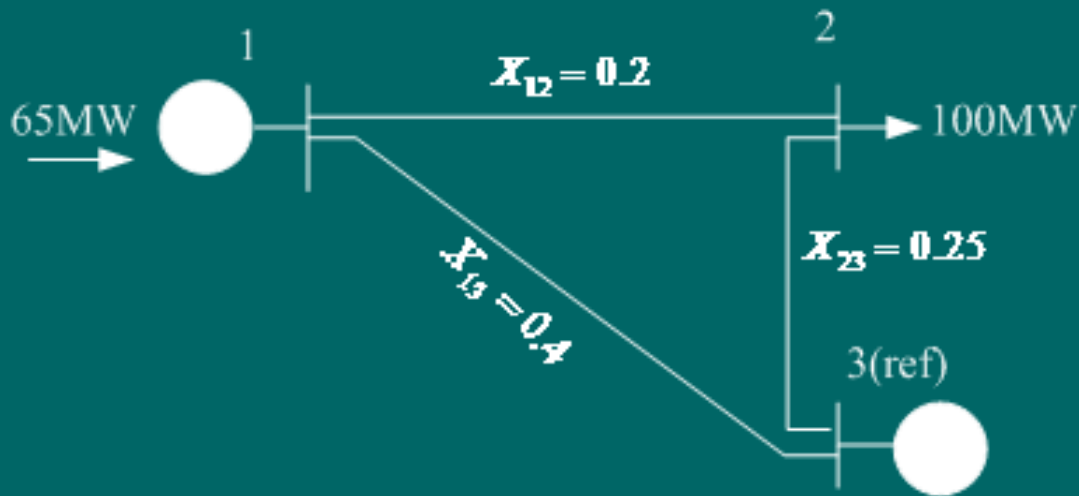
$$B_{ij} = -\frac{1}{x_{ij}}$$

$$i \neq ref, j \neq ref$$

$$B_{ij} = 0$$

$$i = ref$$

$$j = ref$$



◆ 例

◆ 解：采用标么值计算， $S_B = 100\text{MVA}$ 相角为弧度，
 设 $\theta_3 = 0$, $P_3 = 1.0 - 0.65 = 0.35$, 形成矩阵方程

$$\begin{bmatrix} 7.5 & -5.0 & 0 \\ -5.0 & 9.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.65 \\ -1.0 \\ 0.35 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2118 & 0.1177 & 0 \\ 0.1177 & 0.1765 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.65 \\ -1.0 \\ 0.35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02 \\ -0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \frac{1}{0.2} \times (0.02 - (-0.1)) = 0.6$$

$$P_B = \frac{1}{0.4} \times (0.02 - 0) = 0.05$$

$$P_3 = \frac{1}{0.25} \times (0 - (-0.1)) = 0.4$$

