第五章 线性系统的频域分析法

二、奈奎斯特稳定判据（奈氏判据）

反馈控制系统稳定的充分必要条件：

- 闭合曲线Γ_{GH}不穿过临界点(−1, j0)点，
- 且逆时针包围临界点(−1, j0)点的圈数R等于开环传递函数的正实部（右半平面）极点数P。　——隐含右半平面零点数Z=0

反馈控制系统闭环传递函数的极点（A+B=0）　——正实部极点

□□

函数 F=1+GH 的零点（A+B=0)）　——正实部零点

s平面闭合曲线Γ包围函数 F=1+GH 的零点（A+B=0）

□□

s平面闭合曲线Γ包围闭环传递函数的极点（A+B=0）

稳定充要条件:
右零点数Z=0

5.3 频率域稳定判据

零点数Z： $Z=P-R$

$F(s)$的零点：闭环传递函数的极点，数量Z
$F(s)$的极点：开环传递函数的极点，数量P

目标：$F(s)$右半平面的零点数Z=0

- 当$R\neq P$ 时，$Z\neq 0$，系统不稳定。
- 当半闭合曲线Γ_{GH}穿过（-1, j0）时，表明存在 $s=\pm j\omega_n$，使得 $G(\pm j\omega_n)H(\pm j\omega_n)=-1$ ，即系统闭环特征方程存在共轭纯虚根，则系统临界稳定。
- 零点数Z不是开环传递函数右半平面的零点数，而是$F(s)$右半平面的零点数。
- 极点数P是开环传函右半平面极点数P，P不为零没关系，只要逆时针包围圈数R等于P就行。 ——例如：非最小相位系统

5.3 频率域稳定判据

右半平面有无闭环极点?

闭环极点=$F(s)$零点

右半平面有无$F(s)$零点?

Γ曲线　映射　映射曲线Γ_F

$F(s)$的映射曲线Γ_F绕原点逆时针转$R=P$周?

$G(s)H(s)=F(s)-1$

$G(s)\ H(s)$的映射曲线Γ_{GH}绕(-1，j0)点逆时针转$R=P$周?

映射曲线Γ_{GH}是ω从-∞变化到+∞时开环频率特性曲线

开环频率特性曲线GH绕(-1，j0)点逆时针转$R=P$周？（是, Z=0）

奈奎斯特稳定判据

Z=0，则右半平面无闭环极点，闭环系统稳定!

曲线Γ不通过$F(s)$的奇点（即$F(s)$的零点和极点）

5.3 频率域稳定判据

应用奈奎斯特判据判断系统稳定性的步骤：

1） 根据系统开环传递函数，确定开环传递函数右半平面极点数量P。

2） 根据系统开环传递函数，确定虚轴上的极点情况。

3） 根据系统开环传递函数，绘制开环幅相特性曲线，并绘制增补曲线。

4） 根据系统开环幅相特性曲线及其增补曲线，计算逆时针包围（-1，j0）点的圈数R。

5） 利用奈奎斯特判据，判断是否满足$R=P$。

6） 若满足$\boldsymbol{R=P}$，即$\boldsymbol{Z=0}$，则系统稳定；否则不稳定。

5.3 频率域稳定判据

例 系统开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$

试判断负反馈闭环系统的稳定性。 K，T_1，T_2 均大于0

解 开环系统 无右半平面极点，即P=0。——2个左半平面极点，不统计。

v=1 一个虚轴上极点，且在原点。——需要补线

系统的频率特性 $G(j\omega)H(j\omega)=\dfrac{K}{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}$

$$=\frac{-K(T_1+T_2)}{[1+(\omega T_1)^2][1+(\omega T_2)^2]}+j\frac{-K(1-T_1T_2\omega^2)}{\omega[1+(\omega T_1)^2][1+(\omega T_2)^2]}$$

5.3 频率域稳定判据

$$= \frac{-K(T_1+T_2)}{[1+(\omega T_1)^2][1+(\omega T_2)^2]} + j\frac{-K(1-T_1T_2\omega^2)}{\omega[1+(\omega T_1)^2][1+(\omega T_2)^2]}$$

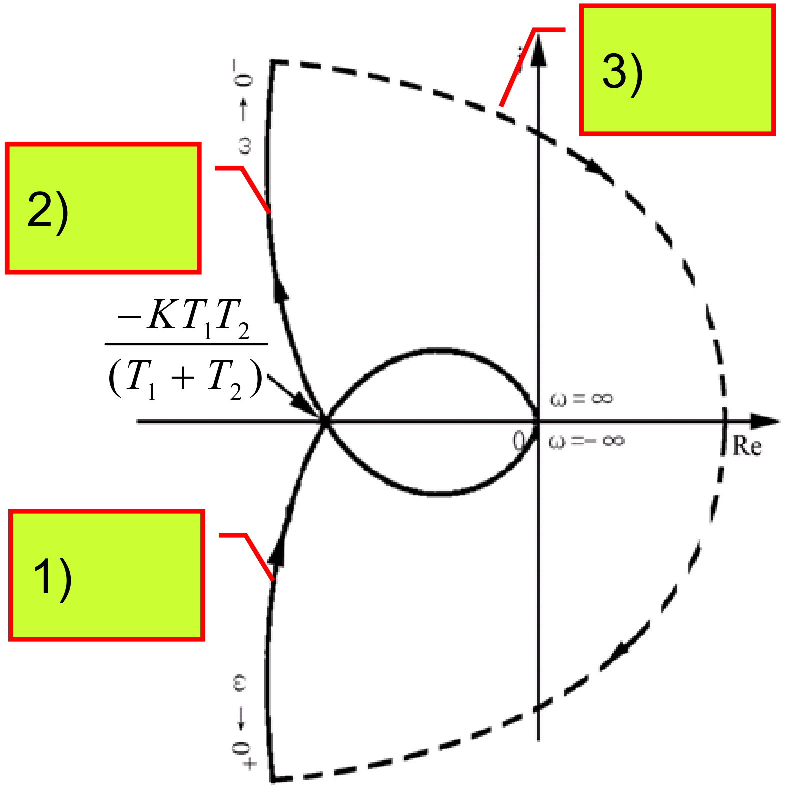
1)作出$\omega=0^+\rightarrow+\infty$变化时$G(j\omega)H(j\omega)$的曲线；

2)根据镜像对称得$\omega=-\infty\rightarrow0^-$变化时$G(j\omega)H(j\omega)$的曲线；

3)从$\omega=0^-$到$\omega=0^+$以无限大为半径顺时针转过π，得增补曲线。

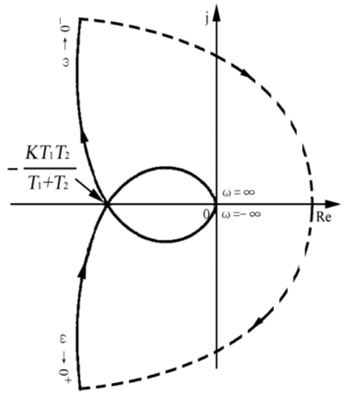
虚部为零：$1-T_1T_2\omega^2=0$　　$\omega=\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$

代入实部：$\frac{-KT_1T_2}{(T_1+T_2)}$



极坐标曲线

5.3 频率域稳定判据



当ω由$-\infty\rightarrow+\infty$变化时，

1) 当 $\frac{KT_1T_2}{T_1+T_2}>1$ 时，$G(j\omega)H(j\omega)$ (ω从$-\infty\rightarrow+\infty$) 曲线顺时针包围(−1，j0)点2圈，即$R$= -2。开环系统无右边平面极点$P$=0。所以，闭环系统右极点个数 $Z=P-R=2$。

闭环系统不稳定，有2个闭环右极点

2)当 $\frac{KT_1T_2}{T_1+T_2}<1$时，$G(j\omega)H(j\omega)$ (ω从$-\infty\rightarrow+\infty$) 曲线不包围(−1，j0)点，$R$=0。 $Z=P-R=0$。

闭环系统稳定

3)当 $\frac{KT_1T_2}{T_1+T_2}=1$时，$G(j\omega)H(j\omega)$ (ω从$-\infty\rightarrow+\infty$) 曲线穿越(-1，j0)点。

系统处于临界状态　临界放大倍数 $K_{临}=\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$

P203 5-34

例 已知单位负反馈系统的开环传递函数 $G(s)=\dfrac{10}{s(s+1)\left(\dfrac{s^2}{4}+1\right)}$

试判断系统的闭环稳定性

解： $G(s)$ 在s右半平面内无极点 $P=0$，

有一个原点处极点v =1， 有共轭的虚极点$s=\pm j2$ 。

仅看半闭合曲线

$$\lim_{\omega\to 0^+} G(j\omega)=\infty\angle -90^o$$

$$\lim_{\omega\to \infty} G(j\omega)=0\angle -360^o$$

$$\lim_{\omega\to 2^-} G(j\omega)=\infty\angle -153.4^o$$

$$\lim_{\omega\to 2^+} G(j\omega)=\infty\angle -333.4^o$$

振荡环节

$$\begin{cases}\varphi(\omega)=\begin{cases}-\arctan\left(\dfrac{2\zeta\omega T}{1-\omega^2T^2}\right), & \omega\le\omega_n\\ -\left[\pi-\arctan\left(\dfrac{2\zeta\omega T}{\omega^2T^2-1}\right)\right], & \omega>\omega_n\end{cases}\\ \zeta=0\end{cases}$$

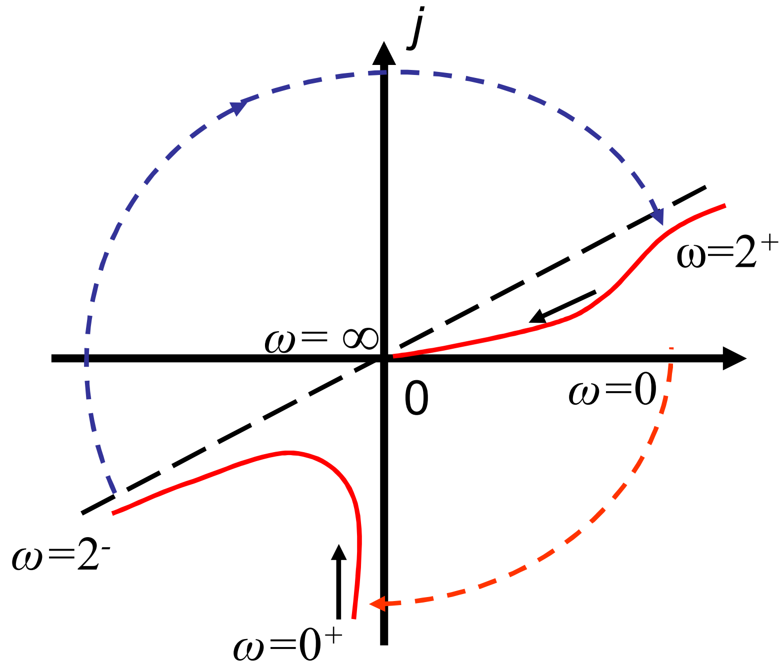
开环系统 $\varphi_{开}(\omega)=-90-\arctan\omega+\varphi(\omega)$

$$\begin{cases}\text{对于}1/\,s+1\text{环节，}\omega=2\text{时 } \arctan 2=63.4^o\\ \varphi_{开}(\omega)=-90-\arctan 2=-90-63.4=-153.4\end{cases}$$

$$\varphi_{开}(\omega)=-90-\arctan 2-180=-333.4$$

5.3 频率域稳定判据

系统开环幅相曲线如图



由于v=1，从幅相曲线上对应ω=0的点起顺时针补作90º且半径为无穷大的虚圆弧至ω=0+。

因为存在一对虚极点±2j，故从对应ω=2-的点起顺时针补作180º且半径为无穷大的虚圆弧至ω=2+。

包围：当ω由−∞→+∞变化时，开环幅相曲线逆时针包围(-1, j0)点-2圈，R= -2。因为P=0，则Z=P-R =0+2=2。闭环系统不稳定

穿越：当ω由−∞→+∞变化时，开环幅相曲线穿越(-1,-∞)段次数2N= -2，即R=-2。因为P=0，则Z=P-2N =2。闭环系统不稳定

三、对数稳定判据（Bode图判据）

- 奈氏判据：半闭合曲线Γ_{GH}穿过$(-1, j0)$点左侧负实轴情况。
- 半闭合曲线Γ_{GH}与对数频率特性曲线（Bode图）可相互转换（存在对应关系）。
- 可以利用对数频率特性曲线判断系统稳定性。

关键：根据Γ_{GH}的穿越次数确定对数频率特性曲线上的特征

截止频率ω_c：若 $L(\omega_c)=0\text{dB}$，则ω_c称作截止频率，又称0dB 频率。

穿越频率ω_x：若 $\varphi(\omega_x)=(2k+1)\pi \quad k=0,\pm1,\dots$ ，则ω_x称作穿越频率，又称180° 频率。

5.3 频率域稳定判据

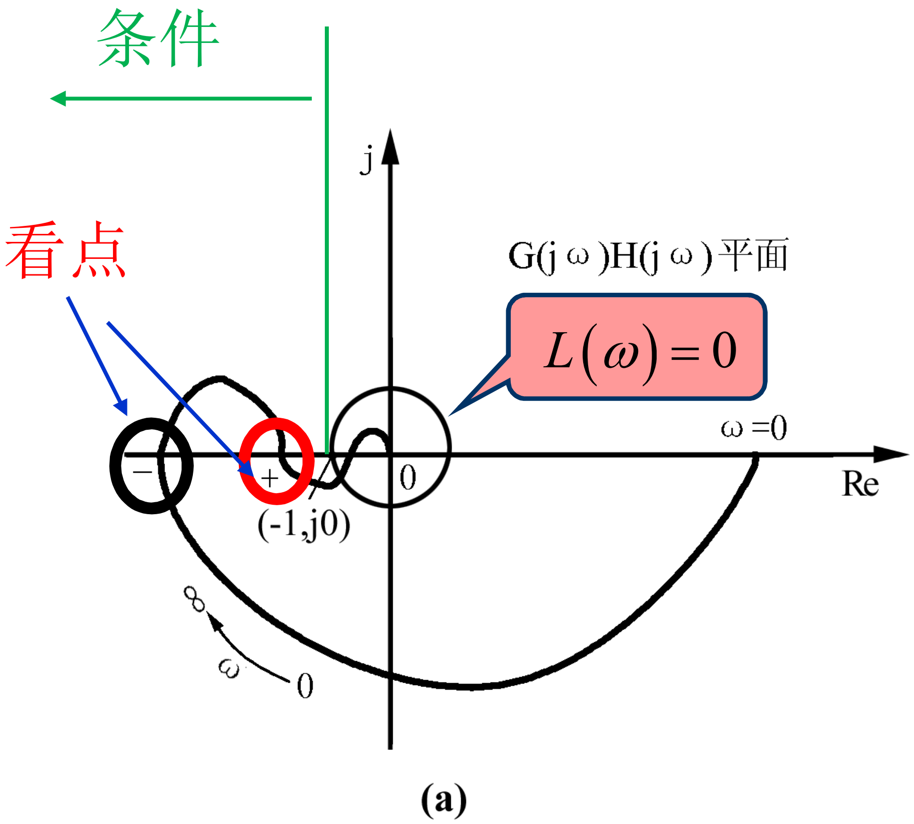
1. 穿越点确定

半闭合曲线Γ_{GH}		对数频率特性曲线Γ_L和Γ_φ
$(-1, j0)$ $\lvert G(j\omega_c)H(j\omega_c)\rvert = A(\omega_c) = 1$	ω_c 截止频率	Γ_L $\begin{cases}\lvert G(j\omega_c)H(j\omega_c)\rvert = A(\omega_c) = 1 \\ L(\omega_c) = 20\lg A(\omega_c) = 0\end{cases}$
$\varphi(\omega_x) = (2k+1)\pi \quad k = 0, \pm1, \ldots$	ω_x 穿越频率	Γ_φ $\varphi(\omega_x) = (2k+1)\pi \quad k = 0, \pm1, \ldots$

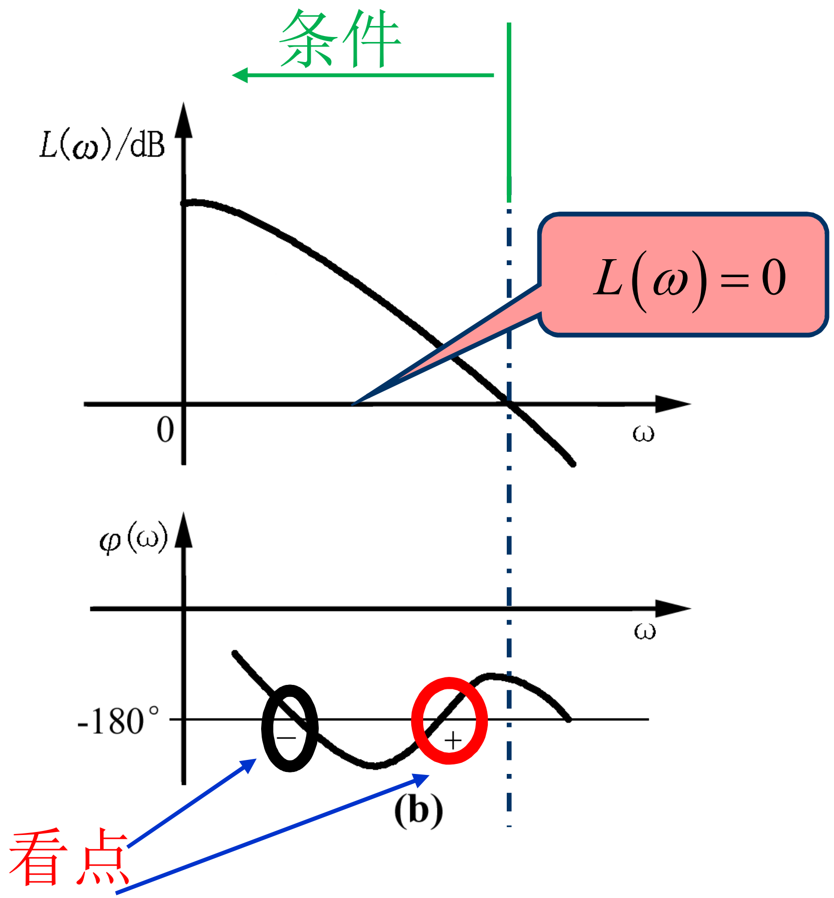
对比：

- Γ_{GH}曲线穿越(-1, j0)左侧负实轴时，$A(\omega)>1$，对应对数幅频特性$L(\omega)>0$的区间。
- Γ_{GH}曲线穿越(-1, j0)左侧负实轴时，$\varphi(\omega)$ 与 $(2k+1)\pi \quad k=0,\pm1,\ldots$ 有交点，对数相频特性曲线$\varphi(\omega)$与$(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\ldots)$平行线相交。

5.3 频率域稳定判据



半闭合曲线Γ_{GH}



对数频率特性曲线Γ_L和Γ_φ

5.3 频率域稳定判据

2. $\Gamma\varphi$ 确定

1）开环系统无虚轴上极点时，$\Gamma\varphi$等于$\varphi(\omega)$曲线。

2）开环系统存在积分环节（原点处极点）时，$\frac{1}{s^{\nu}}(\nu>0)$

半闭合曲线Γ_{GH}

从 $\omega=0_+$ 的开环幅相特性曲线的对应点 $G(j0_+)H(j0_+)$ 起，逆时针补作 $\nu\times90°$ 半径为无穷大的虚圆弧。

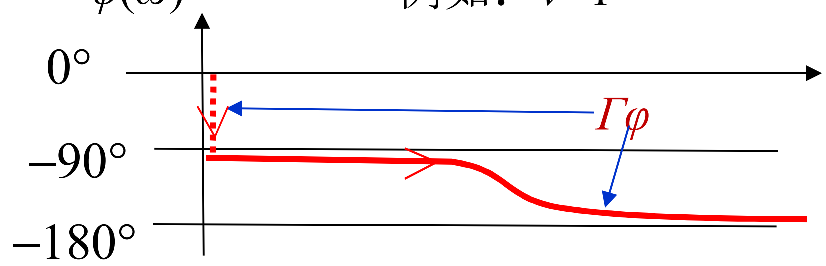
这里的“逆时针”仅是告诉如何补曲线。不代表将来幅相曲线的方向。

两侧黄色部分一定要一一对应

对数频率特性曲线Γ_L和$\Gamma\varphi$

在ω较小且$L(\omega)>0$范围内，从对数相频特性曲线的点向上补作 $\nu\times90°$的虚直线，$\varphi(\omega)$曲线和补作的虚直线构成$\Gamma\varphi$。

例如：ν=1



5.3 频率域稳定判据

3）开环系统存在等幅振荡环节时， $\dfrac{1}{(s^2+\omega_n^2)^v}(v>0)$

半闭合曲线Γ_{GH}

从 $\omega=\omega_{n-}$ 的开环幅相特性曲线的对应点 $G(j\omega_{n-})H(j\omega_{n-})$ 起，顺时针补作 $v\times180°$ 半径为无穷大的虚圆弧至 $\omega=\omega_{n+}$ 的对应点 $G(j\omega_{n+})H(j\omega_{n+})$ 处。

注意：这里用“顺时针”描述，虽然与PPT前页不一致，但没有问题。

前页：因为半闭合曲线，无出发点，只能“倒车”

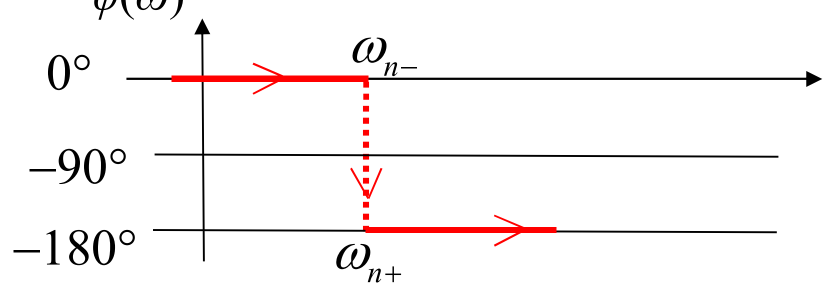
本页：虽为半闭合曲线，有出发点，可以“前进”

两侧黄色部分一定要一一对应

对数频率特性曲线Γ_L和Γ_φ

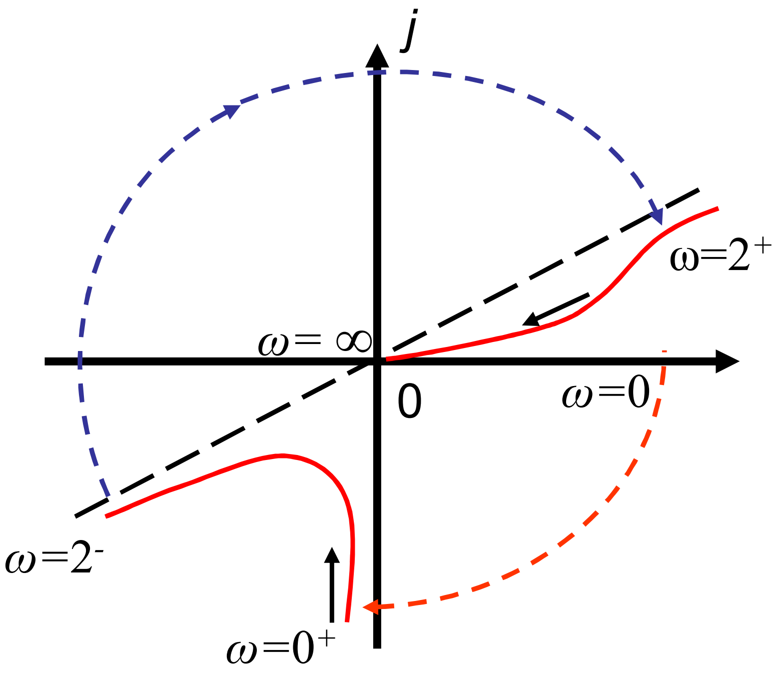
从对数相频特性曲线 $\varphi(\omega_{n-})$ 点向下 补作 $v\times180°$ 的虚直线至 $\varphi(\omega_{n+})$ 处，$\varphi(\omega)$ 曲线和补作的虚直线构成Γ_φ。

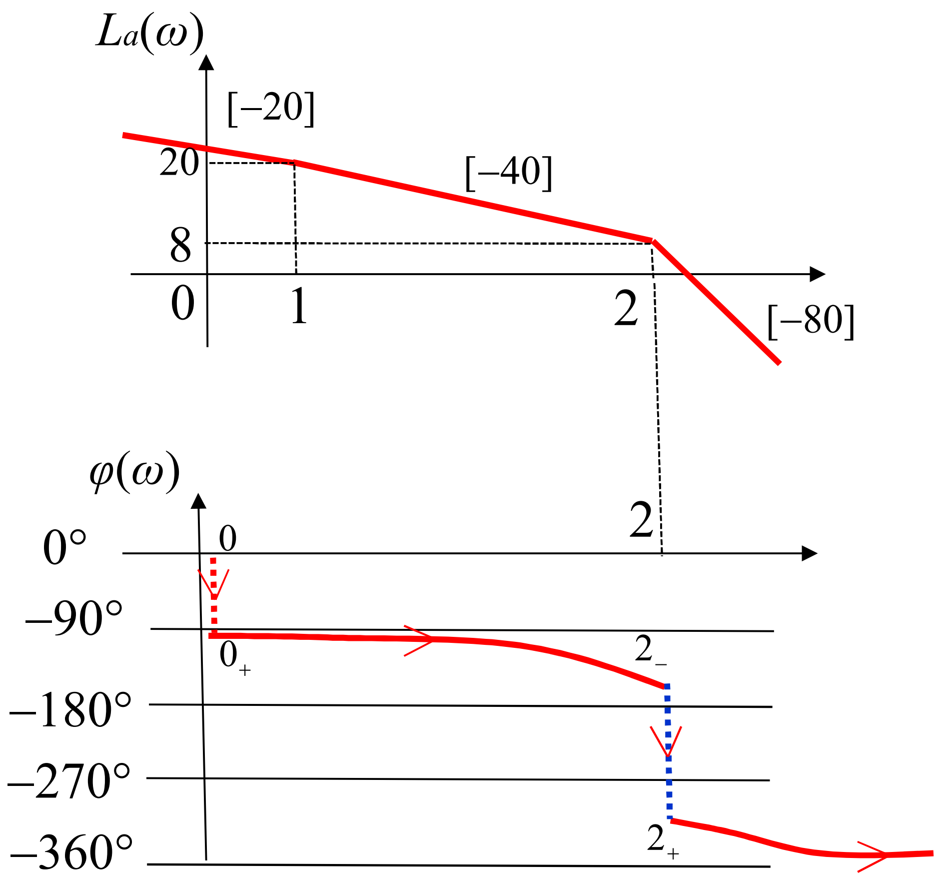
例如：v=1



5.3 频率域稳定判据

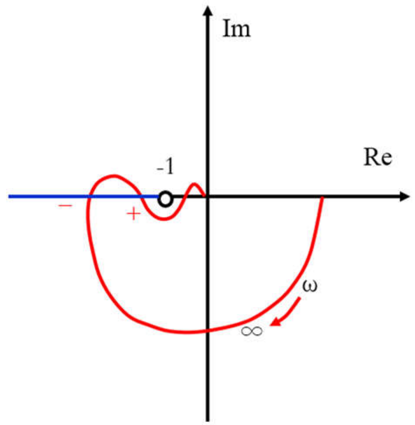
例： $G(s)=\dfrac{10}{s(s+1)\left(\dfrac{s^2}{4}+1\right)}$



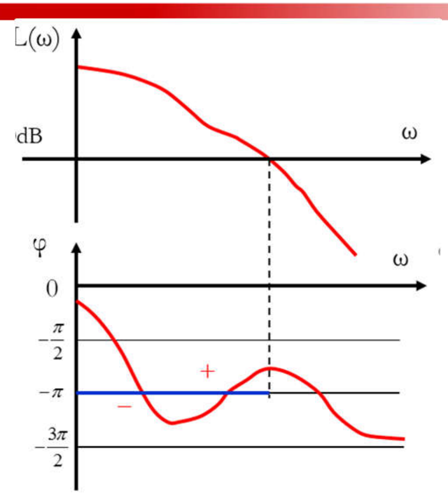


5.3 频率域稳定判据

3. 穿越次数计算



半闭合曲线Γ_{GH}



补作的虚直线所产生的穿越都为负穿越。

对数频率特性曲线Γ_L和Γ_φ

一次	正穿越一次	Γ_{GH}由上向下穿越(-1，j0)点左侧负实轴一次。	当$L(\omega)>0$时 Γ_φ移由下向上穿越$(2k+1)\pi$线一次。
	负穿越一次	Γ_{GH}由下向上穿越(-1，j0)点左侧负实轴一次。	当$L(\omega)>0$时 Γ_φ移由上向下穿越$(2k+1)\pi$线一次。
半次	正穿越半次	Γ_{GH}由上向下止于或始于(-1，j0)点左侧负实轴。	当$L(\omega)>0$时 Γ_φ移由下向上止于或始于$(2k+1)\pi$线。
	负穿越半次	Γ_{GH}由下向上止于或始于(-1，j0)点左侧负实轴。	当$L(\omega)>0$时 Γ_φ移由上向下止于或始于$(2k+1)\pi$线。

5.3 频率域稳定判据

对数频率稳定判据：

开环系统正实部的极点数为P，在$L(\omega)>0$范围内，$\Gamma\varphi$曲线穿越$(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\ldots)$的次数 $N = N_{+} - N_{-}$ ，满足 $Z = P - 2N = 0$。

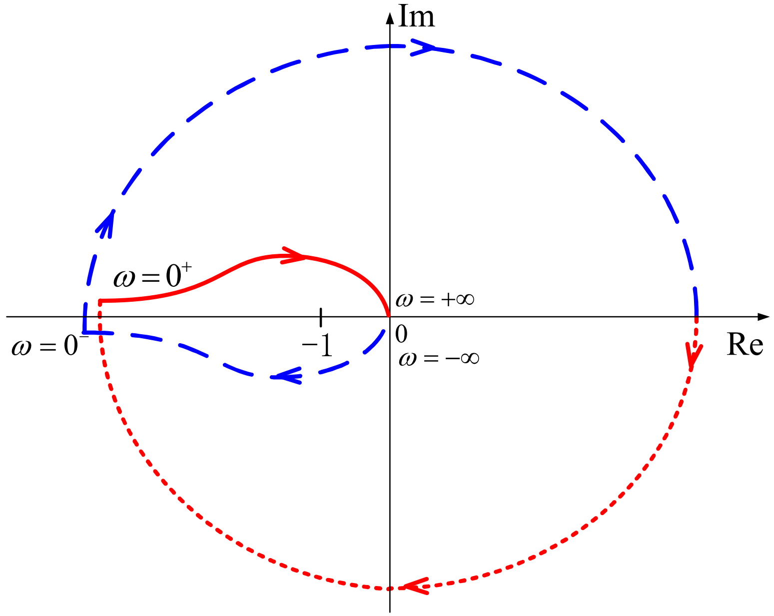
反馈控制系统稳定的充要条件

例 系统开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{10K}{s^2(s+1)}$ 试判断闭环系统的稳定性

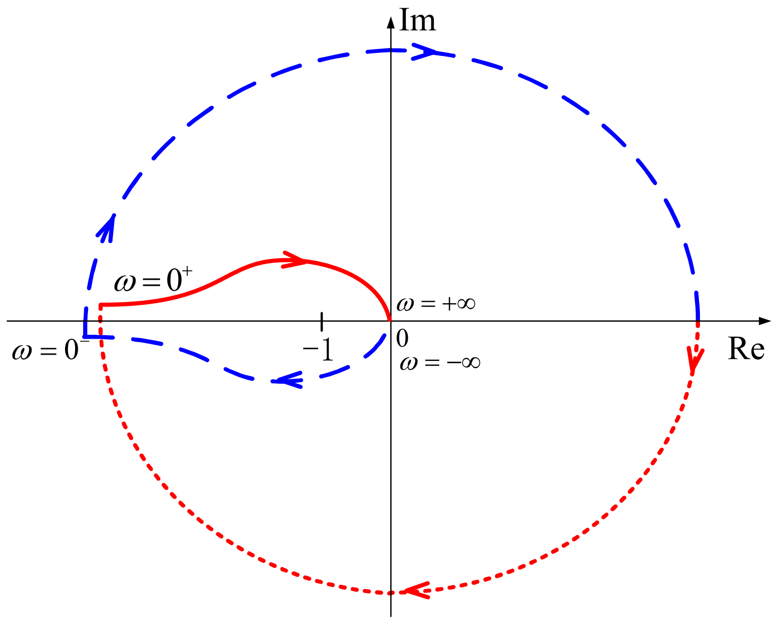
$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{10K}{(j\omega)^2(j\omega+1)}=\frac{10K(1-j\omega)}{(j\omega)^2(1+j\omega)(1-j\omega)}=-\frac{10K-j10K\omega}{\omega^2(1+\omega^2)}=\frac{-10K+j10K\omega}{\omega^2(1+\omega^2)}$$

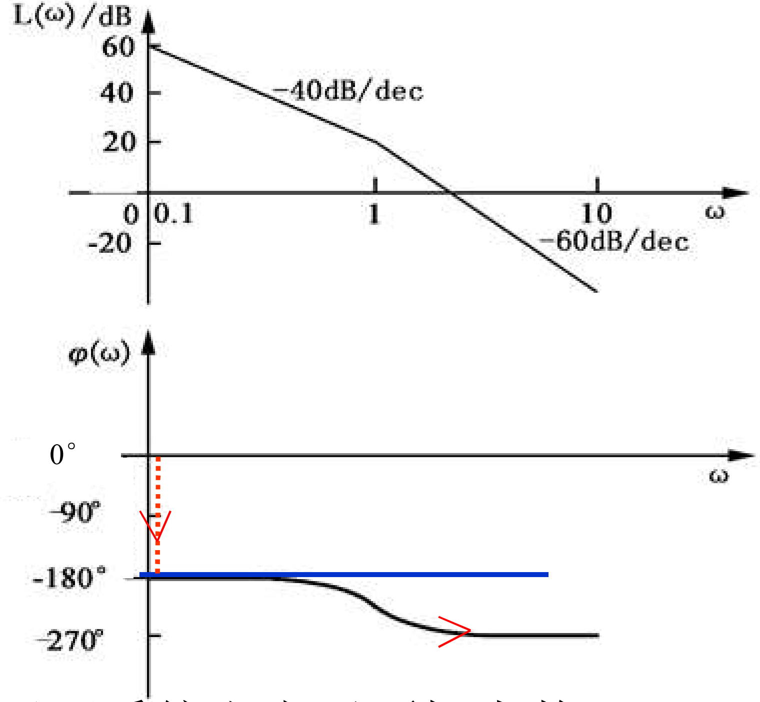
$$=\frac{-10K}{\omega^2(1+\omega^2)}+j\frac{10K}{\omega(1+\omega^2)}$$

虚部： $\dfrac{10K}{\omega(1+\omega^2)}>0\ \ (\omega>0)$



5.3 频率域稳定判据





- 开环系统右半平面极点数P=0；
- 半闭合曲线穿越次数$N=N_+-N_-=-1$；
- 闭环系统右半平面极点数$Z=P-2N=2$；
- 闭环系统不稳定。

- 开环系统右半平面极点数P=0；
- $\Gamma_L>0$范围内Γ_φ曲线穿越-π次数

  $N=N_+-N_-=-1$；
- 闭环系统右半平面极点数$Z=P-2N=2$；
- 闭环系统不稳定。

5.3 频率域稳定判据

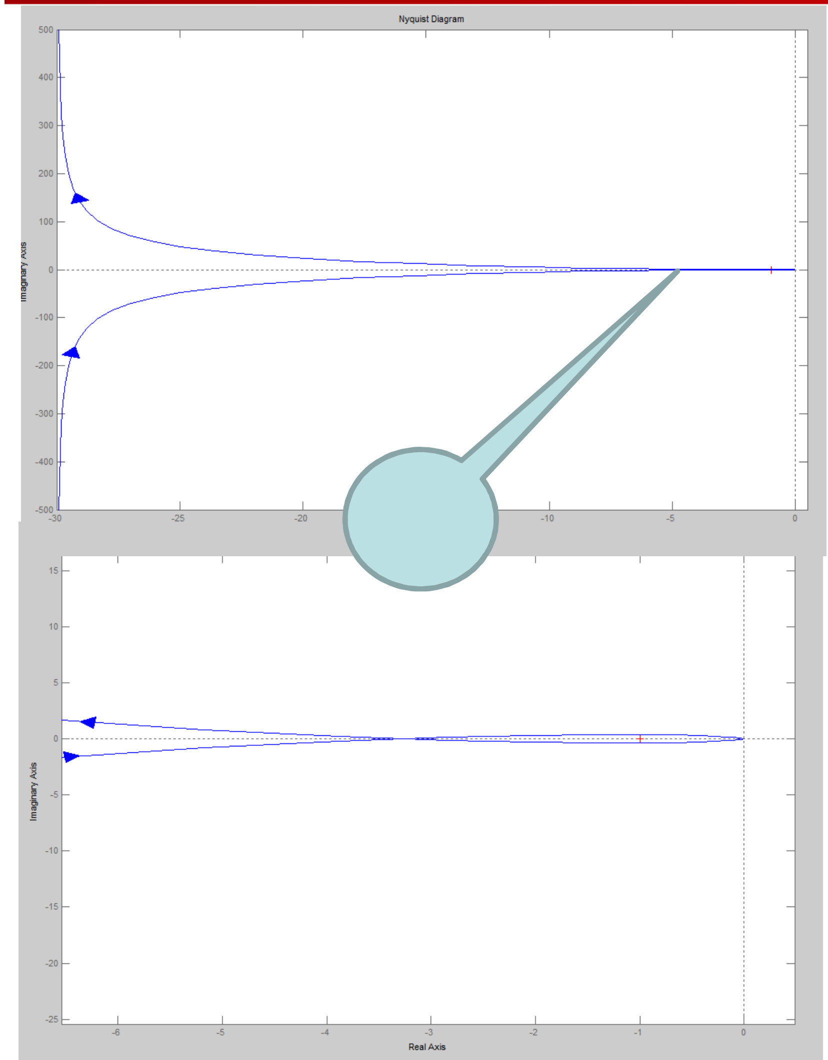
例 系统开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{10}{s(s+1)(2s+1)}$

试判断闭环系统的稳定性。

开环系统右半平面极点数P=0

作出开环系统的极坐标图和对数频率特性曲线（Bode图)

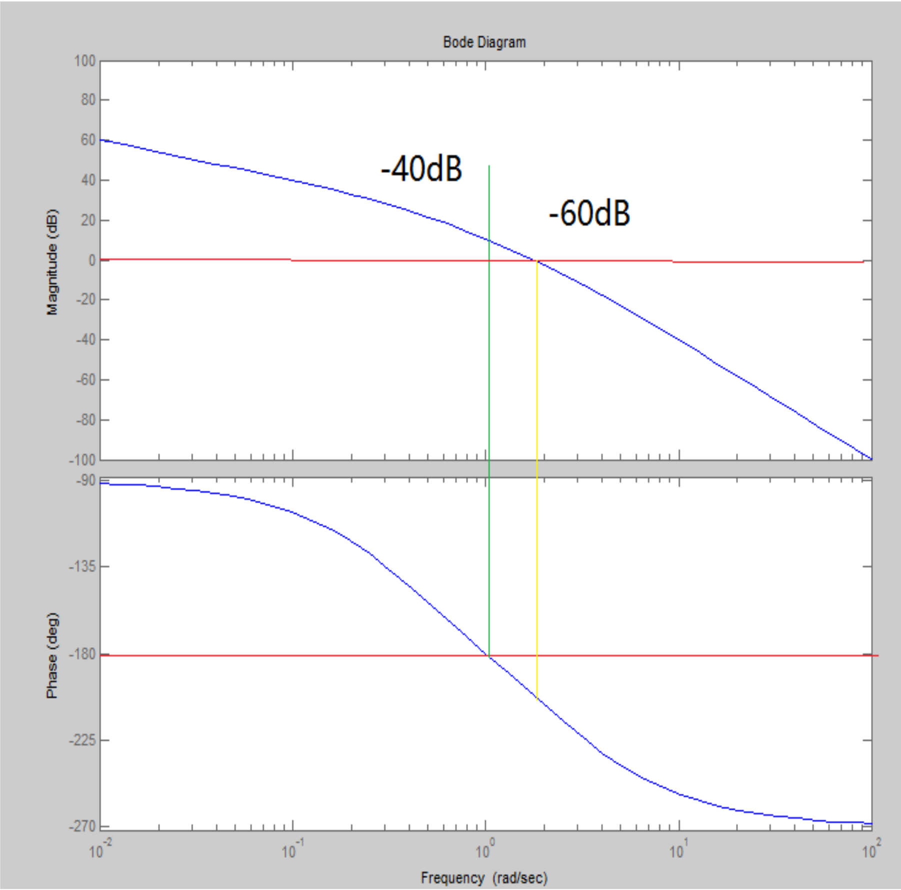
5.3 频率域稳定判据



- 开环系统右半平面极点数P=0。
- 在（-1，-∞）区间，N_{+}=0，N_{-}= 1。
- 闭环系统右半平面极点数Z=P-2N=2。

闭环系统不稳定

5.3 频率域稳定判据



- 开环系统右半平面极点数P=0。
  - 在 $L(\omega)>0$的频段内，N_+=0，N_-= 1。
  - 闭环系统右半平面极点数 $Z=P-2N=2$。

闭环系统不稳定

四、 条件稳定系统

1）条件稳定系统：闭环系统的稳定性随开环传递函数的某些参数（如开环增益）变化而变化。

2）结构不稳定系统：无论开环传递函数的系数怎样变化，闭环总是不稳定的。

本次课结束

1）掌握奈奎斯特判据（基于幅相曲线）★★★★

2）掌握对数频率稳定判据（基于对数频率曲线）★★★★