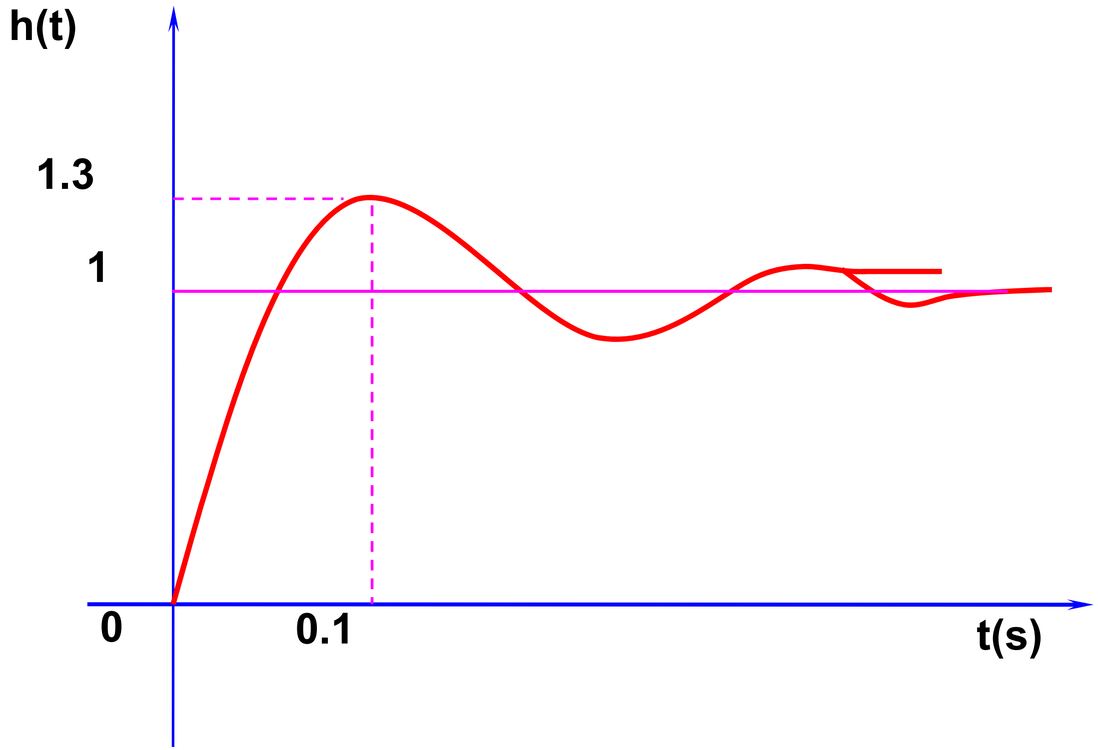
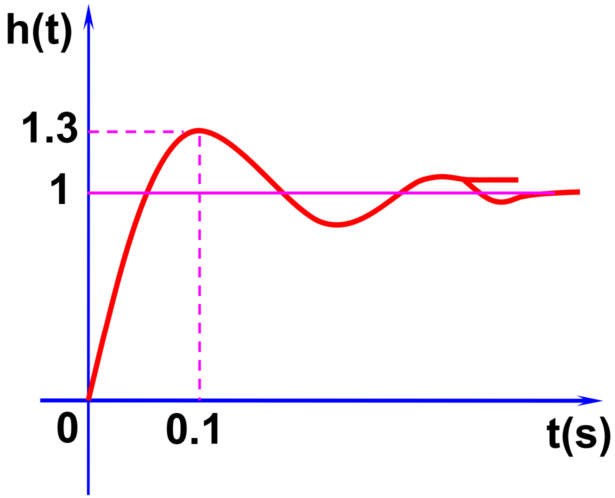
1、设单位负反馈的二阶系统的单位阶跃响应曲线如图所示，试确定其开环传递函数。





解：欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应曲线。由图中给出的阶跃响应性能指标，先确定二阶系统参数，再求传递函数。

$$\sigma\% = 30\% = 0.3 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%$$

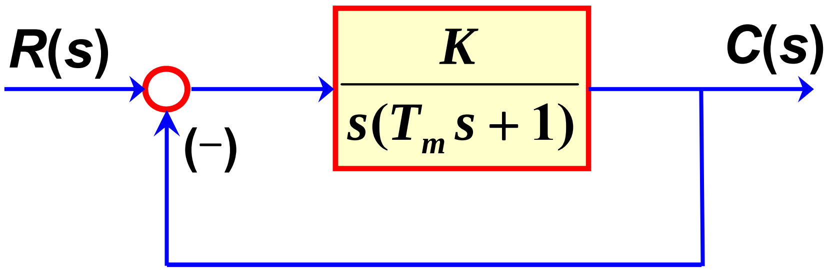
$$\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \ln e = \ln 0.3 = -1.2 \qquad \zeta \approx 0.36$$

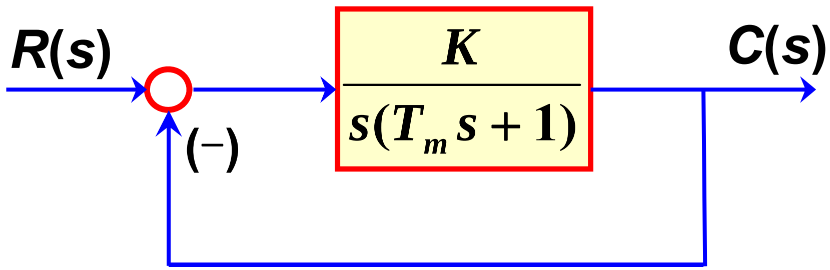
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.1\text{秒} \qquad \omega_n = \frac{31.4}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{31.4}{0.934} = 33.6\text{秒}^{-1}$$

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1130}{s^2 + 24.2s + 1130} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$G(s) = \frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)} = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} = \frac{1129}{s(s+24.2)}$$

2、已知图中T_m=0.2，K=5，求系统单位阶跃响应指标。





闭环传递函数为 $$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{K}{s(T_m s+1)+K}$$

化为标准形式 $$\Phi(s)=\frac{K/T_m}{s^2+s/T_m+K/T_m}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

即有 $2\zeta\omega_n=1/T_m=5$, $\omega_n^2=K/T_m=25$

解得 $\omega_n=5$, $\zeta=0.5$

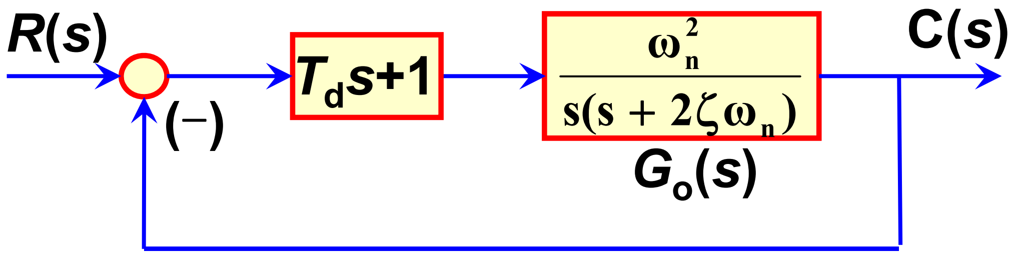
$$\sigma\%=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100\%=16.3\%$$

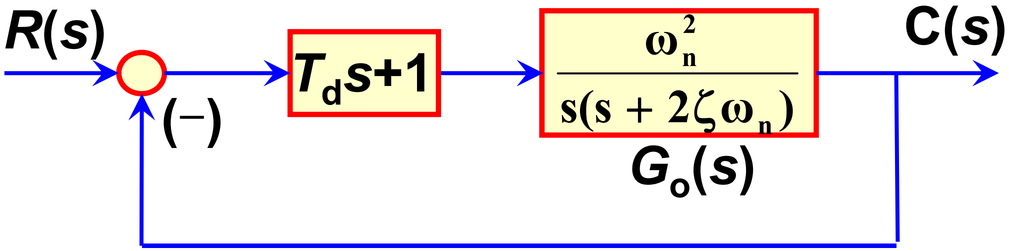
$$t_s=\frac{3}{\zeta\omega_n}=1.2\text{秒}$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=0.73\text{秒}$$

$$t_r=\frac{\pi-\beta}{\omega_d}=0.486\text{秒}$$

3、比例-微分环节对系统动态特性的影响





开环传递函数：

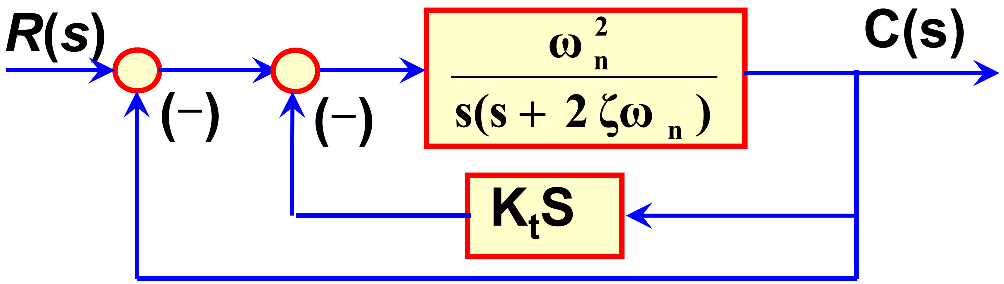
$$G(s)=\frac{C(s)}{E(s)}=\frac{\omega_n^{2}(T_d s+1)}{s(s+2\varsigma\omega_n)}=\frac{K(T_d s+1)}{s(s/2\varsigma\omega_n+1)}$$

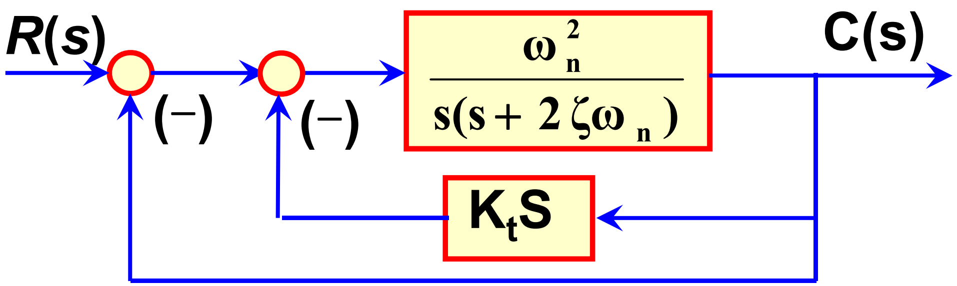
闭环传递函数：

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^{2}}{a}\left(\frac{s+a}{s^2+2\varsigma_d\omega_n s+\omega_n^2}\right),a=1/T_d,\varsigma_d=\varsigma+\frac{\omega_n}{2a}$$

闭环系统具有零点,可以使上升时间提前.阻尼增大,超调减小。

4、速度反馈对系统动态特性的影响





开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{C(s)}{E(s)}=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\varsigma\omega_n+k_t\omega_n^2)}=\frac{\omega_n}{2\varsigma+k_t\omega_n}\times\frac{1}{s\left[s/\left(2\varsigma\omega_n+k_t\omega_n^2\right)+1\right]}$$

闭环传递函数：

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+(2\varsigma\omega_n+k_t\omega_n^2)s+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\varsigma_t\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\zeta_t=\zeta+\frac{1}{2}k_t\omega_n$$

❑由上可知：

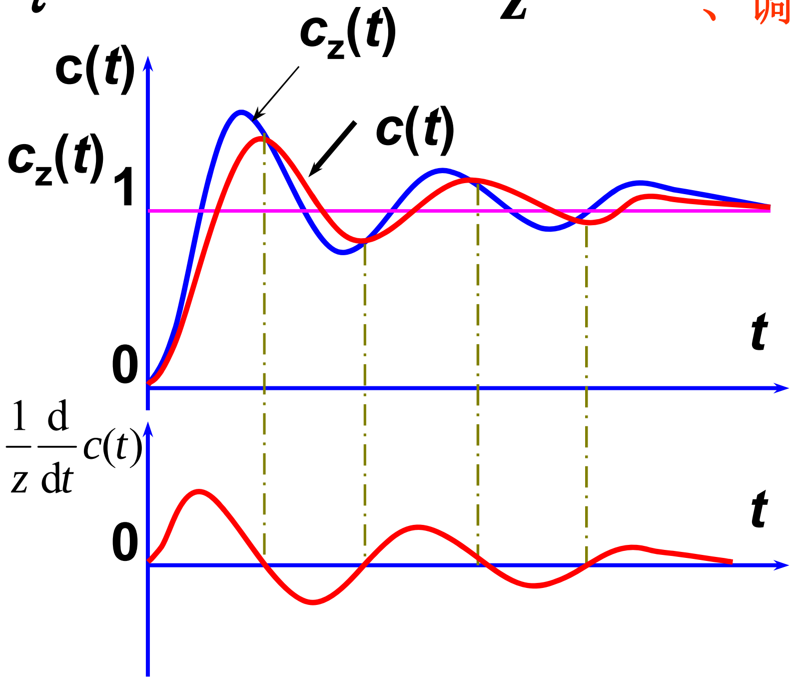
1) 速度反馈使ζ增大，振荡和超调减小，改善了系统平稳性；

2) 速度负反馈控制的闭环传递函数无零点，其输出平稳性优于比例——微分控制；

闭环零点对系统的影响

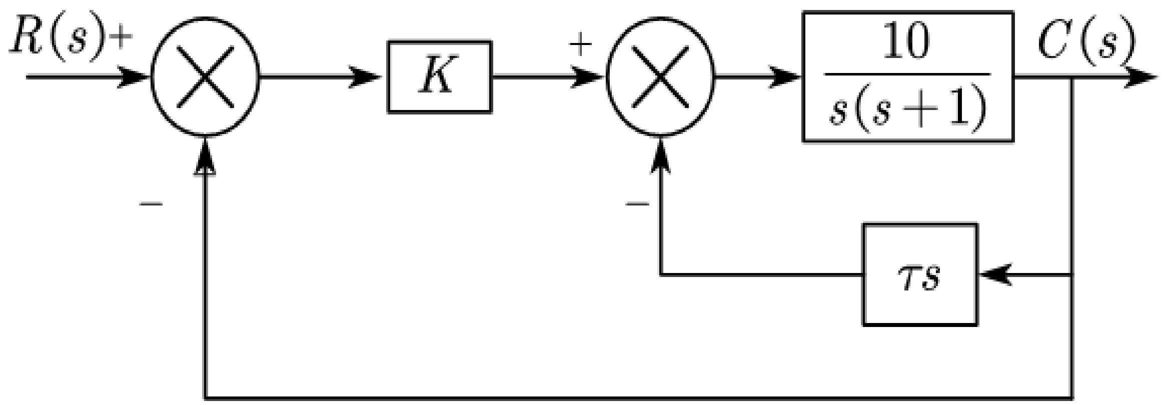
$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^{\ 2}(\tau s+1)}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2}+\frac{s}{z}\left(\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2}\right)$$

上式中，$z=\dfrac{1}{\tau}$ $\quad c_z(t)=c(t)+\dfrac{1}{z}\dot{c}(t)$ 峰值时间提前、超调增大、振荡加剧、调节时间拉长。



(*a*) 闭环零点对系统暂态响应的影响

5、系统方框图如下，要求超调量$\sigma = 16.3\%$，峰值时间$t_p = 1s$，求K与τ。



解 由 $\sigma\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 16.3\%$，$t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 1$，

可求得 $\zeta = 0.5, \omega_n = 3.63\ \text{rad/s}$

系统的开环传递函数 $G(s)$ 为

$$G(s) = \frac{10K}{s^2 + (1 + 10\tau)s}$$

系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10K}{s^2 + (1 + 10\tau)s + 10K}$$

故 $10K = \omega_n^2 = 3.63^2 = 13.177$

$$1 + 10\tau = 2\zeta\omega_n = 2 \times 0.5 \times 3.63$$

可以求得 $K = 1.32,\quad \tau = 0.263$

6、单位负反馈系统的开环传递函数如下：

$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s^3+as^2+2s+1}$$

若系统单位阶跃响应以ωn = 2 rad/s的频率振荡，试确定振荡时的K和a。

解 依题意，系统处于临界稳定状态，闭环系统必有一对纯虚根

$$\lambda_{1,2} = \pm j\omega_n = \pm j2$$

对应在劳斯表中必然出现某一行的第一列元素或该行全部元素为零的情况。

系统闭环特征方程为

$$D(s) = s^3 + as^2 + (2+K)s + (1+K) = 0$$

列劳斯表

$$\begin{array}{llll}
s^3 & 1 & 2+K \\
s^2 & a & 1+K \\
s^1 & 2+K-\dfrac{1+K}{a} & 0 \\
s^0 & 1+K &
\end{array}$$

令第3行第1列元素为0,有

$$2 + K - \frac{1+K}{a} = 0 \qquad ①$$

由第2行元素构成辅助方程

$$as^2 + 1 + K = 0$$

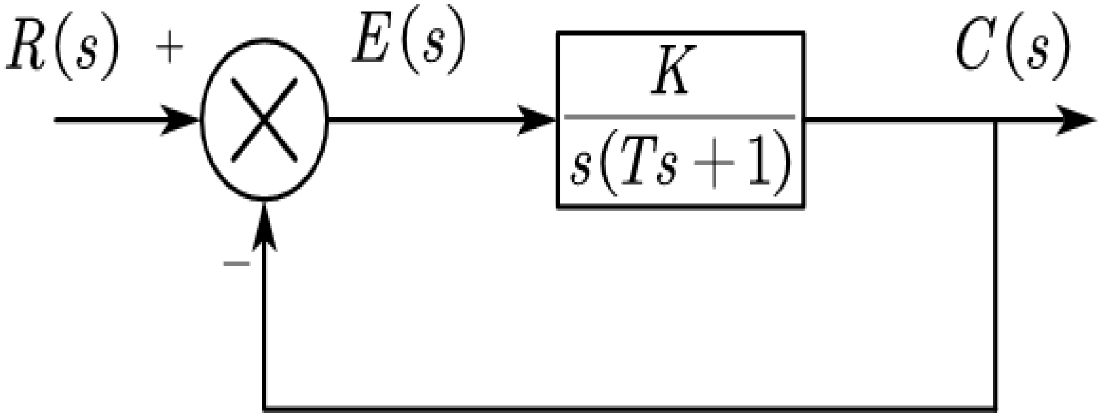
解出

$$s = \pm j\sqrt{\frac{1+K}{a}} = \pm j2 \qquad ②$$

联立方程式①和式②,解出

$$K = 2, \quad a = 0.75$$

7、系统方框图如下：



希望所有特征根均位于s平面上s = -2 + jω的左侧，且x ≥ 0.5。用阴影线表示出特征根在平面上的分布范围，并求出相对应的K、T的取值范围。

解　令 $\zeta = 0.5$，则 $\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \arctan\sqrt{3} = 60°$。

特征根的分布范围见图 3-14 所示。

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts^2 + s + K}$$

$$= \frac{K/T}{s^2 + s/T + K/T}$$

$$\omega_n^2 = K/T$$

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{KT}}$$

令 $\zeta \geq 0.5$，得

$$KT \leq 1, \quad K \leq 1/T$$

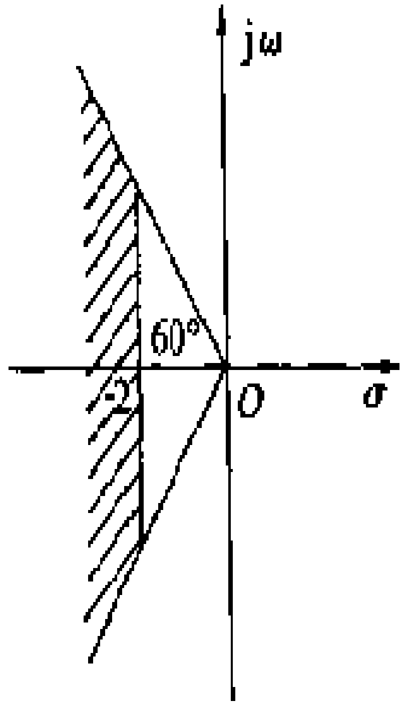


图 3-14　特征根分布范围

由特征方程 $Ts^2+s+K=0$ 知，系统稳定的条件是

$$T>0,\quad K>0$$

特征根的实部是 $-\frac{1}{2T}$，令 $-\frac{1}{2T}<-2$，得

$$T<\frac{1}{4}$$

由此可绘出所要求得参数范围，如图 3-15 所示。

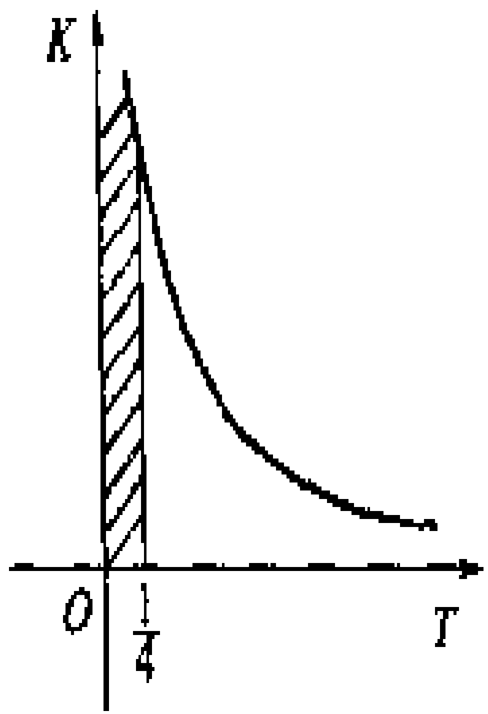


图 3-15　参数取值范围

8、设单位负反馈系统的开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{k}{s\left(1+\frac{1}{3}s\right)\left(1+\frac{1}{6}s\right)}$$

（1）闭环系统稳定时值的范围；

（2）若要闭环特征方程的根的实部均小于-1，求k的取值范围。

解 闭环特征方程为

$$D(s) = s\left(1 + \frac{1}{3}s\right)\left(1 + \frac{1}{6}s\right) + k = 0$$

即

$$D(s) = s^3 + 9s^2 + 18s + 18k = 0$$

(1) 列劳斯表

$$\begin{array}{lcc}
s_1^3 & 1 & 18 \\
s_1^2 & 9 & 18k \\
s_1^1 & 18 - 2k & 0 \\
s_1^0 & 18k &
\end{array}$$

欲使系统稳定，只需

$$\begin{cases} 18 - 2k > 0 \\ 18k > 0 \end{cases}$$

解得

$$0 < k < 9$$

(2) 若要求特征根实部均小于 -1,可令 $s = s_1 - 1$,将 s 平面映射为 s_1 平面,只要特征根全部位于 s_1 平面的左半平面即可。

$$D(s_1) = (s_1 - 1)^3 + 9(s_1 - 1)^2 + 18(s_1 - 1) + 18k = 0$$

整理得 $$D(s_1) = s_1^3 + 6s_1^2 + 3s_1 + 18k - 10 = 0$$

列劳斯表

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 3 \\ s^2 & 6 & 18k - 10 \\ s^1 & \dfrac{14 - 9k}{3} & 0 \\ s^0 & 18k - 10 & \end{array}$$

欲使 $D(s_1)$ 的根全处于 s_1 的左半平面,则要求

$$\begin{cases} \dfrac{14 - 9k}{3} > 0 \\ 18k - 10 > 0 \end{cases}$$

解得 $$\frac{5}{9} < k < \frac{14}{9}$$

9、讨论特征方程

$$126s^3 + 219s^2 + 258s + 85 = 0$$

问其中有多少根的实部落在开区间（-1,0）内？

解 分析系统特征根有3个。首先用劳斯判据判断有几个根不在s左半平面,然后再做代换$s=s_1-1$,判断有几个根不在$s=-1$左面,便可得出结论。

列劳斯表

s^3	126	258
s^2	219	85
s^1	290.1	
s^0	85	

可见在 s 右半平面不存在不稳定根。令 $s = s_1 - 1$ 代人特征方程整理后有

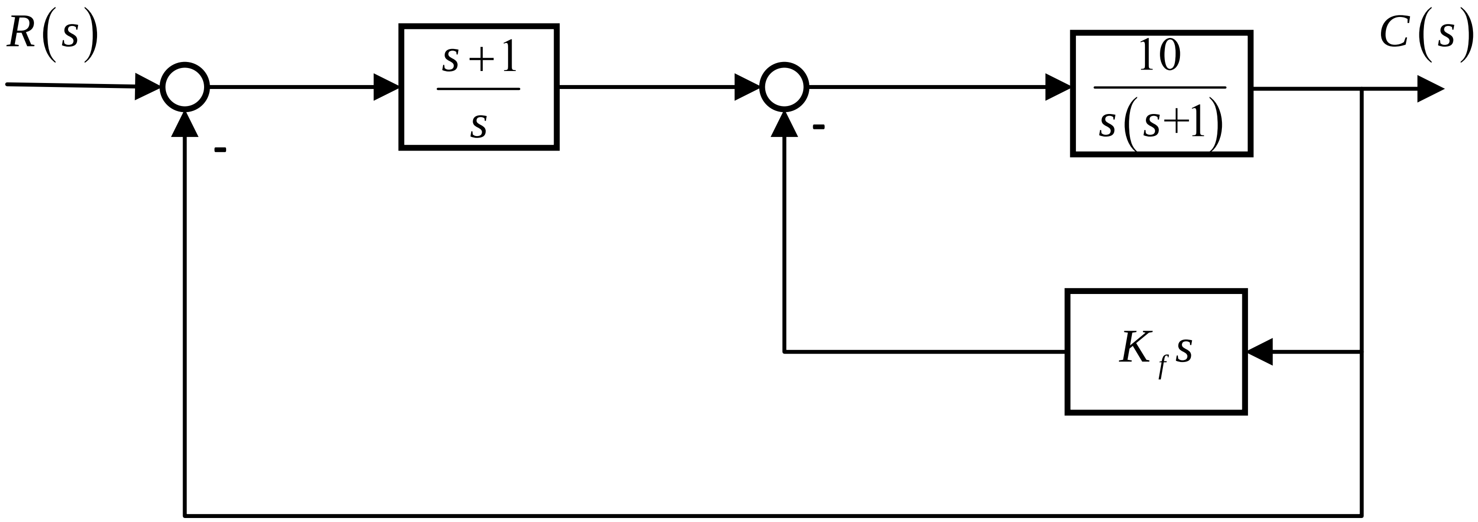
$$126s_1^3 - 159s_1^2 + 225s_1 - 107 = 0$$

列劳斯表

$$\begin{array}{lll} s_1^3 & 126 & 225 \\ s_1^2 & -159 & -107 \\ s_1^1 & 140.2 & \\ s_1^0 & -107 & \end{array}$$

可见第一列元素变号 3 次,3 个根全部位于 $s = -1$ 的右面。因此得出结论:3 个根的实部全部位于开区间$(-1,0)$之内。

10、控制系统结构图如下：



试分析内反馈 K_f 对系统稳定性的影响。

开环传递函数为 $$G(s)=\frac{10(s+1)}{s^2(s+10K_f+1)}$$

闭环特征方程为 $$s^3+(10K_f+1)s^2+10s+10=0$$

劳斯判据

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 10 \\ s^2 & 10K_f+1 & 10 \\ s^1 & \dfrac{100K_f}{10K_f+1} & 0 \\ s^0 & 10 & 0 \end{array}$$

Kf > 0时，系统是渐进稳定的

Kf = 0

$$s^2+10=0$$

$$s=\pm j\sqrt{10}$$