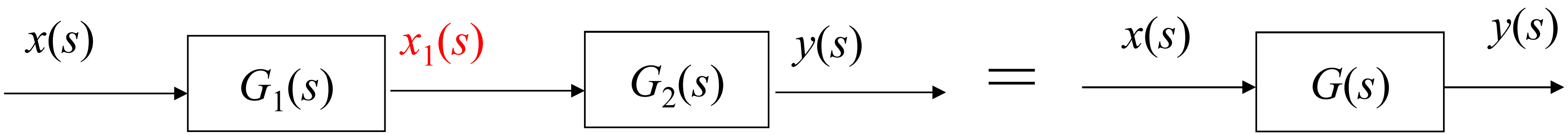
第二章 控制系统的数学模型

三、结构图的等效变换和简化

（1）串联

在单向信号传递中，若前一个环节的输出是后一个环节的输入，并依次串接，这种联接方式称为串联。



$$\because \frac{x_1(s)}{x(s)} = G_1(s), \qquad \frac{y(s)}{x_1(s)} = G_2(s) \qquad \therefore \frac{y(s)}{x(s)} = G_1(s)G_2(s) = G(s)$$

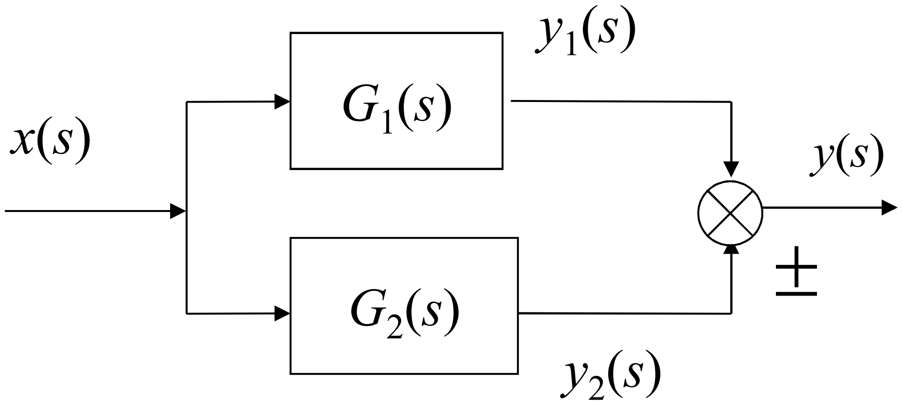
n 个环节串联后总的传递函数：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{x_1(s)}{R(s)} \frac{x_2(s)}{x_1(s)} \cdots \frac{c(s)}{x_{n-1}(s)} = G_1(s)G_2(s)\cdots G_n(s)$$

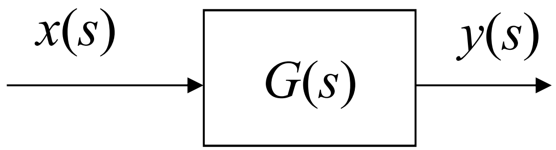
环节串联后，总的传递函数等于串联的各个环节传递函数的乘积。

三、结构图的等效变换和简化

（2）并联 若各个环节接受同一输入信号而输出信号又汇合在一点时，称为并联。

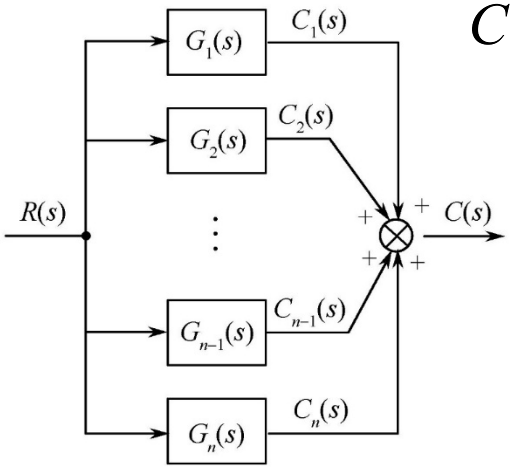


$=$



$$G(s)=G_1(s)\pm G_2(s)$$

$$y(s)=y_1(s)\pm y_2(s)=x(s)G_1(s)\pm x(s)G_2(s)=x(s)[G_1(s)\pm G_2(s)]=x(s)G(s)$$



$$C(s)=C_1(s)+C_2(s)+\cdots C_n(s)$$

$$C_1(s)=G_1(s)R(s)$$

$$C_2(s)=G_2(s)R(s)$$

$$\vdots$$

$$C_n(s)=G_n(s)R(s)$$

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{C_1(s)+C_2(s)+\cdots C_n(s)}{R(s)}$$

$$=G_1(s)+G_2(s)+\cdots G_n(s)$$

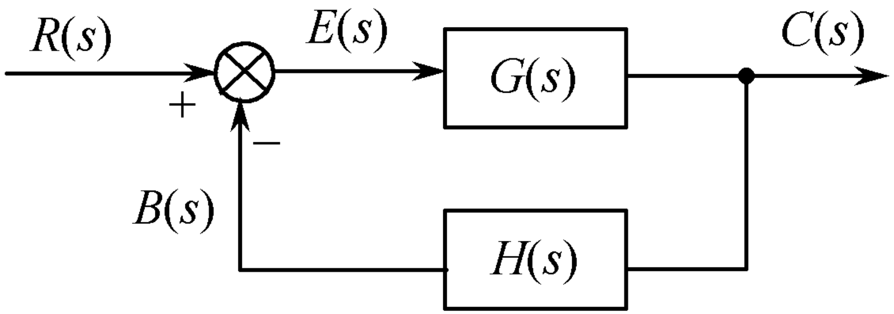
并联——传递函数之和

2.3 控制系统的结构图与信号流图

三、结构图的等效变换和简化

（3）反馈

若将系统或环节的输出信号反馈到输入端，与输入信号相比较，构成了反馈连接。



"+" 正反馈

"-" 负反馈

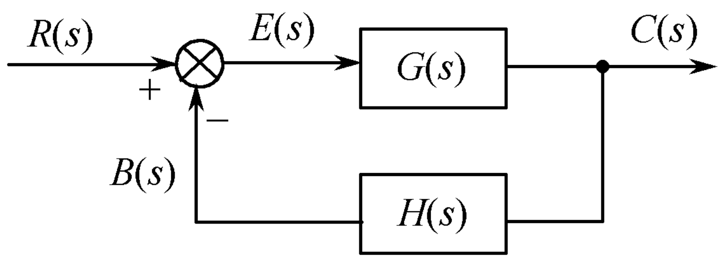
由信号输入点到信号输出点的通道称为前向通道；

输出信号反馈到输入点的通道称为反馈通道。

对于负反馈连接，给定信号$R(s)$和反馈信号$B(s)$之差，称为偏差信号$E(s)$，即

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

三、结构图的等效变换和简化



a. 反馈信号$B(s)$与偏差信号$E(s)$之比，定义为开环传递函数，

$$开环传递函数=\frac{B(s)}{E(s)}=G(s)H(s)$$

b. 输出信号$C(s)$与偏差信号$E(s)$之比，称为前向通道传递函数，

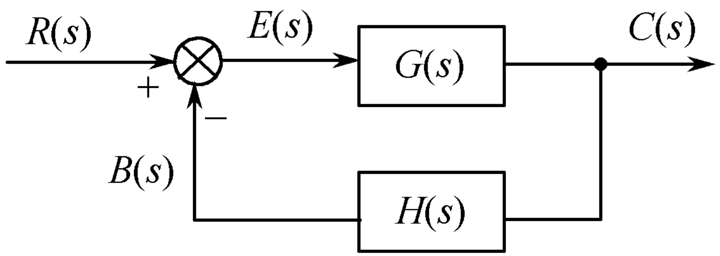
$$前向通道传递函数=\frac{C(s)}{E(s)}=G(s)$$

c.输出信号$C(s)$与输入信号$R(s)$之比，定义为闭环传递函数，

$$闭环传递函数=\frac{C(s)}{R(s)}=\Phi(s)$$

2.3 控制系统的结构图与信号流图

三、结构图的等效变换和简化



$$C(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

$$B(s) = H(s)C(s)$$

$$\begin{aligned} C(s) &= G(s)[R(s) - B(s)] \\ &= G(s)[R(s) - H(s)C(s)] \\ &= G(s)R(s) - G(s)H(s)C(s) \end{aligned}$$

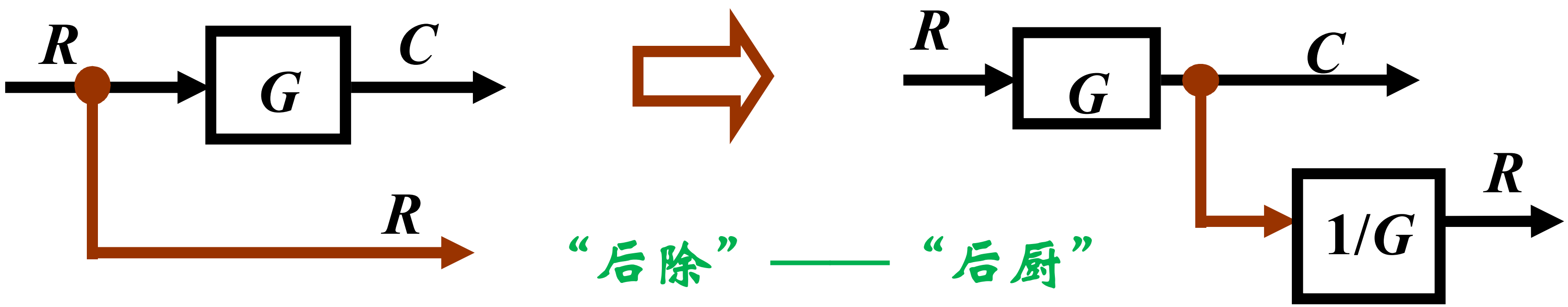
$$\Rightarrow \quad G(s)R(s) = [1 + G(s)H(s)]C(s)$$

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)}$$

三、结构图的等效变换和简化

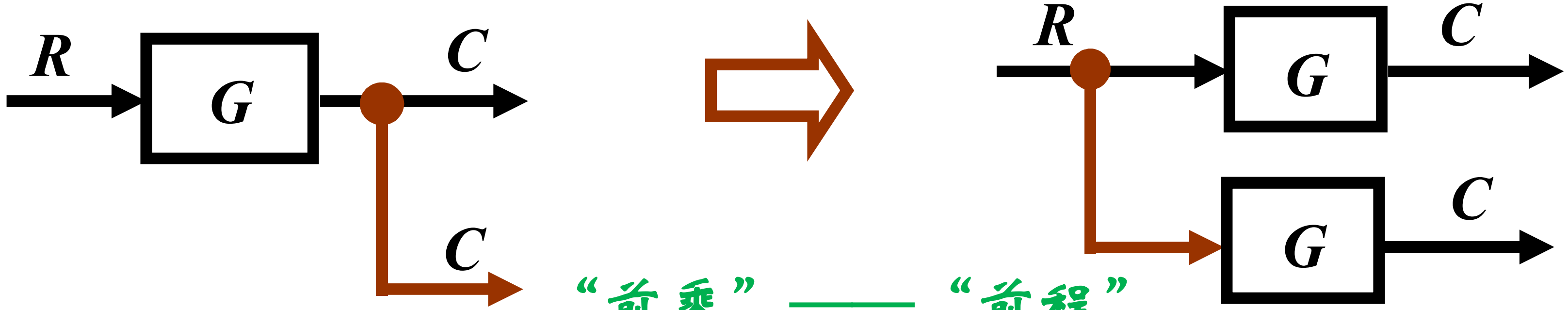
（4）引出点和比较点的移动 变换原则：变换前后应保持信号等效

1. 引出点后移



“后除”——“后厨”

2. 引出点前移

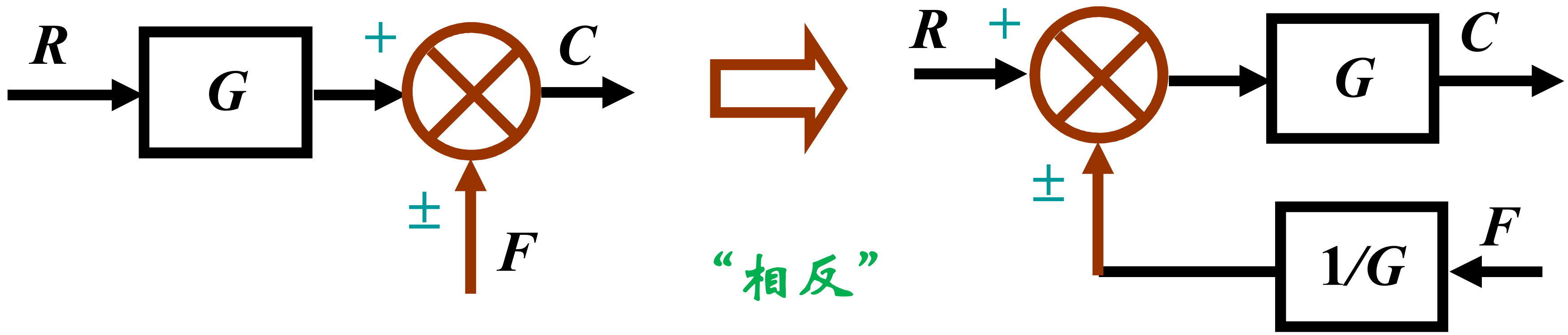


“前乘”——“前程”

三、结构图的等效变换和简化

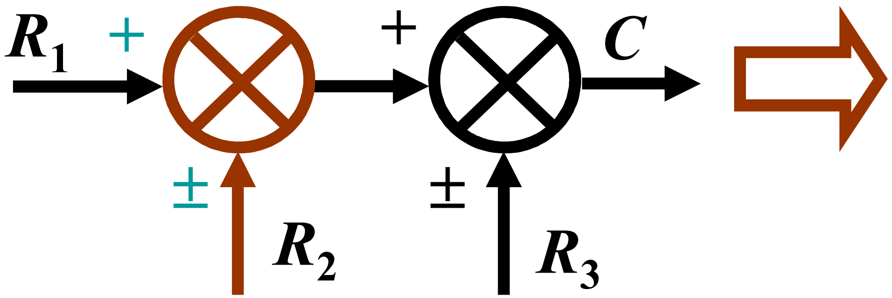
3. 比较点后移

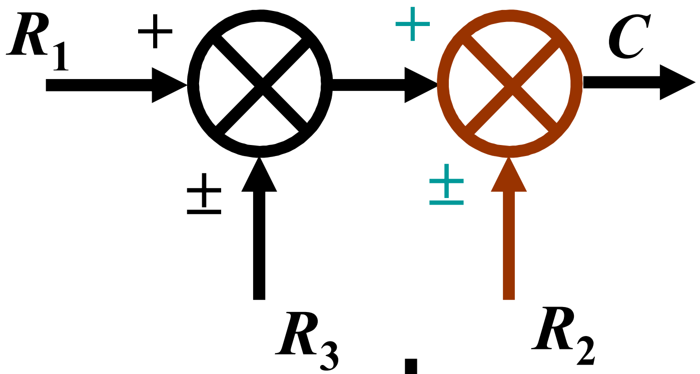
4. 比较点前移

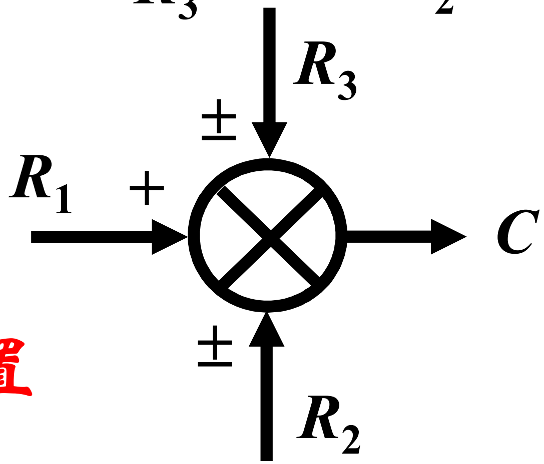


三、结构图的等效变换和简化

5.比较点互换或合并





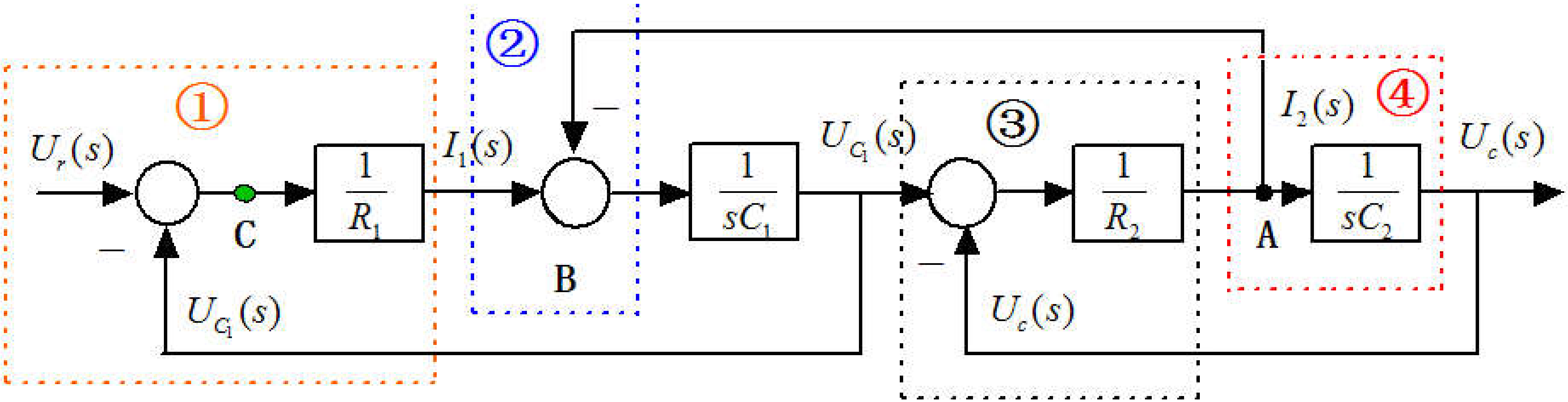


6. 比较点和引出点之间不宜交换位置

7. “-”可在信号线上越过方框移动，但不能越过比较点和引出点。

三、结构图的等效变换和简化

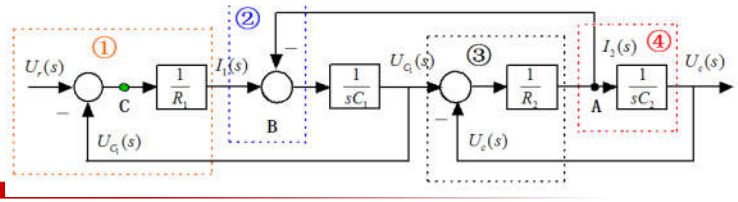
练习1：化简下列系统方框图

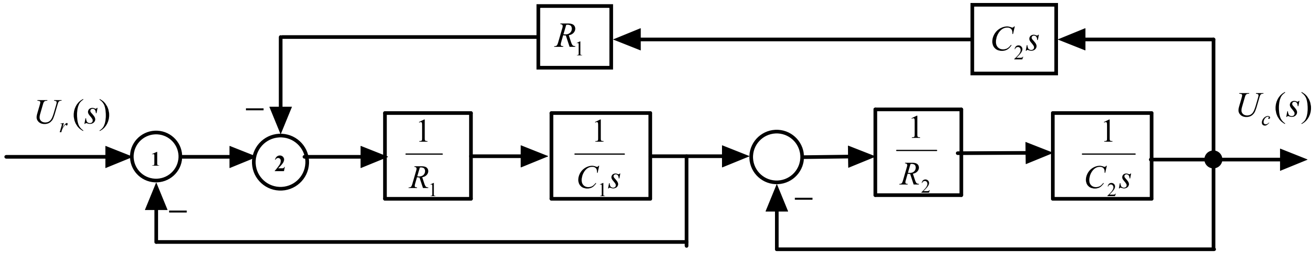


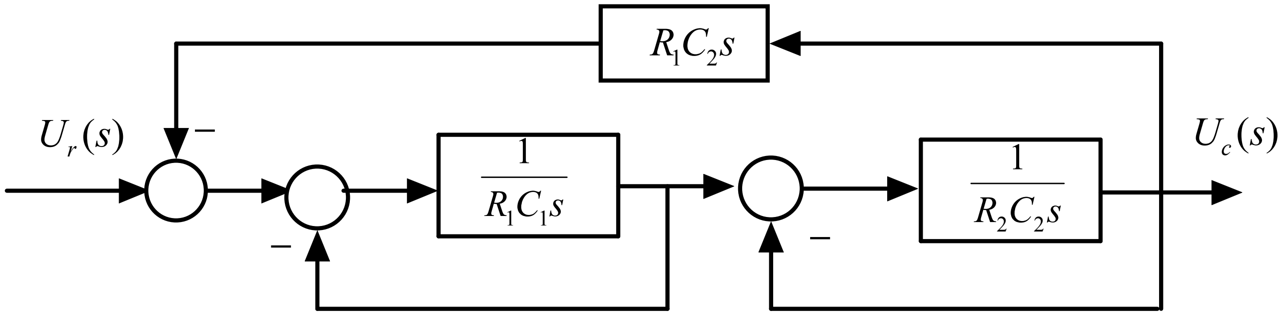
简化提示：

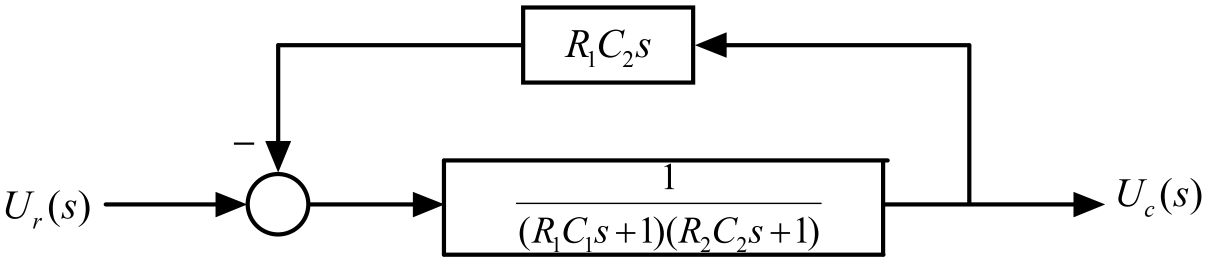
- 引出点A后移
- 比较点B前移
- 比较点1和2交换

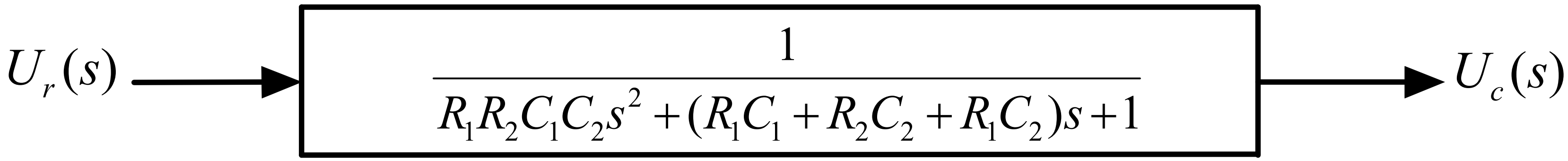
2.3 控制系统的结构图与信号流图





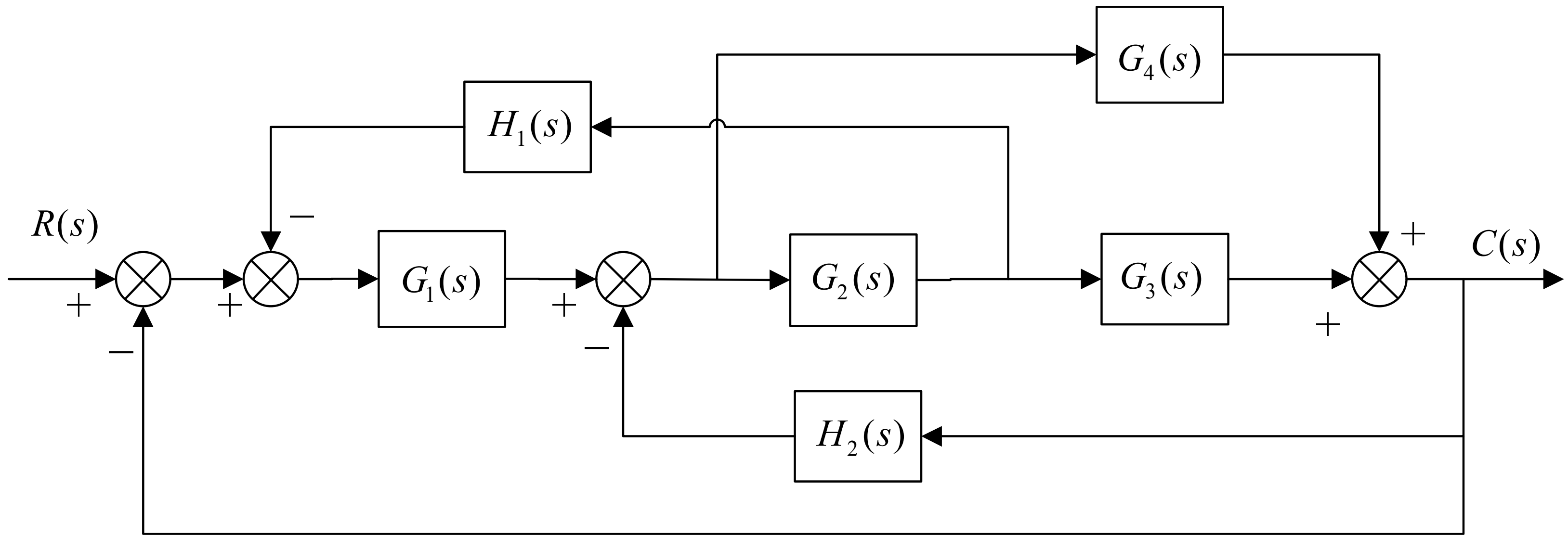




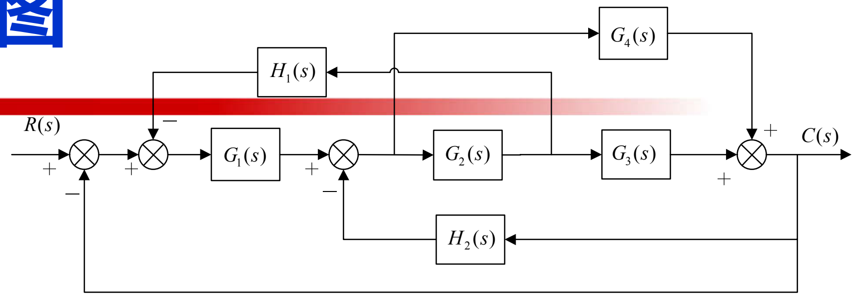


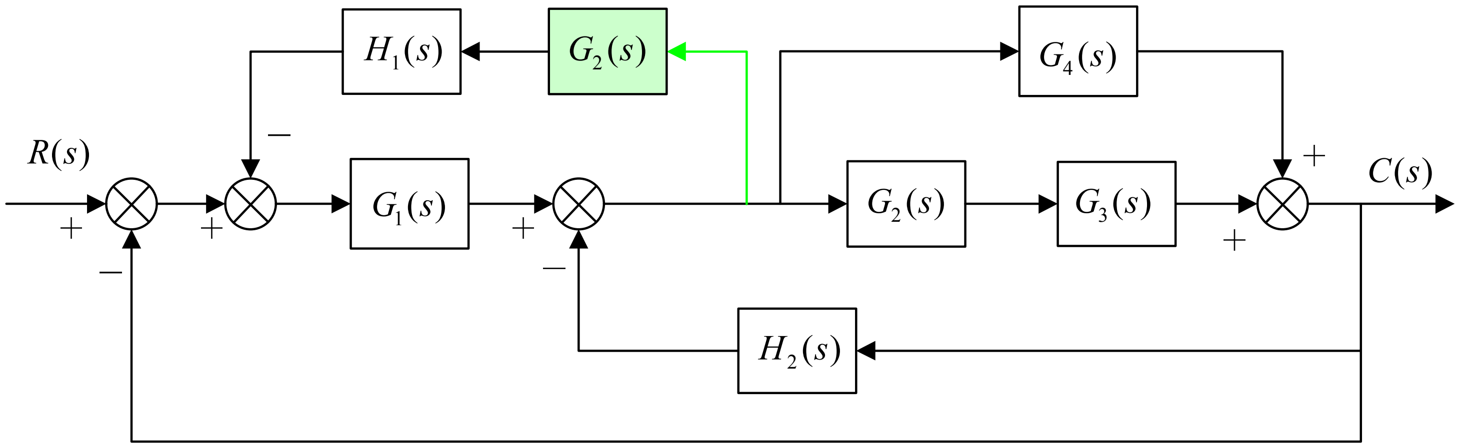
三、结构图的等效变换和简化

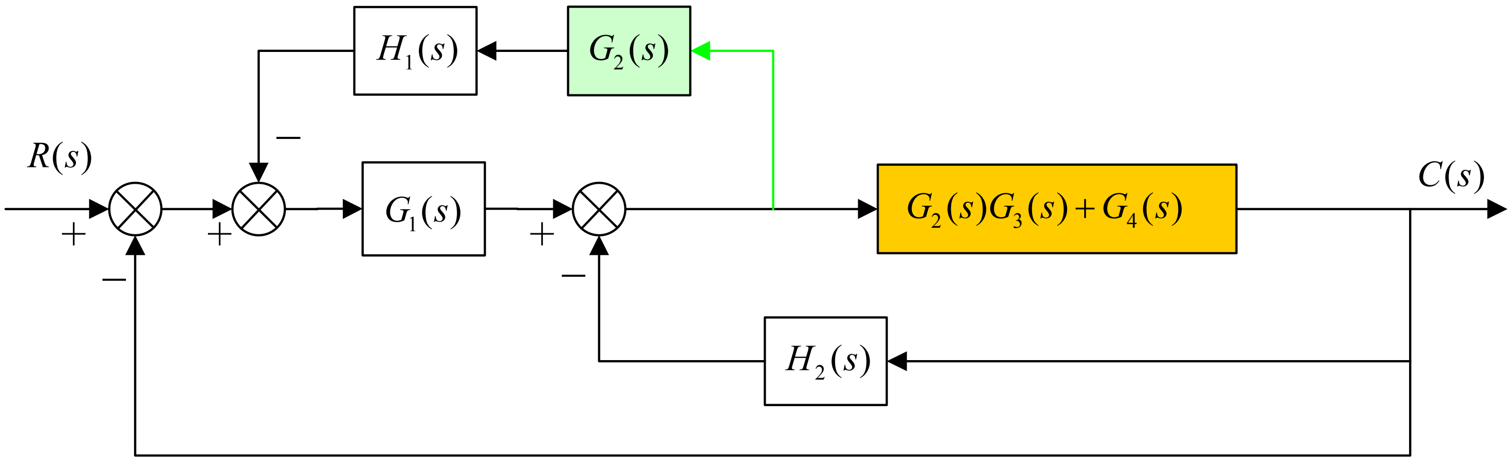
练习2：化简下列系统方框图，并求系统传递函数。



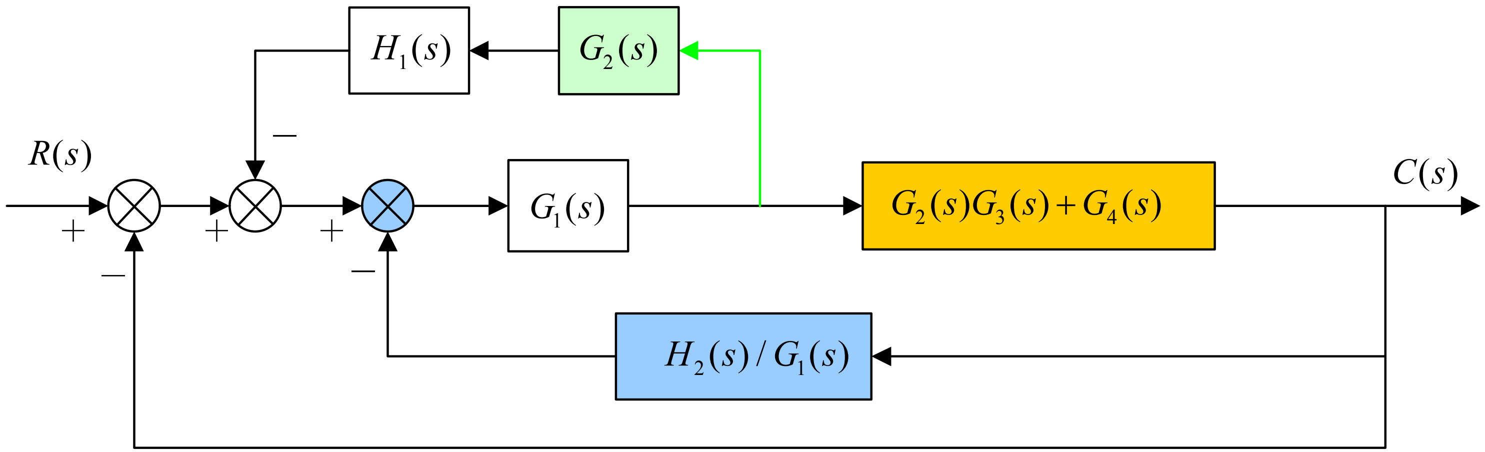
三、结构图的等效变换和简化

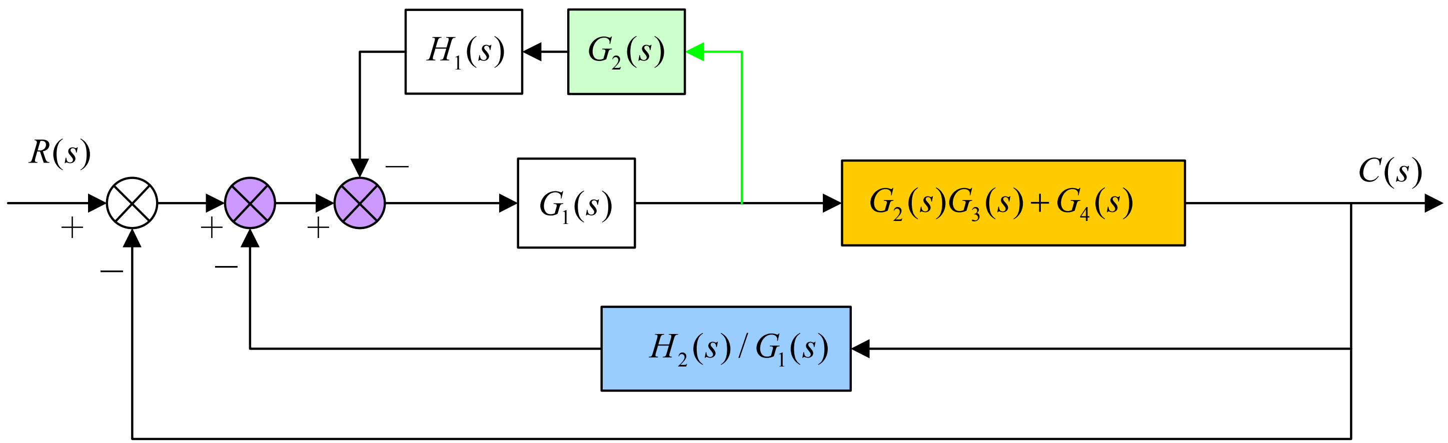






三、结构图的等效变换和简化





三、结构图的等效变换和简化

化简结果

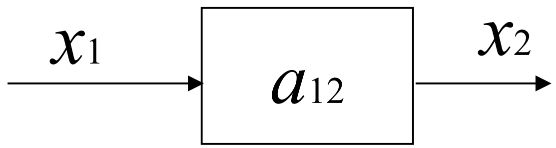
$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\dfrac{G_1}{1+G_1G_2H_1}(G_2G_3+G_4)}{1+\dfrac{G_1}{1+G_1G_2H_1}(G_2G_3+G_4)(\dfrac{H_2}{G_1}+1)}$$

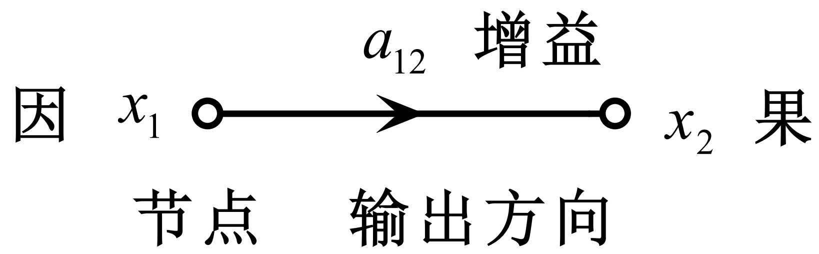
$$=\frac{\mathrm{G}_1(\mathrm{G}_2\mathrm{G}_3+\mathrm{G}_4)}{1+G_1G_2H_1+(G_2G_3+G_4)H_2+G_1(G_2G_3+G_4)}$$

四、信号流图

对于复杂的控制系统，结构图的简化过程仍较复杂，且易出错。Mason提出的信号流图，既能表示系统的特点，又能直接应用梅森公式方便的写出系统的传递函数。

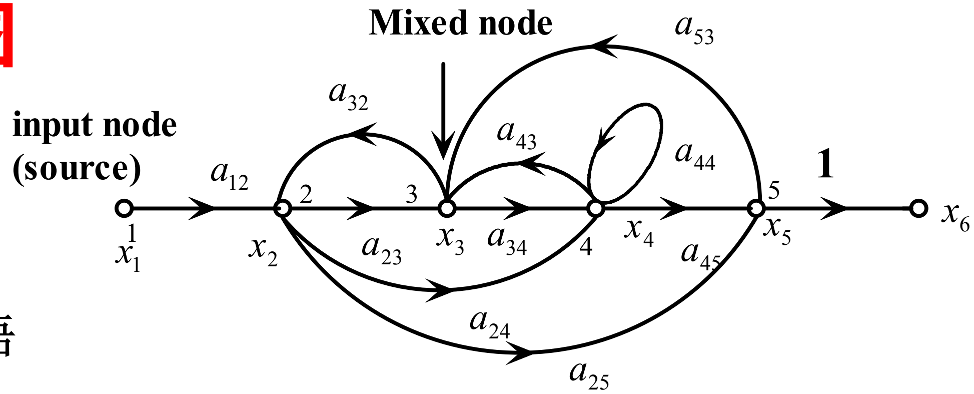
信号流图是一种用**图线**表示线性系统方程组的方法。





$$x_2 = a_{12} x_1$$

四、信号流图



信号流图中的术语

•输入节点（源）：只有输出支路的节点。图中的 x_1

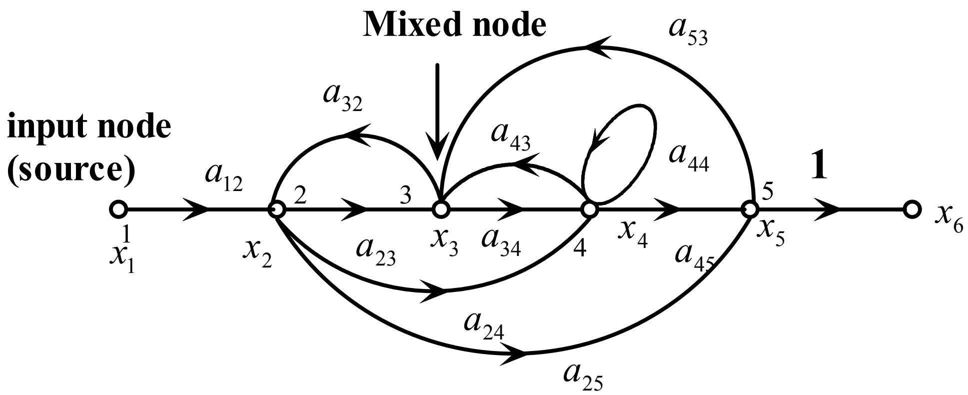
•输出节点（汇，阱，坑）：只有输入支路的节点。有时信号流图中没有任何节点是“只具有输入支路的”的节点 。只要定义信号流图中任一变量为输出变量，然后从该节点变量引出一条增益为1的支路，即可形成一输出节点，如图中的 x_6。

•混合节点：既有输入支路又有输出支路的节点。图中的 x_2, x_3, x_4

•通路：从某一节点开始沿支路箭头方向经过相连支路到达另一节点（或同一节点）构成的路径称为通路。

2.3 控制系统的结构图与信号流图

四、信号流图



• 前向通路：开始于输入节点，沿支路箭头方向，与其他节点相交不多于一次，最终到达输出节点的通路。

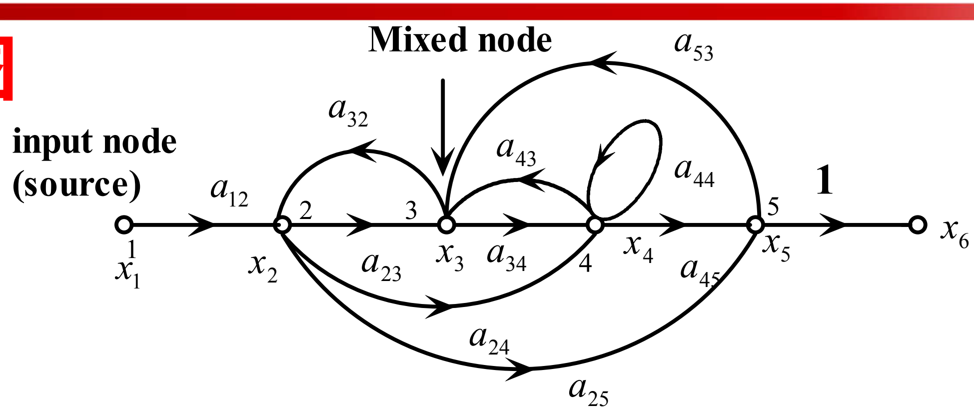
前向通路上各支路增益乘积，称为前向通路总增益 用 p_k 表示。

① $x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_5$ $\quad a_{12}a_{23}a_{34}a_{45} = p_1$

② $x_1 \to x_2 \to x_4 \to x_5$ $\quad a_{12}a_{24}a_{45} = p_2$

③ $x_1 \to x_2 \to x_5$ $\quad a_{12}a_{25} = p_3$

四、信号流图



- 闭通路(回路)：1）起点和终点在同一节点，
  2）与任何其他节点相交不多于一次的闭合路径。

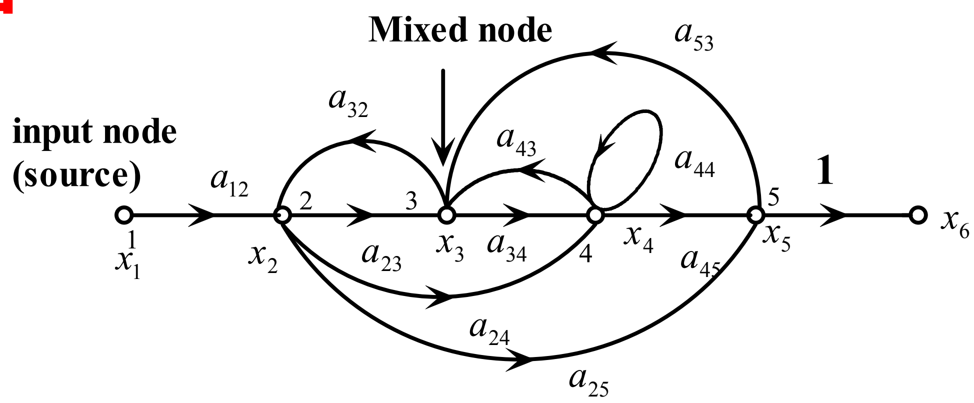
$x_2 \to x_3 \to x_2$ $\quad$ $x_2 \to x_4 \to x_3 \to x_2$ $\quad$ $x_3 \to x_4 \to x_3$

$x_2 \to x_5 \to x_3 \to x_2$ $\quad$ $x_2 \to x_4 \to x_5 \to x_3 \to x_2$ $\quad$ $x_4 \to x_4$ $\quad$ $x_3 \to x_4 \to x_5 \to x_3$

回路中所有支路的增益乘积称为回路增益，用 L_i 表示 。

$$L_1 = a_{23}a_{32} \qquad L_2 = a_{24}a_{43}a_{32} \qquad L_3 = a_{34}a_{43}$$

四、信号流图



- 不接触回路：回路之间没有公共节点的回路称为不接触回路。

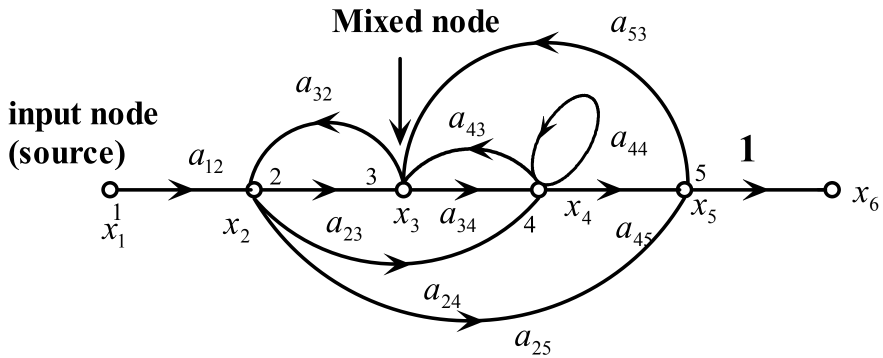
在信号流图中，可以有两个或两个以上不接触回路。例如：

$$x_2 \to x_3 \to x_2 \text{ 和 } x_4 \to x_4$$

$$x_2 \to x_5 \to x_3 \to x_2 \quad \text{和} \quad x_4 \to x_4$$

2.3 控制系统的结构图与信号流图

四、信号流图



信号流图的性质

- 信号流图适用于线性系统。
- 支路表示一个信号对另一个信号的函数关系，信号只能沿支路上的箭头指向传递。
- 在节点上可以把所有输入支路的信号叠加，并把相加后的信号送到所有的输出支路。
- 具有输入和输出节点的混合节点，通过增加一个具有单位增益的支路把它作为输出节点来处理。
- 对于一个给定的系统，信号流图不是唯一的，由于描述同一个系统的方程可以表示为不同的形式。

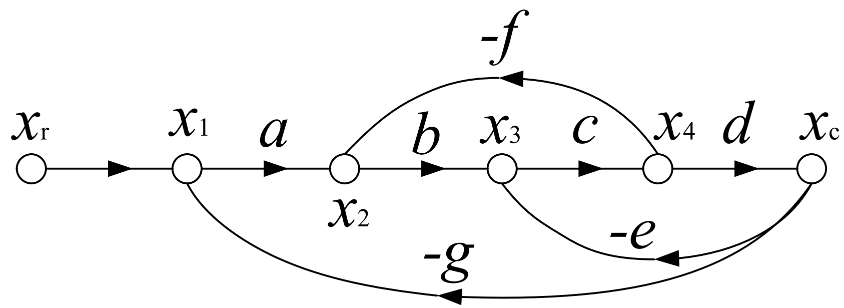
四、信号流图

信号流图的绘制:

1) 先按顺序写出各节点: x_1, x_2, …

2) 按下面公式依次连接: 节点 = 支路增益*节点+…… 只看输入

$$x_1 = x_r - g x_c$$
$$x_2 = a x_1 - f x_4$$
$$x_3 = b x_2 - e x_c$$
$$x_4 = c x_3$$
$$x_c = d x_4$$



信号流图的简化与结构图化简过程类似。 信号等效原则

五、梅森增益公式（目的：直接求传递函数，不需简化信号流图）

任意结构图与信号流图中，某个输出对某个输入的传递函数可表示为：

$$P=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k$$

式中：P 为系统总增益（总传递函数）；

n 为前向通路的个数；

P_k 为第k条前向通路增益；

Δ 为信号流图特征式，是信号流图所表示的方程组的系数矩阵的行列式。

2.3 控制系统的结构图与信号流图

$$P=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k$$

$$\Delta=1-\sum L_a+\sum L_bL_c-\sum L_dL_eL_f+\cdots+(-1)^m\sum L_mL_n\bullet\bullet\bullet$$

$\sum L_a$ —所有不同 单回路增益之和；

$\sum L_bL_c$—每2个互不接触回路增益乘积之和；

$\sum L_dL_eL_f$ —每3个互不接触回路增益乘积之和。

$\sum L_mL_n\bullet\bullet\bullet$—每m个互不接触回路增益乘积之和。

Δ_k 称为第k条前向通路特征式的余因子，是在Δ 中去除与第k条前向通路相接触的回路增益项以后的余项式，也就是不与第k条前向通路相接触的那一部分信号流图的Δ 值。

在同一个信号流图中，求任何一对节点之间的增益，分母总是**Δ**，变化的只是分子。

分子：对从输入节点到输出节点之间全部可能的前向通路上求和。

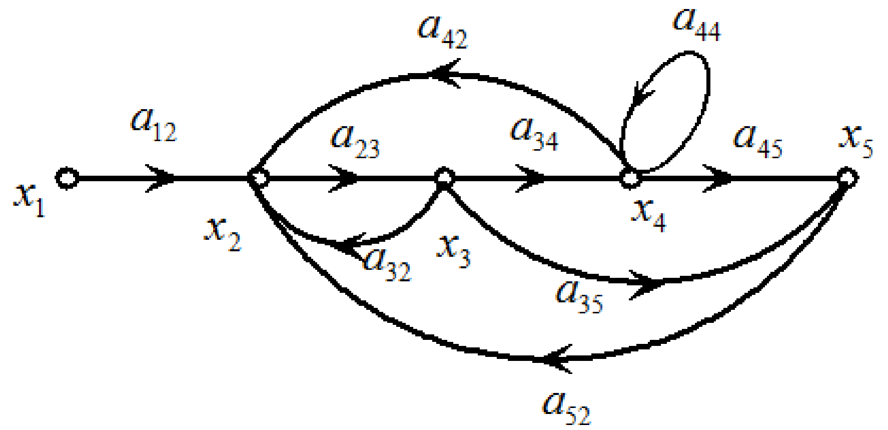
找通路、找回路、不接触、算总和

$$P=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k$$

五、梅森增益公式

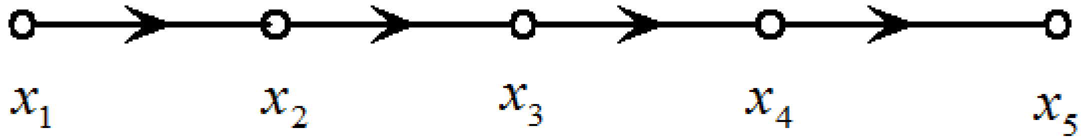
例： 求下图所示信号流图的总增益 $X_5(s)/X_1(s)$

(a) 输入节点 $x1$，输出节点 $x5$。



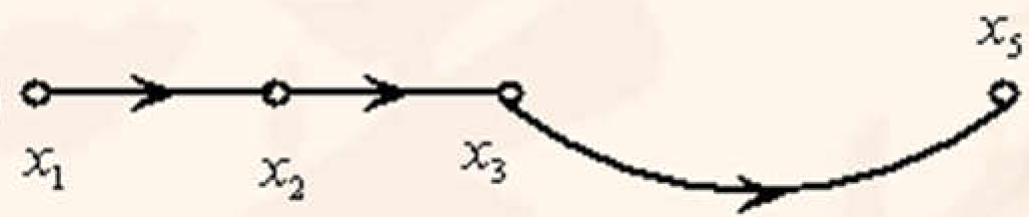
找通路

(b)

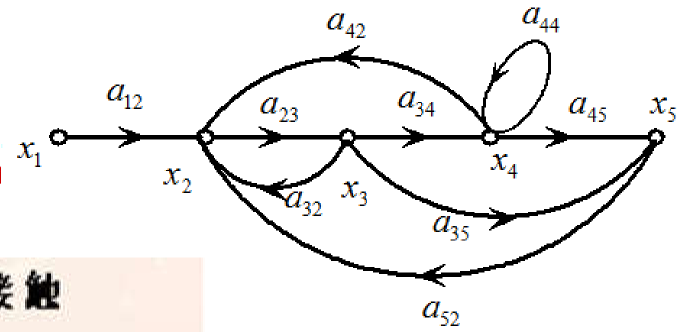


$$P_1=a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}$$

(c)

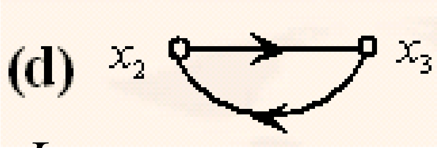


$$P_2=a_{12}a_{23}a_{35}$$

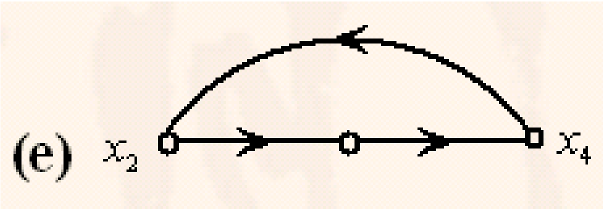


五、梅森增益公式

找回路



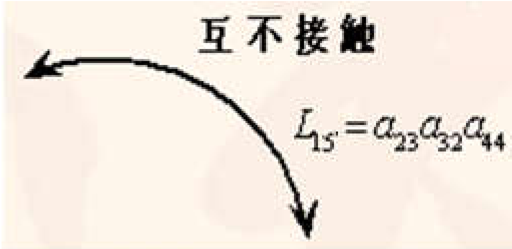
$L_1 = a_{23}a_{32}$



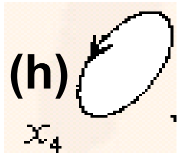
$L_2 = a_{23}a_{34}a_{42}$

$L_3 = a_{23}a_{34}a_{45}a_{52}$

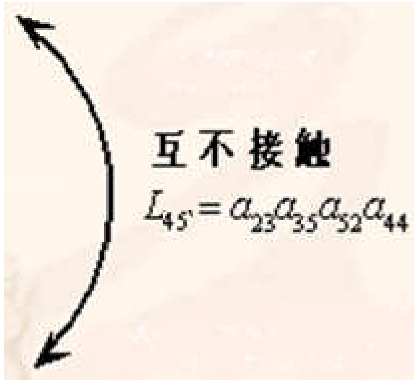
$L_4 = a_{23}a_{35}a_{52}$

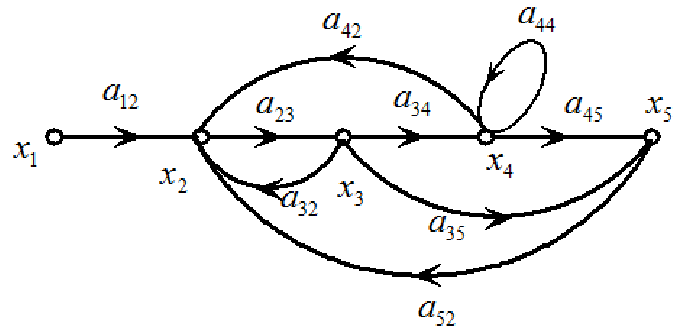


不接触



$L_5 = a_{44}$





五、梅森增益公式

$$P=\frac{1}{\Delta}\sum_{1}^{n}P_k\Delta_k$$

算总和 $\Delta=1-\sum L_a+\sum L_bL_c-\sum L_dL_eL_f+\cdots+(-1)^m\sum L_mL_n\bullet\bullet\bullet$

$$\Delta=1-(a_{23}a_{32}+a_{23}a_{34}a_{42}+a_{23}a_{34}a_{45}a_{52}+a_{23}a_{35}a_{52}+a_{44})+(a_{23}a_{32}a_{44}+a_{23}a_{35}a_{52}a_{44})$$

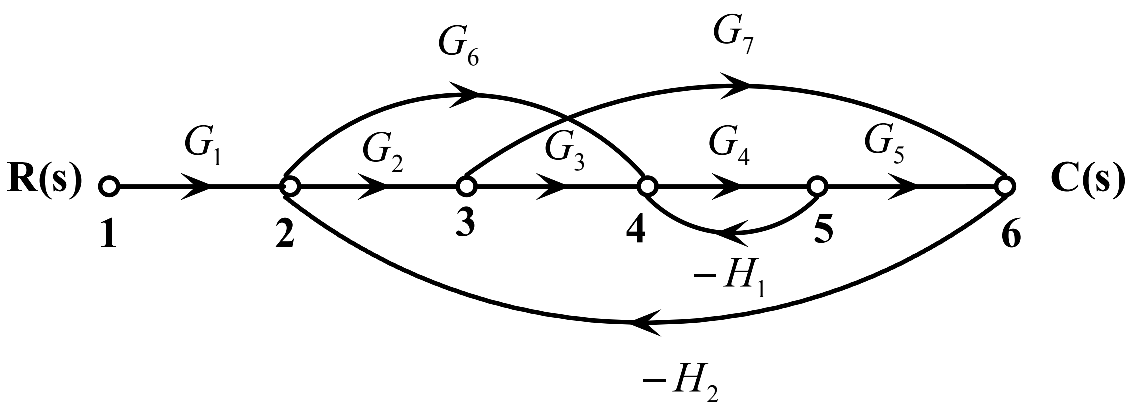
$P_1=a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}$ $\qquad$ $P_2=a_{12}a_{23}a_{35}$

$\Delta_1=1$ $\qquad$ $\Delta_2=1\text{-}a_{44}$

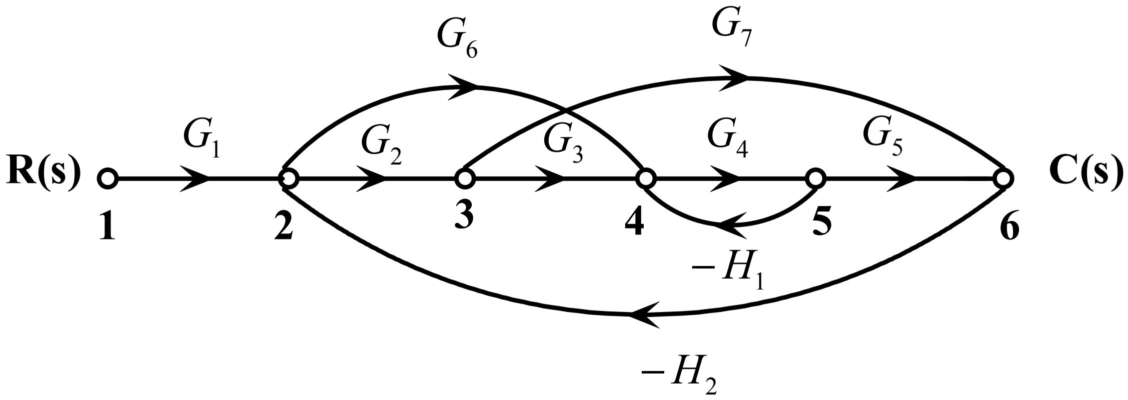
$$P=\frac{a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}+a_{12}a_{23}a_{35}(1-a_{44})}{1-(a_{23}a_{32}+a_{23}a_{34}a_{42}+a_{23}a_{34}a_{45}a_{52}+a_{23}a_{35}a_{52}+a_{44})+(a_{23}a_{32}a_{44}+a_{23}a_{35}a_{52}a_{44})}$$

五、梅森增益公式

例： 利用梅森增益公式求下图所示系统的闭环传递函数。



五、梅森增益公式



找通路

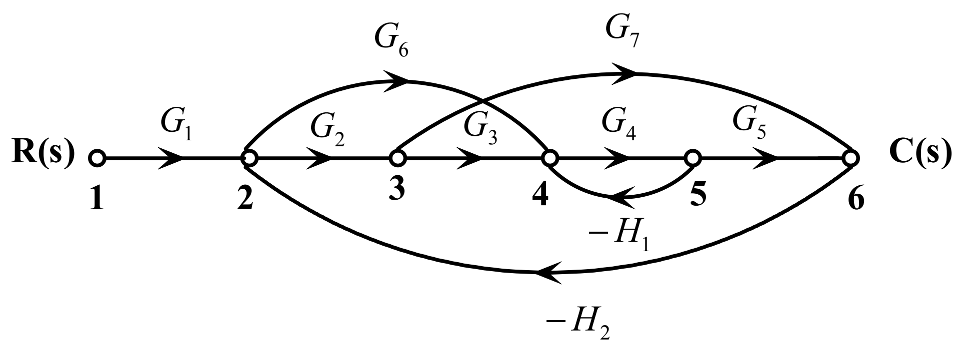
解：前向通路有3个

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \qquad P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5$$

$$1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 6 \qquad P_2 = G_1G_6G_4G_5$$

$$1 \to 2 \to 3 \to 6 \qquad P_3 = G_1G_2G_7$$

五、梅森增益公式



找回路

4个单独回路

$4 \to 5 \to 4 \qquad L_1 = -G_4H_1$

$2 \to 3 \to 6 \to 2 \qquad L_2 = -G_2G_7H_2$

$2 \to 4 \to 5 \to 6 \to 2 \qquad L_3 = -G_6G_4G_5H_2$

$2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 2 \qquad L_4 = -G_2G_3G_4G_5H_2$

$\Delta_1 = 1$

$\Delta_2 = 1$

$\Delta_3 = 1 + G_4H_1$

不接触

互不接触 L_1与L_2 $\qquad L_1L_2 = G_4G_2G_7H_1H_2$

算总和

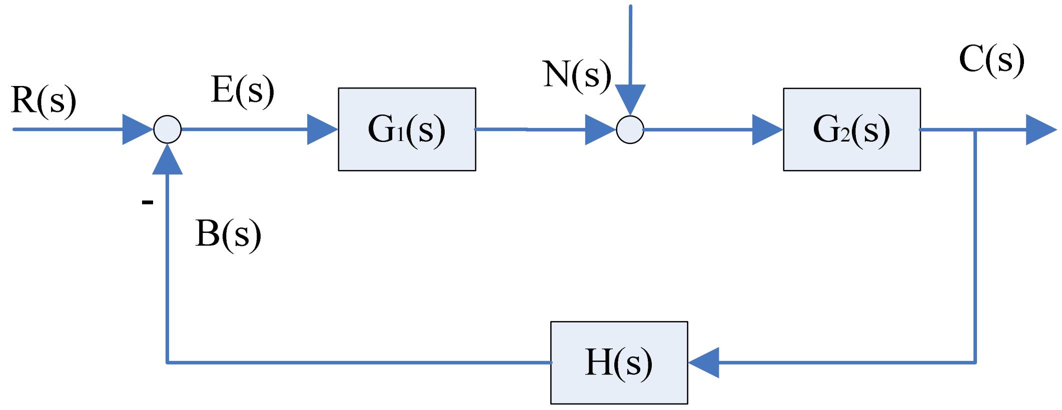
$$\Delta = 1 + G_4H_1 + G_2G_7H_2 + G_6G_4G_5H_2 + G_2G_3G_4G_5H_2 + G_4G_2G_7H_1H_2$$

2.3 控制系统的结构图与信号流图

$$P = \frac{1}{\Delta}\sum_{1}^{n} P_k \Delta_k$$

$$P = \frac{G_1G_2G_3G_4G_5 * 1 + G_1G_6G_4G_5 * 1 + G_1G_2G_7 * (1 + G_4H_1)}{1 + G_4H_1 + G_2G_7H_2 + G_6G_4G_5H_2 + G_2G_3G_4G_5H_2 + G_4G_2G_7H_1H_2}$$

六、闭环系统的传递函数



1. 输入信号作用下的闭环传递函数

令$N(s)=0$， 输入信号$R(s)$到输出信号$C(s)$之间的传递函数：

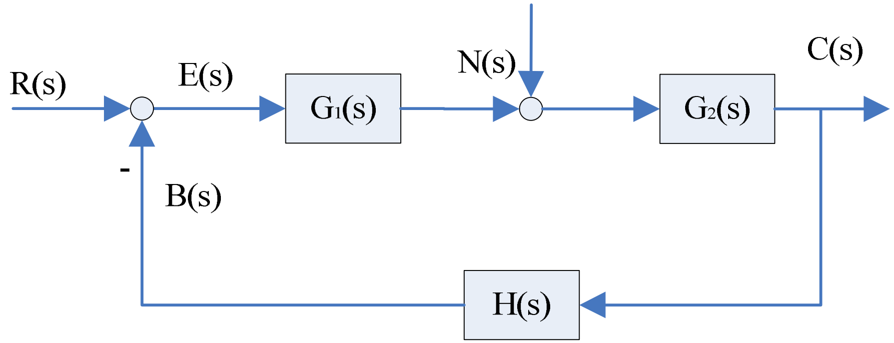
$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

在输入信号作用下，系统的输出：

$$C(s)=\Phi(s)R(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s)$$

2.3 控制系统的结构图与信号流图

2. 扰动作用下的闭环传递函数



令$R(s)$=0， 扰动作用$N(s)$到输出信号$C(s)$之间的传递函数：

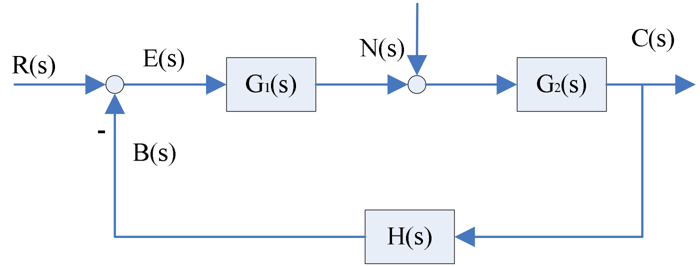
$$\Phi_n(s)=\frac{C(s)}{N(s)}=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

在扰动作用下，系统的输出：

$$C(s)=\Phi_n(s)N(s)=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

2.3 控制系统的结构图与信号流图

3. 输入信号和扰动共同作用下的系统输出



$$\sum C(s) = \Phi(s)R(s) + \Phi_n(s)N(s)$$

$$= \frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}[G_1(s)G_2(s)R(s) + G_2(s)N(s)]$$

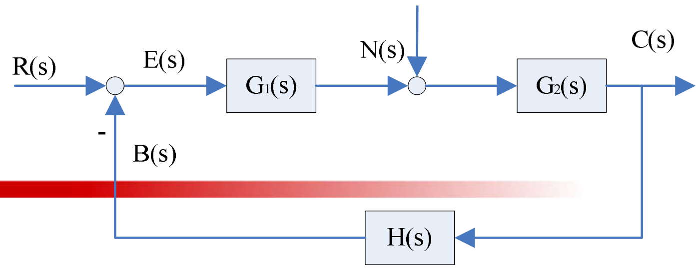
如果满足 $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$和$|G_1(s)H(s)| \gg 1,$

则 $$\sum C(s) \approx \frac{1}{H(s)}R(s)$$

系统输出仅取决于反馈通路的传递函数和输入信号，既与前向通路传递函数无关，也不受扰动作用的影响。

当 $H(s)=1$ **则** $C(s) \approx R(s)$ **近似完全复现输入信号，抑制扰动。**

2.3 控制系统的结构图与信号流图



4. 闭环系统的误差传递函数

闭环系统在输入信号或扰动作用下，以误差$E(s)$作为输出量的传递函数称为**误差传递函数**。

在输入信号作用下，误差传递函数： $\Phi_e(s)=\dfrac{E(s)}{R(s)}=\dfrac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$

在扰动作用下，误差传递函数： $\Phi_{en}(s)=\dfrac{E(s)}{N(s)}=\dfrac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$

- 对于上述典型结构，各种闭环系统传递函数的分母相同，等于**信号流图的特征式。**

- 注意： $\sum C(s)$、$\sum E(s)$可以，$\sum \Phi(s)$不可以 **(因为是比值，输入不同)**

本章总结

掌握：1）绘制控制系统结构图和信号流图方法，及结构图化简；

2）由系统结构图求系统开环和闭环传递函数的方法；

3）利用梅森增益公式求取系统传递函数。 ★★★

理解：1）典型环节的传递函数（时域、复域）； ★★

了解：1）控制系统传递函数的几种形式； ★

2）零、极点的定义。

作业：2-4 （b），2-5 （1） ，2-9 ，2-14，

2-17（c） （e），2-21（a），2-22 （a）