自动控制原理 复习

东南大学电气工程学院

付 兴 贺

一、课程体系架构

自动控制原理

- 系统建模
  - (1)机理建模
  - (2)统计建模
  - ——结构
- 系统分析
  - (3)稳定性分析
  - (4)动静态性能分析
  - ——分析
- 系统设计
  - (5)综合根据指标设计控制器
  - (6)校正根据指标增加装置改善特性
  - ——综合

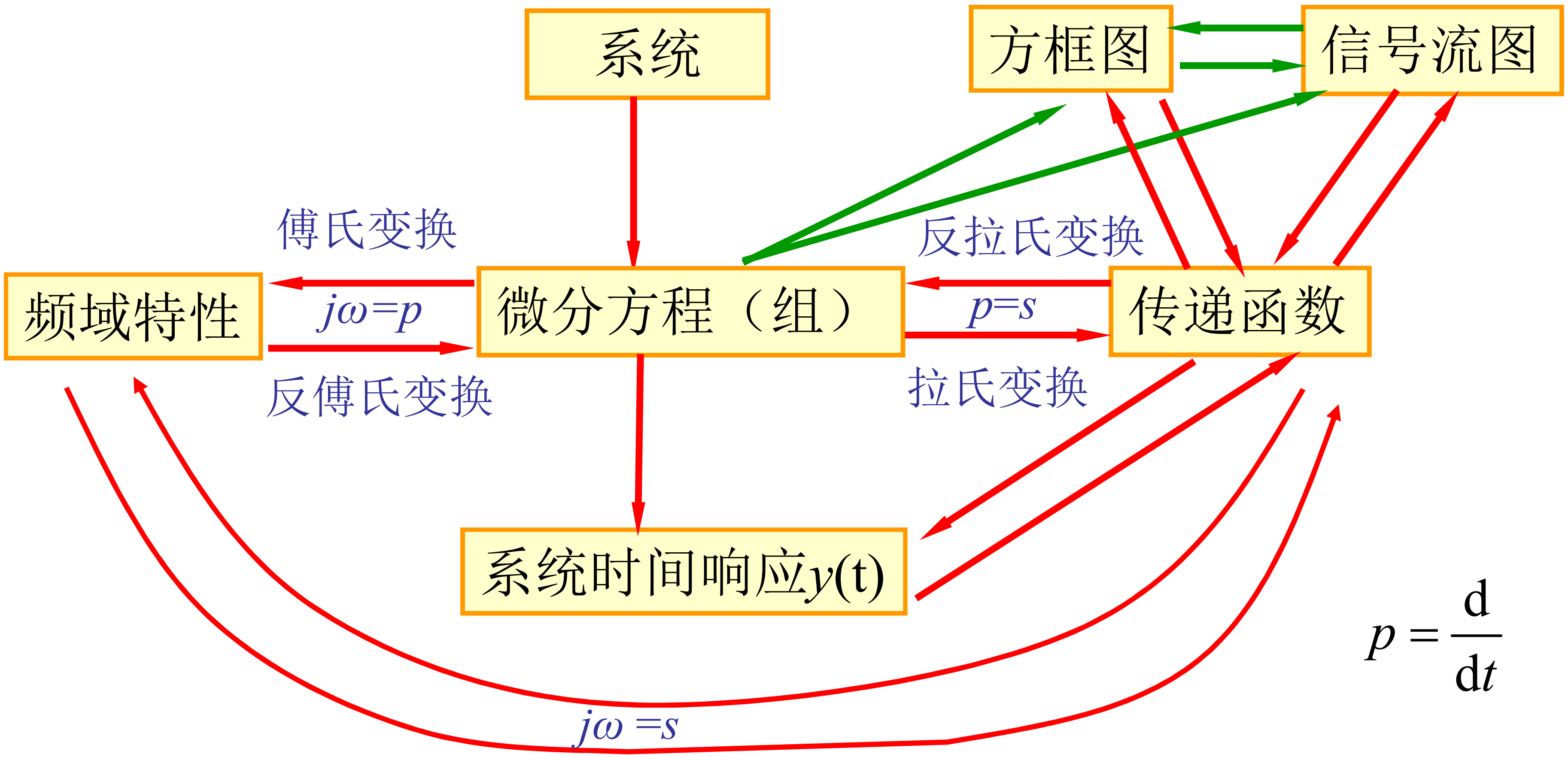
二、学习内容

1. 机理建模

（1）微分方程	时域	
（2）传递函数		复数域
（3）方框图	时域、复数域	
（4）信号流图		复数域
（5）频率特性		频率域
（6）状态方程	时域	

二、学习内容

1. 机理建模



$$p=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

二、学习内容

2. 稳定性分析方法

（1）时域分析方法——闭环特征方程的根具有负实部（分布在[s]平面左半部分） ——稳定的数学本质

（2）劳斯判据——闭环特征方程系数代数判据，第一列变号情况。

（3）根轨迹分析方法——根轨迹越过虚轴，参数变化—根变化。

（4）奈奎斯特判据（幅相曲线）——包围(-1，j0)点情况。$Z=P-R$

A. 最小相位系统，因为$P=0$，所以不包围(-1，j0)点则稳定。

B. 非最小相位系统，因为$P\neq0$，所以包围(-1，j0)点则稳定。

（5）奈奎斯特判据（对数频率特性曲线）——$L(\omega)>0$时穿越-180°线情况。

二、学习内容

3. 动静态性能分析

（1）时域分析——一、二阶系统的时域性能指标计算

——二阶系统性能改善方法（PD控制和测速反馈）

——消除误差方法

（2）根轨迹分析——根轨迹的绘制8原则

——根轨迹增益或其它参数变化时的稳定性

——常规根轨迹、参数根轨迹、零度根轨迹

——**由根轨迹反推出系统传递函数**

（3）频域分析——幅相曲线、对数频率特性曲线的绘制**以及反推**

——低、中、高频段的要求

——相角裕度、幅值裕度

4. 校正方法

（1）串联超前校正——相角超前特性——动态性能。

——步骤

（2）串联滞后校正——高频幅值衰减特性——稳态性能。

——步骤

（3）串联滞后-超前校正——兼顾稳态和动态性能。

——步骤

（4）前馈校正——前置滤波器+最小节拍控制

（5）复合校正——按给定校正和按扰动校正

三、分类总结

1. 基本概念

（1）数学模型——微分方程、传递函数、方框图、信号流图、频率特性

（2）控制——反馈控制、前馈控制、复合控制

（3）静态误差系数——位置误差系数Kp、速度误差系数Kv 、加速度误差系数Ka

（4）传递函数——开环传递函数、闭环传递函数、误差传递函数

（5）增益——**开环增益（尾1形式 2*s*+1）、根轨迹增益（首1形式 *s*-2）**

（6）频率——转折频率、截止频率、穿越频率、谐振频率、带宽频率

三、分类总结

$$h(\mathrm{dB})=20\lg h=-20\lg|G(\mathrm{j}\omega_x)H(\mathrm{j}\omega_x)|\ \mathrm{dB}$$

1. 基本概念

$$h=\frac{1}{|G(\mathrm{j}\omega_\mathrm{x})H(\mathrm{j}\omega_\mathrm{x})|}$$

（7）裕度——相角裕度、幅值裕度h和h(dB)

（8）穿越——正穿越、负穿越、正半次穿越、负半次穿越

（9）奈奎斯特曲线——原有曲线，补曲线

（10）I、II阶时域指标——上升时间、峰值时间、调节时间、超调量

（11）型别——I、II、III

（12）结构图——串联、并联、反馈。

（13）阻尼和振荡——阻尼比、无阻尼自然振荡频率、阻尼振荡频率、衰减系数

三、分类总结

2. 公式

引出点（测量点） 比较点（综合点）

（1）结构图化简公式——前乘、后除（引出点）。比较点反之。

——引出点和比较点不能随便交叉换位

（2）梅森增益公式—— $P=\dfrac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k$

流图特征式 $\Delta=1-\sum L_a+\sum L_bL_c-\sum L_dL_eL_f+\cdots+(-1)^m\sum L_mL_n\bullet\bullet\bullet$

余因子式 Δ_k

（3）一阶、标准无零点二阶系统的阶跃响应（性能指标）计算（欠阻尼）

$$\theta=\arccos\zeta$$

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\qquad C(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\theta)\quad t\geq 0$$

三、分类总结

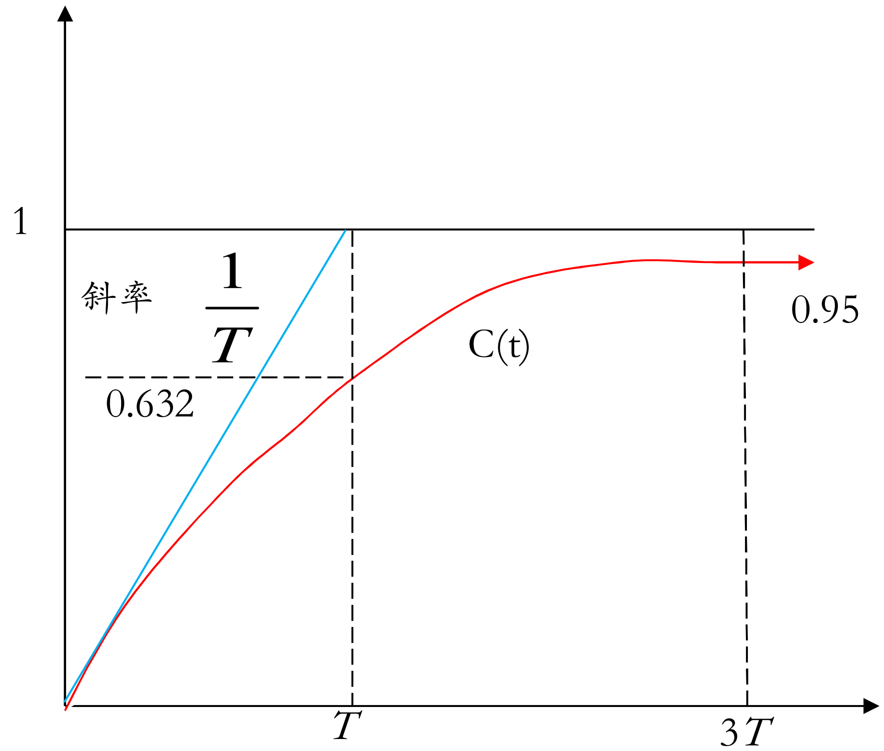
2. 公式

（3）一阶、标准无零点二阶系统的阶跃响应（性能指标）计算（欠阻尼）

一阶系统输出响应

$$C(t)=1-e^{-\frac{t}{T}}$$

一条非周期的单调上升的由T反映的指数曲线



三、分类总结

2. 公式

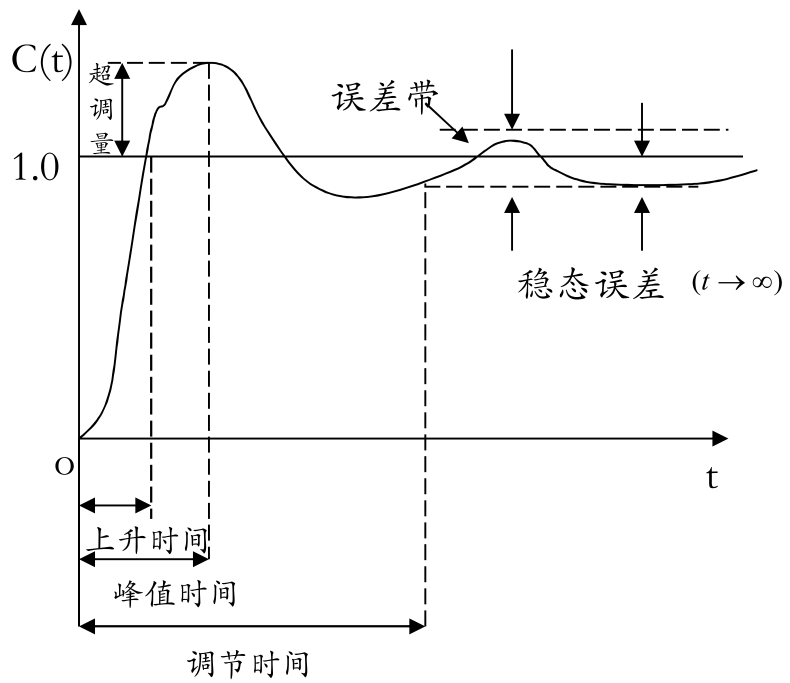
（3）一阶、标准无零点二阶系统的阶跃响应（性能指标）计算

（欠阻尼）

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \theta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\sigma_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$



$$t_s \approx \frac{3.5}{\zeta\omega_n}\ (\Delta = 0.05) \qquad t_s \approx \frac{4.4}{\zeta\omega_n}\ (\Delta = 0.02)$$

三、分类总结

2. 公式

公式适用标准型 $G_0(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$

（4）二阶系统性能改善

- 比例微分控制

  $T_d s+1 \qquad \zeta_d=\zeta+\dfrac{T_d}{2}\omega_n$

- 测速反馈控制

  $K_t s \qquad \zeta_d=\zeta+\dfrac{K_t}{2}\omega_n$

（5）劳斯判据 $a_0 s^n + a_1 s^{n\text{-}1} + \ldots\ldots + a_{n-1}s + a_n = 0$

劳斯表系数计算方法

交叉相乘再相减

上行第1列

特：A—1个为零，ε替代/原特征方程乘（s+1）

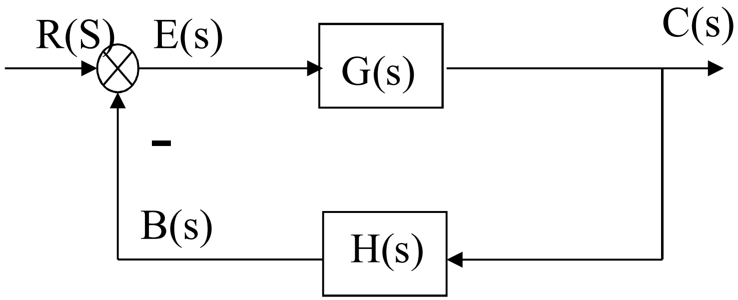
B—1行为零，上行辅助方程求导 不稳定

特：s= -1右侧根，s=s_1-1代入原特征方程。

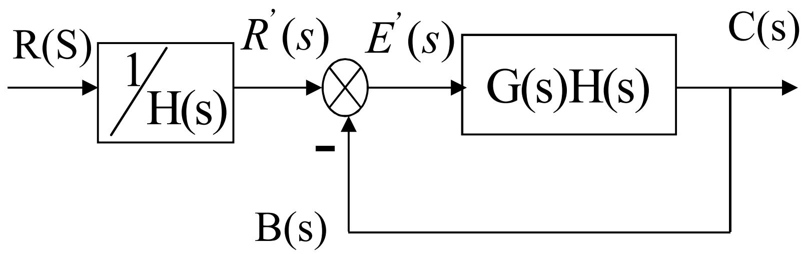
三、分类总结

2. 公式

（6）误差定义



输入端定义



输出端定义

$$E(s)=R(s)-C(s)H(s)$$

$$E'(s)=R'(s)-C(s)$$

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}$$ 终值定理

三、分类总结

2. 公式

（7）静态误差系数

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) \qquad K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s) \qquad K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)H(s)$$

（8）负反馈系统的幅值条件和相角条件

$$K_r \frac{\prod_{j=1}^{m} |s - z_j|}{\prod_{i=1}^{n} |s - p_i|} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{m} \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^{n} \angle(s - p_i) = (2k+1)\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

三、分类总结

2. 公式

（9）根轨迹渐近线

渐近线与实轴的交点位置 σ_a

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}$$

与实轴正方向的交角 ϕ_a 为

$$\varphi_a = \frac{2k+1}{n-m}\pi \quad (k=0,1,2,\cdots;n-m-1)$$

与相角条件有关

（10）根轨迹分离点与分离角

分离点：

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{d-Z_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d-P_i}$$

分离角：

$$\frac{(2k+1)\pi}{l}$$

与相角条件无关

三、分类总结

2. 公式

计算时，其它点指向计算点确定相应角度

（11）根轨迹的起始角与终止角

起始角： $\theta_{pl}=\mp 180^\circ+\sum_{j=1}^{m}\angle(p_l-z_j)-\sum_{i=1}^{l-1}\angle(p_l-p_i)-\sum_{i=l+1}^{n}\angle(p_l-p_i)$

与相角条件有关

终止角： $\theta_{zl}=\pm 180^\circ+\sum_{i=1}^{n}\angle(z_l-p_i)-\sum_{j=1}^{l-1}\angle(z_l-z_j)-\sum_{j=l+1}^{m}\angle(z_l-z_j)$

（12）开环系统的对数频率特性

$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=\sum_{i=1}^{N}L_i(\omega)$$

叠加原理

$$\varphi(\omega)=\sum_{i=1}^{N}\varphi_i(\omega)$$

三、分类总结

2. 公式

（13）谐振频率、谐振峰值及谐振条件

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

$$A_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$0 \le \xi \le \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$$

（14）半对数坐标系中的直线方程：

$$k = \frac{L_a(\omega_2) - L_a(\omega_1)}{\lg\omega_2 - \lg\omega_1}$$

k为直线的斜率，[ω_1 ， $L_a(\omega_1)$]和[ω_2 ， $L_a(\omega_2)$]为直线上的两点。

三、分类总结

2. 公式

（15）补线角度计算

A. 虚轴上原点处极点

$$G(s)H(s)\Big|_{s=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon e^{j\theta}} = \infty e^{-jv\theta}$$

B. 虚轴上等幅振荡极点

$A(s)=\infty$

$$\varphi(s)=\begin{cases}\angle G_1(j\omega_n) \\ \angle G_1(j\omega_n) - (\theta+90^o)v \\ \angle G_1(j\omega_n) - (90^o+90^o)v\end{cases}$$

*S*平面上

ω从$0^-\to 0^+$时，

$\theta\in\left[-90^o,+90^o\right]$

$\theta\in\left[-90^o,+90^o\right]$

$\theta=-90^o(s=j\omega_n^-)$

$\theta\in(-90^o,+90^o)$

$\theta=+90^o(s=j\omega_n^+)$

*GH*平面上

映射曲线沿着半径为无穷大的圆弧按顺时针方向从v *90 º → - v *90 º 。

映射曲线为半径无穷大，圆心角等于-v*180º的圆弧(负号意味着顺时针）。

三、分类总结

2. 公式

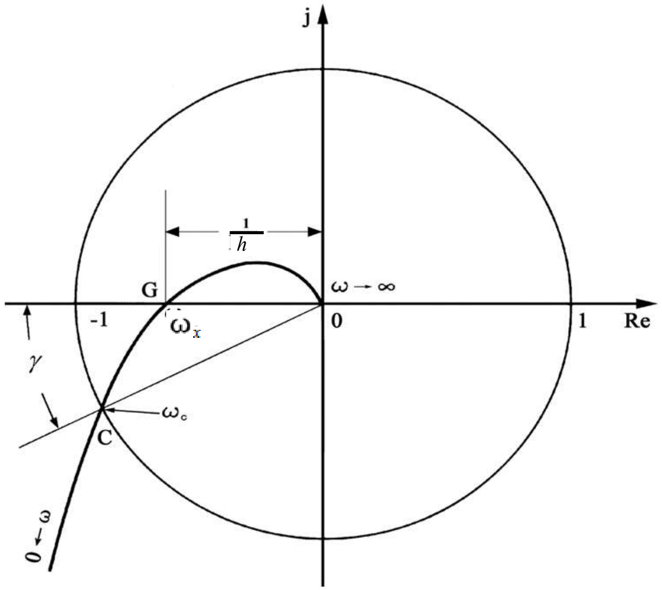
仅对于相频特性（包括补线）单次穿越-180°的最小相位系统

（16）裕度

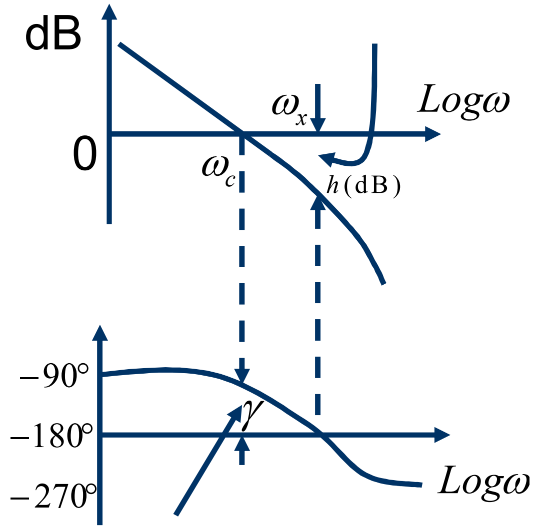
幅值裕度 $h = \dfrac{1}{\left|G(\mathrm{j}\omega_\mathrm{x})H(\mathrm{j}\omega_\mathrm{x})\right|}$

相角裕度 $\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_\mathrm{c})$

$h(\mathrm{dB}) = 20\lg h = -20\lg\left|G(\mathrm{j}\omega_x)H(\mathrm{j}\omega_x)\right|$ dB



稳定：单位圆内部



稳定：中间区域

三、分类总结

2. 公式

（17）无源校正环节

超前 $aG_c(s)=\dfrac{1+aTs}{1+Ts}\quad(a>1)$

滞后 $G_c(s)=\dfrac{1+bTs}{1+Ts}\quad(b<1)$

滞后-超前 $G_c(s)=\dfrac{(1+T_a s)(1+T_b s)}{(1+\alpha T_a s)(1+\dfrac{T_b}{\alpha}s)}\quad(\alpha>1)$

三、分类总结

$$\gamma''(\omega_c'') = \varphi_m(\omega_c'') + \gamma'(\omega_c') - \varepsilon_{\text{原系统副作用}}$$

2. 公式　　（18）无源校正

	幅频特性计算公式	相频特性计算公式
超前校正	$10\lg a + L'(\omega_c'') = 0$	$\gamma''(\omega_c'') = \varphi_m(\omega_c'') + \gamma'(\omega_c'')$
滞后校正	$20\lg b + L'(\omega_c'') = 0$	$\gamma''(\omega_c'') = \underline{\gamma'(\omega_c'')} + \varphi_c(\omega_c'')$
滞后-超前校正	$\underbrace{-20\lg\alpha}_{\text{滞后}} + \underbrace{20\lg\frac{\omega_c''}{\omega_b}}_{\text{超前}} + L'(\omega_c'') = 0$	$\gamma''(\omega_c'') = \varphi_m(\omega_c'') + \underbrace{\gamma'(\omega_c') - \varepsilon}_{\gamma'(\omega_c'')} + \varphi_c(\omega_c'')$

原系统在新的截止频率处的相角

说明：

$\varepsilon_{\text{原系统副作用}}$

1) ε为超前网络的引入使ω_c''增大而造成的原系统相角裕度减小的补偿量，一般取5 ~20°。

2) $\varphi_c(\omega_c'')$为滞后网络在ω_c''处会产生的相角滞后的副作用，通常在-12 ~ -5°之间。

$\varepsilon_{\text{滞后网络副作用}}$

三、分类总结

2. 公式

（18）无源校正

串联超前校正

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$

$$\varphi_m = \arcsin\frac{a-1}{a+1}$$

串联滞后校正

$$\omega_2 = \frac{1}{bT} = 0.1\omega_c$$

$$\varphi_m = \arcsin\frac{1-b}{1+b}$$

串联滞后-超前校正

选择ω_b

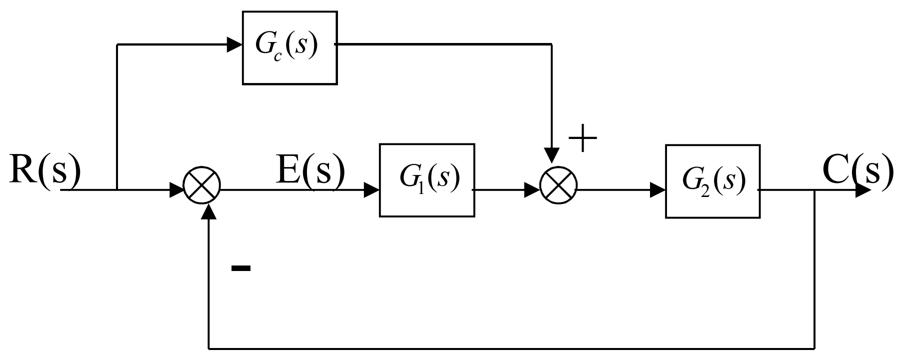
估算ω_a

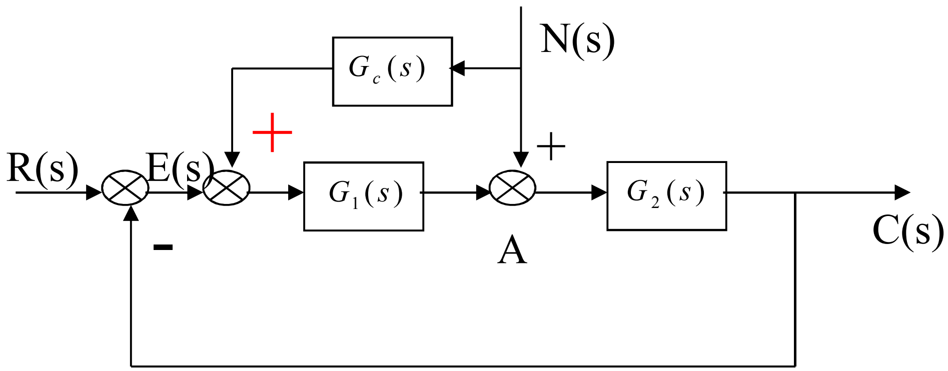
三、分类总结

3. 结论

（1）稳态误差全补偿

A. 消除给定作用下的稳态误差　　B. 消除扰动作用下的稳态误差





$$G_c(s)=\frac{1}{G_2(s)}$$

$$G_C(s)=-\frac{1}{G_1(s)}$$

三、分类总结

3. 结论

(2) 系统性能分析

（1）稳定性——左边平面

（2）运动形式——单调、振荡

（3） 超调量——阻尼比ζ

（4）调节时间——实部绝对值$\zeta\omega_n$

（5）实数零极点——零点，ζ减小。极点，ζ增大。

（6）偶极子——远离原点可忽略，接近原点必考虑。

（7）主导极点——5倍距离，（书上3~6倍距离）。

三、分类总结

3. 结论

(3) P、I、D控制的基本规律

（1）**P** 决定开环增益、影响系统稳定误差、稳定性

（2）**PI** 增加系统型别、增加零点、改善稳态特性

（3）**PD** 增加系统零点、改善动态特性、对噪声敏感

（4）**PID** 同时改善稳态和动态特性

单独使用的问题，组合的问题。

组合使用的效果。

结合根轨迹法确定比例、积分、微分系数。

四、对比记忆

1. 稳态误差

输入信号作用下的稳态误差

系统类别	静态误差系数			阶跃输入 $r(t)=R\cdot 1(t)$	斜坡输入r(t)=R t	加速度输入 $r(t)=\frac{Rt^2}{2}$
	K_p	K_v	K_a	$e_{ss}=\frac{R}{1+K_p}$	$e_{ss}=\frac{R}{K_v}$	$e_{ss}=\frac{R}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{R}{1+K}$	∞	∞
I	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$	∞
II	∞	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$
III	∞	∞	∞	0	0	0

——内模原理（更简单的判断零误差的方法）

★ 相角条件

2. 根轨迹

根轨迹七原则及其各种变化

负反馈

	起终	数连	渐近	实轴	分离	角度	虚轴	备注
	极零	n	Σp-Σz /n-m ★	★	取反求导 公式Σ=Σ $(2k+1)\pi/l$	★	s=jw虚=0 劳斯判据	
180度根轨迹：常规根轨迹			$(2k+1)\pi/n-m$	右边奇数		θ=180+ φ=180+		开环传函 $1+G(s)H(s)=0$
180度根轨迹：参数根轨迹			$(2k+1)\pi/n-m$	右边奇数		θ=180+ φ=180+		等效开环传函 $1+G'(s)H'(s)=0$
180度根轨迹：非最小相位 S最高次幂系数为正			$(2k+1)\pi/n-m$	右边奇数		θ=180+ φ=180+		右边平面有零点或/和极点
零度根轨迹：非最小相位 S最高次幂系数为负			$2k\pi/n-m$	右边偶数或零		θ=0+ φ=0+		右边平面有零点或/和极点
零度根轨迹：正反馈根轨迹			$2k\pi/n-m$	右边偶数		θ=0+ φ=0+		$1-G(s)H(s)=0$

非最小相位构成正反馈系统或系统特征方程与正反馈系统标准型一致的都按零度根轨迹处理。

四、对比记忆

$$\gamma''(\omega_c'') = \varphi_m(\omega_c'') + \gamma'(\omega_c') - \varepsilon_{原系统副作用}$$

3. 校正装置

	幅频特性计算公式	相频特性计算公式
超前校正	$10\lg a + L'(\omega_c'') = 0$	$\gamma''(\omega_c'') = \varphi_m(\omega_c'') + \underline{\gamma'(\omega_c'')}$
滞后校正	$20\lg b + L'(\omega_c'') = 0$	$\gamma''(\omega_c'') = \underline{\gamma'(\omega_c'')} + \varphi_c(\omega_c'')$
滞后-超前校正	$\underbrace{-20\lg \alpha}_{滞后} + \underbrace{20\lg \frac{\omega_c''}{\omega_b}}_{超前} + L'(\omega_c'') = 0$	$\gamma''(\omega_c'') = \varphi_m(\omega_c'') + \underbrace{\gamma'(\omega_c') - \varepsilon}_{\gamma(\omega_c'')} + \varphi_c(\omega_c'')$

原系统在新的截止频率处的相角

说明：

$\varepsilon_{原系统副作用}$

1) ε为超前网络的引入使ω_c''增大而造成的原系统相角裕度减小的补偿量，一般取5 ~20° 。

2) $\varphi_c(\omega_c'')$为滞后网络在ω_c''处会产生的相角滞后的副作用，通常在-12 ~ -5° 之间。

$\varepsilon_{滞后网络副作用}$

四、对比记忆

4. 各个环节的奈奎斯特曲线以及对数频率特性（略）

最小相位系统		非最小相位系统（P202）	
比例环节	K	比例环节	$-K$
积分环节	$1/s$		
微分环节	S		
惯性环节	$1/(Ts+1)$	一阶惯性环节	$\dfrac{1}{-Ts+1}$
一阶微分环节	$1+TS$	一阶微分环节	$-\tau s+1$
振荡环节	$\dfrac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$	二阶振荡环节	$\dfrac{1}{Ts^2-2\zeta Ts+1}$
滞后环节	$e^{-\tau s}$	二阶微分环节	$\tau s^2-2\zeta\tau s+1$

四、对比记忆

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2}$$

5. 二阶系统根的分布

阻尼情况	ζ值	根的情况	根的数值	单位阶跃响应
过阻尼	$\zeta>1$	两个不等的负实根	$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$	单调上升
临界阻尼	$\zeta=1$	两个相等的负实根	$s_{1,2}=-\omega_n$	单调上升
欠阻尼	$0<\zeta<1$	一对共轭复根	$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_d$ $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 有阻尼自然频率	衰减振荡
无阻尼	$\zeta=0$	一对共轭纯虚根	$s_{1,2}=\pm j\omega_n$	等幅振荡
	$\zeta<0$	根具有正实部		发散振荡

ω_n：无阻尼自然频率，ζ：阻尼系数（阻尼比）。

五、曲线绘制

1. 二阶系统时域响应曲线绘制

阻尼比不同情况

2. 根轨迹绘制

八原则、$K\,[0,\infty)$、常规和参数、180°和0°根轨迹

3. 奈奎斯特图绘制以及补线

虚、实部或模、幅角、$\omega[0,\infty)$、是否穿过（-1，j0）点

4. 对数频率特性绘制以及补线

- 对数幅频特性曲线：分解、确定交接频率、$\omega<\omega_{min}$段（斜率和频率为“1”的特殊点）、中高频段多折线。
- 对数相频特性曲线：相角求和

五、曲线绘制

5. 非最小相位系统的奈奎斯特曲线及其补线的绘制方法，以及对应系统稳定性的判断。

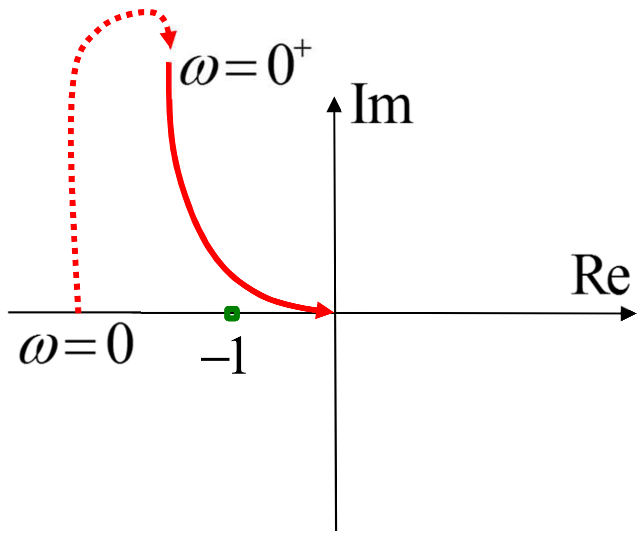
教材：P202 图5-10，图5-11

$$G(s)H(s)=\frac{10}{s(s-3)}$$

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{10}{j\omega(j\omega-3)}=\frac{10(j\omega+3)}{j\omega(j\omega-3)(j\omega+3)}=-\frac{10}{\omega^2+9}+j\frac{30}{\omega(\omega^2+9)}$$

$$G(j0^+)H(j0^+)=-\frac{10}{[0^+]^2+9}+j\frac{30}{[0^+]([0^+]^2+9)}$$

负数　　正∞



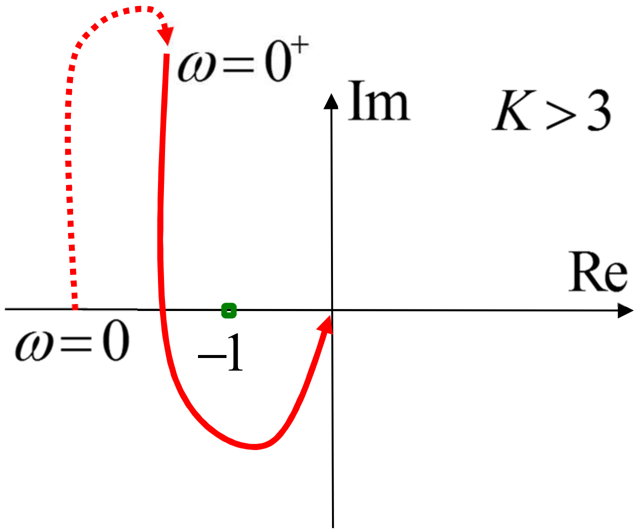
$N_+=0\quad N_-=0.5\quad 2N=2(N_+-N_-)=-1$

$\mathrm{P}=1$

$\mathrm{Z=P-2N}=1-(-1)=2$　　不稳定

五、曲线绘制

$K>0$　若：$G(s)H(s)=\dfrac{K(s+1)}{s(s-3)}=-\dfrac{4K}{\omega^2+9}+j\dfrac{K(3-\omega^2)}{\omega(\omega^2+9)}$



$K>3$

$N_+=1$　$N_-=0.5$

$2N=2(N_+-N_-)=1$

$\mathrm{P}=1$

$\mathrm{Z=P-2N}=1-1=0$　稳定

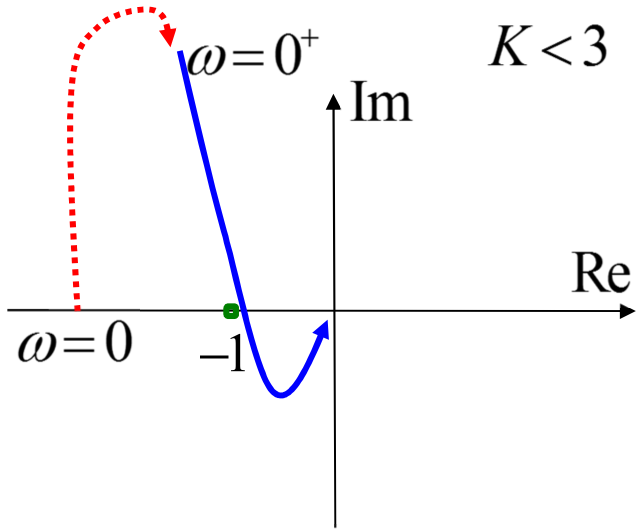
稳定性由K决定

$\omega^2=3$

$$-\frac{4K}{\omega^2+9}=-\frac{4K}{3+9}=-1$$

$K=3$ 临界稳定

$K<3$



$N_+=0$　$N_-=0.5$

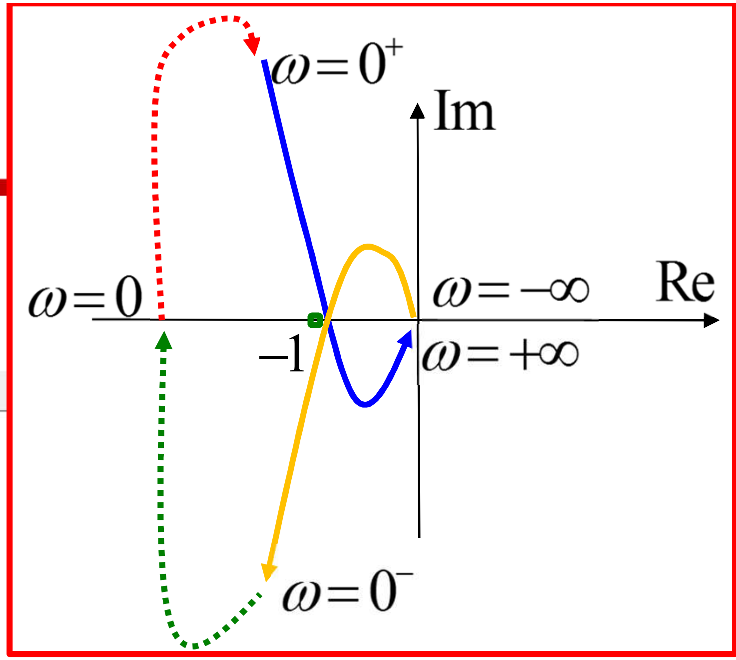
$2N=2(N_+-N_-)=-1$

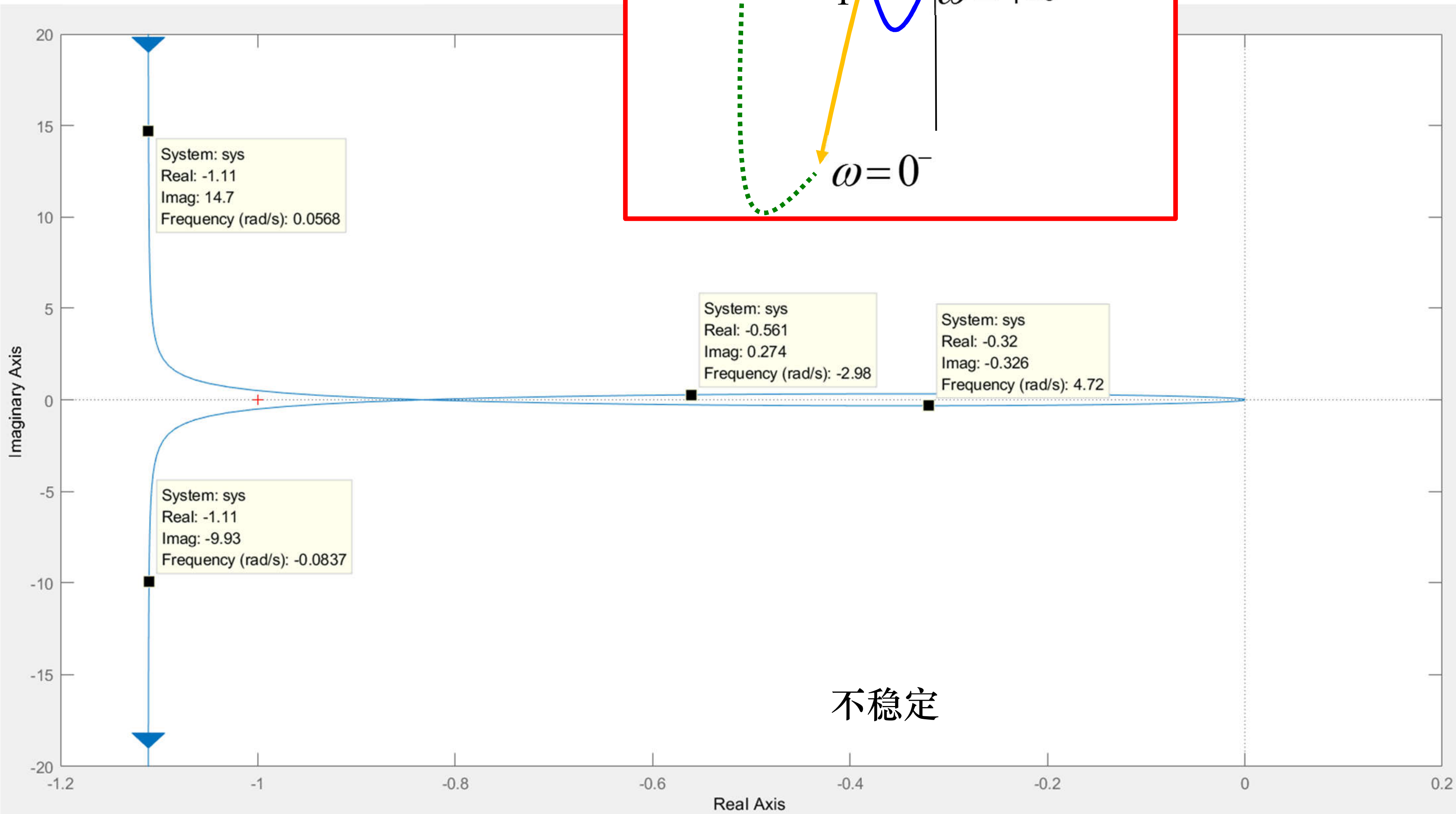
$\mathrm{P}=1$

$\mathrm{Z=P-2N}=1-(-1)=2$　不稳定

五、曲线绘制

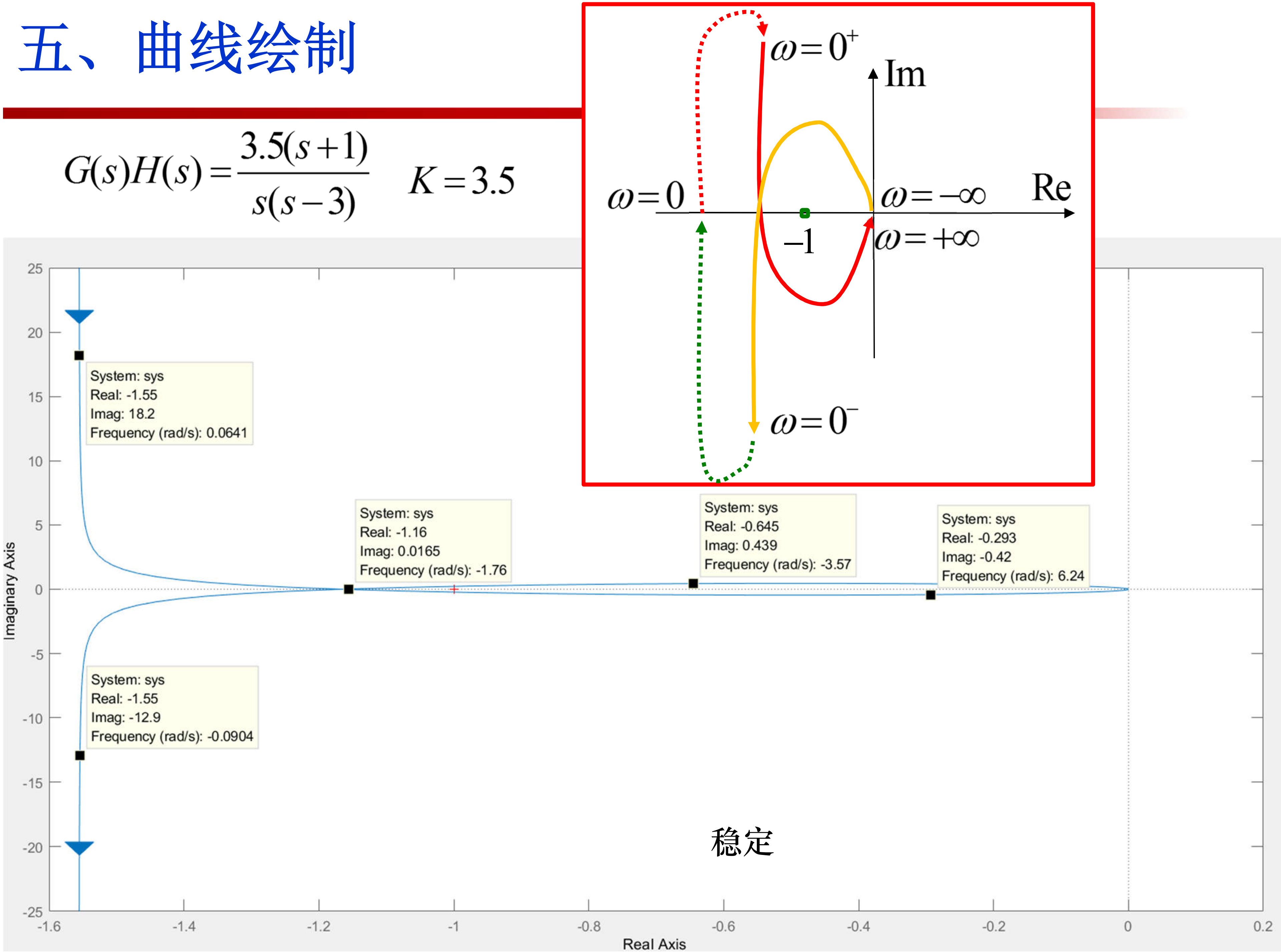
$$G(s)H(s)=\frac{2.5(s+1)}{s(s-3)}\qquad K=2.5$$





五、曲线绘制

$$G(s)H(s)=\frac{3.5(s+1)}{s(s-3)}\qquad K=3.5$$



六、判据

1. 劳斯判据

根据闭环特征方程的系数判断闭环系统极点分布——第1列不变号

2. 奈奎斯特判据

根据开环系统幅相曲线包围（-1，j0）点情况判断闭环系统极点分布，注意区分非最小相位系统和最小相位系统的要求。

目的：$Z=P-R=0$

3. Bode图判据

根据开环系统对数频率特性曲线$L(\omega)>0$段相角特性穿越-180°情况判断闭环系统极点分布。目的：$Z=P-R=0$

七、计算与应用

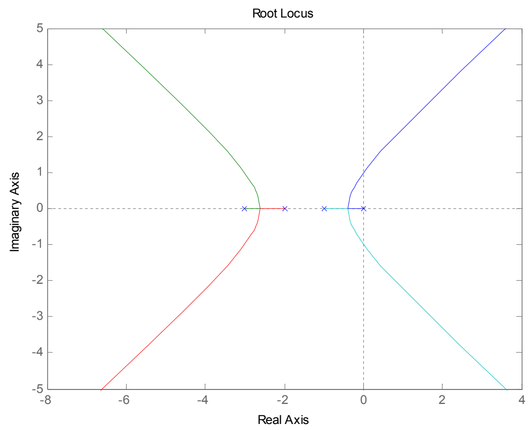
1. 计算根的分布

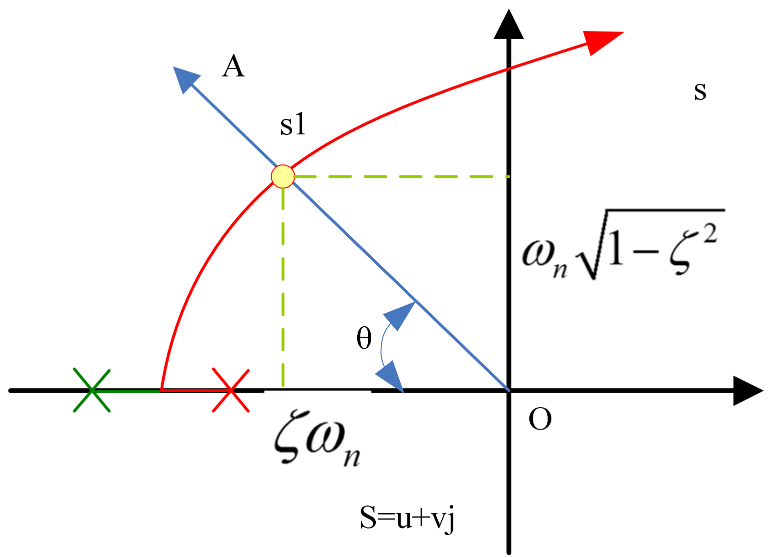
$$G(s)H(s)=\frac{K_r}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

等效为二阶系统

方法是作等阻尼比线oA，使oA与实轴负方向的夹角

$$\beta=\cos^{-1}\zeta=\cos^{-1}0.5=60°$$





在*Kr*未知的情况下，若根轨迹满足圆的方程，可以利用阻尼角特性确定闭环方程的根，再根据特征方程的根确定*Kr*取值。

七、计算与应用

2. 计算s=-1右侧根的分布数量

3. 利用梅森增益公式计算传递函数

本 次 课 结 束

祝大家取得好成绩