

第二章 控制系统的数学模型

第一节 控制系统的时域数学模型

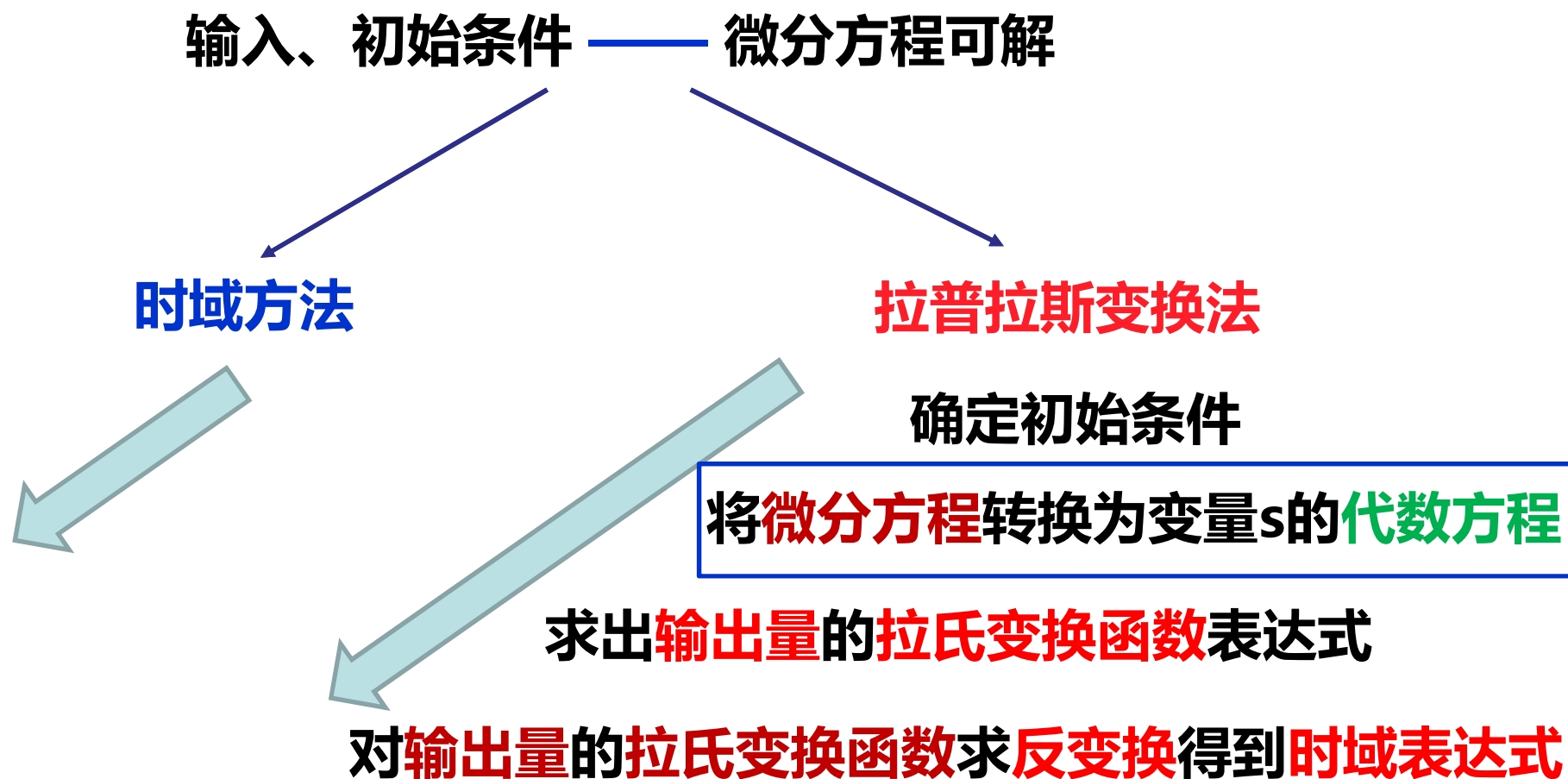
第二节 控制系统的复数域数学模型

第三节 控制系统的结构图与信号流图

第四节 控制系统建模实例

2.2 控制系统的复数域数学模型

线性定常系统微分方程的求解方法



2.2 控制系统的复数域数学模型

一、拉氏变换

- 求输出的时域响应，即在时域内求解微分方程，不利于分析结果或参数变化问题。



- 经拉氏变换后，在复数域内求解代数方程，简单。

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \text{则称} F(s) \text{是} f(t) \text{的拉普拉斯变换。}$$

常用函数的拉氏变换

序号	原函数 $f(t)$ ($t>0$)	象函数 $F(s)=L[f(t)]$
1	$\delta(t)$ (单位脉冲函数)	1
2	1 (单位阶跃函数)	$\frac{1}{s}$
3	K (常数)	$\frac{K}{s}$
4	t (单位斜坡函数)	$\frac{1}{s^2}$

2.2 控制系统的复数域数学模型

拉氏变换的基本性质

自行复习!

(1) 线性性质 $L[af_1(t) + bf_2(t)] = aL[f_1(t)] + bL[f_2(t)]$

(2) 微分定理 $L[f^n(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - s^0 f^{n-1}(0)$

(3) 积分定理 $L[\int f(t)dt] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$ 零初始条件的运用!

(4) 终值定理: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$

(5) 初值定理: $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$

二. 拉氏反变换

1) 查拉氏变换表。

2) 将F(s)展开成部分分式之和, 部分分式的拉氏变换可查。

2.2 控制系统的复数域数学模型

三. 传递函数的定义和性质

1. 定义：

对于线性定常系统，在零初始条件下，系统输出量的拉氏变换与输入量拉氏变换的比值称为系统的传递函数，用 $G(s)$ 表示。

$$\text{传递函数} = \frac{\text{输出信号的拉氏变换}}{\text{输入信号的拉氏变换}} \bigg|_{\text{零初始条件}} = \frac{C(s)}{R(s)}$$

零初始条件含义：

- 1) 输入量： $t \geq 0$ 时才作用于系统， $t=0^-$ 时，输入量及其各阶导数均为零。
- 2) 输出量： 输入量加于系统之前，系统处于稳定工作状态，即输出量及其各阶导数在 $t=0^-$ 时的值为零。

2.2 控制系统的复数域数学模型

RLC无源网络的微分方程

$$LC \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$

零初始条件下，对上述方程作拉氏变换：

$$(LCs^2 + RCs + 1)U_o(s) = U_i(s)$$

传递函数：

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

2.2 控制系统的复数域数学模型

2. 形式： 1) 广义形式 2) 根轨迹法形式 3) 频率法形式

1) 广义形式

设线性定常系统（元件）由下述 n 阶线性常微分方程表述：

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n}{dt^n} c(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} c(t) + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} c(t) + a_n c(t) \\ &= b_0 \frac{d^m}{dt^m} r(t) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} r(t) + \cdots + b_{m-1} \frac{d}{dt} r(t) + b_m r(t) \end{aligned}$$

式中 $c(t)$ 是系统输出量， $r(t)$ 是系统输入量， a_i 和 b_i 是与系统结构和参数有关的常数。

2.2 控制系统的复数域数学模型

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n}{dt^n} c(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} c(t) + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} c(t) + a_n c(t) \\ &= b_0 \frac{d^m}{dt^m} r(t) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} r(t) + \cdots + b_{m-1} \frac{d}{dt} r(t) + b_m r(t) \end{aligned}$$

在零初始条件下，对上式两边取拉氏变换，得到系统传递函数为：

$$[a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n] C(s) = [b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m] R(s)$$

由定义得系统传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

2.2 控制系统的复数域数学模型

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$G(s) = \frac{M(s)}{N(s)} \quad \begin{aligned} M(s) &= b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m \\ N(s) &= a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \end{aligned}$$

分母中 s 的最高阶次 n 即为系统的阶次。

因为组成系统的元部件或多或少存在惯性，所以 $G(s)$ 的分母次数大于等于分子次数，即 $n \geq m$ 。若 $m > n$ ，物理上是难以实现的系统。

2.2 控制系统的复数域数学模型

2) 根轨迹法形式 (零极点形式)

(首一形式)

$$G(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{b_0(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{a_0(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

$s = z_i (i=1, 2, \dots, m)$ 是 $M(s)=0$ 的根，称为传递函数的零点。

$s = p_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是 $N(s)=0$ 的根，称为传递函数的极点。

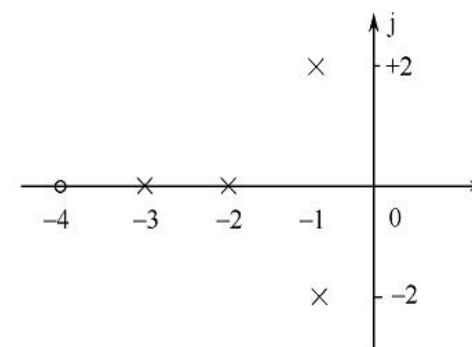
$N(s) = 0$ 是系统的特征方程。

$K^* = b_0/a_0$ 是传递系数，或根轨迹增益

在复数平面上表示传递函数的零极点的图形，称为传递函数的零极点分布图。

零点 ○

✕ 极点



2.2 控制系统的复数域数学模型

3) 频率法形式

(尾一形式)

$$G(s) = \frac{b_m (\tau_1 s + 1)(\tau_2^2 s^2 + 2\zeta \tau_2 s + 1) \cdots (\tau_i s + 1)}{a_n (T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\zeta T_2 s + 1) \cdots (T_j s + 1)}$$

一次因子对应实数零极点，二次因子对应于共轭复数零极点。

τ_i 和 T_j 为时间常数。

$$K = \frac{b_m}{a_n} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j=1}^n (-p_j)} \quad \text{称为传递系数或增益。}$$

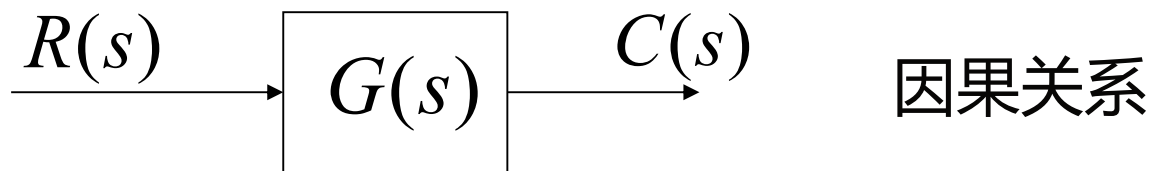
思考：首一和尾一两种形式的零极点变吗？

2.2 控制系统的复数域数学模型

3. 性质

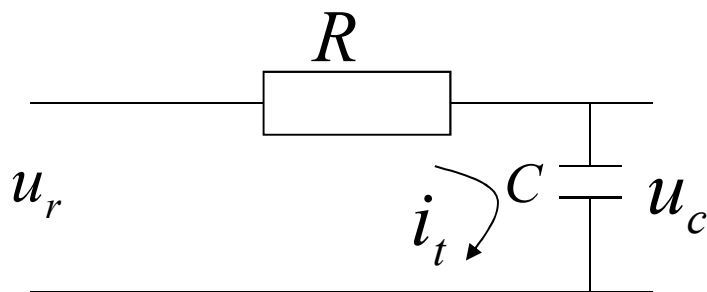
(1) 传递函数是复变量 s 的有理真分式函数，具有复变函数的所有性质，且 m 小于等于 n ，所有系数均为实数。

(2) 传递函数用系统参数表示输出量和输入量之间关系的表达式，只取决于系统或元件的结构和参数，而与输入量的形式无关，也不反映系统内部的任何信息。



2.2 控制系统的复数域数学模型

(3) 传递函数与微分方程有相通性。 将 $s \Leftrightarrow \frac{d}{dt}$ 置换



传递函数 \Leftrightarrow 微分方程

$$RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

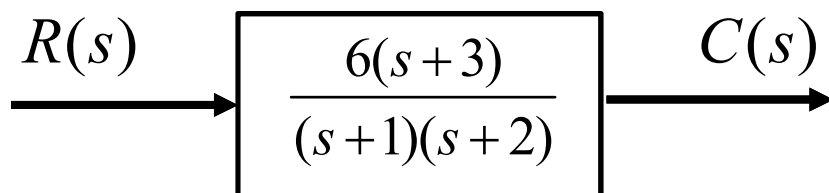
在零初始条件下，拉氏变换：
$$G(s) = \frac{u_c(s)}{u_r(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

(4) 传递函数 $G(s)$ 的拉氏反变换是脉冲响应 $g(t)$ 。

$$g(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}[G(s)R(s)] = L^{-1}[G(s)]$$

2.2 控制系统的复数域数学模型

四. 传递函数的极点和零点对输出的影响

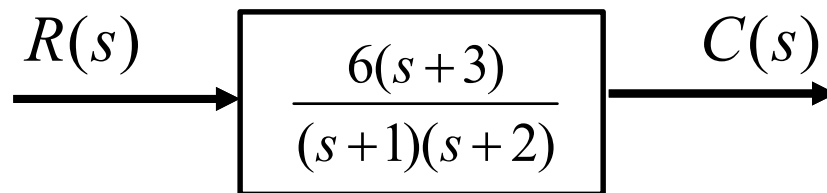


1) 阶跃作用下 $R(s) = \frac{R_1}{s}$, 求输出 $C(t)$

2) 输入 $R(s) = \frac{R_2}{s+5}$ 作用下, 求输出 $C(t)$

2.2 控制系统的复数域数学模型

四. 传递函数的极点和零点对输出的影响



$$1) \quad C(s) = G(s)R(s) = \frac{6(s+3)}{(s+1)(s+2)} \frac{R_1}{s}$$

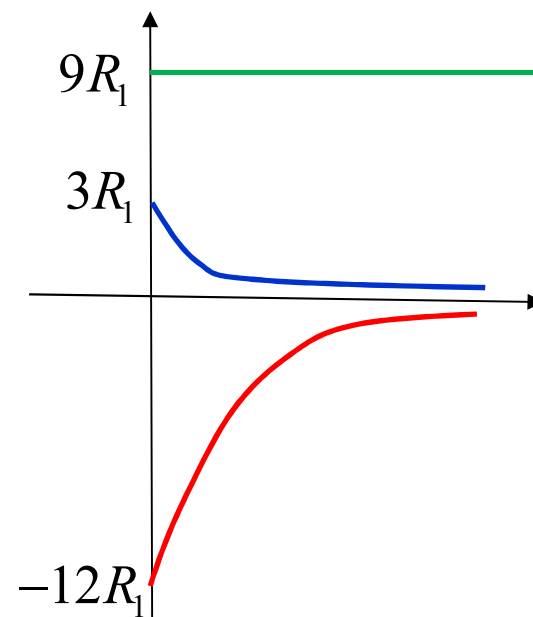
$$= \frac{9R_1}{s} - \frac{12R_1}{s+1} + \frac{3R_1}{s+2}$$

$$C(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}[G(s)R(s)]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{9R_1}{s} - \frac{12R_1}{s+1} + \frac{3R_1}{s+2}\right] = 9R_1 - 12R_1e^{-t} + 3R_1e^{-2t}$$

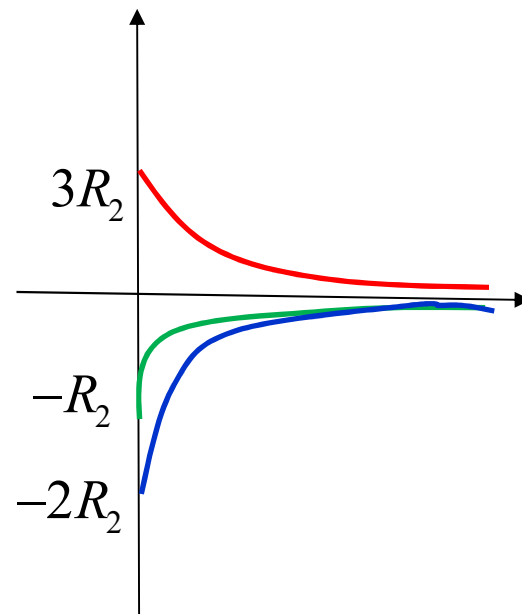
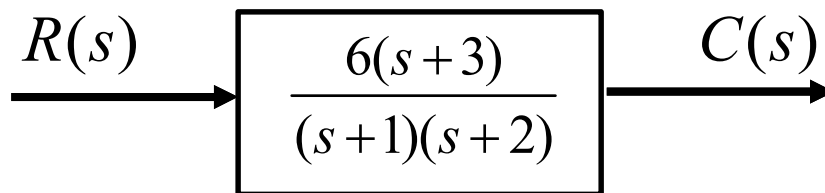
与输入函数 $r(t)$ 相同的模态

由极点形成的自由运动模态



2.2 控制系统的复数域数学模型

四. 传递函数的极点和零点对输出的影响



$$\begin{aligned} 2) \quad C(s) &= G(s)R(s) = \frac{6(s+3)}{(s+1)(s+2)} \frac{R_2}{s+5} \\ &= -\frac{R_2}{s+5} + \frac{3R_2}{s+1} - \frac{2R_2}{s+2} \end{aligned}$$

$$C(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}[G(s)R(s)]$$

$$= L^{-1}\left[-\frac{R_2}{s+5} + \frac{3R_2}{s+1} - \frac{2R_2}{s+2}\right] = -R_2 e^{-5t} + 3R_2 e^{-t} - 2R_2 e^{-2t}$$

系数与输入函数有关

与输入函数 $r(t)$ 相同的模态

由极点形成的自由运动模态

2.2 控制系统的复数域数学模型

四. 传递函数的极点和零点对输出的影响

——信号与系统

1) 传递函数的极点是微分方程的特征根，决定着系统自由运动的模态，在系统强迫振动中（即零初始条件响应，或输入作用下）会包含这些自由运动的模态。

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6(s+3)}{(s+1)(s+2)} \quad R(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+5}$$

传递函数的极点可以受输入函数激发，在输出响应中形成自由运动的模态。

$$c(t) = \underbrace{9R_1 - R_2 e^{-5t}}_{\text{与输入函数 } r(t) \text{ 相同的模态}} + \underbrace{(3R_2 - 12R_1)e^{-t}}_{\text{由极点-1形成的自由运动模态}} + \underbrace{(3R_1 - 2R_2)e^{-2t}}_{\text{由极点-2形成的自由运动模态}}$$

3个特点 ★

与输入函数 $r(t)$ 相同的模态


由极点-1形成的自由运动模态

由极点-2形成的自由运动模态

系数与输入函数有关

2.2 控制系统的复数域数学模型

2) 传递函数的零点不形成自由运动的模态，但影响各模态在响应中所占的比重(系数)，因而影响响应曲线的形状。

$$\begin{array}{lll} G_1(s) = \frac{4s+2}{(s+1)(s+2)} & z_1 = -0.5 & C_1(t) = 1 + 2e^{-t} - 3e^{-2t} \\ G_2(s) = \frac{1.5s+2}{(s+1)(s+2)} & z_2 = -1.33 & C_2(t) = 1 - 0.5e^{-t} - 0.5e^{-2t} \end{array}$$


A. 模态 e^{-t} 和 e^{-2t} 在两个系统单位阶跃响应中所占比重不同

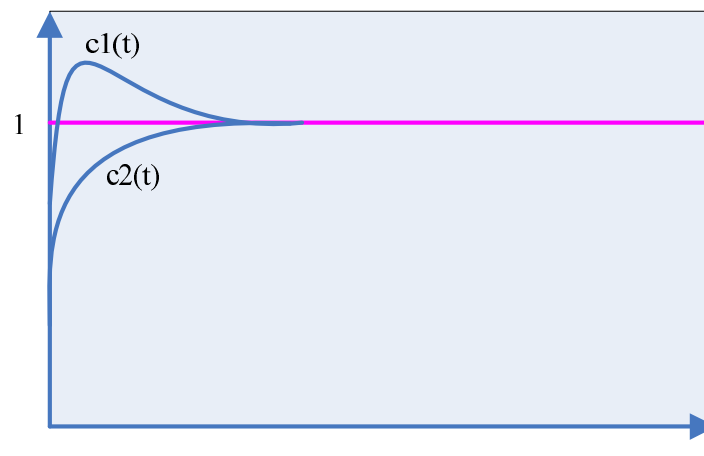
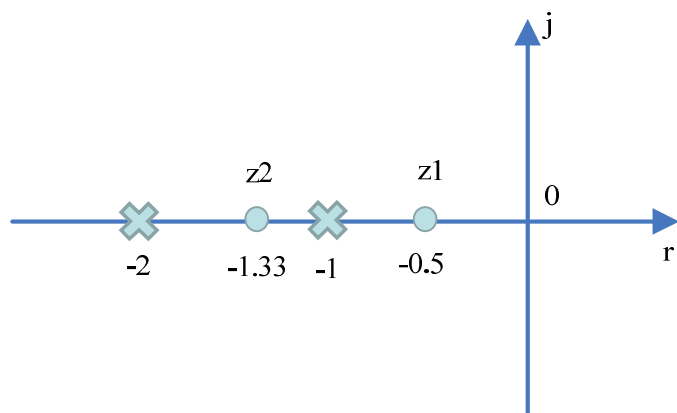
B. 影响因素：极点之间距离、极点和零点之间距离、零点与原点之间距离。

2.2 控制系统的复数域数学模型

C. 在极点相同的情况下：

(a) $G_1(s)$ 的零点 z_1 接近原点，距离两个极点比较远，距离原点比较近，零点 z_1 的作用明显，两个模态所占比重较大。

(b) $G_2(s)$ 的零点 z_2 距离原点较远，且距离两个极点比较近，两个模态所占比重小。



D. 如果零极点重合，该极点所产生的模态为零，因为分子分母相互抵消。

2.2 控制系统的复数域数学模型

五. 典型环节的传递函数

K 为放大系数或增益

1. 比例环节

输入量和输出量间的关系: $c(t) = Kr(t)$

传递函数: $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K$

2. 惯性环节

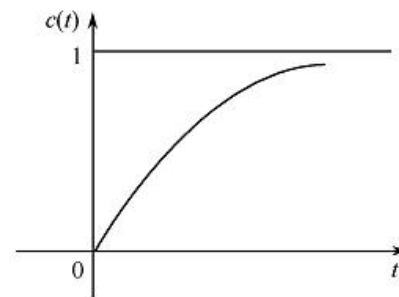
输入量和输出量间的关系: $T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = Kr(t)$

K 为放大系数或增益 T 为时间常数

传递函数: $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$

当输入量作阶跃变化时 输出缓慢上升

$$c(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}\left[\frac{K}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s}\right] = K(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$



2.2 控制系统的复数域数学模型

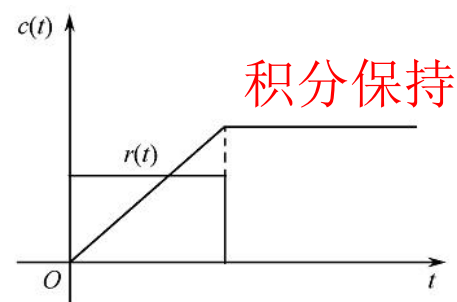
3. 积分环节

输入量和输出量间的关系: $c(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t r(t) dt$ T_i 为积分时间常数

$$\text{传递函数: } G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{T_i s}$$

当输入量作阶跃变化时 输出量恒速增加

积分环节的单位阶跃响应: $c(t) = \frac{1}{T_i} t$



随时间直线增长, 当输入突然消失, 积分停止, 输出维持不变, 故积分环节具有记忆功能。

2.2 控制系统的复数域数学模型

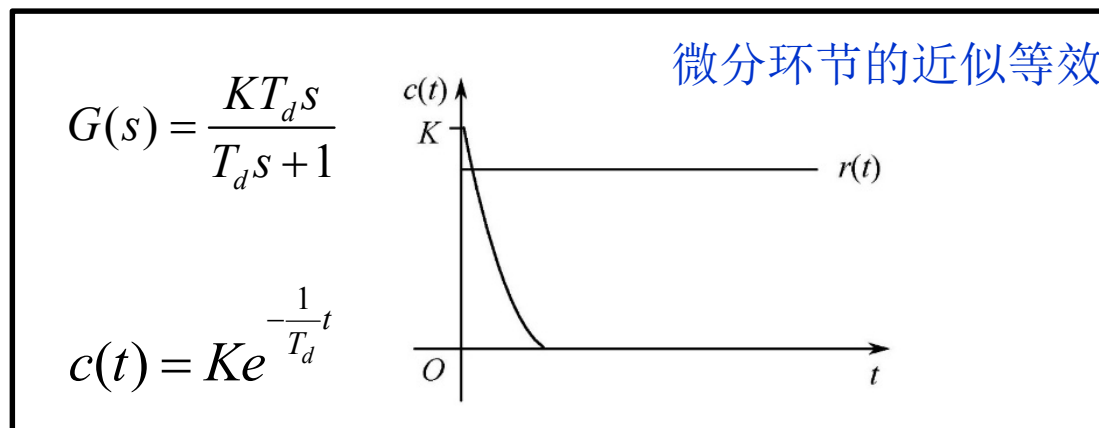
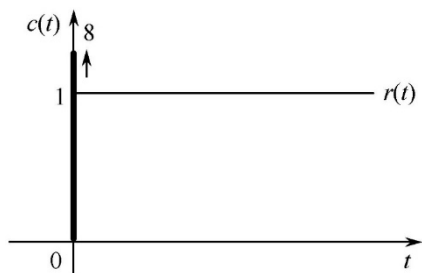
4. 微分环节

输入量和输出量间的关系: $c(t) = T_d \frac{dr(t)}{dt}$ T_d 为微分时间常数

传递函数: $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = T_d s$

当输入量作阶跃变化时，输出量为振幅无穷大的脉冲。

$$c(t) = T_d \delta(t)$$



2.2 控制系统的复数域数学模型

5. 振荡环节

二阶振荡环节的动态方程:
$$T^2 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = Kr(t)$$

传递函数:
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \omega_n = \frac{1}{T}$$

 ω_n 为无阻尼自然振荡角频率
 ζ 为阻尼比, 等于实际阻尼系数/临界阻尼系数。

$K=1$ 无零点二阶系统的标准型

当输入量作阶跃变化时, 输出量为振荡过程。

RLC网络
$$LC \frac{d^2 u_0(t)}{dt^2} + RC \frac{du_0(t)}{dt} + u_0(t) = u_i(t)$$

$$G(s) = \frac{U_0(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

2.2 控制系统的复数域数学模型

6. 时滞环节

输入量和输出量间的关系: $c(t) = r(t - \tau)$ τ 为滞后时间常数

$$\text{传递函数: } G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = e^{-\tau s}$$

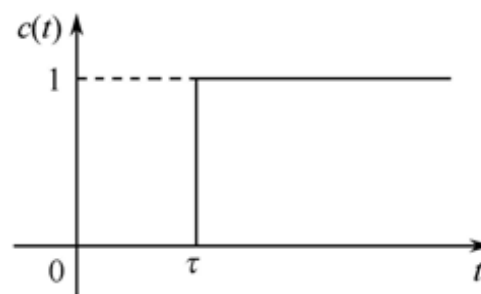
当输入量作阶跃变化时，输出延时变化。

当 τ 很小时，传递函数近似为惯性环节：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \tau s}$$



(a) 输入信号



(b) 输出信号

第二章 控制系统的数学模型

第一节 控制系统的时域数学模型

第二节 控制系统的复数域数学模型

第三节 控制系统的结构图与信号流图

第四节 控制系统建模实例

2.3 控制系统的结构图与信号流图

一、概念和组成

1.概念

结构图（系统动态结构图），是将系统中所有的环节用方框图表示，图中标明其传递函数，并按照系统中各环节间的联系，将各方框图连接起来。

结构图具有形象和直观的特点，是系统中各元件功能和信号流向的图解，清楚地表明系统中各个环节间的相互关系，是系统图形化的动态模型。

系统动态结构图的绘制步骤：

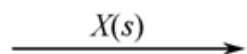
- 1) 按照系统的结构和工作原理，分解出各环节并写出它的传递函数；
- 2) 绘出各环节的方框图，标明传递函数，以箭头和字母表明输入和输出量。
- 3) 按照信号的传递方向将各方框图依次联接起来，构成系统动态结构图。

2.3 控制系统的结构图与信号流图

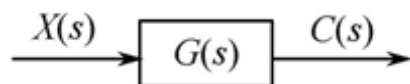
一、概念和组成

2. 组成

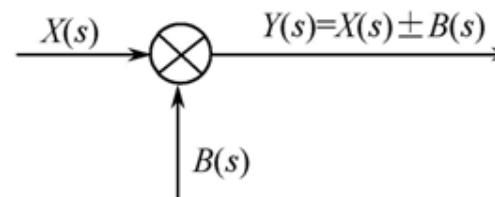
结构图的基本构成单元有四种：信号线、比较点（或综合点）、方框（或环节）和引出点。



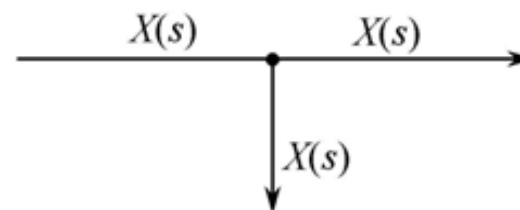
(a) 信号线



(c) 方框图单元



(b) 比较点

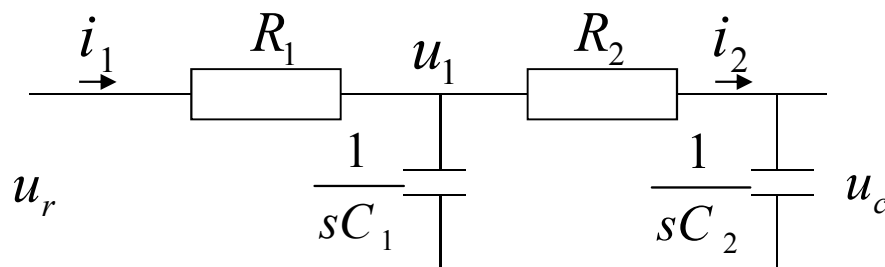


(d) 引出点

2.3 控制系统的结构图与信号流图

二、结构图与信号流图的绘制

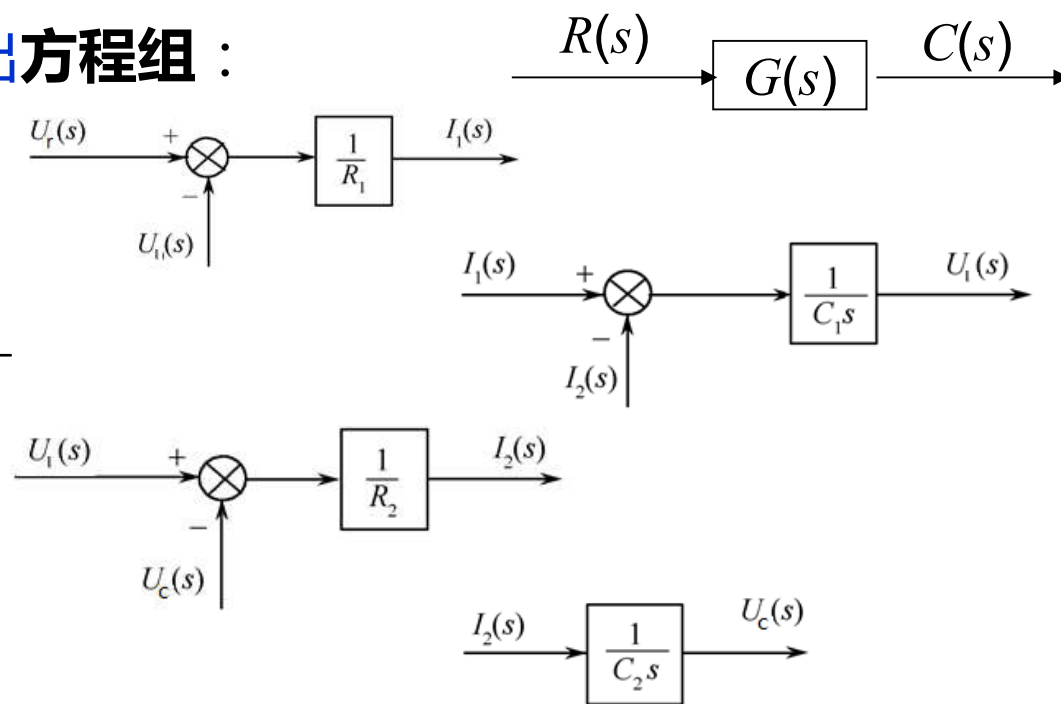
例：绘制双T网络的传递函数



选择一组中间变量 i_1, u_1, i_2 写出各个环节的方框图: $R(s) \cdot G(s) = C(s)$

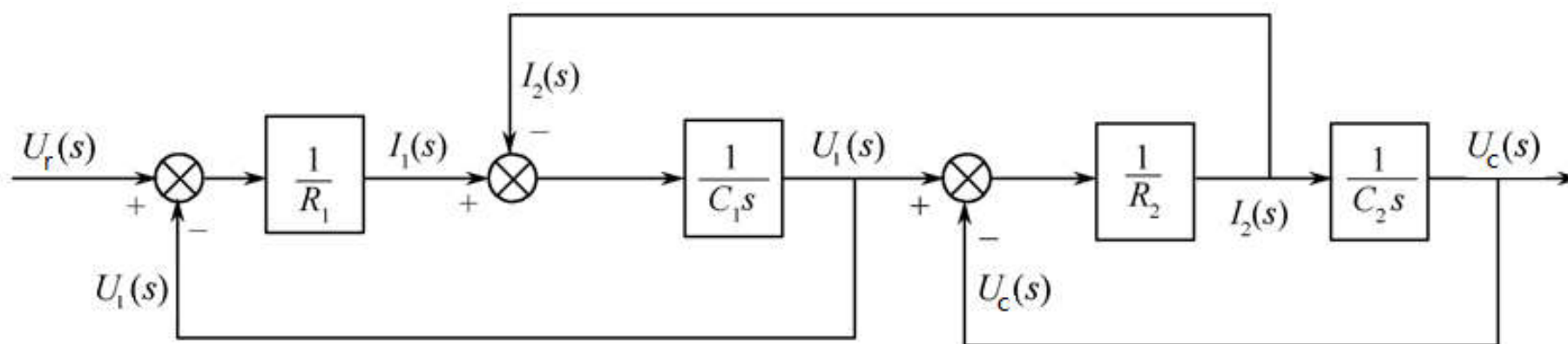
从左向右，列出中间变量和输出方程组：

$$\begin{cases} I_1(s) = \frac{u_r(s) - u_1(s)}{R_1} \\ u_1(s) = [I_1(s) - I_2(s)] \cdot \frac{1}{sC_1} \\ I_2(s) = \frac{u_1(s) - u_c(s)}{R_2} \\ u_c(s) = I_2(s) \cdot \frac{1}{sC_2} \end{cases}$$



2.3 控制系统的结构图与信号流图

绘图：输入在左，输出在右。

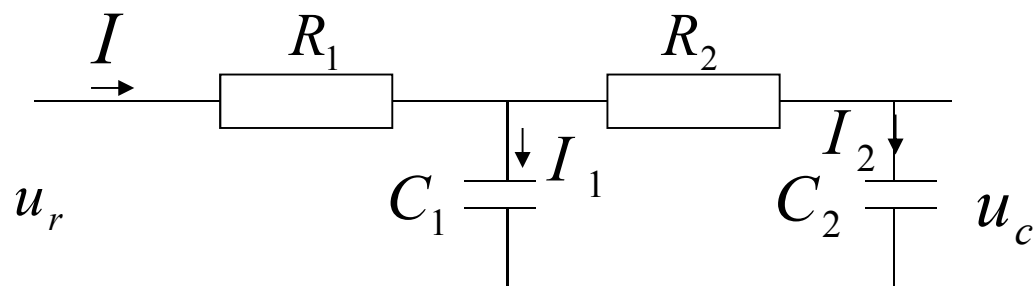


系统结构图

2.3 控制系统的结构图与信号流图

重新选择一组中间变量，会有什么结果呢？

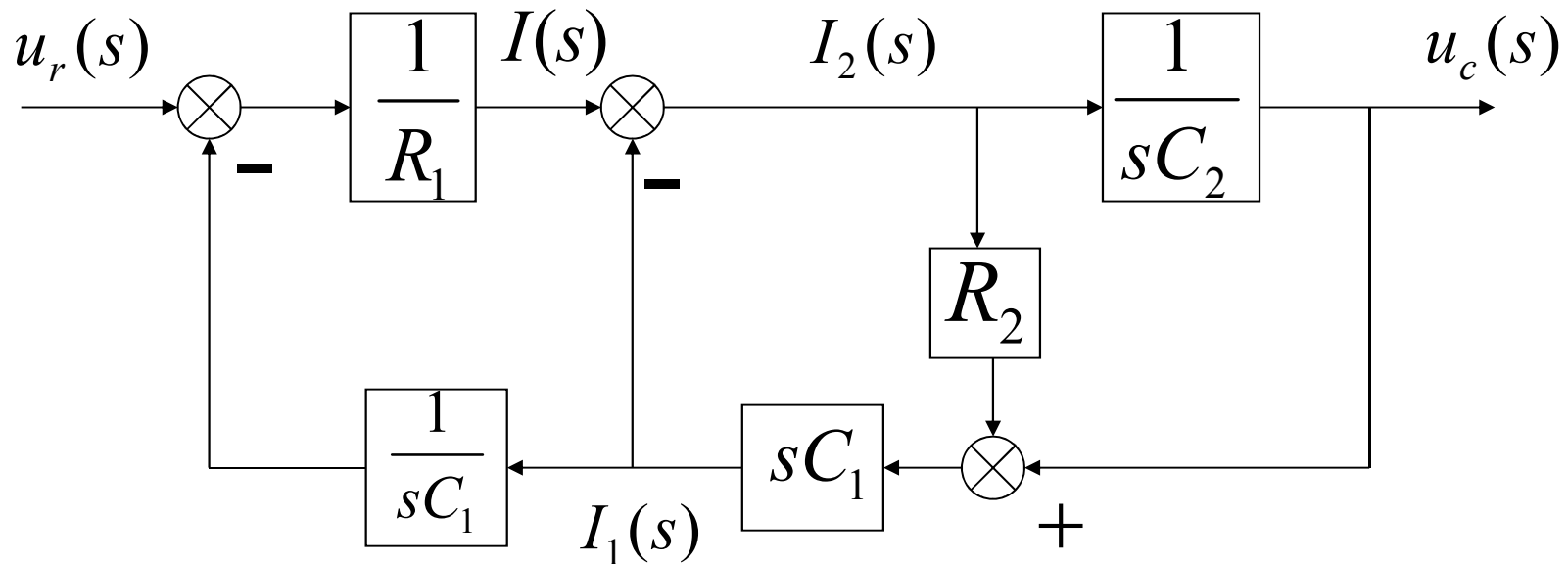
(刚才中间变量为 i_1, u_1, i_2 ，现在改为 I, I_1, I_2)



从左到右列方程：

$$\begin{cases} I(s) = [u_r(s) - I_1(s) \cdot \frac{1}{sC_1}] \cdot \frac{1}{R_1} \\ I_1(s) = [u_c(s) + I_2(s) \cdot R_2] \cdot sC_1 \\ I_2(s) = I(s) - I_1(s) \\ u_c(s) = I_2(s) \cdot \frac{1}{sC_2} \end{cases}$$

2.3 控制系统的结构图与信号流图



中间变量不同，结构图不一样，那个正确？

本次课结束

- 1)理解传递函数的基本性质和形式 ★
- 2)理解传递函数零极点对输出的影响规律 ★ ★
- 3)熟练掌握典型环节的传递函数 ★ ★
- 4)了解系统结构图及其绘制方法 ★