

# 第五章 线性系统的频域分析法

第一节 频率特性

第二节 典型环节与开环系统的频率特性

第三节 频率域稳定判据

第四节 稳定裕度

第五节 闭环系统的频域性能指标

第六节 控制系统频域设计

## 5.2 典型环节与开环系统的频率特性

### 四、开环系统的对数频率特性曲线

开环系统的幅频特性等于各典型环节幅频特性之积；

$$G(j\omega)H(j\omega) = \left[ \prod_{i=1}^N A_i(\omega) \right] e^{j \sum_{i=1}^N \varphi_i(\omega)} \quad \text{— 非对数幅频特性}$$

开环系统的对数幅频特性等于各典型环节幅频特性之和；

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = \sum_{i=1}^N 20 \lg A_i(\omega) = \sum_{i=1}^N L_i(\omega) \quad \text{— 对数幅频特性}$$

开环系统的对数相频特性等于各典型环节相频特性之和。

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\omega)$$

## 5.2 典型环节与开环系统的频率特性

### 1. 开环系统的对数幅频特性曲线绘制方法：

#### 1) 精确绘制对数幅频特性曲线：求出各环节对数幅频特性后叠加

如果已知系统中几个串联环节的对数幅频特性，则系统的开环对数幅频特性为：

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20\lg A(\omega) \\ &= 20\lg A_1(\omega) + 20\lg A_2(\omega) + \dots + 20\lg A_n(\omega) \\ &= L_1(\omega) + L_2(\omega) + \dots + L_n(\omega) \end{aligned}$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega)$$

开环系统对数幅频特性等于各典型环节对数频率特性之和

## 5.2 典型环节与开环系统的频率特性

2) 绘制对数幅频渐近特性曲线:

$$L_a(\omega) = \sum_{i=1}^N L_{a_i}(\omega)$$

准备工作

典型环节的对数幅频渐近特性:

(1) 比例, 积分, 微分 特性曲线均为直线, 直接取其为渐近线。

(2) 一阶环节, (一阶惯性、一阶微分)

幅频特性渐近线, 交接频率为  $1/T$ 。

(3) 二阶环节, (振荡环节、二阶微分)

幅频特性渐近线, 交接频率为  $\omega_n$ 。

记最小交接频率为  $\omega_{min}$ , 将  $\omega < \omega_{min}$  的频率范围定义为低频段。

## 5.2 典型环节与开环系统的频率特性

绘制对数幅频渐近特性曲线的步骤如下：

- 1) 开环传递函数典型环节分解。
- 2) 确定一阶环节、二阶环节的交接频率，把交接频率标注在坐标轴上。
- 3) 绘制 $\omega < \omega_{min}$ 低频段渐近特性曲线。

(1) 在 $\omega < \omega_{min}$ 频段内，幅频渐近特性的斜率取决于 $\frac{K}{s^v}$ ，直线斜率为 $-20v$  dB/dec。

(2) 曲线经过一个点 $\omega_0$ ，确定一个点可以采用下面三种方法中的任意一种：

A. 在 $\omega < \omega_{min}$ 频段内，任选一点 $\omega_0$ ，计算  $L_a(\omega_0) = 20\lg K - 20v\lg \omega_0$

B. 取频率为特定值 $\omega_0=1$ ，则  $L_a(1) = 20\lg K$

C. 取 $L_a(\omega_0)$ 为特殊值0，有  $\frac{K}{\omega_0^v} = 1$ ，则  $\omega_0 = K^{\frac{1}{v}}$

若 $\omega_0 > \omega_{min}$ ，则点 $(\omega_0, L_a(\omega_0))$ 位于低频渐近特性曲线的延长线上。

- 4) 绘制 $\omega \geq \omega_{min}$ 中高频段的分段折线渐近特性曲线（多斜率变化折线）。

## 5.2 典型环节与开环系统的频率特性

交接频率及交接后斜率变化量的确定

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^v} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (j\tau_i\omega + 1) \prod_{k=1}^{m_2} [\tau_k^2(j\omega)^2 + 2\zeta_k\tau_k(j\omega) + 1]}{\prod_{j=1}^{n_1} (jT_j\omega + 1) \prod_{l=1}^{n_2} [T_l^2(j\omega)^2 + 2\zeta_lT_l(j\omega) + 1]}$$

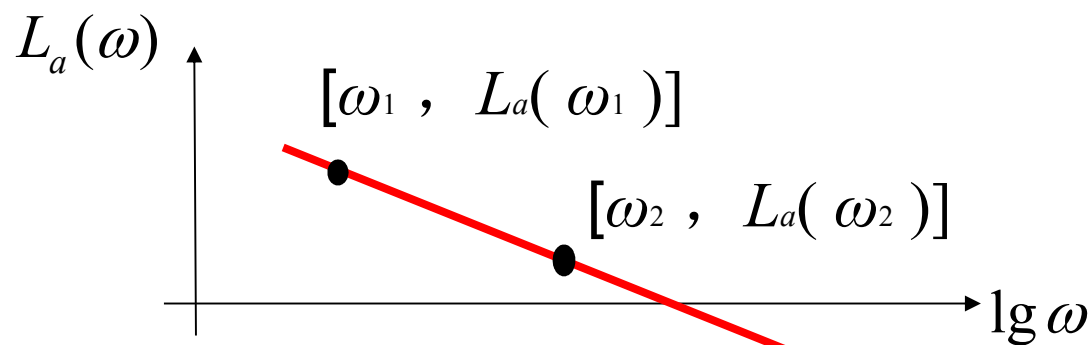
$\omega_i = 1/\tau_i$  经过 $\omega_i$ 后, 斜率变化量为+20dB/dec。

$\omega_k = 1/\tau_k$  经过 $\omega_k$ 后, 斜率变化量为+40dB/dec。

$\omega_j = 1/T_j$  经过 $\omega_j$ 后, 斜率变化量为-20dB/dec。

$\omega_l = 1/T_l$  经过 $\omega_l$ 后, 斜率变化量为-40dB/dec。

## 5.2 典型环节与开环系统的频率特性



说明：半对数坐标系中的直线方程：

$$k = \frac{L_a(\omega_2) - L_a(\omega_1)}{\lg \omega_2 - \lg \omega_1}$$

$k$ 为直线的斜率， $[\omega_1, L_a(\omega_1)]$ 和 $[\omega_2, L_a(\omega_2)]$ 为直线上的两点。

## 5.2 典型环节与开环系统的频率特性

### 2. 开环系统的对数相频特性曲线绘制方法：

相频特性的表达式为：

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{m_1} \arctan \tau_i \omega + \sum_{k=1}^{m_2} \arctan \frac{2\zeta_k \tau_k \omega}{1 - \tau_k^2 \omega^2} - \nu \frac{\pi}{2} - \sum_{j=1}^{n_1} \arctan T_j \omega - \sum_{l=1}^{n_2} \arctan \frac{2\zeta_l T_l \omega}{1 - T_l^2 \omega^2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = -\nu \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = -(n - m) \frac{\pi}{2}$$

定义：若  $L(\omega_c) = 0\text{dB}$ ，则  $\omega_c$  称作截止频率，也叫0dB 频率。

截止频率对应的相角为  $\varphi(\omega_c)$ 。



## 5.2 典型环节与开环系统的频率特性

---

例 系统开环传递函数  $G(s) = \frac{100(0.05s + 1)}{s(0.2s + 1)(0.1s + 1)}$

概略绘制开环对数频率特性曲线。

解 系统开环频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{100(1 + j0.05\omega)}{j\omega(1 + j0.2\omega)(1 + j0.1\omega)}$$

系统由5个典型环节串联组成：

## 5.2 典型环节与开环系统的频率特性

---

1) 精确绘制：分别绘制各环节Bode图，再进行合并。

$$G(s) = \frac{100(0.05s + 1)}{s(0.2s + 1)(0.1s + 1)}$$

比例环节

$$G_1(j\omega) = 100$$

$$L_1(\omega) = 20\lg 100 = 40\text{dB}$$

$$\varphi_1(\omega) = 0$$

积分环节

$$G_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

$$L_2(\omega) = -20\lg \omega$$

$$\varphi_2(\omega) = -90^\circ$$

## 5.2 典型环节与开环系统的频率特性

### 惯性环节

$$G_3(j\omega) = \frac{1}{j0.2\omega + 1}$$

$$L_3(\omega) = -20\lg\sqrt{(0.2\omega)^2 + 1}$$

$$\varphi_3(\omega) = -\arctan 0.2\omega$$

### 惯性环节

$$G_4(j\omega) = \frac{1}{j0.1\omega + 1}$$

$$L_4(\omega) = -20\lg\sqrt{(0.1\omega)^2 + 1}$$

$$\varphi_4(\omega) = -\arctan 0.1\omega$$

### 一阶微分环节

$$G_5(j\omega) = j0.05\omega + 1$$

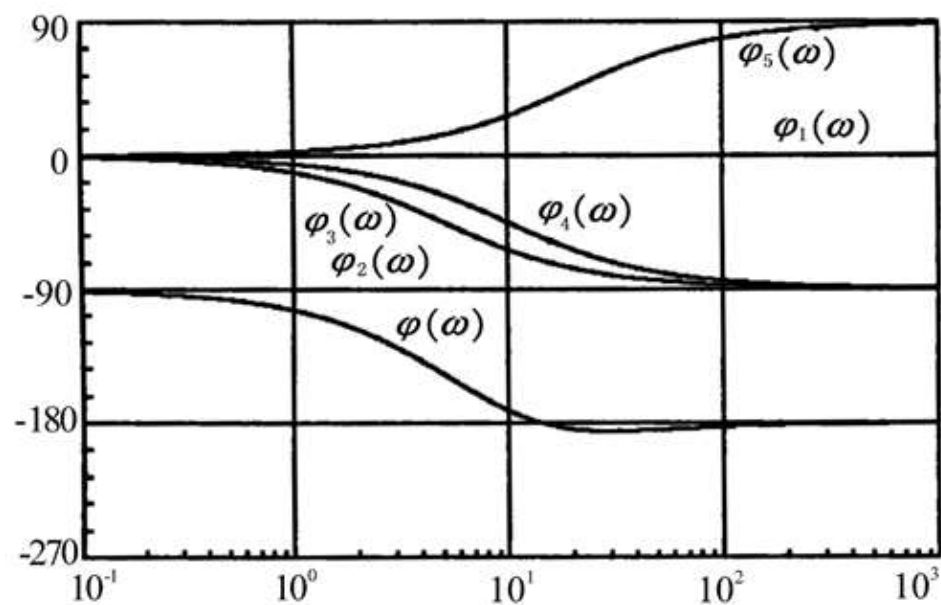
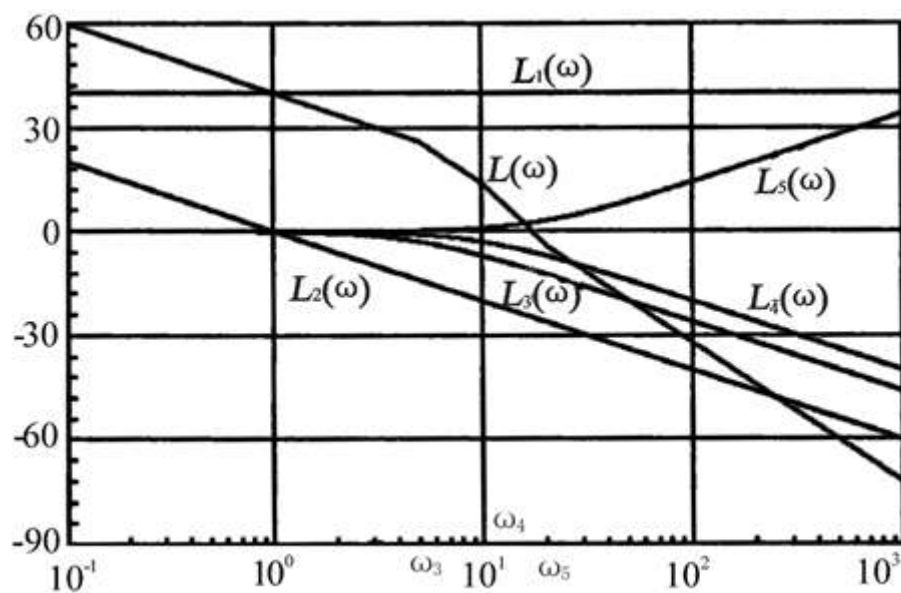
$$L_5(\omega) = 20\lg\sqrt{(0.05\omega)^2 + 1}$$

$$\varphi_5(\omega) = \arctan 0.05\omega$$

$$G(s) = \frac{100(0.05s + 1)}{s(0.2s + 1)(0.1s + 1)}$$

## 5.2 典型环节与开环系统的频率特性

绘制出各环节的对数幅频特性和相频特性曲线，在同一频率下相加得到系统的开环对数幅频特性及相频特性。



## 5.2 典型环节与开环系统的频率特性

2) 渐近线绘制:

$$G(s) = \frac{100(0.05s + 1)}{s(0.2s + 1)(0.1s + 1)}$$

1、按典型环节进行分解

包括比例、积分、两个一阶惯性和一阶微分环节

2、确定各个一阶和二阶环节的交接频率，依次标在坐标轴上。

$$\omega_3 = 5$$

$$\omega_4 = 10$$

$$\omega_5 = 20$$

$\omega_{\min}$  ---最小交接频率

$\omega < \omega_{\min}$  ---低频段

## 5.2 典型环节与开环系统的频率特性

---

### 3、绘制低频段渐近线

低频段的斜率为:  $-20\nu \text{ dB / dec}$        $\nu = 1$        $-20 \text{ dB / dec}$

特殊点: 在  $\omega_2 = 1$  处,  $L_a(\omega_2) = 20\lg K = 20\lg 100 = 40$

### 4、绘制中高频段渐近线

$\omega_3 = 5$       一阶惯性环节      斜率由**-20**变为**-40**

$\omega_4 = 10$       一阶惯性环节      斜率由**-40**变为**-60**

$\omega_5 = 20$       一阶微分环节      斜率由**-60**变为**-40**

## 5.2 典型环节与开环系统的频率特性

计算对数幅频特性纵坐标数值的方法:

$$k = \frac{L_a(\omega_A) - L_a(\omega_B)}{\lg \omega_A - \lg \omega_B}$$

$$\omega_2 = 1 \quad L_a(\omega_2) = 20 \lg 100 = 40 \text{ dB}$$

$$\omega_3 = 5 \quad k = \frac{L_a(\omega_3) - L_a(\omega_2)}{\lg \omega_3 - \lg \omega_2} \quad -20 = \frac{L_a(\omega_3) - 40}{\lg 5 - \lg 1}$$

$$L_a(\omega_3) = -20 \lg 5 + 40 = 26$$

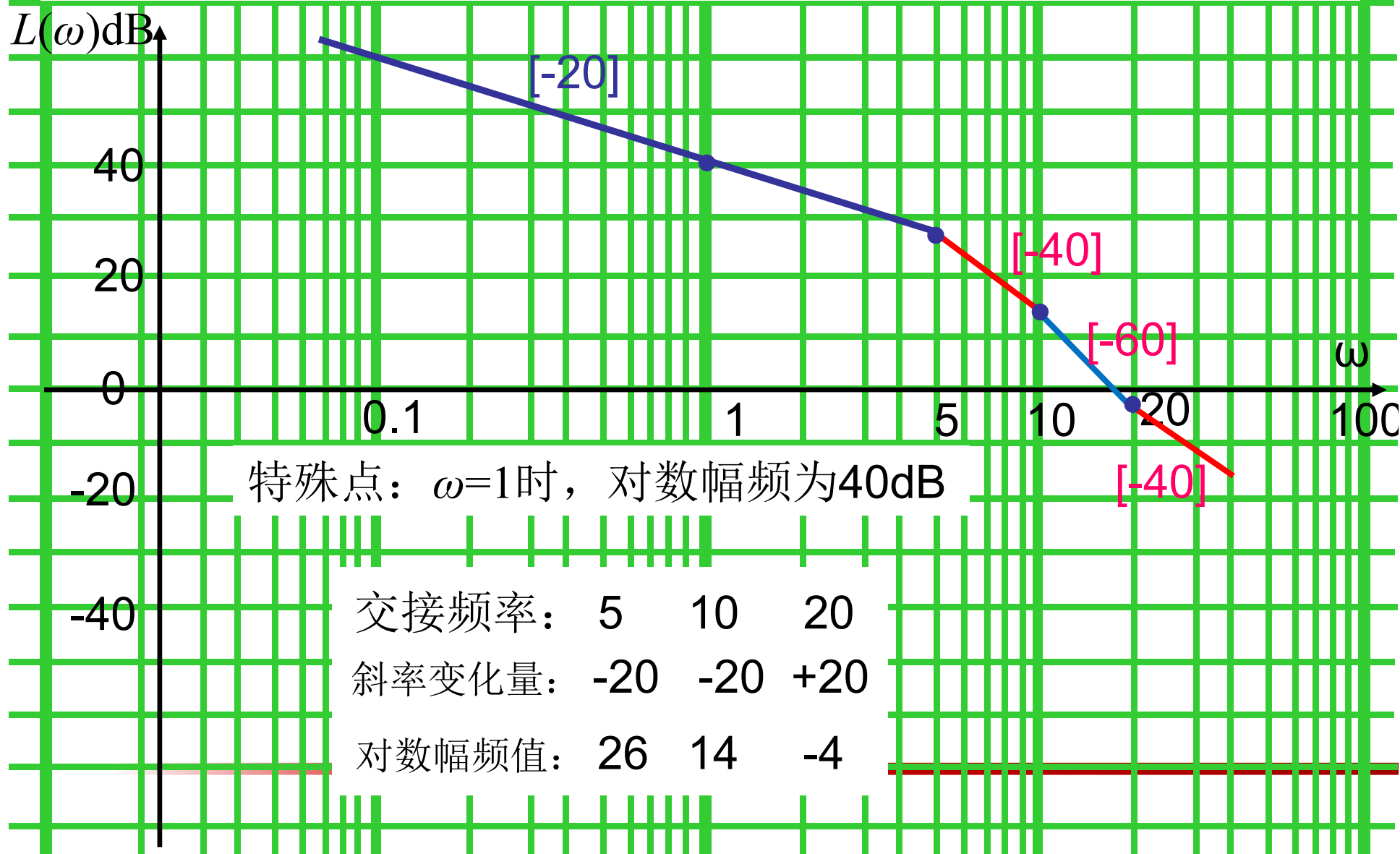
$$\omega_4 = 10 \quad -40 = \frac{L_a(\omega_4) - L_a(\omega_3)}{\lg 10 - \lg 5}$$

$$L_a(\omega_4) = -40(\lg 10 - \lg 5) + 26 = 14$$

$$\omega_5 = 20 \quad -60 = \frac{L_a(\omega_5) - L_a(\omega_4)}{\lg 20 - \lg 10}$$

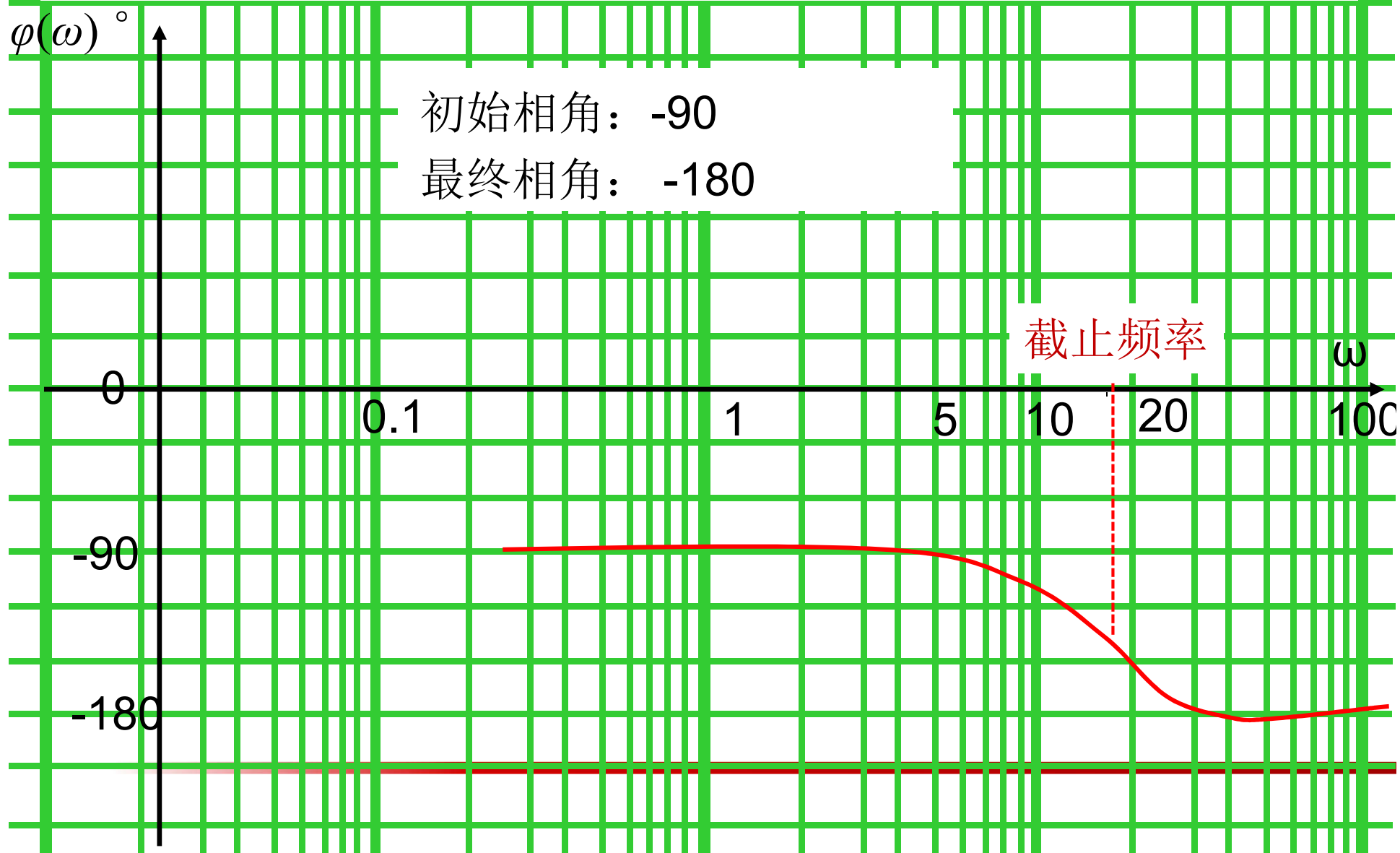
$$L_a(\omega_5) = -60(\lg 20 - \lg 10) + 14 = -4$$

绘制  $G(s) = \frac{100(0.05s + 1)}{s(0.2s + 1)(0.1s + 1)}$  的  $L(\omega)$  曲线





绘制  $G(s) = \frac{100(0.05s + 1)}{s(0.2s + 1)(0.1s + 1)}$  的  $\varphi(\omega)$  曲线

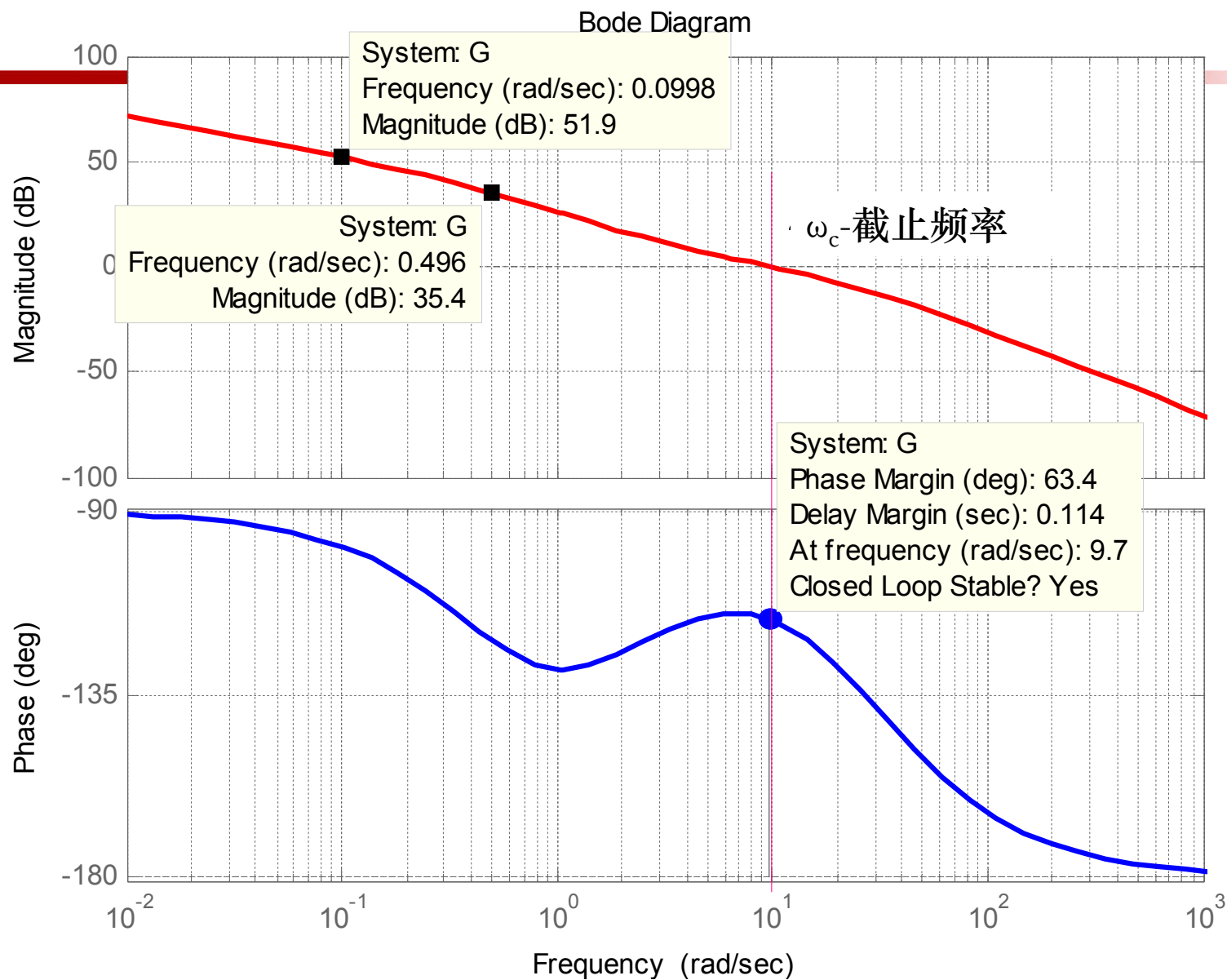


绘制  $G(s)H(s) = \frac{40(0.5s + 1)}{s(2s + 1)(s/30 + 1)}$  的  $L(\omega)$  曲线



低频段:  $\frac{40}{s}$   $\omega = 0.1$  时为 52db  $\omega = 0.5$  时为 38db

交接频率: 0.5 2 30  
斜率变化量: -20 +20 -20



$$\varphi(\omega_c) = \arctan 0.5\omega_c - \frac{\pi}{2} - \arctan 2\omega_c - \arctan(1/30)\omega_c = -116.4^\circ$$

# 本次课结束

---

## 重要知识点

1. 开环系统对数幅频特性和对数相频特性的绘制两种方法



2. 绘制开环系统对数幅频特性的渐近线及对数相频特性曲线

