第五章 线性系统的频域分析法

时域方法准确、直观，但用解析法求解系统的时域响应不易。

频域分析法是一种图解分析法，不仅可以反映系统的稳态性能，而且可以用来研究系统的暂态性能和噪声抑制效果。

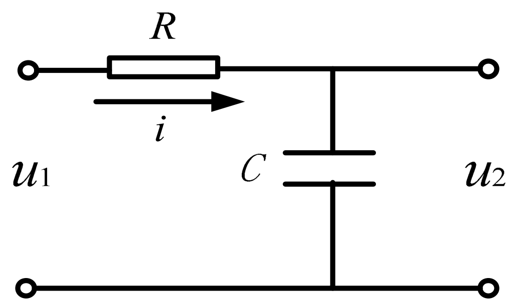
频域性能指标和时域性能指标有确定的对应关系。

数学基础是傅里叶变换。

5.1 频率特性

一、频率特性的基本概念

例：如图所示电气网络



传递函数为

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{1/Cs}{R+1/Cs}=\frac{1}{RCs+1}=\frac{1}{Ts+1}$$

若输入为正弦信号： $u_1=U_{1m}\sin\omega t$

输入的拉氏变换为： $U_1(s)=\dfrac{U_{1m}\omega}{s^2+\omega^2}$

输出的拉氏变换为： $U_2(s)=\dfrac{1}{Ts+1}\cdot\dfrac{U_{1m}\omega}{s^2+\omega^2}$ （零初始条件）

输出的拉氏反变换为： $u_2=\dfrac{U_{1m}T\omega}{1+T^2\omega^2}e^{-\frac{t}{T}}+\dfrac{U_{1m}}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\sin(\omega t-\arctan\omega T)$

5.1 频率特性

输出的稳态响应为：

$$\lim_{t\to\infty} u_2 = \frac{U_{1m}}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\sin(\omega t - \arctan\omega T) \quad = U_{1m}A(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

对于正弦输入，输出的稳态响应仍是一个同频率正弦信号。

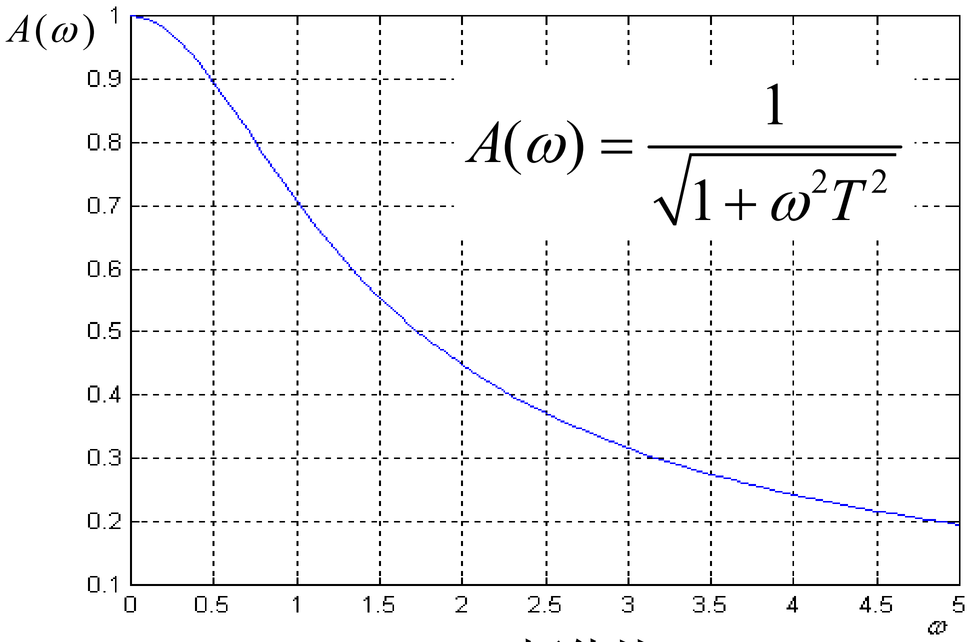
输入信号为： $u_1 = U_{1m}\sin\omega t$

输出稳态响应中与输入同频率的分量与输入信号的比较：

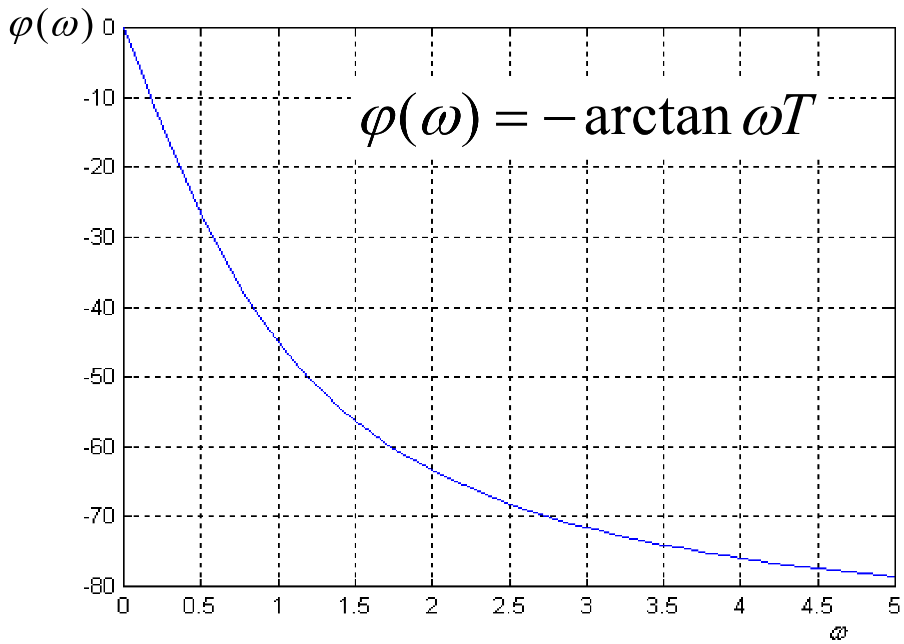
- 幅值之比 $A(\omega)$ $\quad A(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$ 幅值降低
- 相位之差 $\varphi(\omega)$ $\quad \varphi(\omega) = -\arctan\omega T$ 相角滞后

ω的函数

5.1 频率特性



(a) 幅值比



(b)相位差

ω的函数

幅值比、相位差与什么有关?

5.1 频率特性

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \qquad \varphi(\omega) = -\arctan \omega T$$

环节的传递函数： $G(s) = \dfrac{1}{Ts+1}$

若取$s = j\omega$

则 $G(s) = G(j\omega) = \dfrac{1}{1+T\omega j} = \dfrac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e^{-j\arctan \omega T} = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}$

有如下关系： $A(\omega) = |G(j\omega)| \qquad \varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$

幅值比和相位差与环节或系统的数学模型有本质关系。

5.1 频率特性

频率特性的定义：

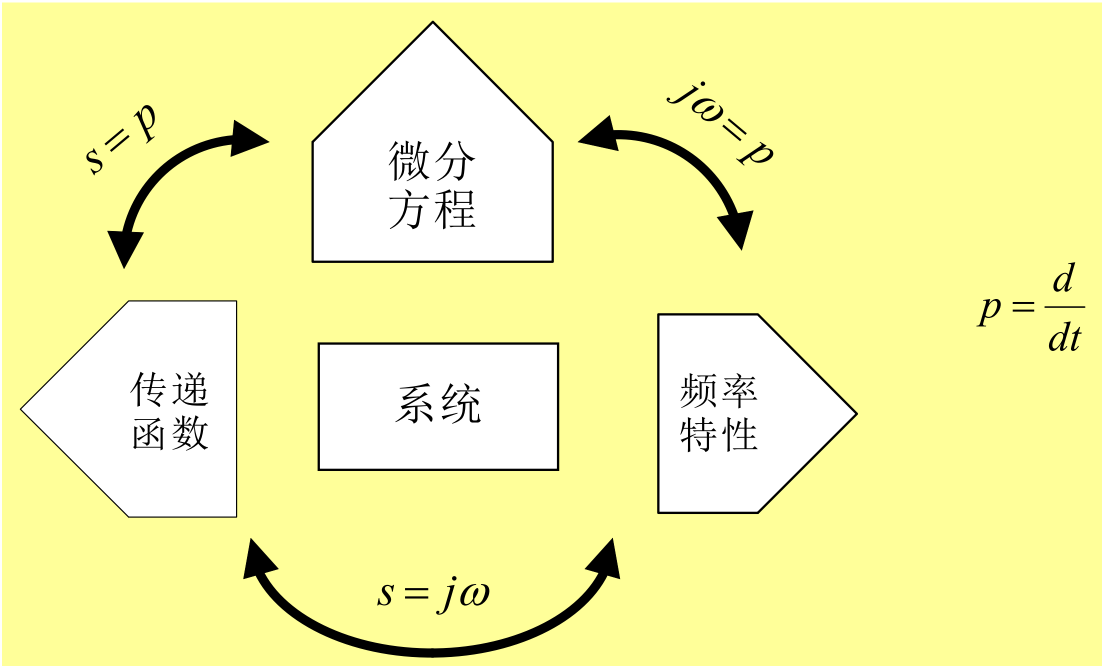
输出稳态响应中与输入同频率的分量与输入信号的幅值之比$A(\omega)$称为幅频特性、与输入信号的相位之差$\varphi(\omega)$称为相频特性，并称其指数表达式 $G(j\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ 为系统的频率特性。

因为如下关系： $A(\omega)=\left|G(j\omega)\right| \quad \varphi(\omega)=\angle G(j\omega)$

当频率为ω的正弦信号加到电路的输入端后，稳态时系统的频率特性等于传递函数（输出和输入之比）的傅氏变换。

$$G(j\omega)=\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}=G(s)\Big|_{s=j\omega}$$

5.1 频率特性



对象数学模型之间的关系

5.1 频率特性

二、频率特性的几何表示法

(1) 幅相频率特性曲线 又称幅相曲线或极坐标图 ★

(2) 对数 频率特性曲线 又称伯德曲线或伯德图 ★

(3) 对数幅相 曲线 又称尼克尔斯曲线或尼克尔斯图

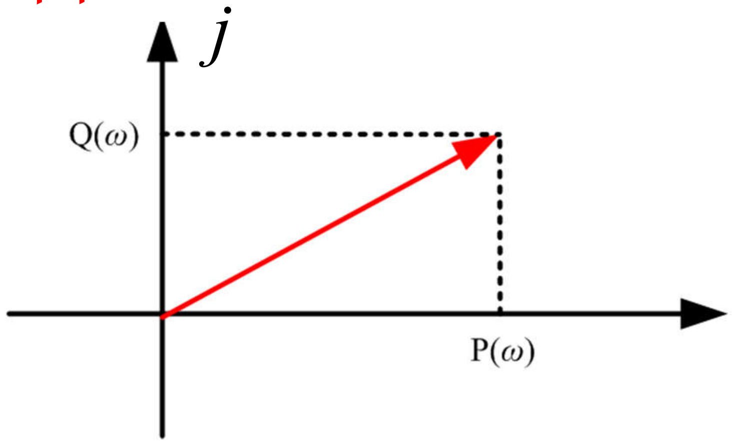
- 幅相频率特性曲线 虚实轴
- 对数 频率特性曲线 ω 轴（2曲线）
- 对数幅相 曲线 幅相轴

5.1 频率特性

1. 幅相频率特性曲线

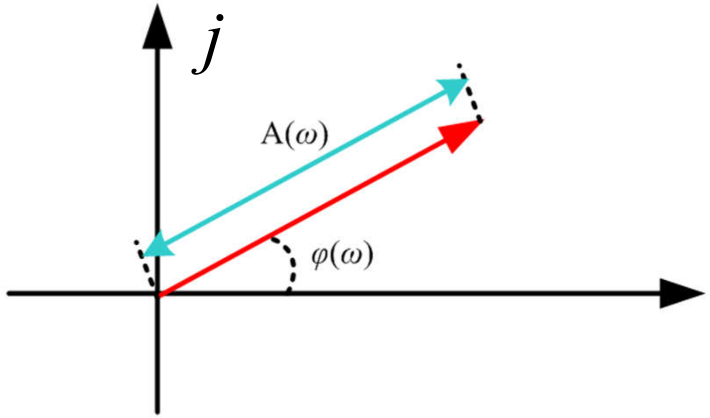
横轴为实轴，纵轴为虚轴，构成复数平面。

对于给定的频率，频率特性值为复数



1）表示成实数和虚数的和形式，则实部为实轴坐标值，虚部为虚轴坐标值。

$$G(j\omega) = \mathrm{P}(\omega)+j\mathrm{Q}(\omega)$$

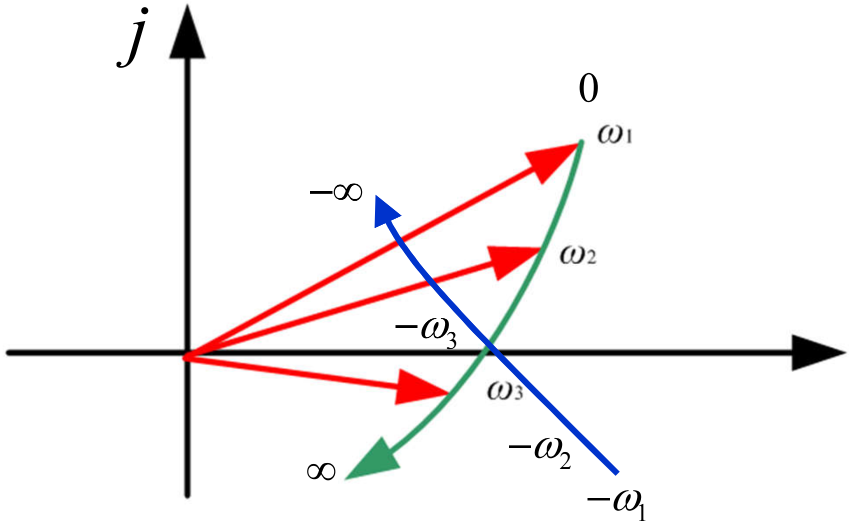


2）表示成复指数形式，则频率特性为复平面上的向量，向量长度为 频率特性的幅值，向量相位为 向量与实轴正方向的夹角。

$$G(j\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

5.1 频率特性

幅相频率特性曲线：反映ω变化时频率特性的值的变化情况。频率为参变量，将向量端点连接起来，用绿箭头表示频率增加时幅相曲线的变化方向。



当频率ω变化时，**G(jω)**变化的曲线，即向量端点轨迹称为幅相频率特性曲线或极坐标图。

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \qquad \varphi(\omega)=-\arctan\omega T$$

幅频特性是频率的偶函数，相频特性是频率的奇函数。
因此，幅相曲线关于实轴对称，一般只画出0至+∞的幅相曲线。

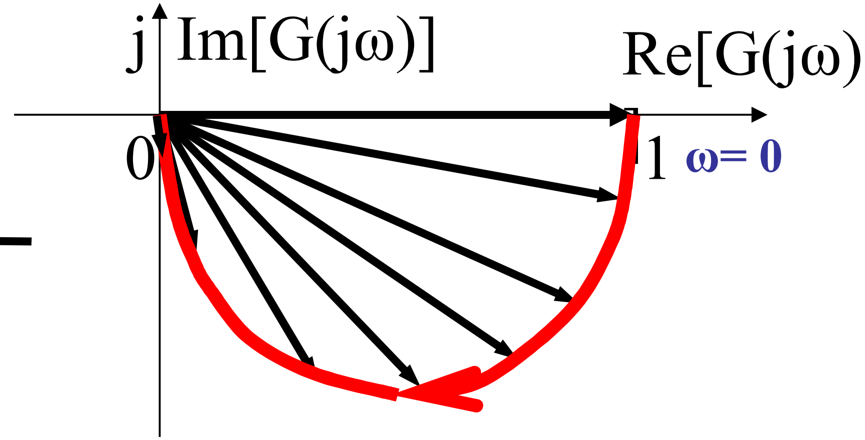
5.1 频率特性

惯性环节： $G(s)=\dfrac{1}{0.5s+1}$

频率特性： $G(j\omega)=\dfrac{1}{0.5\omega j+1}$

$A(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{0.25\,\omega^2+1}}$

$\varphi(\omega)=\text{-arctan}0.5\,\omega$



问：频率ω由0至-∞的幅相曲线?

ω	0	0.5	1	2	4	5	8	20
$\varphi(\omega)$	0	-14.5	-26.6	-45	-63.4	-68.2	-76	-84
$A(\omega)$	1	0.97	0.89	0.71	0.45	0.37	0.24	0.05

5.1 频率特性

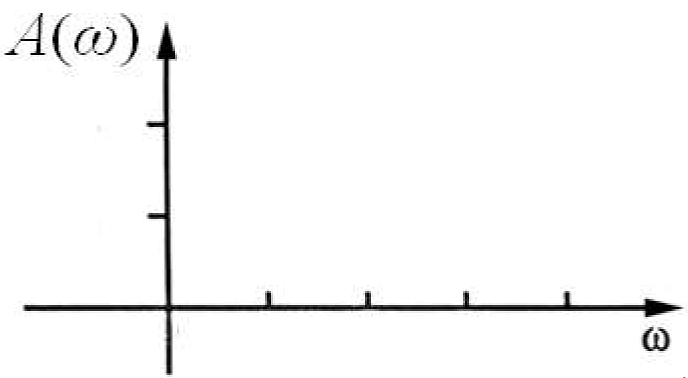
2. 对数频率特性曲线

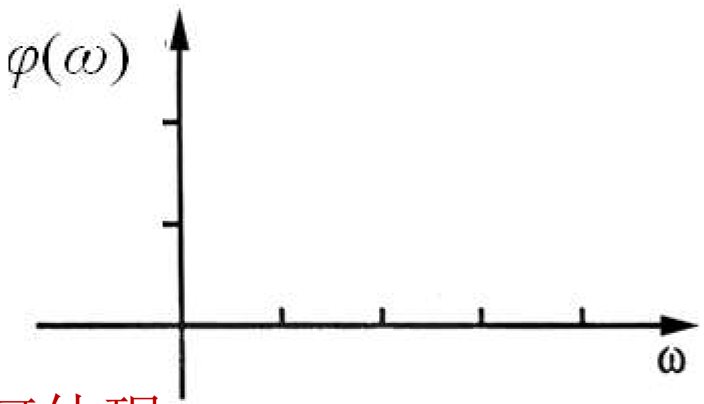
又称为Bode图，伯德曲线，伯德图

由对数幅频特性（曲线）和对数相频特性（曲线）组成。

对数幅频特性是幅频特性$A(\omega)$与频率ω的关系曲线；

对数相频特性是相频特性$\varphi(\omega)$与频率ω的关系曲线。





“对数”如何体现

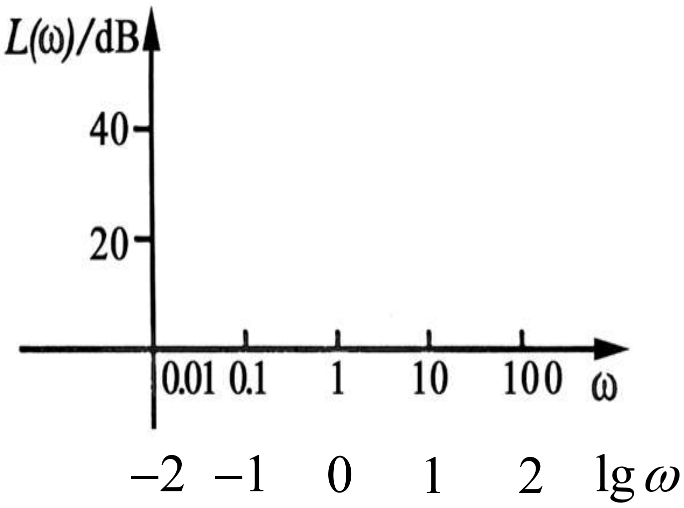
5.1 频率特性

为尽可能地反映全部频带范围内的频率特性，改用半对数坐标系。

1) 对数幅频特性曲线:

- 横坐标按lgω分度， 单位为rad/s。原来横轴上的ω取对数作为新的横坐标，新的横坐标为等分点。

  优点：采用对数分度实现了横坐标的非线性压缩，便于在较大范围内反映频率特性的变化情况。



- 纵坐标按$L(\omega)=20\lg|A(\omega)|$线性分度，单位为dB。 $|A(\omega)|$每增加10倍，$L(\omega)$增加20dB;

5.1 频率特性

20lg*A*(*ω*)的优点：将幅值的乘除法运算转化为加减法运算，简化计算及图形绘制。

***n*个环节串联组成的系统** $G(j\omega)=G_1(j\omega)G_2(j\omega)\cdots G_n(j\omega)$

$$=A_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)}A_2(\omega)e^{j\varphi_2(\omega)}\cdots A_n(\omega)e^{j\varphi_n(\omega)}$$

$$=A_1(\omega)A_2(\omega)\cdots A_n(\omega)e^{j[\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)+\cdots+\varphi_n(\omega)]}$$

对数幅频特性*L*(*ω*)

$$L(\omega)=20\lg\left|G(j\omega)\right|=20\lg A_1(\omega)A_2(\omega)\cdots A_n(\omega)$$

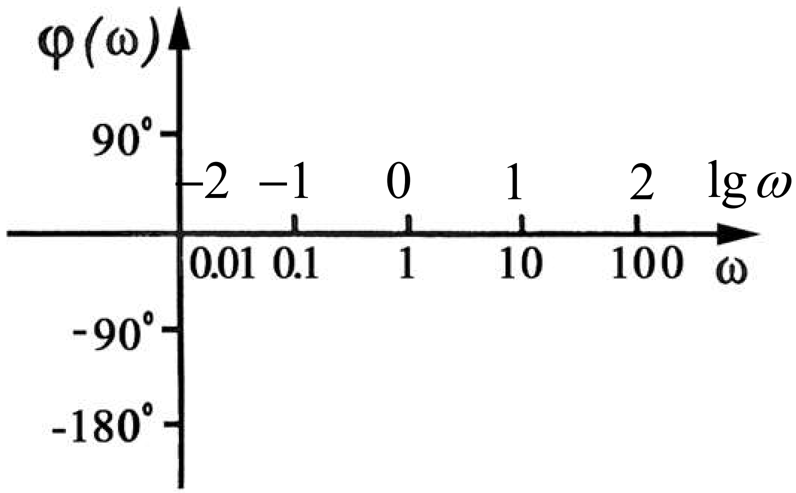
$$=20\lg A_1(\omega)+20\lg A_2(\omega)+\cdots+20\lg A_n(\omega)$$

$$=L_1(\omega)+L_2(\omega)+\cdots+L_n(\omega)$$

5.1 频率特性

2)对数相频特性曲线:

- 横坐标按lgω分度，即横轴为ω取对数后的等分点。
- 纵坐标按$\varphi(\omega)$线性分度，单位为度。



$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)\cdots G_n(j\omega)$$

$$= A_1(\omega)A_2(\omega)\cdots A_n(\omega)e^{j[\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)+\cdots+\varphi_n(\omega)]}$$

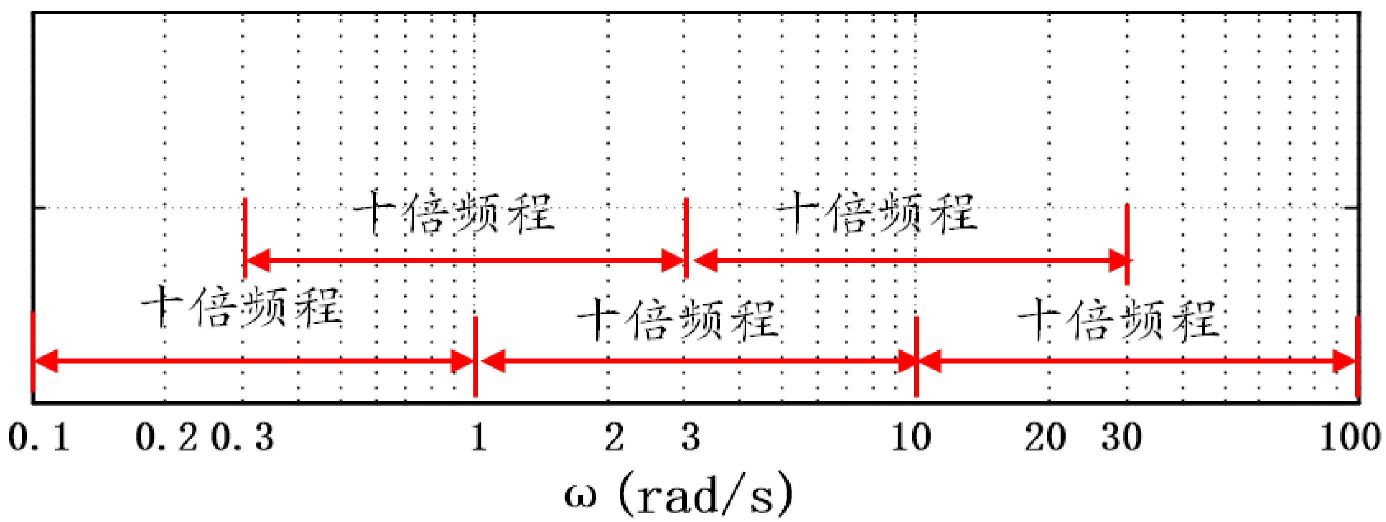
$\varphi(\omega)$本来就是加法运算

5.1 频率特性

半对数坐标：纵坐标是线性均匀刻度，横坐标不均匀，取lgω。

线性分度：变量变化1时，坐标间距变化一个单位长度。

对数分度：变量变化10倍时（称为十倍频程），坐标间距变化一个单位长度。



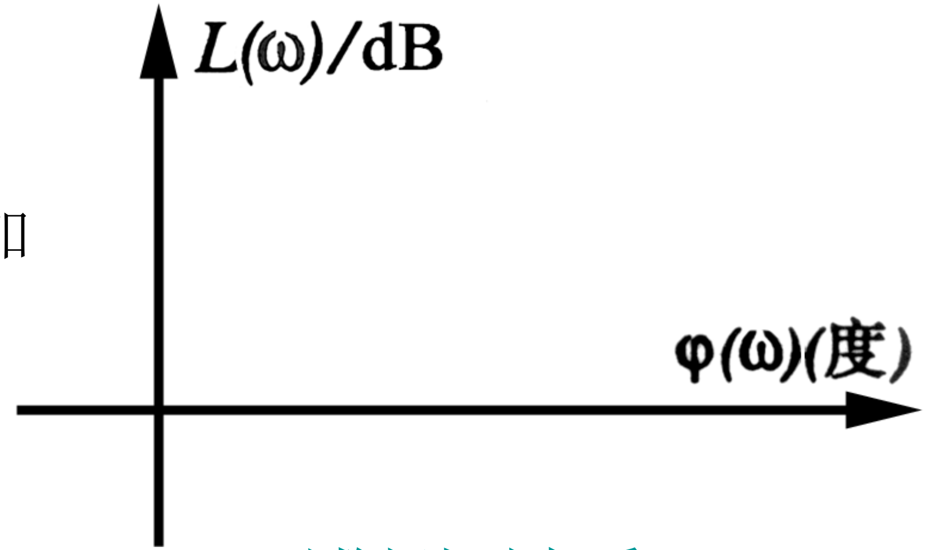
5.1 频率特性

3. 对数幅相曲线

又称为尼克尔斯图或尼克尔斯曲线。

对数幅相曲线是将对数幅频特性和对数相频特性两张图，在角频率为参变量的情况下合成一张图。

- 纵轴按 $L(\omega)=20\lg A(\omega)$ 分度，$A(\omega)$ 每增加10倍，$L(\omega)$ 增加20dB；
- 横轴按 $\varphi(\omega)$ 分度，单位为度。



对数幅相坐标系

5.2 典型环节与开环系统的频率特性

一、典型环节

控制系统由若干典型环节组成，常见的典型环节：

比例环节	K	惯性环节	$\dfrac{1}{Ts+1}$
积分环节	$\dfrac{1}{s}$	一阶微分环节	$\tau s+1$
微分环节	s	振荡环节	$\dfrac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$
		滞后环节	$e^{-\tau s}$

分别讨论典型环节的频率特性 $L(\omega)=20\lg A(\omega)$ $\varphi(\omega)$

5. 2 典型环节与开环系统的频率特性

二、典型环节的频率特性

步骤:

（1）环节的传递函数$G(s)$;

（2）令$s=j\omega$,求出频率特性表达式$G(j\omega)$;

（3）$G(j\omega)$分为实部$P(\omega)$和虚部$Q(\omega)$，若$G(j\omega)$的分母为复数，需要做有理化处理;

（4）求出幅频$A(\omega)$和相频特性$\varphi(\omega)$ 的表达式，根据不同的频率值计算幅频和相频特性，最后绘制幅相特性曲线或对数频率特性曲线。

1. 比例环节

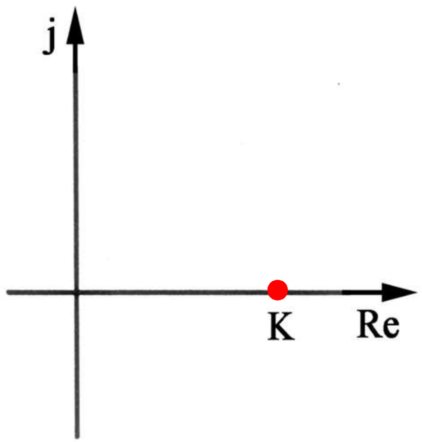
传递函数： $G(s)=K$

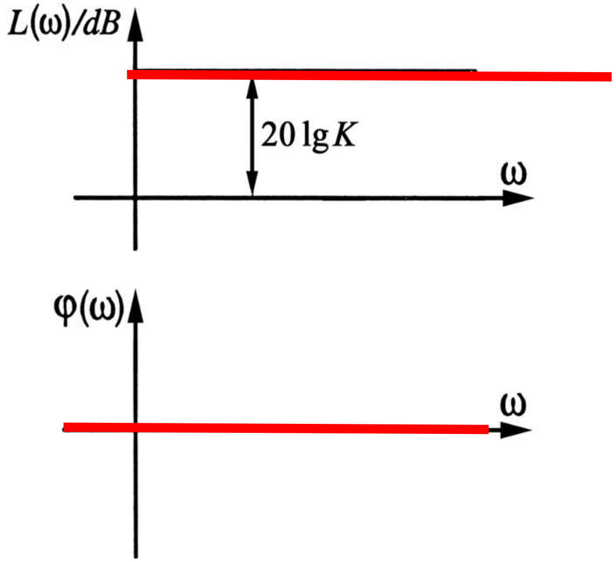
频率特性： $G(j\omega)=K$ ⇨ $P(\omega)=K=const$，$Q(\omega)=0$

幅频特性： $A(\omega)=K$

相频特性： $\varphi(\omega)=0$

对数幅频特性： $L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg K$

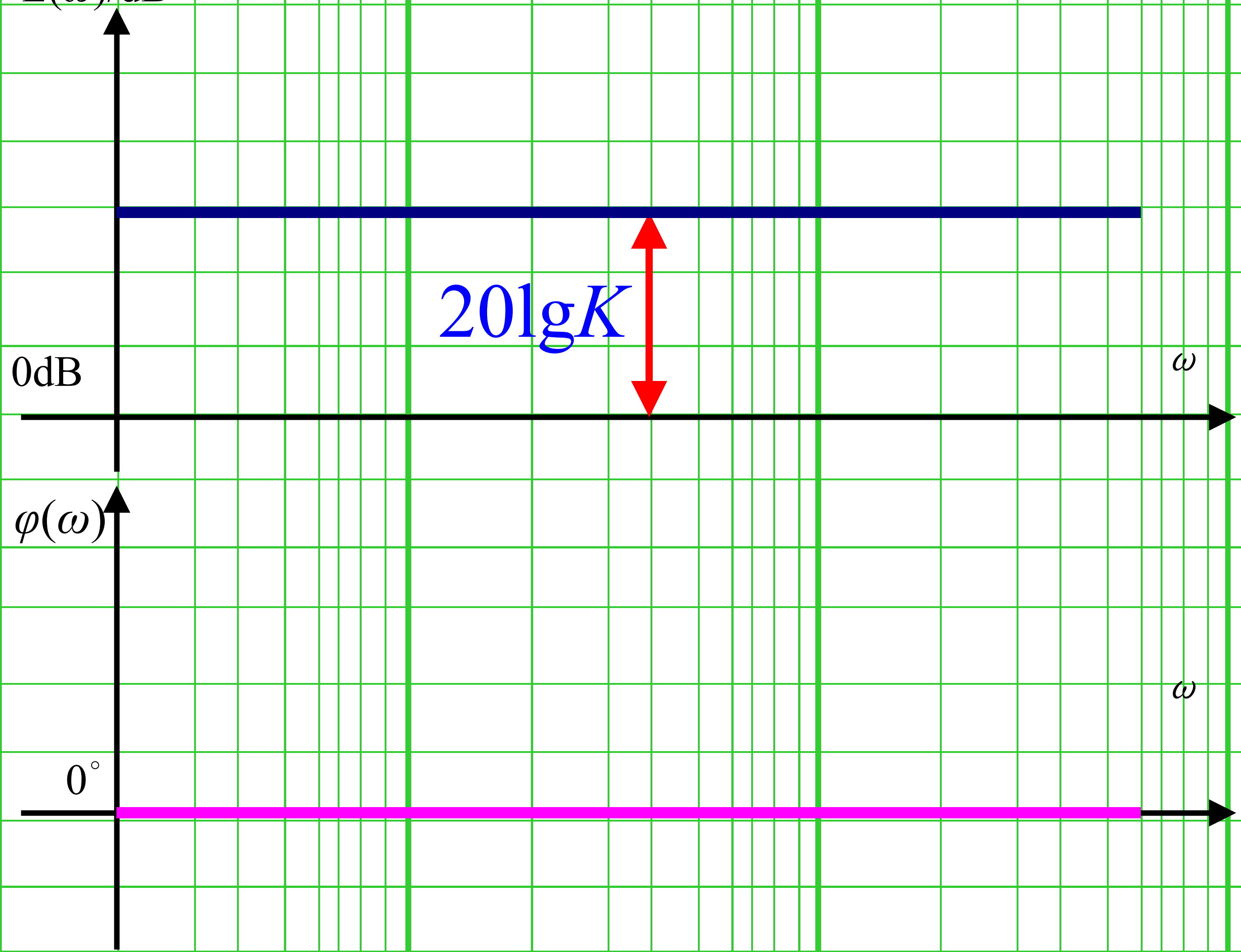




比例环节的极坐标图为一点　　对数幅频特性为一水平线，相频特性与横坐标重合。

比例环节的Bode图

$G(s)=K$



2. 积分环节

传递函数： $G(s)=\dfrac{1}{s}$

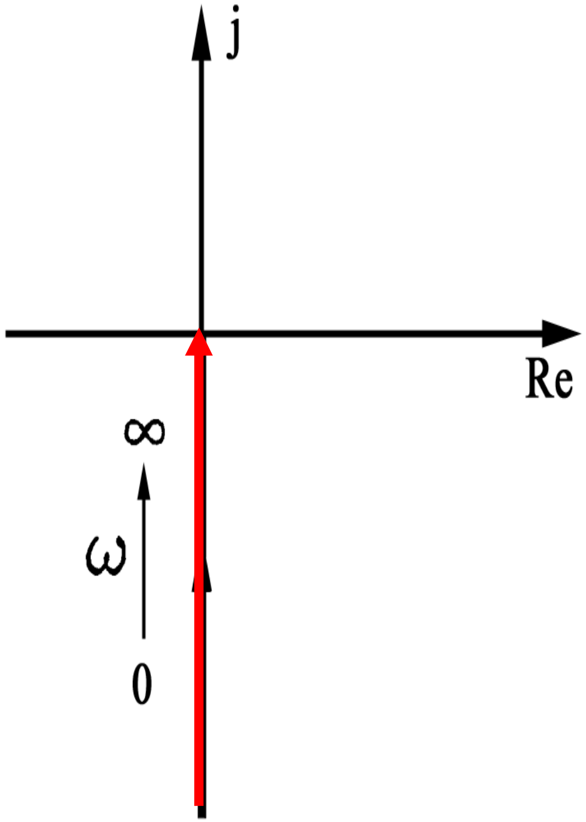
频率特性： $G(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega}=\dfrac{1}{\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}$ $\Rightarrow$ $P(\omega)=0$, $Q(\omega)=-\dfrac{1}{\omega}$

幅频特性： $A(\omega)=\dfrac{1}{\omega}$

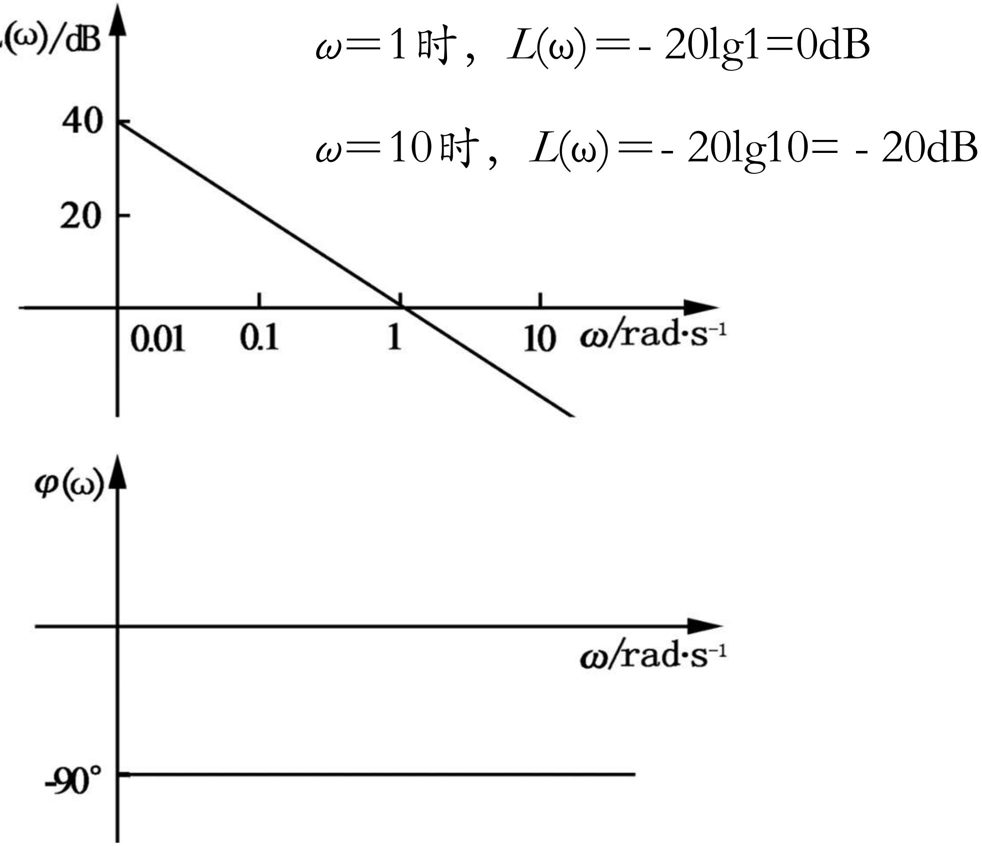
相频特性： $\varphi(\omega)=-\dfrac{\pi}{2}$

对数幅频特性： $L(\omega)=20\lg A(\omega)=-20\lg\omega$

$$A(\omega)=\frac{1}{\omega} \quad \varphi(\omega)=-\frac{\pi}{2} \quad L(\omega)=20\lg A(\omega)=-20\lg\omega$$

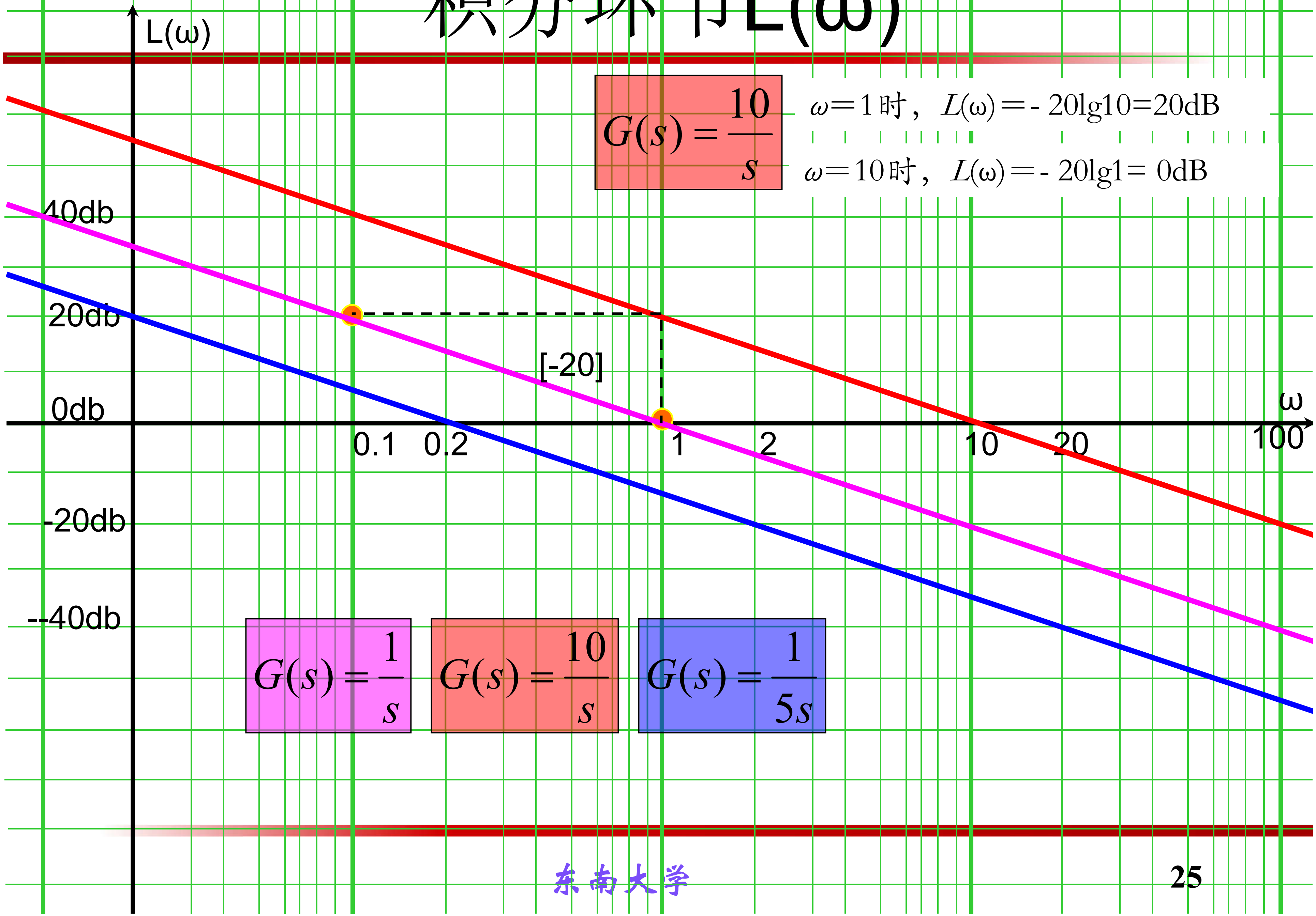


积分环节的极坐标图



积分环节的Bode图

积分环节L(ω)


L(ω)
G(s) = 10/s
ω=1时，L(ω)=- 20lg10=20dB
ω=10时，L(ω)=- 20lg1= 0dB
40db
20db
[-20]
0db
ω
0.1
0.2
1
2
10
20
100
-20db
--40db
G(s) = 1/s
G(s) = 10/s
G(s) = 1/5s

3. 微分环节

纯微分的传递函数： $G(s)=s$

频率特性： $G(j\omega)=j\omega=\omega e^{j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \begin{aligned} P(\omega)&=0 \\ Q(\omega)&=\omega \end{aligned}$

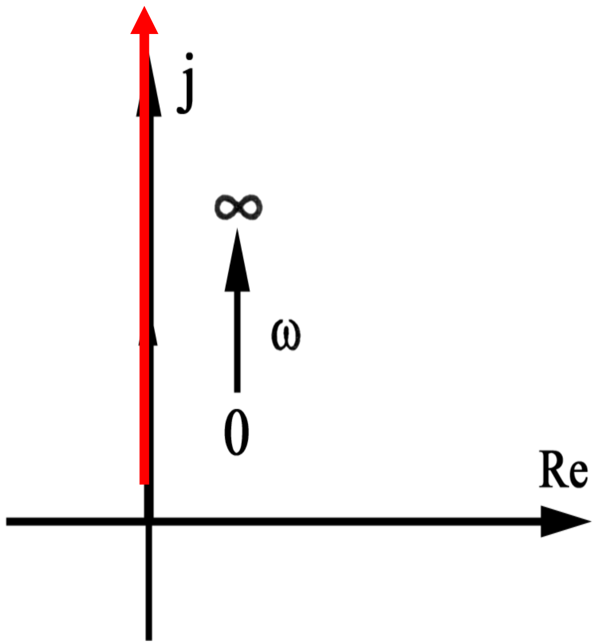
幅频特性： $A(\omega)=\omega$

相频特性： $\varphi(\omega)=\dfrac{\pi}{2}$

对数幅频特性： $L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg\omega$

5.2 典型环节与开环系统的频率特性

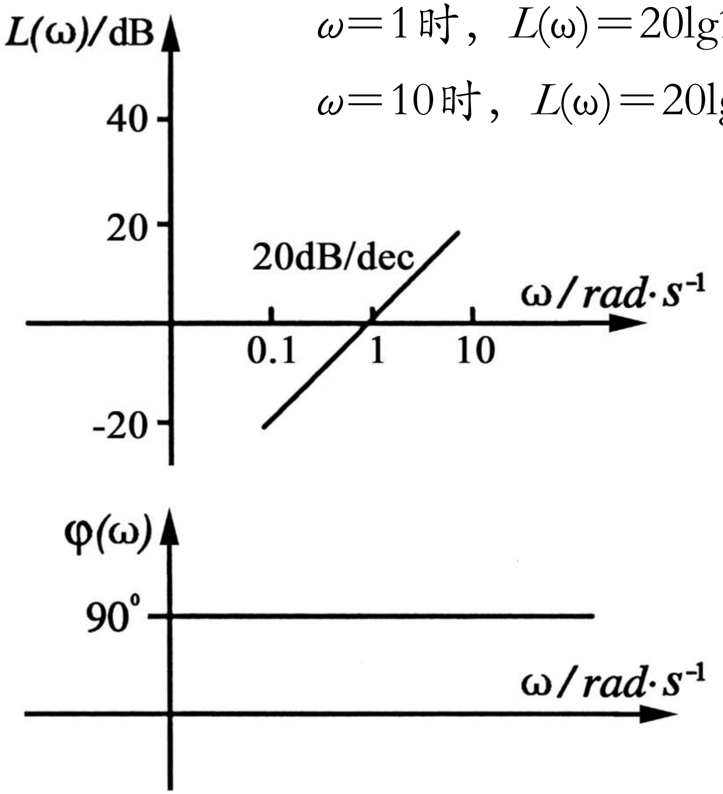
$$A(\omega)=\omega \qquad \varphi(\omega)=\frac{\pi}{2} \qquad L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg\omega$$



纯微分环节的极坐标图

$\omega=1$时，$L(\omega)=20\lg1=0\text{dB}$

$\omega=10$时，$L(\omega)=20\lg10=20\text{dB}$

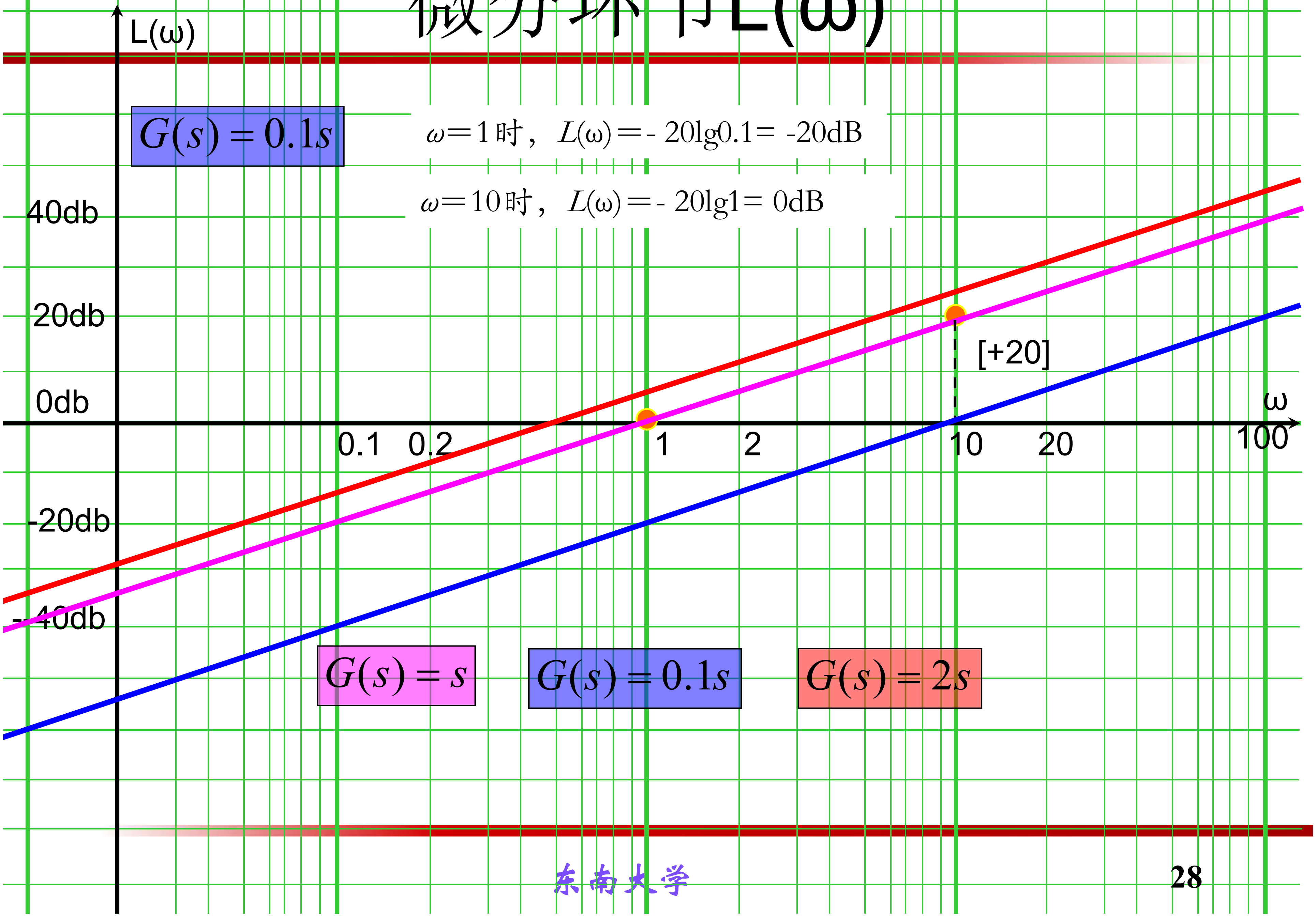


纯微分环节的Bode图

微分环节L(ω)

$\omega = 1$时，$L(\omega) = -20\lg 0.1 = -20\text{dB}$

$\omega = 10$时，$L(\omega) = -20\lg 1 = 0\text{dB}$



4. 惯性环节

惯性环节的传递函数： $$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

频率特性： $$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}=\frac{1}{1+\omega^2T^2}-j\frac{\omega T}{1+\omega^2T^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}e^{-j\arctan\omega T}$$

实部： $$\mathrm{P}(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2T^2}$$

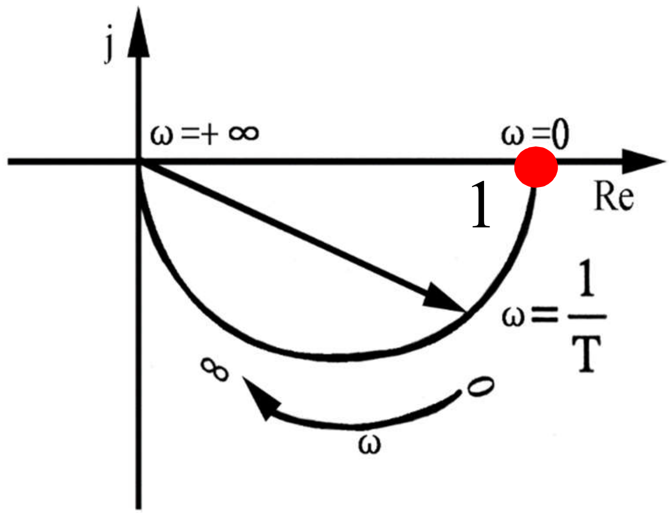
虚部： $$\mathrm{Q}(\omega)=-\frac{T\omega}{1+\omega^2T^2}$$

5.2 典型环节与开环系统的频率特性

$$P(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2T^2} \qquad Q(\omega)=-\frac{T\omega}{1+\omega^2T^2}$$

$$P=\frac{1}{1+\omega^2T^2}=\frac{1}{1+Q^2/P^2} \Rightarrow P^2+Q^2=P \Rightarrow (P-\frac{1}{2})^2+Q^2=(\frac{1}{2})^2$$

惯性环节的幅相频率特性是一个以(1/2，j0)为圆心，以1/2为半径的半圆。



惯性环节极坐标图

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}e^{-j\arctan\omega T}$$

幅频特性： $A(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$

相频特性： $\varphi(\omega)=-\arctan\omega T$

对数幅频特性： $L(\omega)=20\lg A(\omega)=-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$

对数相频特性： $\varphi(\omega)=-\arctan\omega T$

5.2 典型环节与开环系统的频率特性

对数幅频特性为： $L(\omega)=20\lg A(\omega)=-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$

（1）当 $\omega \ll \dfrac{1}{T}$ 时，对数幅频特性可近似为

$$L(\omega)=-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}\approx 0dB$$ —低频渐近线

（2）当 $\omega \gg \dfrac{1}{T}$ 时，对数幅频特性可近似为

$$L(\omega)=-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}\approx -20\lg \omega T$$ —高频渐近线

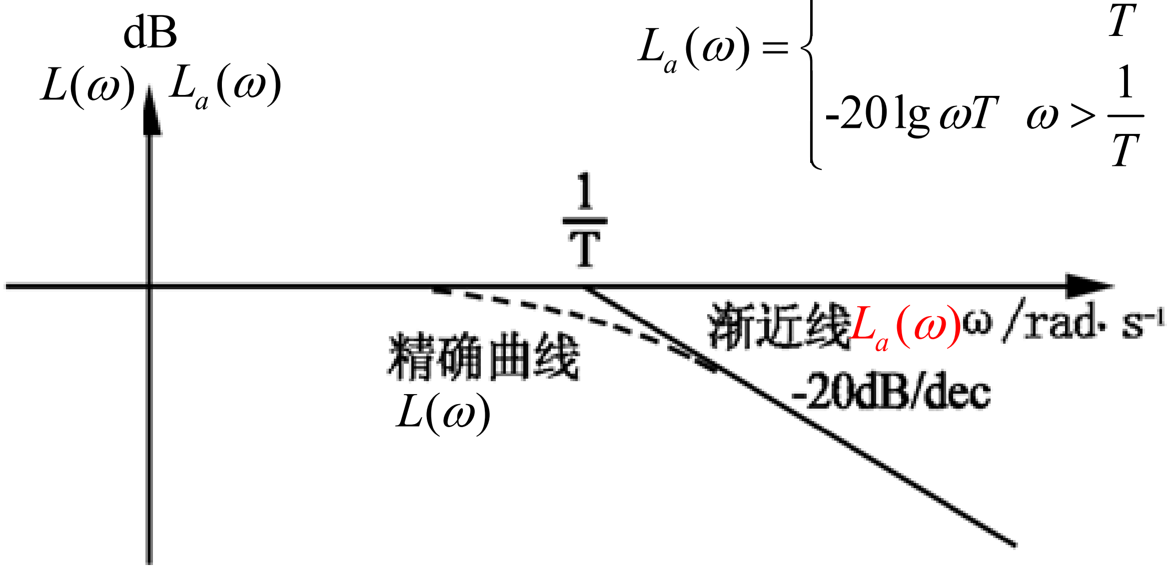
高频渐近线具有-20dB/十倍频程的斜率，记为-20dB/dec或[-20]。

ω增大10倍时： $\Delta L(\omega_1)=L(10\omega_1)-L(\omega_1)=-20(\mathrm{dB})$

5.2 典型环节与开环系统的频率特性

惯性环节的对数幅频渐近特性为

$$L_a(\omega)=\begin{cases}0 & \omega<\dfrac{1}{T}\\ -20\lg\omega T & \omega>\dfrac{1}{T}\end{cases}$$



- 惯性环节的对数幅频特性曲线近似为两段直线，两段直线称为对数幅频特性曲线的渐近线。
- 高频渐近线正好在$\omega=1/T$处与低频渐近线相交，交点处的频率$1/T$称为交接频率（转折频率）。

5.2 典型环节与开环系统的频率特性

误差为 $\Delta L(\omega)=L(\omega)-L_a(\omega)\Big|_{\omega=\frac{1}{T}}=-20\lg\sqrt{2}\ =-3.03\ \ \text{dB}$

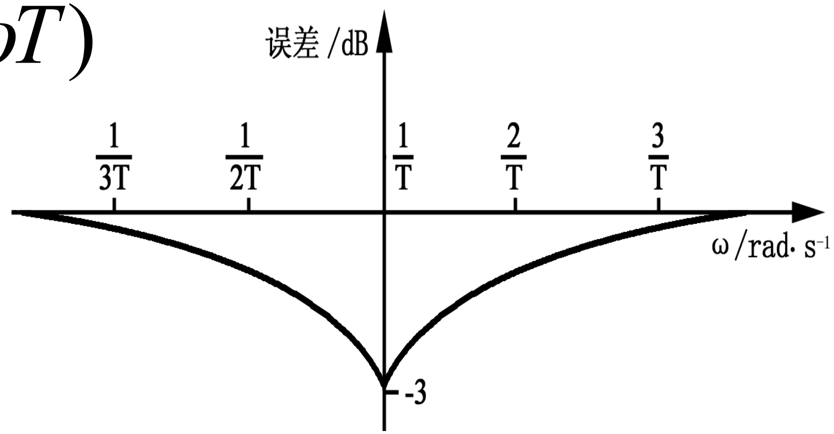
在高于交接频率一个倍频处，即 $\omega=\dfrac{2}{T}$ 的误差为

$$\Delta L(\omega)=L(\omega)-L_a(\omega)\Big|_{\omega=\frac{2}{T}}$$

$$=-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}-(-20\lg\omega T)$$

$$=-20\lg\sqrt{5}\ +20\lg 2$$

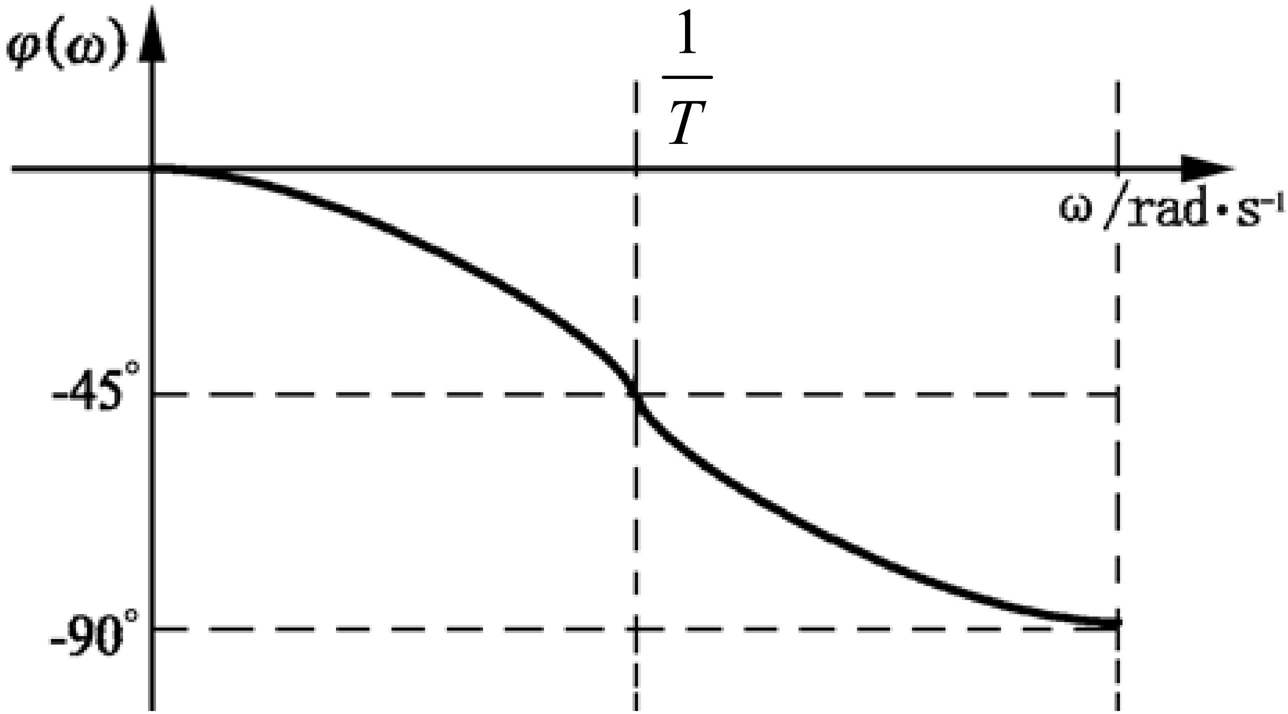
$$=-0.97\ \ \text{dB}$$



惯性环节对数幅频特性曲线的误差曲线

5.2 典型环节与开环系统的频率特性

对数相频特性　$\varphi(\omega) = -\arctan \omega T$

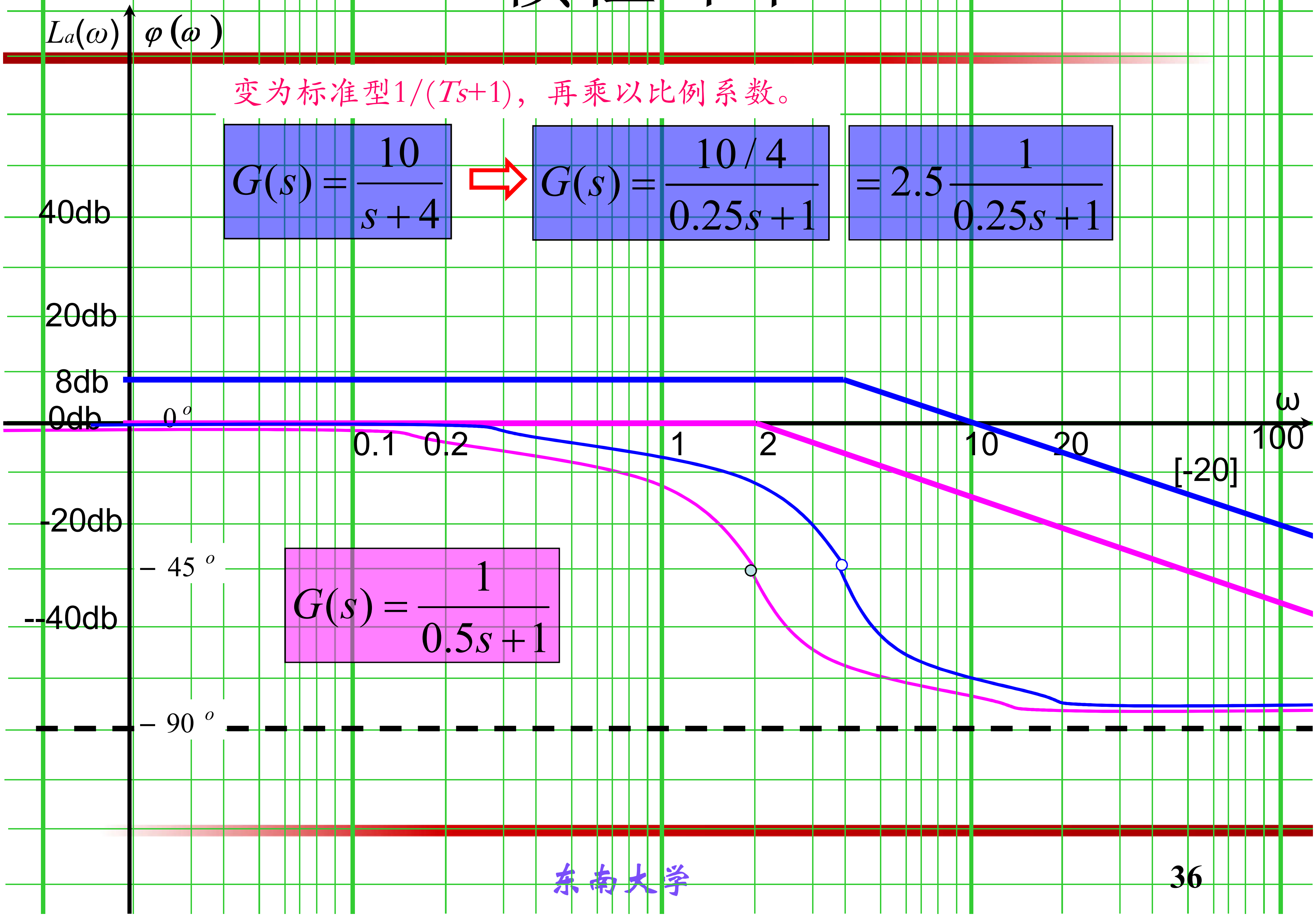


惯性环节

变为标准型1/(*Ts*+1)，再乘以比例系数。

$$G(s)=\frac{10}{s+4} \Rightarrow G(s)=\frac{10/4}{0.25s+1} = 2.5\frac{1}{0.25s+1}$$

$$G(s)=\frac{1}{0.5s+1}$$



5. 一阶微分环节

传递函数： $G(s)=1+\tau s$

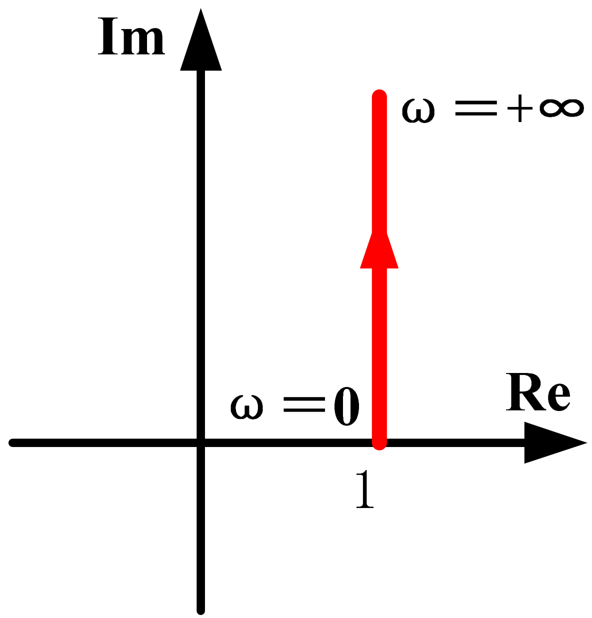
$P(\omega)=1$

$Q(\omega)=\omega\tau$

频率特性： $G(j\omega)=1+j\tau\omega$

幅频特性： $A(\omega)=\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$

相频特性： $\varphi(\omega)=\arctan\omega\tau$



一阶微分环节极坐标图

5.2 典型环节与开环系统的频率特性

对数幅频特性： $L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$

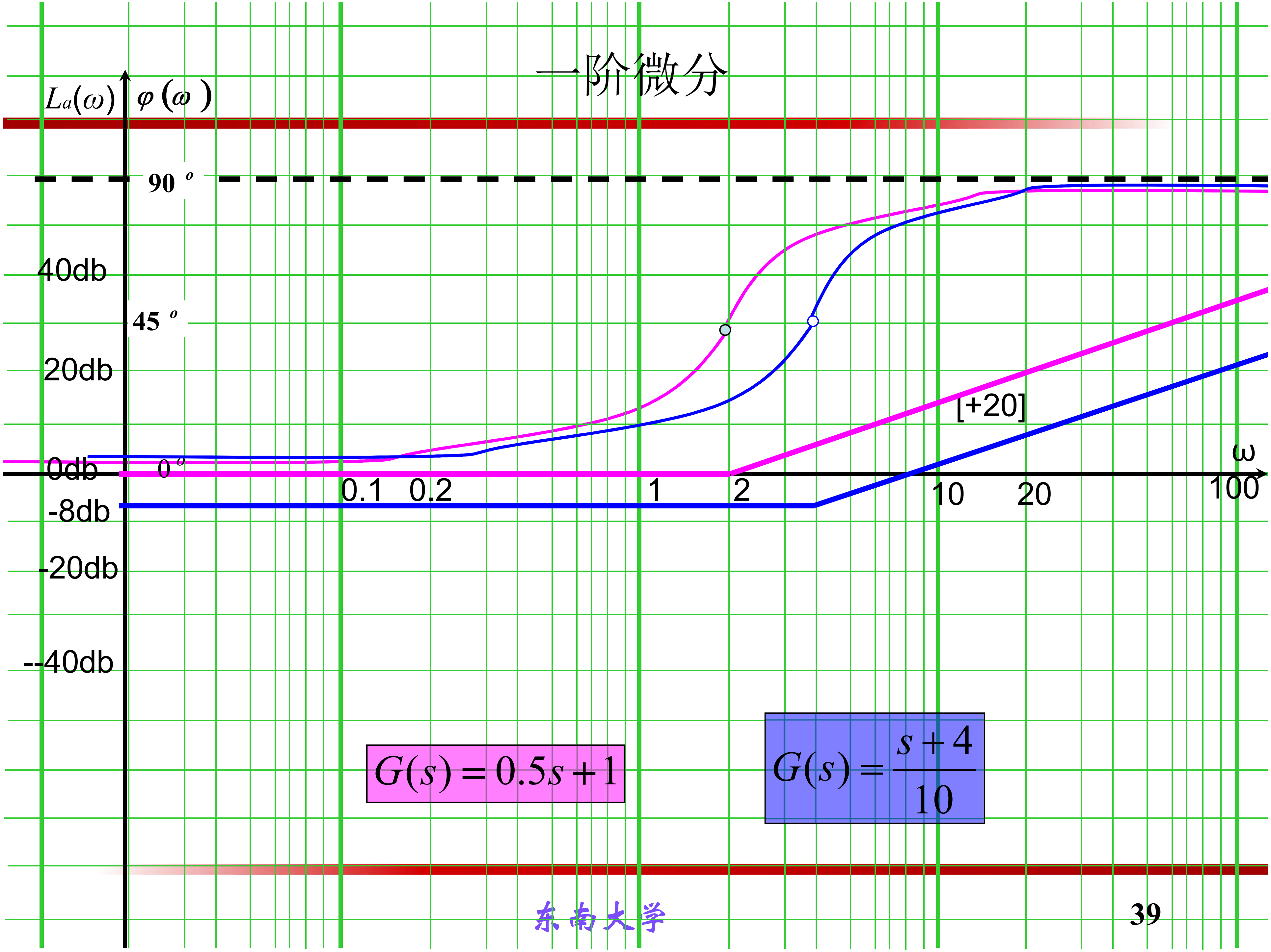
在低频段，即$\omega\tau<<1$，可略去 $\omega^2\tau^2$。 $L(\omega)\approx 0$

在高频段，即$\omega\tau>>1$，可略去 1。$L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg\omega\tau$

一阶微分环节的对数幅频渐近特性为

$$L_a(\omega)=\begin{cases}0 & \omega<\dfrac{1}{T}\\[2ex] 20\lg\omega T & \omega>\dfrac{1}{T}\end{cases}$$

一阶微分


$L_a(\omega)$ $\varphi(\omega)$
90°
45°
0°
40db
20db
0db
-8db
-20db
--40db
0.1
0.2
1
2
10
20
100
ω
[+20]
$G(s) = 0.5s + 1$
$G(s) = \frac{s+4}{10}$

本次课结束

重要知识点

1. 频率特性的基本概念 ☆
2. 频率特性的几种曲线表示方法 ☆ ☆
3. 典型环节的频率特性 ☆☆☆