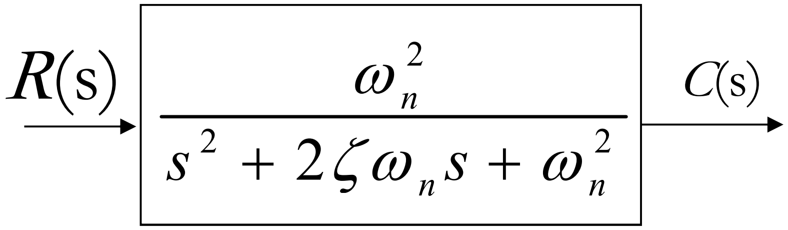
第三章 线性系统的时域分析法

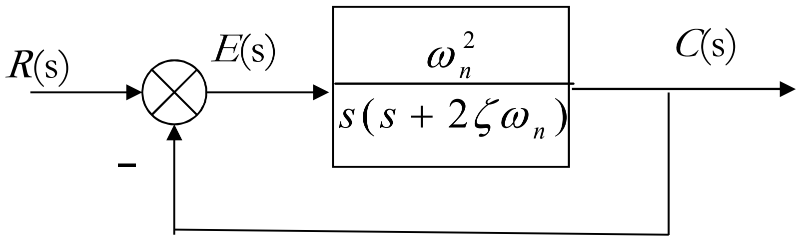
3.3 二阶系统的时域分析

二阶系统闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{R(s)}{C(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$



$$\Phi(s)=\frac{\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}{1+\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}=\frac{G}{1+GH}$$



$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}\qquad H(s)=1$$

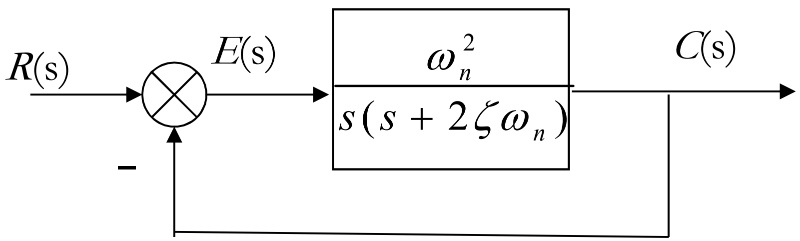
系统开环传递函数GH

3.3 二阶系统的时域分析

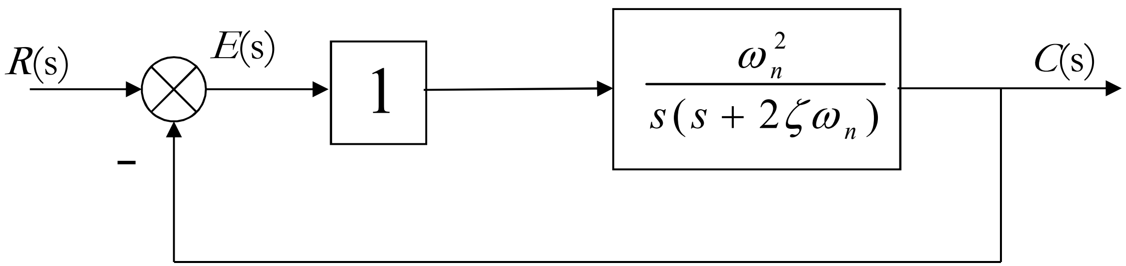
系统开环传递函数

开环增益 $K=\dfrac{\omega_n}{2\zeta}$

$$G(s)H(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}=\frac{\omega_n}{2\zeta}\bullet\frac{1}{s(\frac{1}{2\zeta\omega_n}s+1)}=K\bullet\frac{1}{s(\frac{1}{2\zeta\omega_n}s+1)}$$

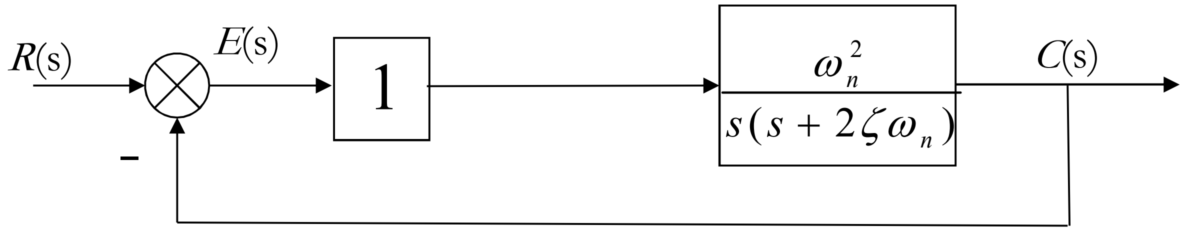


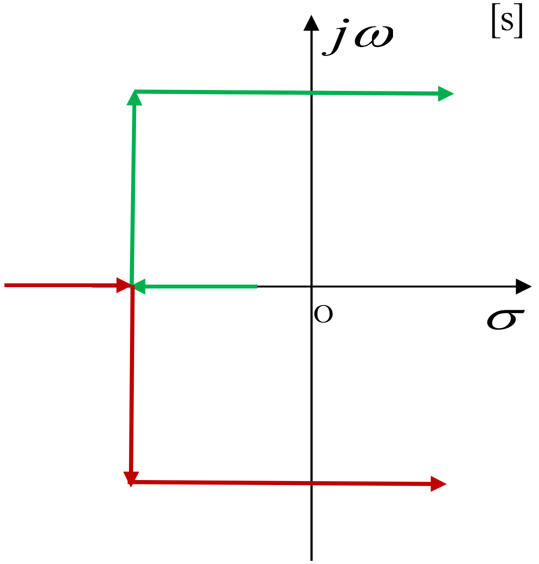
比例控制

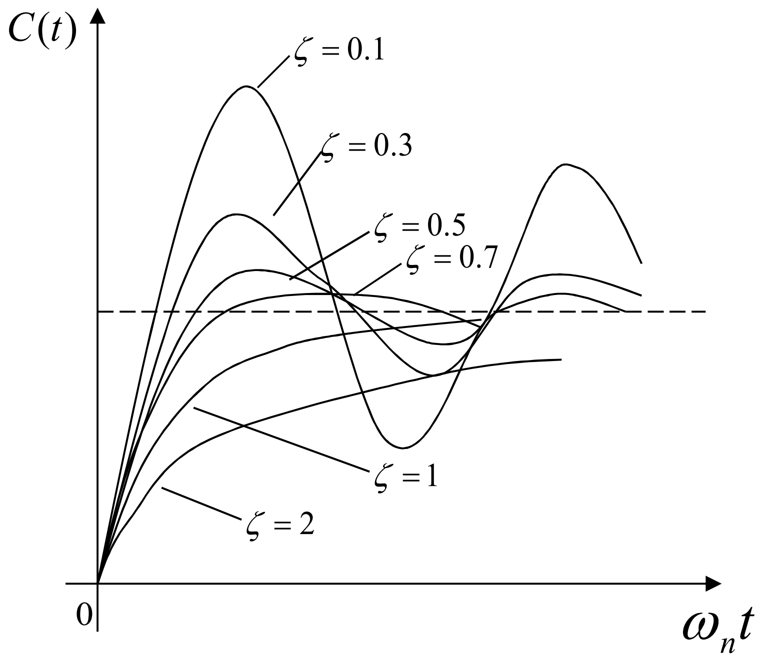


四、二阶系统性能的改善

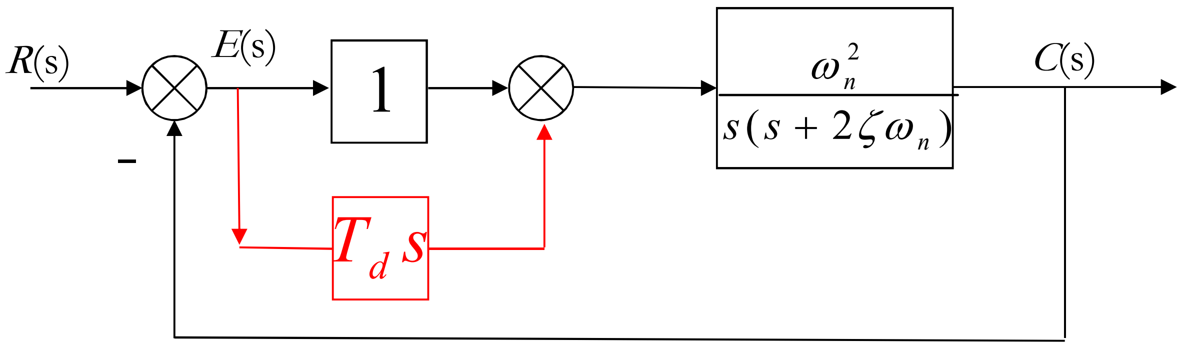
1. 比例控制







2. 比例微分控制



系统开环传递函数

$$G(s)=\frac{\omega_n^2(T_d s+1)}{s(s+2\zeta\omega_n)} \quad =\frac{\omega_n}{2\zeta}\bullet\frac{(T_d s+1)}{s(\frac{s}{2\zeta\omega_n}+1)}=K\bullet\frac{(T_d s+1)}{s(\frac{s}{2\zeta\omega_n}+1)}$$

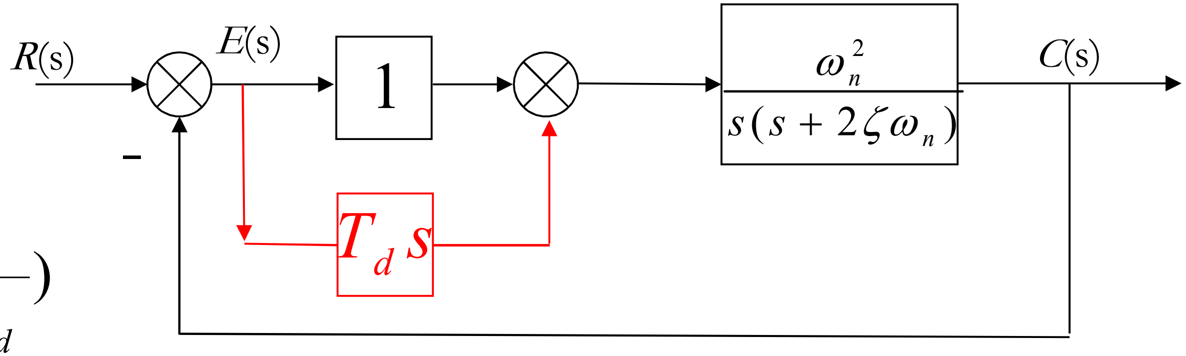
开环增益 $K=\frac{\omega_n}{2\zeta}$ 与比例控制的开环增益相同

系统闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{G}{1+GH}=\frac{\frac{(T_d s+1)\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}{1+\frac{(T_d s+1)\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}=\frac{(T_d s+1)\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)+(T_d s+1)\omega_n^2}$$

3.3 二阶系统的时域分析

系统闭环传递函数改写为：



$$\Phi(s)=\frac{T_d\omega_n^2\bullet(s+\frac{1}{T_d})}{s^2+(2\zeta\omega_n+T_d\omega_n^2)s+\omega_n^2}$$

$$=\frac{T_d\omega_n^2(s+\frac{1}{T_d})}{s^2+2(\zeta+\frac{T_d}{2}\omega_n)\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$=\frac{T_d\omega_n^2(s+\frac{1}{T_d})}{s^2+2\zeta_d\omega_n s+\omega_n^2}$$

1）开环增益不变

$$K=\frac{\omega_n}{2\zeta}$$

2)阻尼比增大

$$\zeta_d=\zeta+\frac{T_d}{2}\omega_n$$

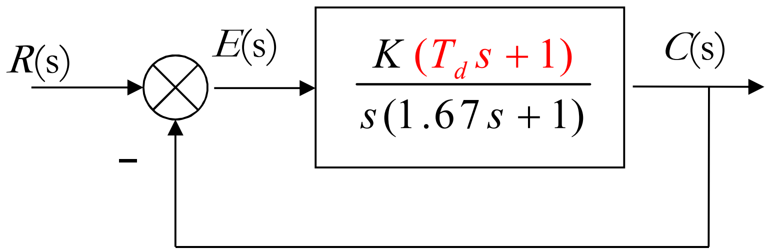
3)自然振荡频率不变

$$\omega_n$$

4)多一个零点 $-\frac{1}{T_d}$

3.3 二阶系统的时域分析

例 设单位反馈系统开环传递函数为



$$G(s) = \frac{K\,(T_d s + 1)}{s(1.67s + 1)}$$

其中K为开环增益。已知系统在单位斜坡函数输入时的稳态误差 $e_{ss}(\infty)=1/K$ 。若要求$e_{ss}(\infty)\leqslant 0.2\text{rad}$，$\zeta_d=0.5$。试确定$K$和$T_d$的值。

解： $e_{ss}(\infty)=1/K$ $e_{ss}(\infty)\leqslant 0.2\text{rad}$ ⇨ $K=5$

1）无零点（$T_d = 0$）二阶系统开环传递函数:$G(s) = \dfrac{5}{s(1.67s+1)}$

闭环传递函数:

$$\Phi(s) = \frac{G}{1+GH} = \frac{\dfrac{5}{s(1.67s+1)}}{1+\dfrac{5}{s(1.67s+1)}} = \frac{5}{1.67s^2+s+5} = \frac{3}{s^2+0.6s+3}$$

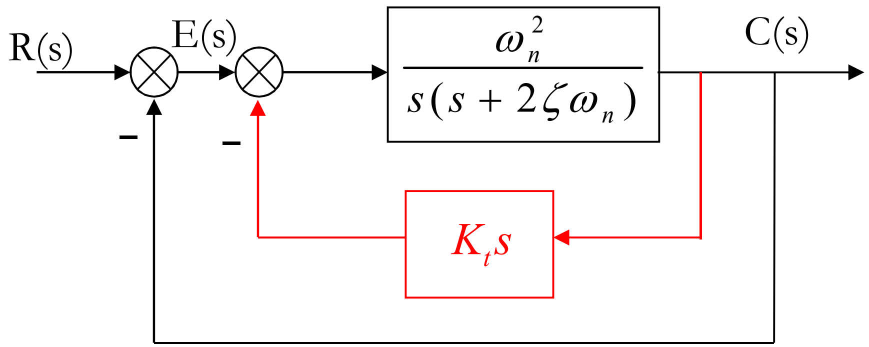
闭环特征方程：$s^2 + 0.6s + 3 = 0$

阻尼比和自振频率： $\zeta = 0.173 \quad \omega_n = 1.732$

2）有零点（$T_d \neq 0$）二阶系统开环传递函数:$G(s) = \dfrac{5(T_d s+1)}{s(1.67s+1)}$

$$\zeta_d = \zeta + \frac{T_d}{2}\omega_n = 0.173 + \frac{T_d}{2}\times 1.732 = 0.5 \Rightarrow T_d = 0.38 \ s$$

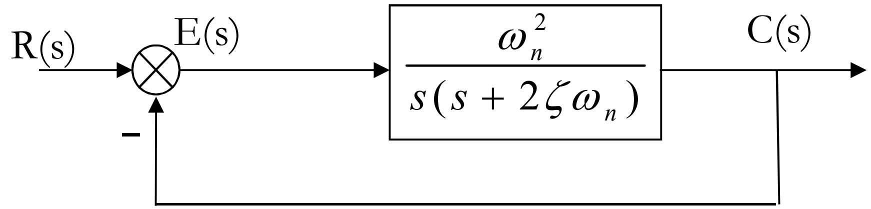
3. 测速反馈控制



将输出信号的微分信号反馈到输入端，并与误差信号进行比较，也可以增大阻尼，改善动态性能。

原系统开环传递函数

原系统

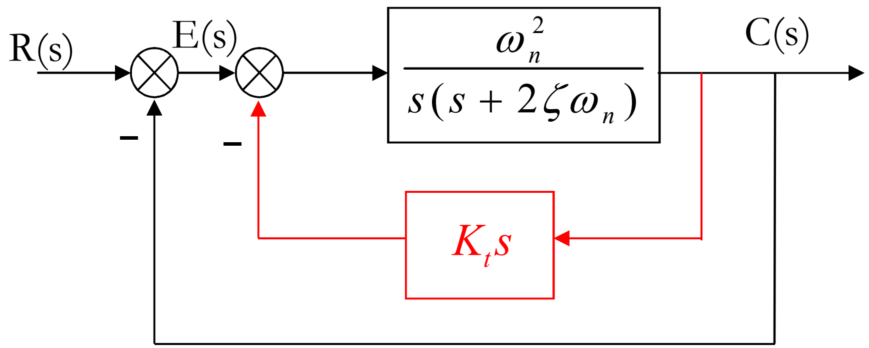


$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}=K\bullet\frac{1}{s(\frac{s}{2\zeta\omega_n}+1)}$$

开环增益 $K=\frac{\omega_n}{2\zeta}$

原系统闭环传递函数 $$\Phi(s)=\frac{G}{1+GH}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

测速反馈控制



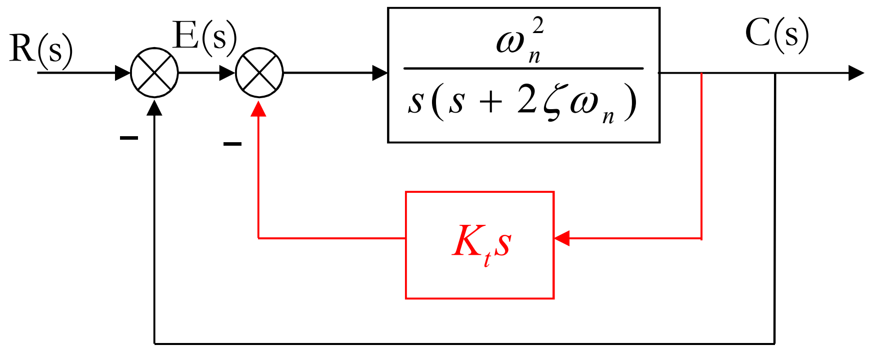
系统开环传递函数

$$G(s)=\frac{\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}{1+\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}K_t s}=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)+\omega_n^2K_t s}=\frac{\omega_n^2}{s(s+(2\zeta\omega_n+\omega_n^2K_t))}$$

$$=\frac{\omega_n}{2\zeta+\omega_nK_t}\bullet\frac{1}{s(\dfrac{s}{2\zeta\omega_n+\omega_n^2K_t}+1)}=K\bullet\frac{1}{s(\dfrac{s}{2\zeta\omega_n+\omega_n^2K_t}+1)}$$

原系统开环增益 $K=\dfrac{\omega_n}{2\zeta}$　　开环增益 $K=\dfrac{\omega_n}{2\zeta+\omega_nK_t}\downarrow$

测速反馈控制



系统闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)+\omega_n^2K_ts}}{1+\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)+\omega_n^2K_ts}}$$

$$=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)+\omega_n^2K_ts+\omega_n^2}$$

$$=\frac{\omega_n^2}{s^2+(2\zeta\omega_n+\omega_n^2K_t)s+\omega_n^2}$$

$$=\frac{\omega_n^2}{s^2+2(\zeta+\frac{K_t}{2}\omega_n)\omega_ns+\omega_n^2}$$

1）开环增益变小 $K=\dfrac{\omega_n}{2\zeta+\omega_nK_t}$

2)阻尼比增大 $\zeta_d=\zeta+\dfrac{K_t}{2}\omega_n$

$(\zeta_d=\zeta+\dfrac{T_d}{2}\omega_n)$

3)自然频率不变 ω_n

4)零点不变化

例 设控制系统 如图3-16所示，其中（a）为无速度反馈系统，（b）为带速度反馈系统。试确定测速反馈系统的阻尼比为0.5时 K_t 的值，并比较系统（a）和(b)阶跃响应的瞬态性能指标。

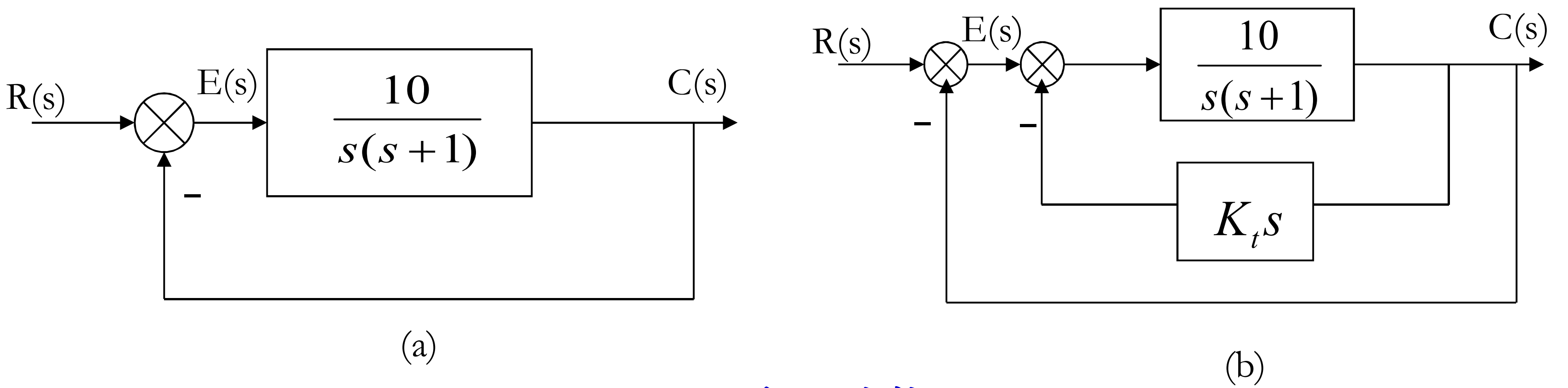
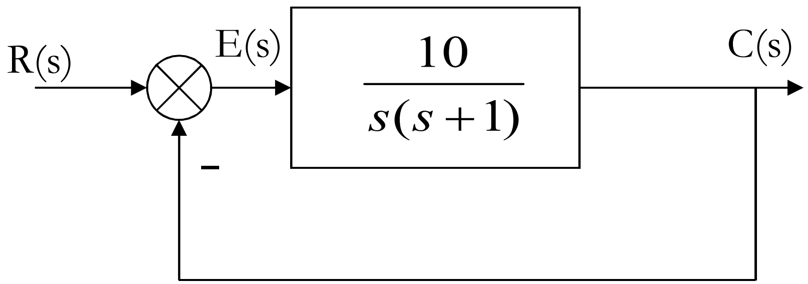


图3-16 系统结构图



(a)

解 系统（a）的闭环传递函数为 $\Phi(s)=\dfrac{10}{s^2+s+10}$

与二阶系统标准型相比较，得 $2\zeta\omega_n=1 \quad \omega_n^2=10$

解得 $\zeta=0.158 \qquad \omega_n=3.16$

根据性能指标公式计算

3.3 二阶系统的时域分析

上升时间 $t_r = \dfrac{\pi - tg^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.55$ （秒）

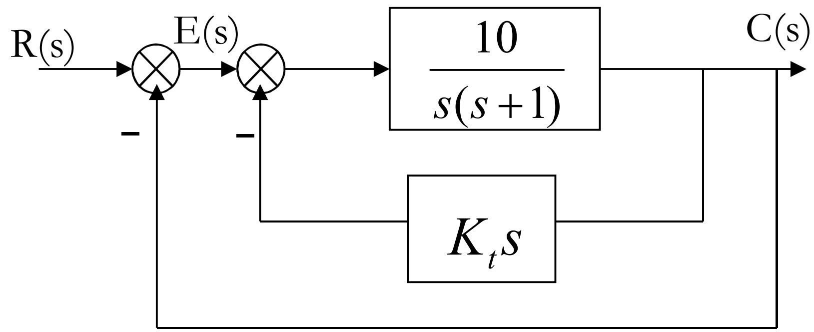
峰值时间 $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.01$ （秒）

超调量 $\sigma_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 60.4\%$

调节时间 $t_s = \dfrac{3.5}{\zeta\omega_n} = 7$ （秒） $(\Delta = 0.05)$

系统（b）的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1+\frac{10}{s(s+1)}K_ts}=\frac{10}{s(s+1)+10K_ts}$$



(b)

系统（b）的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{\frac{10}{s(s+1)+10K_ts}}{1+\frac{10}{s(s+1)+10K_ts}}=\frac{10}{s(s+1)+10K_ts+10}=\frac{10}{s^2+(1+10K_t)s+10}$$

与二阶系统标准型相比较，得：$\omega_n^2=10 \quad 2\zeta_d\omega_n=1+10K_t$

由题意要求：$\zeta_d=0.5$

$$\Rightarrow K_t=0.216$$

根据性能指标公式计算

当保持ω_n不变时，增大ζ可使σ_p和t_s变小，使t_r和t_p变大。

	系统（b）	系统（a）
上升时间	$t_r=\dfrac{\pi-tg^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=0.765$（秒）	$t_r=0.55$（秒）
峰值时间	$t_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=1.14$（秒）	$t_p=1.01$（秒）
超调量	$\sigma_p=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100\%=16.3\%$	$\sigma_p=60.4\%$
调节时间	$t_s=\dfrac{3.5}{\zeta\omega_n}=2.2$（秒）$(\Delta=0.05)$	$t_s=7$（秒）$(\Delta=0.05)$

比较两种方法:

	➢ 标准二阶系统	➢ 比例微分控制		➢ 测速反馈	➢ 变化
开环增益	$K=\frac{\omega_n}{2\zeta}$	$K=\frac{\omega_n}{2\zeta}$	=	$K=\frac{\omega_n}{2\zeta+\omega_n K_t}$	↓
阻尼比 $G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n^2)}$	ζ	$\zeta_d=\zeta+\frac{T_d}{2}\omega_n$	↑	$\zeta_d=\zeta+\frac{K_t}{2}\omega_n$	↑
自然频率	ω_n	ω_n	=	ω_n	=
稳态误差 $e_{ss}(\infty)\vert_{斜坡输入}$	$\frac{1}{K}$	$e_{ss}(\infty)\vert_{斜坡输入}=\frac{1}{K}$	=	$e_{ss}(\infty)\vert_{斜坡输入}=\frac{1}{K}$	↑
零点	无	○ 新增		无	
噪声	无	输入侧高频噪声		输出侧高频噪声	

高阶系统：

- 若描述系统的微分方程高于二阶的系统为高阶系统。
- 在控制工程中，大多数控制系统都是高阶系统。
- 从理论上讲，高阶系统可以直接由传递函数求出它的时域响应，再按二阶系统的分析方法来确定系统的瞬态性能指标。

- 高阶系统的分部计算比较困难。
- 在工程设计的许多问题中，过分讲究精确往往是不必要的，甚至是无意义的。

3.4 高阶系统的时域分析

设高阶系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m+1}+\ldots+b_m}{a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots+a_n}$$

假设系统所有零点、极点互不相同，且极点中q个实数极点和r对复数极点，零点中只有实数零点。

则系统闭环传递函数改写为：

$$\Phi(s)=\frac{K_r\prod_{j=1}^{m}(s-Z_j)}{\prod_{i=1}^{q}(s-P_i)\prod_{k=1}^{r}(s^2+2\zeta_k\omega_{nk}s+\omega^2_{nk})}$$

式中：$n=q+2r$

K_r 根轨迹增益

3.4 高阶系统的时域分析

系统单位阶跃响应的拉氏变换为

$$C(s)=\Phi(s)R(s)=\frac{K_r\prod_{j=1}^{m}(s-Z_j)}{\prod_{i=1}^{q}(s-P_i)\prod_{k=1}^{r}(s^2+2\zeta_k\omega_{nk}s+\omega^2_{nk})}\bullet\frac{1}{s}$$

将上式展开成部分分式，得

$$C(s)=\frac{A_0}{s}+\sum_{i=1}^{q}\frac{A_i}{s-P_i}+\sum_{k=1}^{r}\frac{B_k(s+\zeta_k\omega_{nk})+C_k\omega_{nk}\sqrt{1-\zeta_k^2}}{s^2+2\zeta_k\omega_{nk}s+\omega^2_{nk}}$$

式中 A_0、A_i、B_k 和C_k 为待定系数（常数）。

回忆二阶系统：$C(s)=\dfrac{A_0}{s}+\dfrac{A_1s+A_2}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}-\dfrac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}$

拉氏逆变换 $(A_0=1, A_1=-1, A_2=-2\zeta\omega_n)$

$$£^{-1}\left[\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}\right]=e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t \quad £^{-1}\left[\frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}\right]=e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t$$

$$C(s)=\frac{A_0}{s}+\sum_{i=1}^{q}\frac{A_i}{s-P_i}+\sum_{k=1}^{r}\frac{B_k(s+\zeta_k\omega_{nk})+C_k\omega_{nk}\sqrt{1-\zeta_k^2}}{s^2+2\zeta_k\omega_{nk}s+\omega^2_{nk}}$$

对上式进行拉氏反变换，得系统在零初始条件下的单位阶跃响应：

$$C(t)=A_0+\sum_{i=1}^{q}A_i e^{p_i t}$$

$$+\sum_{k=1}^{r}B_k e^{-\zeta_k\omega_{nk}t}\cos(\omega_{nk}\sqrt{1-\zeta^2_k}\times t)$$

$$+\sum_{k=1}^{r}C_k e^{-\zeta_k\omega_{nk}t}\sin(\omega_{nk}\sqrt{1-\zeta^2}\times t)\qquad (t\geq 0)$$

3.4 高阶系统的时域分析

$$C(t)=\mathrm{A}_0+\sum_{i=1}^{q}\mathrm{A}_i e^{p_i t}+\sum_{k=1}^{r}\mathrm{B}_k e^{-\zeta_k\omega_{nk}t}\cos(\omega_{nk}\sqrt{1-\zeta^2{}_k}\times t)$$

$$+\sum_{k=1}^{r}C_k e^{-\zeta_k\omega_{nk}t}\sin(\omega_{nk}\sqrt{1-\zeta^2}\times t)\quad (t\geq 0)$$

性质：

- 高阶系统的阶跃响应是由稳态值和一些惯性环节及振荡环节的瞬态响应分量所组成。
- 各瞬态分量在过渡过程中所起作用的性质及大小取决于它们的指数p_i 、$\zeta_k\omega_{nk}$的值和相应项的系数 A_i、B_k 、C_k 的值。

3.4 高阶系统的时域分析

$$C(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{q} A_i e^{p_i t} + \sum_{k=1}^{r} B_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \cos(\omega_{nk}\sqrt{1-\zeta^2_k} \times t)$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} C_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \sin(\omega_{nk}\sqrt{1-\zeta^2} \times t) \quad (t \geq 0)$$

- 如果系统所有极点都分布在s平面的左半部分，即所有极点均具有负实部，那么当 t 趋于无穷大时，式中的指数项都趋于零，系统的响应达到稳态值。
- 在瞬态过程中，衰减项的指数 $|p_i|$或 $\zeta_k\omega_{nk}$ 的值越大，则该衰减越快，反之亦然。

$|p_i|$和 $\zeta_k\omega_{nk}$是系统的极点到虚轴的距离，如果分布在s平面左半部分的极点离虚轴越远，则它对应的分量衰减越快。

3.4 高阶系统的时域分析

$$C(t)=\mathrm{A}_0+\sum_{i=1}^{q}\mathrm{A}_i e^{p_i t}+\sum_{k=1}^{r}\mathrm{B}_k e^{-\zeta_k\omega_{nk}t}\cos(\omega_{nk}\sqrt{1-\zeta^2_k}\times t)$$

$$+\sum_{k=1}^{r}C_k e^{-\zeta_k\omega_{nk}t}\sin(\omega_{nk}\sqrt{1-\zeta^2}\times t)\quad (t\geq 0)$$

- 衰减项的系数A_i B_k C_k不仅与相应的极点在s平面中的位置有关，而且还与零点在s平面中的位置有关。
  - 极点距原点越远，则相应分量的系数越小，该分量对系统过渡过程的影响越小。 消失
  - 极点与零点靠近，则相应分量的系数也很小，这对零极点对系统过度过程的影响很小。 对消

3.4 高阶系统的时域分析

$$C(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{q} A_i e^{p_i t} + \sum_{k=1}^{r} B_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \cos(\omega_{nk}\sqrt{1-\zeta_k^2} \times t) + \sum_{k=1}^{r} C_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \sin(\omega_{nk}\sqrt{1-\zeta^2} \times t) \quad (t \geq 0)$$

- 高阶系统的瞬态特性主要由系统传递函数中那些靠近虚轴而又远离零点的极点来决定。

如果高阶系统有一个极点（或一对共轭复数极点）离虚轴最近，且其附近又无零点存在，其他所有极点与虚轴的距离都在此极点与虚轴的距离的五倍以上，可近似认为系统瞬态特性由这个（或这对）极点来确定，而其它极点的影响可以忽略不计，这个（或这对）极点就称为高阶系统的主导极点。

$$C(t)=A_0+\sum_{i=1}^{q}A_i e^{p_i t}+\sum_{k=1}^{r}B_k e^{-\zeta_k\omega_{nk}t}\cos(\omega_{nk}\sqrt{1-\zeta_k^2}\times t)$$
$$+\sum_{k=1}^{r}C_k e^{-\zeta_k\omega_{nk}t}\sin(\omega_{nk}\sqrt{1-\zeta^2}\times t)\quad (t\geq 0)$$

- 高阶系统的主导极点常常是共轭复数极点，因此高阶系统常用由主导极点构成的二阶系统来近似，按二阶系统计算性能指标。

- 在设计高阶系统时，常利用主导极点的概念来选择系统参数，增益常常调整到使系统具有预期的一对共轭复数主导极点，近似的用二阶系统的性能指标来设计系统。

本次课结束

1)重点掌握二阶系统改善的措施 ☆☆☆☆

2)理解高阶系统时域分析的降阶处理方式 ☆