

第四章 根轨迹法

- ◆ 4.1 根轨迹的基本概念
- ◆ 4.2 绘制根轨迹的规则
- ◆ 4.3 广义根轨迹
- ◆ 4.4 线性系统的根轨迹分析法

根轨迹法是一种图解方法，它是经典控制理论中对系统进行分析和综合的基本方法之一。由于根轨迹图直观地描述了系统特征方程的根（即系统的闭环极点）在 s 平面上的分布，因此，用根轨迹法分析自动控制系统十分方便，特别是对于高阶系统和多回路系统，应用根轨迹法比用其他方法更为方便，因此在工程实践中获得了广泛应用。本章主要介绍根轨迹的概念，绘制根轨迹的基本规则和用根轨迹分析自动控制系统性能的方法。

从系统的稳定性和动态性能两方面考虑，系统的闭环极点起着主要作用。高阶系统的传递函数可写为：

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

写成零极点形式有

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m \prod_{i=1}^q (s + z_i) \prod_{i=1}^l (s^2 + 2\zeta_{mi} \omega_{mi} s + \omega_{mi}^2)}{a_n \prod_{i=1}^k (s + p_i) \prod_{i=1}^r (s^2 + 2\zeta_{ni} \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

若系统没有重极点，则单位阶跃响应为

$$C(s) = \frac{b_0}{a_0} \frac{1}{s} + \sum_{i=1}^k \frac{C_i}{s + p_i} + \sum_{i=1}^r \frac{A_i (s + \zeta_{ni} \omega_{ni}) + B_i \omega_{ni} \sqrt{1 - \zeta_{ni}^2}}{s^2 + 2\zeta_{ni} \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2}$$
$$c(t) = \frac{b_0}{a_0} + \sum_{i=1}^k C_i e^{-p_i t} + \sum_{i=1}^r e^{-\zeta_{ni} \omega_{ni} t} (A_i \cos \omega_{ni} \sqrt{1 - \zeta_{ni}^2} t + B_i \sin \omega_{ni} \sqrt{1 - \zeta_{ni}^2} t)$$

($t \geq 0$)

4.1 根轨迹的概念

一、根轨迹图

根轨迹图是闭环系统特征方程的根（即闭环极点）随开环系统某一参数由零变化到无穷大时在S平面上的变化轨迹。

例4-1 已知一单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+2)}$$

试分析该系统的特征方程的根随系统参数 K_r 的变化在s平面上的分布情况。

解 系统的闭环传递函数

$$\phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{K_r}{s^2 + 2s + K_r}$$

系统的特征方程为

$$s^2 + 2s + K_r = 0$$

特征方程的根是

$$s_1 = -1 + \sqrt{1 - K_r}, \quad s_2 = -1 - \sqrt{1 - K_r}$$

设 K_r 的变化范围是 $(0, \infty)$,

当 $K_r = 0$ 时, $s_1 = 0, s_2 = -2$;

当 $0 < K_r < 1$ 时, s_1 与 s_2 为不相等的两个负实根;

当 $K_r = 1$ 时, $s_1 = s_2 = -1$ 为等实根;

当 $1 < K_r < \infty$ 时, $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{K_r - 1}$ 为一对共轭复根, 其实部都等于-1, 虚部随 K_r 值的增加而增加;

当 $K_r \rightarrow \infty$ 时, s_1 、 s_2 的实部都等于-1, 是常数, 虚部趋向无穷远处。

该系统特征方程的根随开环系统参数 K_r 从零变到无穷时在S平面上变化的轨迹如[图4-1](#)所示。

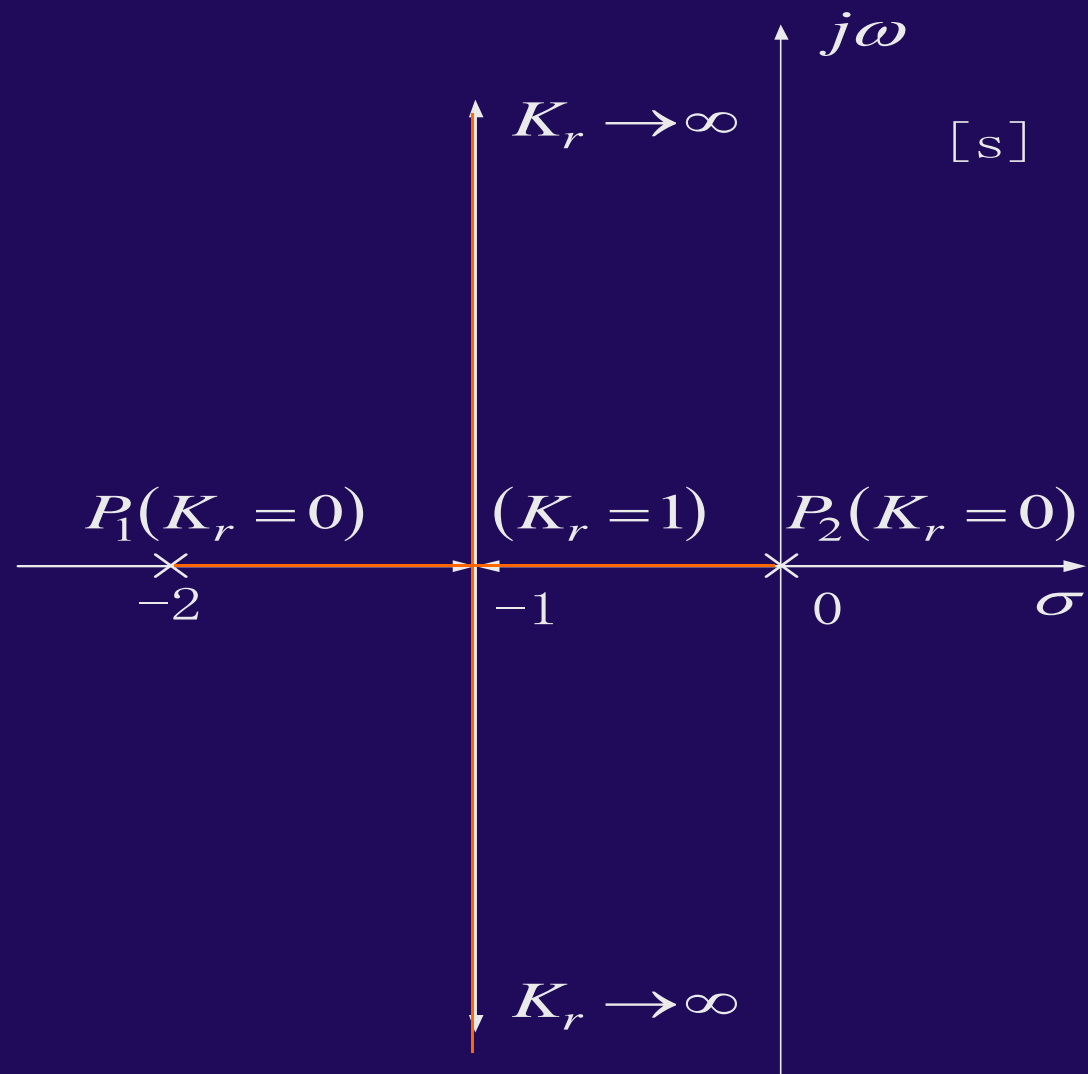


图4-1 例4-1的根轨迹

当系统参数 K_r 为某一确定的值时，闭环系统特征方程的根在 s 平面上变化的位置便可确定，由此可进一步分析系统的性能。 K_r 值的变化对闭环系统特征方程的影响可在根轨迹上直观地看到，因此系统参数对系统性能的影响也一目了然。所以用根轨迹图来分析自动控制系统是十分方便的。上例中，根轨迹图是用解析法作出的，这对于二阶系统并非难事，但对于高阶系统，求解特征方程的根就比较困难了。

如果要研究系统参数的变化对闭环系统特征方程根的影响，就需要大量反复的计算。

1948年伊万斯（W·R·EVANS）解决了这个问题，提出了根轨迹法。该方法不需求解闭环系统的特征方程，只需依据开环传递函数便可绘制系统的根轨迹图。

二、开环零、极点与闭环零、极点之间的关系

通常系统的开环零、极点是已知的，因此建立开环零、极点与闭环零、极点之间的关系，有助于闭环系统根轨迹的绘制。设控制系统如图4-2所示，其闭环传递函数为

$$\phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4-1)$$

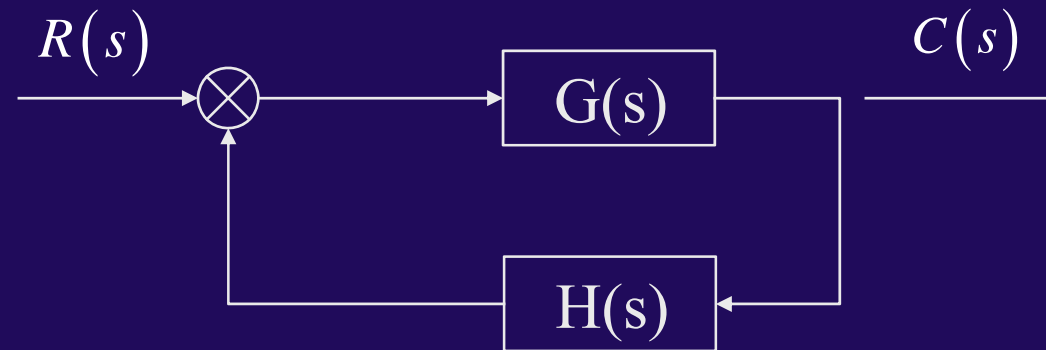


图4-2 控制系统

通常，前向通路传递函数 $G(s)$ 和反馈通路传递函数 $H(s)$ 可分别表示

$$G(s) = K_1 \frac{\prod_{j=1}^f (\tau_j s + 1)}{s^\nu \prod_{i=1}^q (T_i s + 1)} = K_{1r} \frac{\prod_{j=1}^f (s - z_j)}{s^\nu \prod_{i=1}^q (s - p_i)} \quad (4-2)$$

$$H(s) = K_2 \frac{\prod_{j=1}^l (\tau_j s + 1)}{\prod_{i=1}^h (T_i s + 1)} = K_{2r} \frac{\prod_{j=1}^l (s - z_j)}{\prod_{i=1}^h (s - p_i)} \quad (4-3)$$

式中 K_1 为前向通路增益， K_{1r} 为前向通路根轨迹增益； K_2 为反馈通路增益， K_{2r} 为反馈通路根轨迹增益。

系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (T_i s + 1)} = K_r \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (s - p_i)} \quad (4-4)$$

$K = K_1 \cdot K_2$ 为系统的开环增益,

$K_r = K_{1r} \cdot K_{2r}$ 为开环系统的根轨迹增益;

$m=f+l$ 为开环系统的零点总数,

$n=q+h+\nu$ 为开环系统的极点数。

将式 (4-2) 和 (4-4) 代入 (4-1) 可得

$$\phi(s) = \frac{K_{1r} \prod_{j=1}^f (s - z_j) \prod_{i=1}^h (s - p_i)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (s - p_i) + K_r \prod_{j=1}^m (s - z_j)} \quad (4-5)$$

比较式（4-4）和式（4-5），可得以下结论：

- (1) 闭环零点由开环前向通路传递函数的零点和反馈通路传递函数的极点组成；对于单位反馈系统闭环零点就是开环零点。
- (2) 闭环极点与开环零点、开环极点以及根轨迹增益 K_r 均有关。

根轨迹法的基本任务在于：如何由已知的开环零、极点的分布及根轨迹增益，通过图解的方法找出闭环极点, 并根据闭环极点的分布对系统性能进行分析。一旦闭环极点确定，闭环传递函数的形式便不难确定，因为闭环零点可由式（4-5）直接得到。在已知闭环传递函数的情况下，闭环系统的时间响应可利用拉氏反变换的方法求出，或利用计算机直接求解。

三、根轨迹增益 K_r 与开环系统增益 K 的关系

由第三章，系统的开环增益（或开环放大倍数）为

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} s^{\nu} G(s) H(s) \quad (4-6)$$

式中 ν 是开环传递函数中含积分环节的个数，由它来确定该系统是零型系统（ $\nu = 0$ ），I 型系统（ $\nu = 1$ ）或 II 型系统（ $\nu = 2$ ）等。

将（4-4）代入（4-6）可得

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} s^{\nu} G(s) H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} K_r \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^{n-\nu} (s - p_i)} = K_r \frac{\prod_{j=1}^m (-z_j)}{\prod_{i=1}^{n-\nu} (-p_i)}$$

开环系统的根轨迹增益 K_r 与开环系统的增益 K 之间仅相差一个比例常数，这个比例常数只与开环传递函数中的零点和极点有关。

由式（4-4）可知，根轨迹增益（或根轨迹放大系数）是系统的开环传递函数的分子、分母的最高阶次项的系数为1的比例因子。在例4-1中系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+2)}$$

其开环增益为

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \frac{K_r}{2}$$

对于本系统，根轨迹增益 K_r 与开环增益 K 间的关系为 $K_r = 2K$ ，它们之间仅相差一个比例常数2。

四、根轨迹与系统性能

以图4-1为例进行说明

稳定性 如果系统特征方程的根都位于S平面的左半部，系统是稳定的，否则是不稳定的。若根轨迹穿越虚轴进入右半S平面，根轨迹与虚轴交点处的K值，就是临界稳定的开环增益 K_c 。

稳态性能 开环系统在坐标原点有一个极点，所以属 I 型系统，因而根轨迹上的K值就是静态速度误差系数。如果给定系统的稳态误差要求，则可由根轨迹图确定闭环极点位置的允许范围。

动态性能 当 $0 < K_r < 1$ 时，所有闭环极点均位于实轴上，系统为过阻尼系统，其单位阶跃响应为单调上升的非周期过程。当 $K_r = 1$ 时，特征方程的两个相等负实根，系统为临界阻尼系统，单位阶跃响应为响应速度最快的非周期过程。当 $K_r > 1$ 时，特征方程为一对共轭复根，系统为欠阻尼系统，单位阶跃响应为阻尼振荡过程，振荡幅度或超调量随 K_r 值的增加而加大，但调节时间不会有显著变化。

4.2 绘制根轨迹的规则

一、绘制根轨迹的依据

在上节已指出，根轨法的基本任务在于，如何由已知的开环零、极点的分布及根轨迹增益，通过图解的方法找出闭环极点。由例4-1可看出，根轨迹是系统的开环根轨迹增益 K_r 由零变到无穷大时，闭环系统特征方程的根在S平面上运动的轨迹。因此，系统的特征方程便是绘制根轨迹的依据。系统的特征方程为

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$G(s)H(s) = -1$$

当系统有m个开环零点和n个开环极点时，特征方程可写成

$$K_r \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -1$$

式中， z_j 为已知的开环零点， p_i 为已知的开环极点， K_r 为可从零变到无穷大的开环根轨迹增益。上式称为根轨迹方程，由根轨迹方程，可以画出当 K_r 由零变到无穷大时系统的根轨迹。

在绘制根轨迹时，可变参数不限定是根轨迹增益 K_r ，可为系统的其它参数（如时间常数、反馈系数等）这时只要把系统的特征方程化为上式，将感兴趣的系统参数取代根轨迹增益 K_r 的位置都可以绘制根轨迹。

根轨迹方程是一个向量方程，用模和相角的形式表示

$$|G(s)H(s)| e^{j\angle G(s)H(s)} = 1 \cdot e^{j(\pm 180^\circ + k \cdot 360^\circ)}$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots)$$

由此可得到满足系统特征方程的幅值条件和相值条件为

幅值条件: $|G(s)H(s)| = 1$

相角条件: $\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ + k \cdot 360^\circ$
($k = 0, 1, 2, \dots$)

设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = K_r \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

满足幅值条件的表达式为

$$K_r \frac{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = 1 \quad \text{或} \quad \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s - z_j|} = K_r$$

满足相角条件的表达式为

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = \pm 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots)$$

综上所述，可以得到如下结论：

- (1) 绘制根轨迹的相角条件与系统开环根轨迹增益值 K_T 的大小无关。即在 s 平面上，所有满足相角条件点的集合构成系统的根轨迹图。即相角条件是绘制根轨迹的主要依据。
- (2) 绘制根轨迹的幅值条件与系统开环根轨迹增益 K_T 值的大小有关。即 K_T 值的变化会改变系统的闭环极点在 s 平面上的位置。
- (3) 在系数参数全部确定的情况下，凡能满足相角条件和幅值条件的 s 值，就是对应给定参数的特征根，或系统的闭环极点。
- (4) 由于相角条件和幅值条件只与系统的开环传递函数有关，因此，已知系统的开环传递函数便可绘制出根轨迹图。

二、绘制根轨迹的基本规则

通常，我们把以开环根轨迹增益 K_r 为可变参数绘制的根轨迹叫做普通根轨迹（或一般根轨迹）。绘制普通根轨迹的基本规则主要有7条：

1. 根轨迹的起点与终点；
2. 根轨迹的分支数；
3. 实轴上的根轨迹；
4. 根轨迹的渐近线；
5. 根轨迹在实轴上的分离点；
6. 根轨迹的起始角和终止角；
7. 根轨迹与虚轴的交点。

规则一 根轨迹的起点和终点

幅值条件可写成

$$\frac{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = \frac{1}{K_r}$$

当 $K_r = 0$, 必须有 $s_i = p_i (i=1,2,\cdots,n)$

此时, 系统的闭环极点与开环极点相同(重合), 我们把开环极点称为根轨迹的起点, 它对应于开环根轨迹增益 $K_r = 0$ 。

当 $K_r = \infty$ 时, 必须有 $s_j = z_j (j=1,2,\cdots,m)$, 此时, 系统的闭环极点与开环零点相同(重合), 我们把开环零点称为根轨迹的终点, 它对应于开环根轨迹增益 $K_r = \infty$ 。

下面分三种情况讨论。

1. 当 $m=n$ 时，即开环零点数与极点数相同时，根轨迹的起点与终点均有确定的值。

2. 当 $m<n$ 时，即开环零点数小于开环极点数时，除有 m 条根轨迹终止于开环零点(称为有限零点)外，还有 $n-m$ 条根轨迹终止于无穷远点(称为无限零点)，如例4-1。

3. 当 $m>n$ 时，即开环零点数大于开环极点数时，除有 n 条根轨迹起始于开环极点(称为有限极点)外，还有 $m-n$ 条根轨迹起始于无穷远点(称为无限极点)。这种情况在实际的物理系统中虽不会出现，但在参数根轨迹中，有可能出现在等效开环传递函数中。

结论：根轨迹起始于开环极点 ($K_r = 0$)，终止于开环零点 ($K_r \rightarrow \infty$)；如果开环极点数 n 大于开环零点 m ，则有 $n-m$ 条根轨迹终止于 s 平面的无穷远处(无限零点)，如果开环零点 m 大于开环极点数 n ，则有 $m-n$ 条根轨迹起始于 s 平面的无穷远处(无限极点)。

规则二 根轨迹的分支数、连续性和对称性

根轨迹的分支数即根轨迹的条数。既然根轨迹是描述闭环系统特征方程的根（即闭环极点）在S平面上的分布，那么，根轨迹的分支数就应等于系统特征方程的阶数。

由例4-1看出，系统开环根轨迹增益 K_r （实变量）与复变量 s 有一一对应的关系，当 K_r 由零到无穷大连续变化时，描述系统特征方程根的复变量 s 在平面上的变化也是连续的，因此，根轨迹是 n 条连续的曲线。

由于实际的物理系统的参数都是实数，若它的特征方程有复数根，一定是对称于实轴的共轭复根，因此，根轨迹总是对称于实轴的。

结论：根轨迹的分支数等于系统的闭环极点数。根轨迹是连续且对称于实轴的曲线。

规则三 实轴上的根轨迹

若实轴上某线段右侧的开环零、极点的个数之和为奇数，则该线段是实轴上的根轨迹。

例4-3 设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)(s-z_4)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)(s-p_4)(s-p_5)}$$

其中 p_1, p_2, p_3, z_1, z_2 为实极点和实零点, p_4, p_5, z_3, z_4 为共轭复数零、极点, 它们在 s 平面上的分布如图4-4所示, 试分析实轴上的根轨迹与开环零点和极点的关系。

实轴上的根轨迹必须满足绘制根轨迹的相角条件, 即

$$\sum_{j=1}^m \angle(s-Z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s-P_i) = \pm 180^\circ + k \cdot 360^\circ (k=0,1,2,\cdots)$$

选择 s_0 作为试验点。
开环极点 p_i 到 s_0 点的向量的相角为 $\phi_i (i=1,2,3,4,5)$

开环零点 z_j 到 s_0 点的向量的相角为 $\theta_j (j=1,2,3,4)$

在确定实轴上的根轨迹上时，可以不考虑复数开环零、极点对相角的影响。

实轴上， s_0 点左侧的开环极点 p_3 和开环零点 z_2 构成的向量的夹角均为零度，而 s_0 点右侧的开环极点 p_1 、 p_2 和开环零点 z_1 构成的向量的夹角均为 180° 。若 s_0 为根轨迹上的点，必满足

$$\sum_{j=1}^4 \theta_j - \sum_{i=1}^5 \phi_i = (2k+1)\pi$$

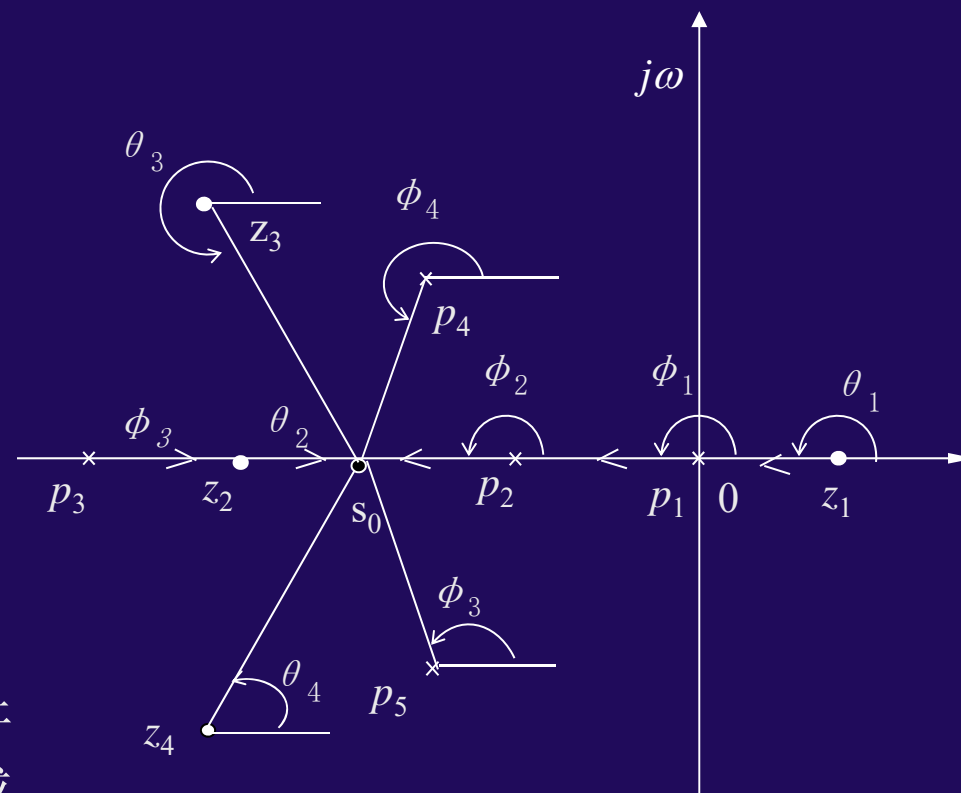


图4-4 实轴上的根轨迹

结论：只有 s_0 点右侧实轴上的开环极点和开环零点的个数之和为奇数时，才满足相角条件。

规则四 渐近线

当开环极点数 n 大于开环零点数 m 时，系统有 $n-m$ 条根轨迹终止于 S 平面的无穷远处，这 $n-m$ 条根轨迹变化趋向的直线叫做根轨迹的渐近线，因此，渐近线也有 $n-m$ 条，且它们交于实轴上的一点。

渐近线与实轴的交点位置 σ_a 和与实轴正方向的交角 φ_a 分别为

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$$

$$\varphi_a = \frac{2k+1}{n-m} \pi \quad (k=0,1,2,\dots,n-m-1)$$

在例4-1中，开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+2)}$$

开环极点数 $n=2$, 开环零点 $m=0$, $n-m=2$, 两条渐近线在实轴上的交点位置为

$$\sigma_a = \frac{-2}{2} = -1$$

它们与实轴正方向的交角分别为 $\frac{\pi}{2}$ ($k=0$) 和 $\frac{3\pi}{2}$ ($k=1$)，两条渐近线正好与 $K_r \geq 1$ 时的根轨迹重合。

例4-2 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r(s+2)}{s^2(s+1)(s+4)}$$

试画出该系统根轨迹的渐近线。

解 对于该系统有 $n=4$, $m=1$, $n-m=3$; 三条渐近线与实轴交点位置为

$$\sigma_a = \frac{-1-4+2}{3} = -1$$

它们与实轴正方向的交角分别是

$$\frac{\pi}{3} (k=0) \quad \pi (k=1) \quad -\frac{\pi}{3} (k=2)$$

渐近线如图4-3所示。

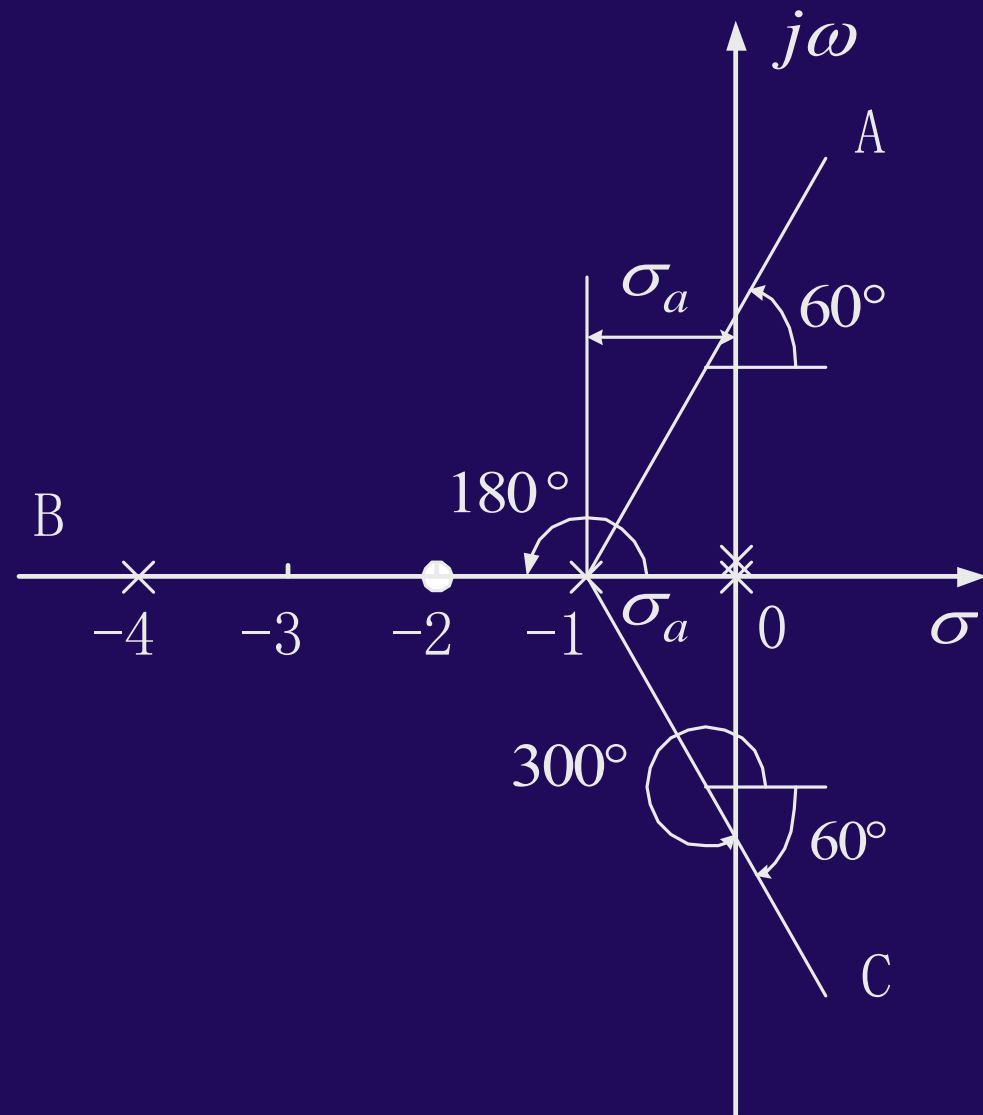
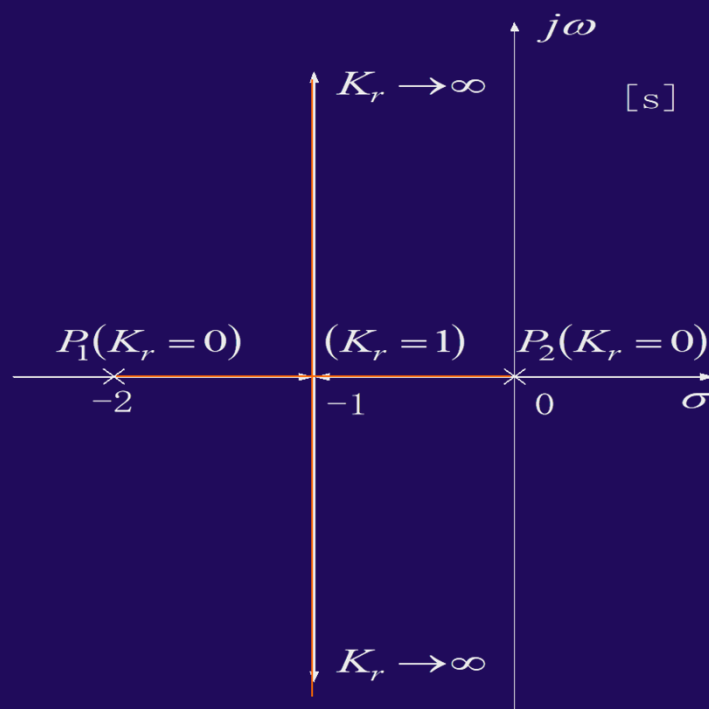


图4-3 根轨迹的渐近线

规则五 根轨迹的分离点

分析例4-1，当系统开环增益 K_r 由零到无穷大变化时，两条根轨迹先在实轴上相向运动 ($0 \leq K_r < 1$)，相遇在点 $(-1, j0)$ ($K_r = 1$)，当 $K_r > 1$ 后，离开实轴进入 s 平面，且离开实轴时，根轨迹与实轴正交。我们称该点为根轨迹的分离点。实际上， $(-1, j0)$ 点是例4-1系统特征方程的等实根。一般，常见的根轨迹分离点是位于实轴上两条根轨迹分支的分离点。



若根轨迹位于实轴上两个相邻的开环极点之间（其中一个可以是无限极点），则在这两个极点之间至少存在一个分离点；若根轨迹位于实轴上两个相邻的开环零点之间（其中一个可以是无限零点），则在这两个零点之间也至少有一个分离点。

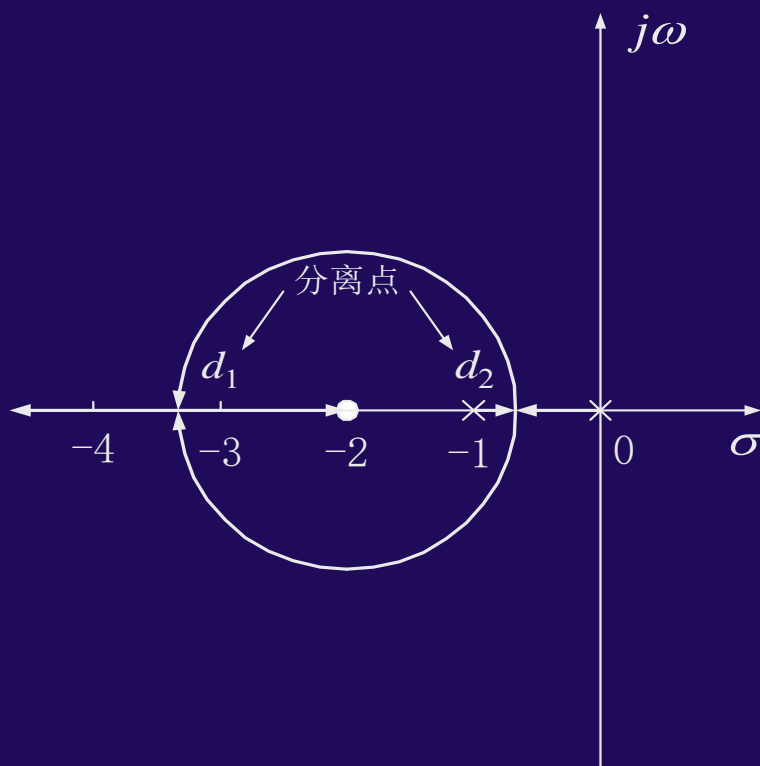


图4-5 实轴上根轨迹的分离点

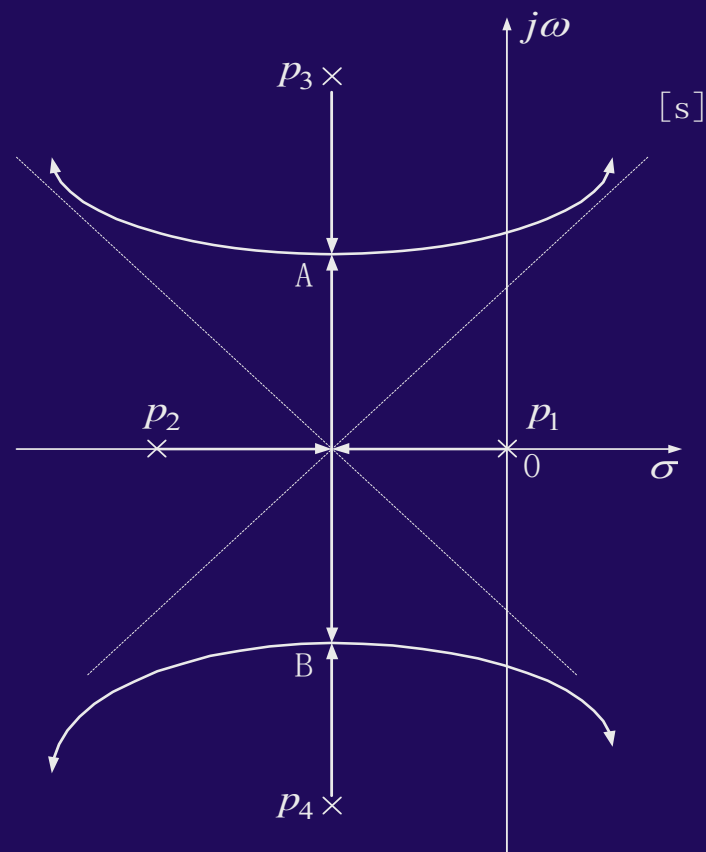


图4-6 复平面上的分离点

由上面分析可知，根轨迹的分离点，实质上就是系统特征方程的等实根（实轴上的分离点）或等共轭复根（复平面上的分离点）。

系统的特征方程可写成

$$\frac{\prod_{i=1}^n (s - P_i)}{\prod_{j=1}^m (s - Z_j)} = -K_r \quad (4-22)$$

对式（4-22）求导可得

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{\prod_{i=1}^n (s - P_i)}{\prod_{j=1}^m (s - Z_j)} \right]_{s=d} = 0 \quad (4-23)$$

式（4-23）称为分离点方程。对于一个n阶系统，解式（4-23）可得到n-1个根 $d_{n-1} (n = 1, 2, \dots)$ 。

分离点方程的另一种形式为

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{d - Z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d - P_i} \quad (4-24)$$

式中， Z_j 为开环零点的数值， P_i 为开环极点的数值。

当开环系统无有限零点时，则在方程（4-24）中，应取

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j} = 0$$
。此时，分离点方程即为

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i} = 0 \quad (4-25)$$

只有那些在根轨迹上的解才是根轨迹的分离点。若在这些根中有共轭复根，如何判断是否在根轨迹上，是一个比较复杂的问题，由于只有当开环零、极点分布非常对称时，才会出现复平面上的分离点（如[图4-6](#)所示）。因此，用观察法可大体上判断，然后将其代入特征方程中验算，即可确定。

对于例4-1，由式（4-23）可得分离点方程

$$\frac{d}{ds} (s^2 + 2s) \Big|_{s=d} = 0$$

即

$$2d + 2 = 0$$

解得 $d = -1$ ， $d = -1$ 位于实轴根轨迹上（由0到-2的线段上），故它是实轴上的分离点。

例4-4 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

试求出系统根轨迹与实轴的交点。

解 本系统无有限开环零点，由式（4-25）

$$\text{可得 } \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+3} = 0$$

$$\text{即 } 3d^2 + 12d + 11 = 0$$

$$\text{解出 } d_1 = -1.42 \quad d_2 = -2.58 ,$$

由规则五知，实轴上的根轨迹为-1到-2线段和-3到 $-\infty$ 线段。 $d_2 = -2.58$ 不在上述两线段上，应舍去。

$d_1 = -1.42$ 是实轴根轨迹上的点，所以是根轨迹在实轴上的分离点。运用前面的六条规则，可绘制如图4-7所示的根轨迹图。

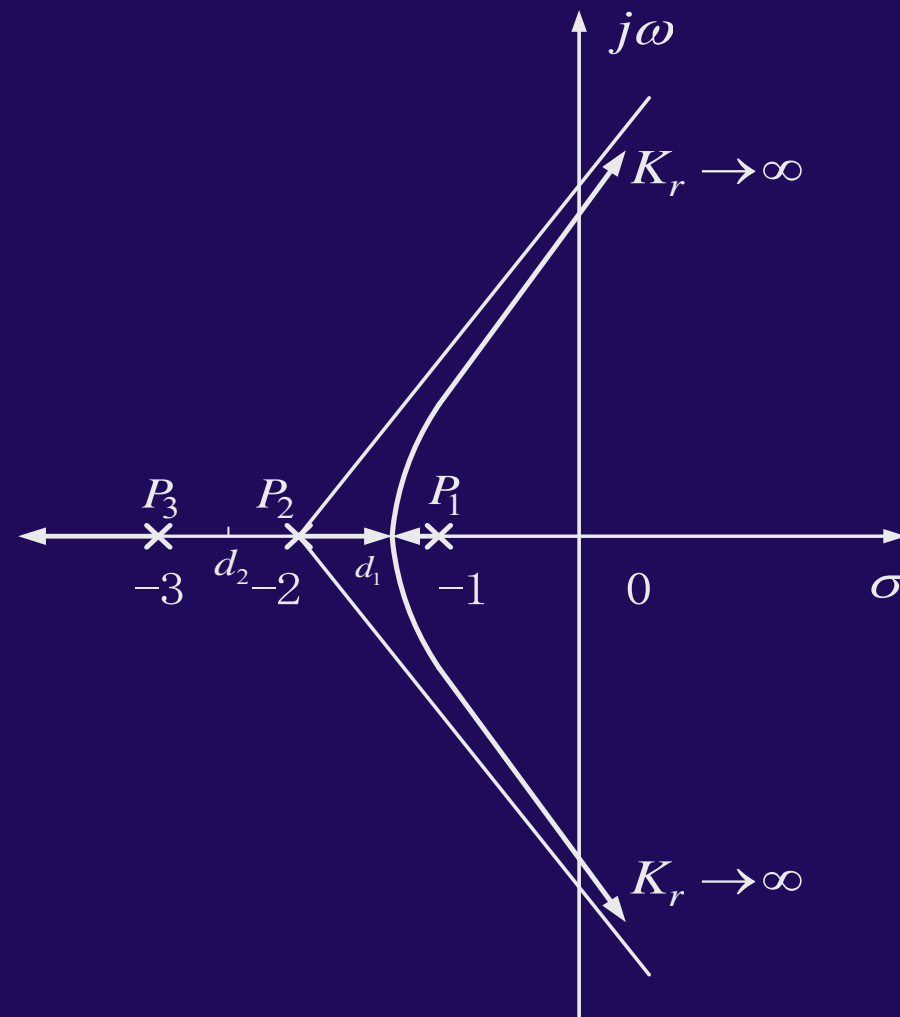


图4-7 根轨迹的分离点

规则六 起始角与终止角

当开环传递函数中有复数极点或零点时，根轨迹是沿着什么方向离开开环复数极点或进入开环复数零点的呢？这就是所谓的起始角和终止角问题，先给出定义如下：

(1)起始角 θ_{p1} 根轨迹离开开环复数极点处在切线方向与实轴正方向的夹角。参看图4-8 (a) 中的 θ_{p1} 和 θ_{p2} 。

(2)终止角 θ_{z1} 根轨迹进入开环复数零点处的切线方向与实轴正方向的夹角。参看图4-8 (b) 中的 θ_{z1} 和 θ_{z2} 。

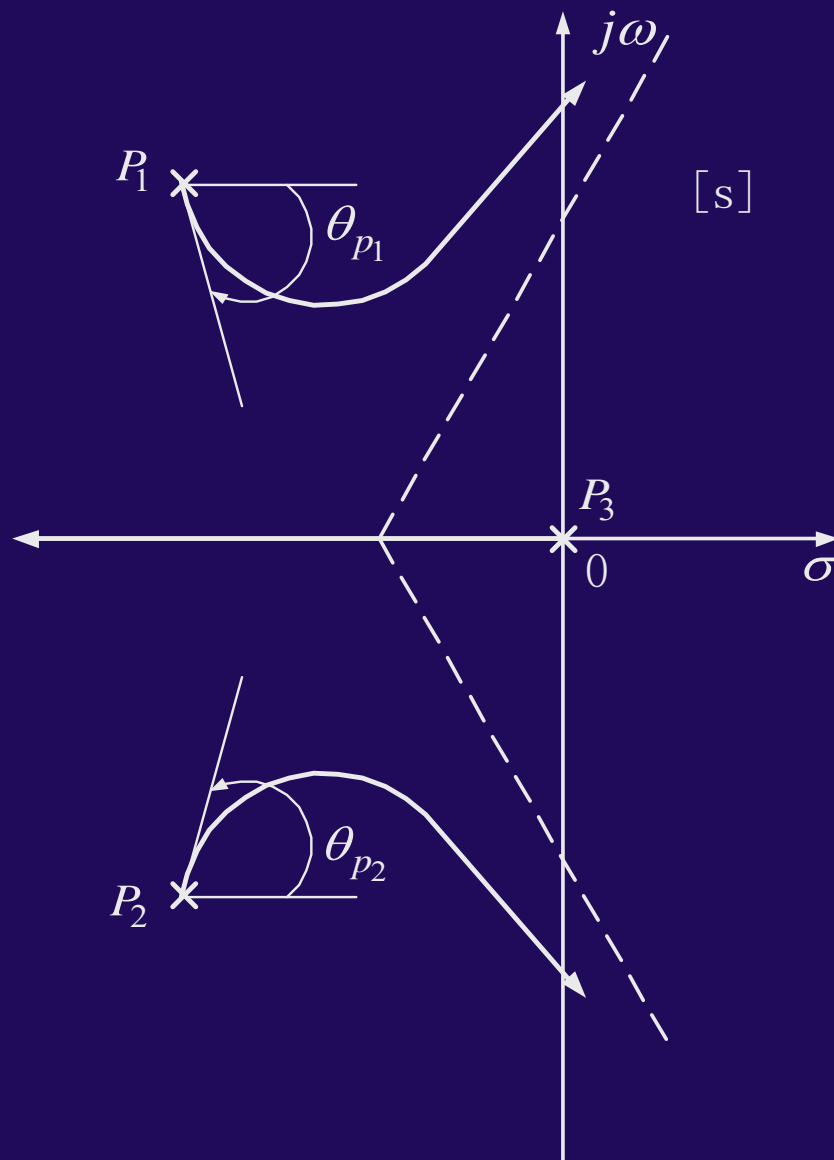


图4-8(a) 根轨迹的起始角和终止角

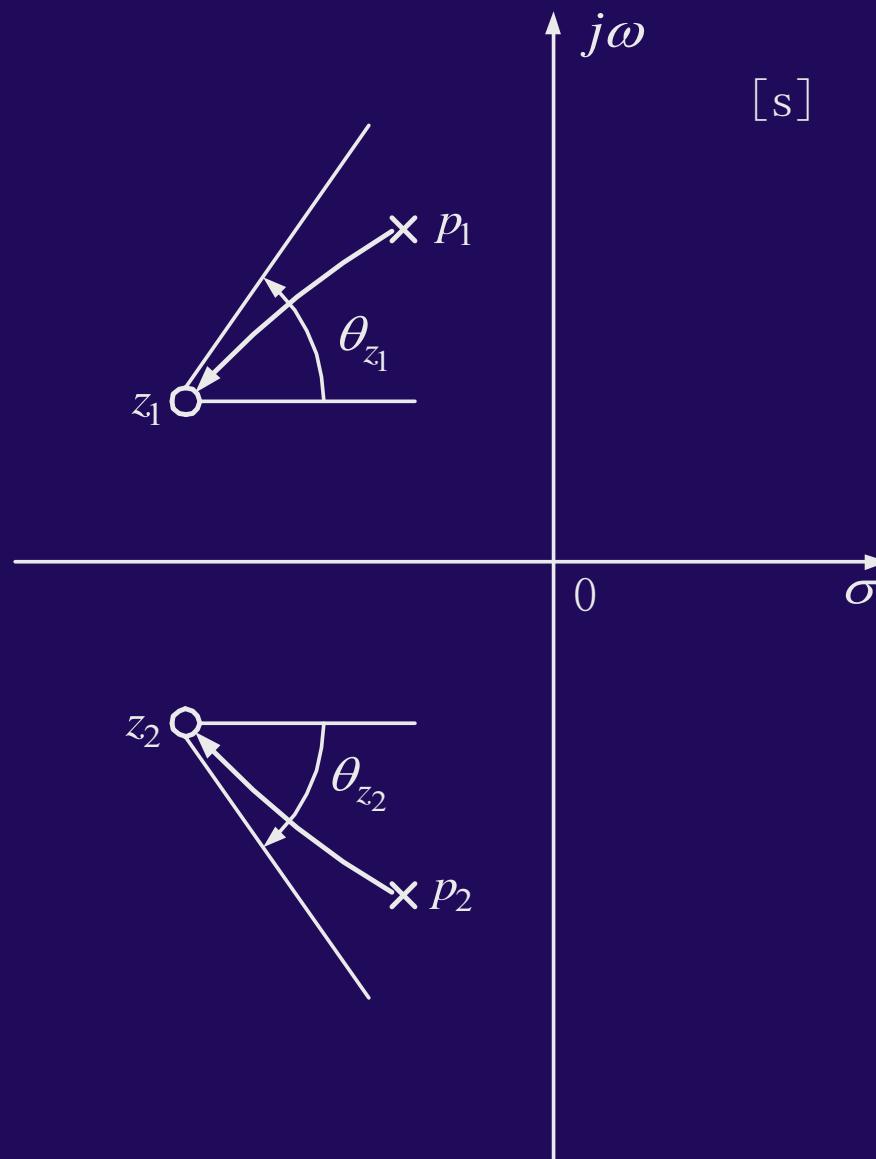


图4-8(b) 根轨迹的起始角和终止角

通过例4-5来分析起始角与终止角的大小。

例4-5 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r(s-z_1)}{s(s-p_1)(s-p_2)}$$

且 p_1 和 p_2 为一对共轭复数极点， p_3 和 z_1 分别为实极点和实零点，它们在 s 平面上的分布如图4-9所示。试依据相角条件求出根轨迹离开开环复数极点 p_1 和 p_2 的起始角 θ_{p_1} 和 θ_{p_2} 。

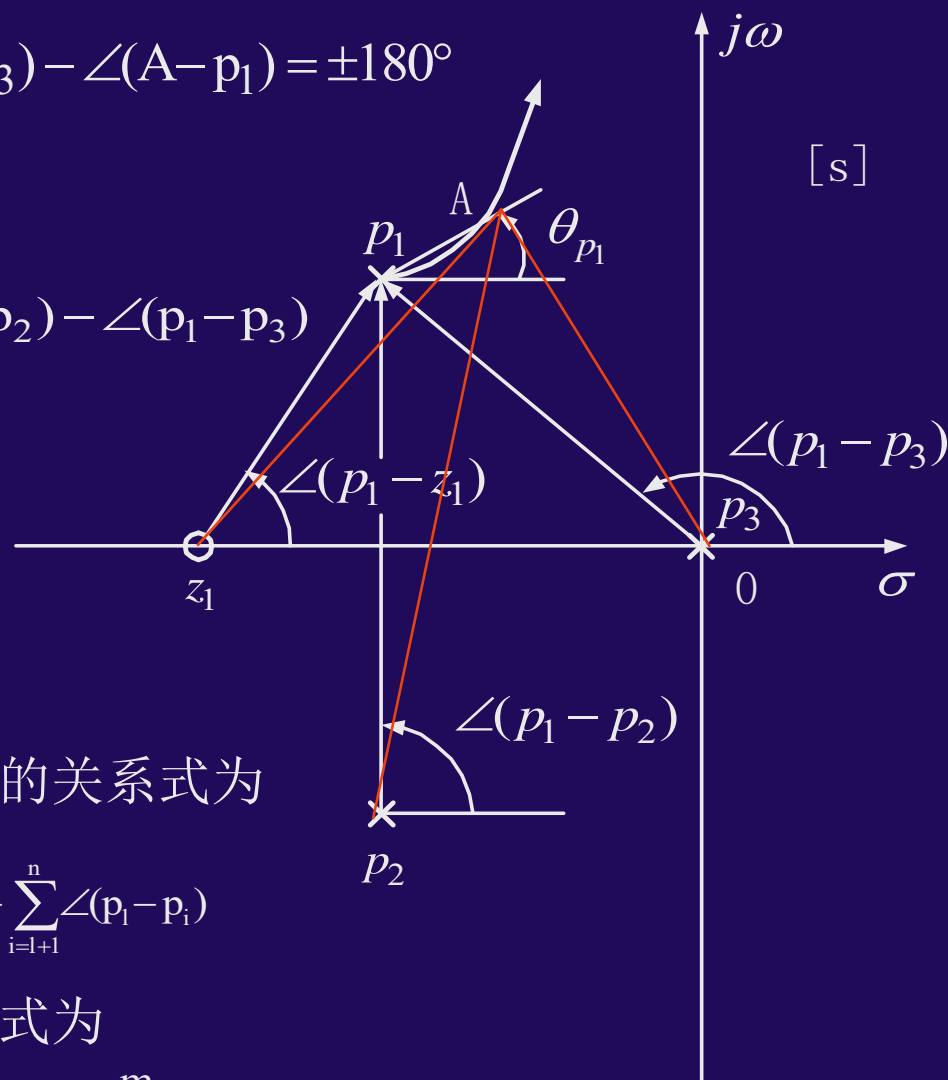
对于根轨迹上无限靠近 p_1 的点A，由相角条件可得

$$\angle(A-z_1) - \angle(A-p_2) - \angle(A-p_3) - \angle(A-p_1) = \pm 180^\circ$$

由于A点无限靠近 p_1 点，

$$\angle(A-p_1) = \theta_{p_1}$$

$$\theta_{p_1} = \mp 180^\circ + \angle(p_1-z_1) - \angle(p_1-p_2) - \angle(p_1-p_3)$$



推广为一般情况可得求起始角的关系式为

$$\theta_{p_l} = m180^\circ + \sum_{j=1}^m \angle(p_l - z_j) - \sum_{i=1}^{l-1} \angle(p_l - p_i) - \sum_{i=l+1}^n \angle(p_l - p_i)$$

同理，可得到求终止角的关系式为

$$\theta_{z_l} = \pm 180^\circ + \sum_{i=1}^n \angle(z_l - p_i) - \sum_{j=1}^{l-1} \angle(z_l - z_j) - \sum_{j=l+1}^m \angle(z_l - z_j)$$

图4-9 起始角 θ_{p_1} 的求取

规则七 根轨迹与虚轴的交点

根轨迹与虚轴的交点就是闭环系统特征方程的纯虚根（实部为零）。这时，用 $s = j\omega$ 代入特征方程可得

$$1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0$$

即

$$\text{Re}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] + \text{Im}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

由此可得虚部方程和实部方程为

$$\text{Im}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

$$\text{Re}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

解虚部方程可得角频率 ω_c ，即根轨迹与虚轴的交点的坐标值；用 ω_c 代入实部方程，可求出系统开环根轨迹增益的临界值 K_{rc} 。 K_{rc} 的物理含义是使系统由稳定（或不稳定）变为不稳定（或稳定）的系统开环根轨迹增益的临界值。它对如何选择合适的系统参数、使系统处于稳定的工作状态有重要意义。

例4-6 试求出例4-4中根轨迹与虚轴的交点 ω_c 及相应的开环根轨迹增益的临界值 K_{rc} 。

解 由例4-4知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

其特征方程是

$$s^3 + 6s^2 + 11s + K_r + 6 = 0$$

令 $s = j\omega$ 并代入特征方程得

$$-j\omega^3 - 6\omega^2 + j11\omega + K_r + 6 = 0$$

其虚部和实部方程分别为

$$\begin{cases} 11\omega - \omega^3 = 0 \\ K_r + 6 - 6\omega^2 = 0 \end{cases}$$

解虚部方程得

$$\omega_1 = 0 \quad \omega_c = \pm\sqrt{11}$$

由于 $\omega_1 = 0$ 不是根轨迹上的点，应舍去。

故 $\omega_{2,3} = \pm\sqrt{11} \approx \pm 3.3$ 为根轨迹与虚轴的两个交点。

将其代入实部方程便可求出系统开环根轨迹增益的临界值 $K_{rc} = 60$ 。

系统的根轨迹如图4-10所示。

当系统的阶次较高时，解特征方程将会遇到困难，此时可用劳斯判据求出系统开环根轨迹增益的临界值 K_{rc} 和根轨迹与虚轴的交点 ω_c 。

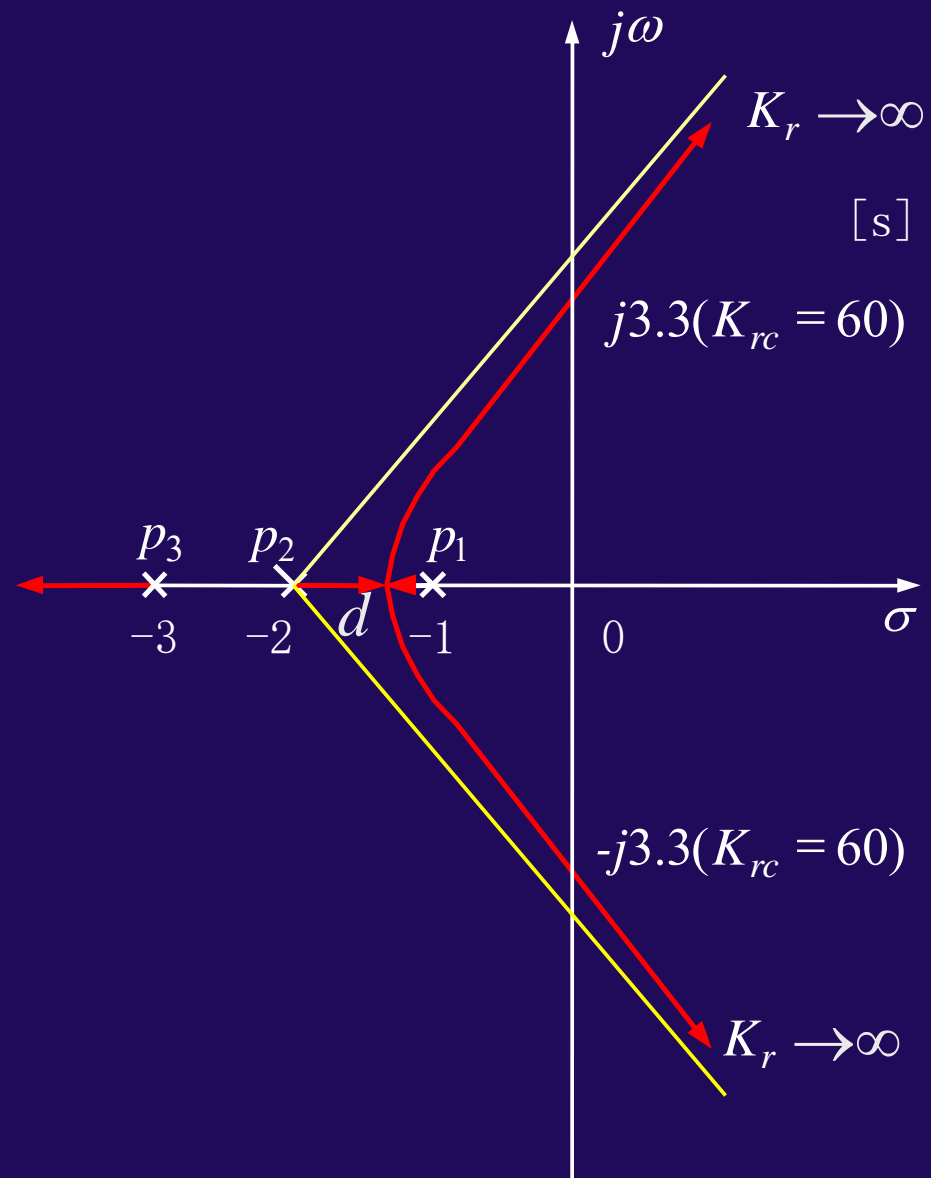


图4-10 根轨迹与虚轴的交点

以上七条规则是绘制根轨迹图所必须遵循的基本规则。此外，尚须注意以下几点规范画法。

(1)根轨迹的起点（开环极点 p_i ）用符号“ \times ”标示；根轨迹的终点（开环零点 z_j ）用符号“ \circ ”标示。

(2)根轨迹由起点到终点是随系统开环根轨迹增益 K_r 值的增加而运动的，要用箭头标示根轨迹运动的方向。

(3)要标出一些特殊点的 K_r 值，如起点（ $K_r=0$ ），终点（ $K_r \rightarrow \infty$ ）；根轨迹在实轴上的分离点 d （ $K_r = K_{rd}$ ）；与虚轴的交点 ω_c （ $K_r = K_{rc}$ ）。还有一些要求标出的闭环极点 s_1 及其对应的开环根轨迹增益 K_1 ，也应在根轨迹图上标出，以便于进行系统的分析与综合。

三、绘制根轨迹图示例

例4-7 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+1)(s+2)}$$

试绘制该系统完整的根轨迹图。

解 (1)该系统的特征方程为

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K_r = 0$$

这是一个三阶系统，由规则一知，该系统有三条根轨迹在s平面上。

(2)由规则二知，三条根轨迹连续且对称于实轴。

(3)根轨迹的起点是该系统的三个开环极点，即 $p_1 = 0$ $p_2 = -1$ $p_3 = -2$ 由于没有开环零点 ($m=0$)，三条根轨迹的终点均在无穷远处。

(4)由规则四知，可求出根轨迹三条渐近线的交点位置和它们与实轴正方向的交角。

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n - m} = \frac{-1 - 2}{3 - 0} = -1$$

$$\varphi_a = \frac{2k + 1}{n - m} \pi$$

$$\text{当 } k=0 \text{ 时} \quad \varphi_a = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$\text{当 } k=1 \text{ 时} \quad \varphi_a = \pi = 180^\circ$$

$$\text{当 } k=2 \text{ 时} \quad \varphi_a = \frac{5\pi}{3} = -60^\circ$$

(5)由规则五知，实轴上的根轨迹为实轴上 p_1 到 p_2 的线段和由 p_3 至实轴上负无穷远线段。

(6)由规则六知，根轨迹与实轴的交点（分离点）是方程

$$\frac{d}{ds} [s(s+1)(s+2)]_{s=d} = 0$$
$$3d^2 + 6d + 2 = 0$$

解的合理值，解得

$$d_1 = -0.42 \quad d_2 = -1.58$$

$d_2 = -1.58$ 不在实轴的根轨迹上，舍去；实际的分离点应为 $d_1 = -0.42$ 。

(7) 无复数开环极点和零点，不存在起始角和终止角。

(8)由规则八，可求出根轨迹与虚轴的交点 ω_c 及对应的开环根轨迹增益的临界值 k_{rc} 。用 $s=j\omega$ 代入特征方程得

$$-j\omega^3 - 3\omega^2 + j2\omega + K_r = 0$$

$$K_r - 3\omega^2 + j(2\omega - \omega^3) = 0$$

解虚部方程得 $\omega_1 = 0$ $\omega_{2,3} = \pm\sqrt{2}$

其中 $\omega_1 = 0$ 是开环极点 p_1 对应的坐标值，它是根轨迹的起点之一。合理的交点应为 $\omega_c = \omega_{2,3} = \pm\sqrt{2}$

将 $\omega_c = \pm\sqrt{2}$ 代入实部方程得到对应的开环根轨迹增益的临界值 $K_{rc} = 6$ 。绘制出该系统的根轨迹图如图4-11所示。

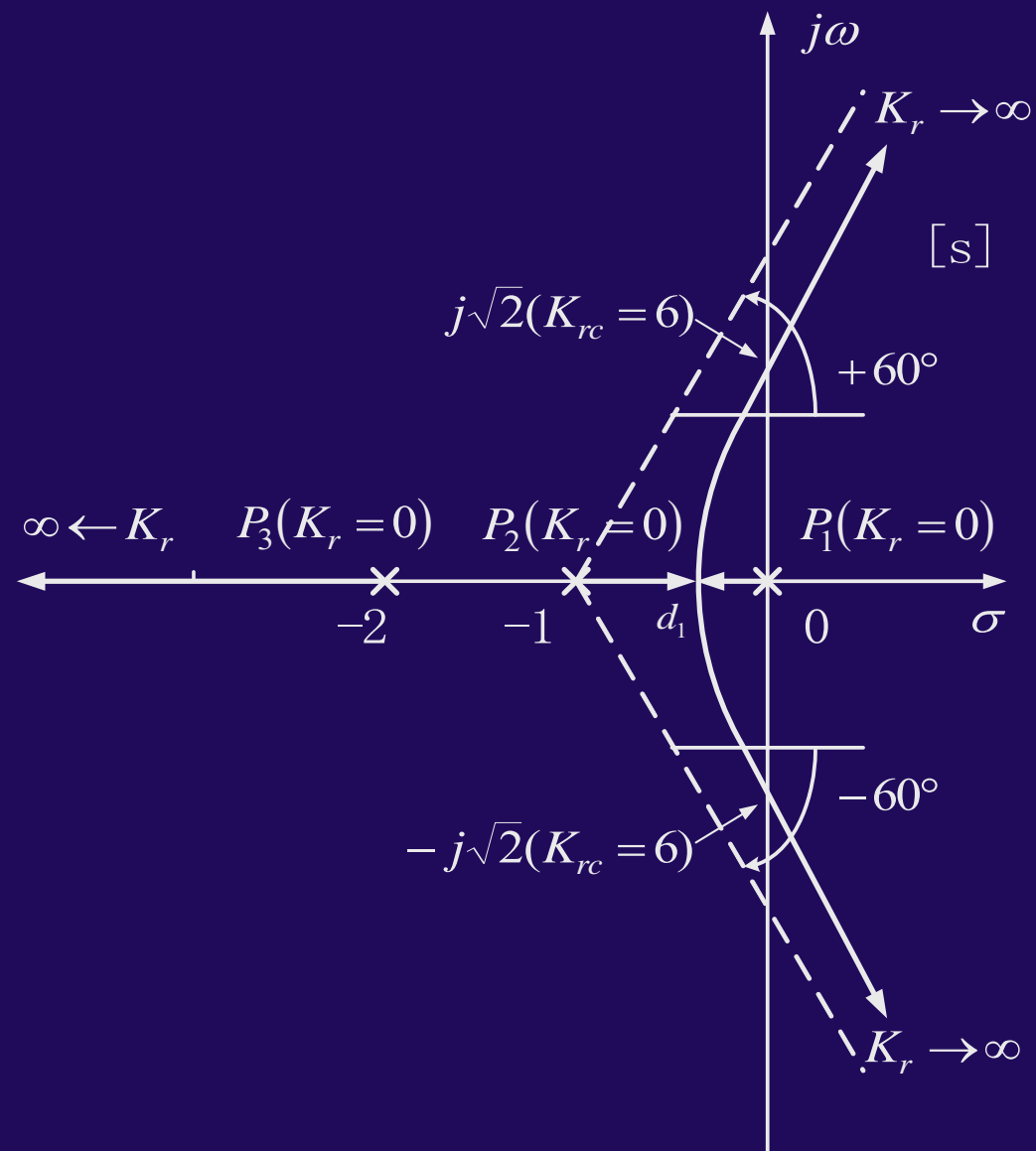


图4-11 例4-7系统根轨迹图

例4-8 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r(s+2)}{s^2 + 2s + 2}$$

试绘制该系统的根轨迹图。

解 (1)是一个二阶系统，在S平面上有两条连续且对称于实轴的根轨迹。

(2)由开环传递函数可知，该系统有一个开环实零点 $z_1 = -2$ 和一对开环共轭复数极 $p_{1,2} = -1 \pm j1$ ，根轨迹的起点为 $p_1(K_r = 0)$ 和 $p_2(K_r = 0)$ ，其终点为 $z_1(K_r = \infty)$ 和无穷远点 $(K_r \rightarrow \infty)$ 。

(3)由规则五知，实轴上由-2至 $-\infty$ 的线段为实轴上的根轨迹。

(4)由规则六，可求出根轨迹与实轴的交点（分离点）。分离点方程是

$$\left. \frac{d}{ds} \left[\frac{s^2 + 2s + 2}{s + 2} \right] \right|_{s=d} = 0$$

即 $d^2 + 4d + 2 = 0$

解方程可得 $d_1 = -3.414$ $d_2 = -0.586$

$d_2 = -0.586$ 不在实轴上的根轨迹上，舍去，实际的分离点为 d_1 。

(5)由规则七，可求出开环复数极点（根轨迹的起点）的起始角。

$$\begin{aligned} \theta_{p_1} &= \mp 180^\circ + \angle(p_1 - z_1) - \angle(p_1 - p_2) \\ &= \mp 180^\circ + 45^\circ - 90^\circ \\ &= 135^\circ \\ \theta_{p_2} &= -\theta_{p_1} = -135^\circ \end{aligned}$$

(6)为准确地画出S平面上根轨迹的图形，运用相角条件可证明本系统在S平面上的根轨迹是一个半径为 $\sqrt{2}$ ，圆心位于点 $(-2, j0)$ 的圆弧。

证明 已知系统的开环零点和极点分别为

$z_1 = -2$ $p_1 = -1 + j1$, $p_2 = -1 - j1$ ，令 $s = u + jv$ 为根轨迹的任一点，由相角条件可得

$$\angle(s - z_1) - \angle(s - p_1) - \angle(s - p_2) = \pm 180^\circ$$

将 s 、 z_1 、 p_1 和 p_2 代入得

$$\angle(u + 2 + jv) - [\angle(u + 1 + j(v - 1)) + \angle(u + 1 + j(v + 1))] = \pm 180^\circ$$

$$\text{即} \quad \text{tg}^{-1} \frac{v}{u + 2} - \left[\text{tg}^{-1} \frac{v - 1}{u + 1} + \text{tg}^{-1} \frac{v + 1}{u + 1} \right] = \pm 180^\circ$$

应用三角公式

$$\text{tg}^{-1} x \pm \text{tg}^{-1} y = \text{tg}^{-1} \frac{x \pm y}{1 \mp x \cdot y}$$

将上式等号左边合并可得到

$$\operatorname{tg}^{-1} \frac{\frac{v}{u+2} - \frac{2v(u+1)}{(u+1)^2 - (v^2 - 1)}}{1 + \frac{v}{u+2} \cdot \frac{2v(u+1)}{(u+1)^2 - (v^2 - 1)}} = \pm 180^\circ$$

将上式等号两边取正切，则有

$$\frac{v}{u+2} - \frac{2v(u+1)}{(u+1)^2 - (v^2 - 1)} = 0$$

$$u^2 + 4u + 2 + v^2 = 0$$

$$(u+2)^2 + v^2 = (\sqrt{2})^2$$

方程表示在S平面上的根轨迹是一个圆心位于点 $(-2, j0)$ 、半径为 $\sqrt{2}$ 的圆弧。由此，可画出根轨迹的准确图形如图4-12所示。

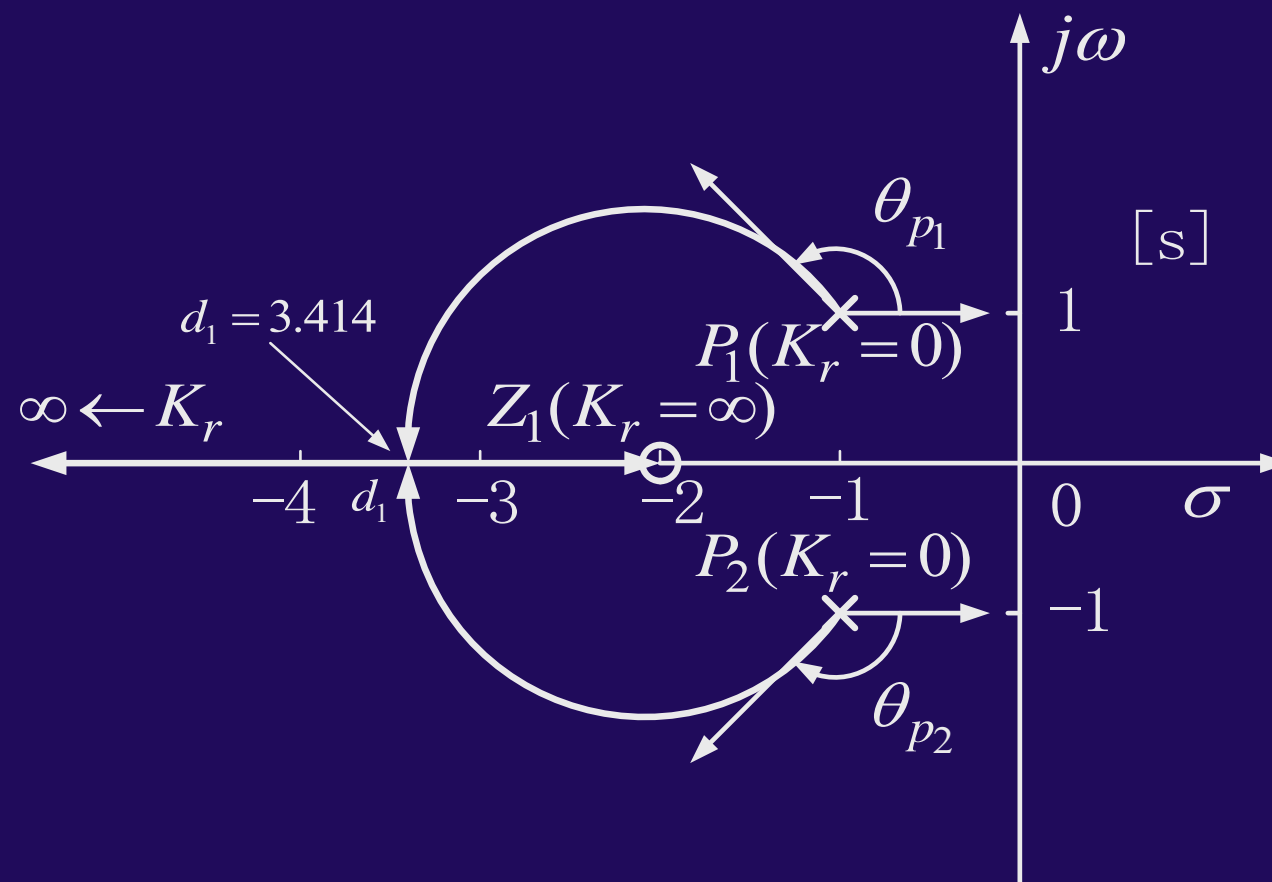


图4-12 例4-8系统的根轨迹图

由本例不难发现，由两个开环极点（实极点或复数极点）和一个开环实零点组成的二阶系统，只要实零点没有位于两个实极点之间，当开环根轨迹增益 K_r 由零变到无穷大时，复平面上的闭环根轨迹，是以实零点为圆心，以实零点到分离点的距离为半径的一个圆（当开环极点为两个实极点时）或圆的一部分（当开环极点为一对共轭复数极点时）。这个结论在数学上的严格证明可参照本例进行。

例4-9 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

试绘制该系统的根轨迹图。

解 (1)由已知系统的开环传递函数可得到它的特征方程为

$$s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + K_r = 0$$

由规则一和规则二知，该系统的根轨迹共有4条分支（ $n=4$ ），4条根轨迹连续且对称于实轴。

(2)由规则三知，4条根轨迹的起点分别是系统的4个开环极点，即 $p_1 = 0$ $p_2 = -2$, $p_{3,4} = -1 \pm j1$ 。
由于系统无有限开环零点（ $m=0$ ），4条根轨迹的终点均在S平面的无穷远处（无穷零点）。

(3)由规则四可求出4条根轨迹渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n - m} = \frac{-2 - 1 + j - 1 - j}{4 - 0} = -1$$

渐近线与实轴正方向的交角为

$$\varphi_a = \frac{2k+1}{n-m}\pi$$

当 $k = 0$ 时,

$$\varphi_a = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

当 $k = 1$ 时,

$$\varphi_a = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$$

当 $k = 2$ 时,

$$\varphi_a = \frac{5\pi}{4} = -135^\circ$$

当 $k = 3$ 时,

$$\varphi_a = \frac{7\pi}{4} = -45^\circ$$

(4)由规则五知，实轴上的根轨迹是实轴上由0到-2的线段。

(5)由规则六可求出根轨迹与实轴的交点（分离点）。分离点方程是

$$\frac{d}{ds}[(s(s+2)(s^2+2s+2))]|_{s=d}=0$$

即
$$d^3 + 3d^2 + 3d + 1 = 0$$

解方程得到

$$d = -1$$

(6)由规则七可求出复数极点 p_3 和 p_4 的起始角

$$\begin{aligned}\theta_{p_3} &= \mp 180^\circ - \angle(p_3 - p_1) - \angle(p_3 - p_2) - \angle(p_3 - p_4) \\ &= \mp 180^\circ - 135^\circ - 45^\circ - 90^\circ \\ &= -90^\circ \\ \theta_{p_4} &= -\theta_{p_3} = 90^\circ\end{aligned}$$

(7) 该系统为4阶系统，用解析法求根轨迹与虚轴的交点 ω_c 和对应的开环根轨迹增益的临界值 K_{rc} 比较困难。下面采用劳斯判据求出 ω_c 和 K_{rc} 的值。

根据系统的特征方程列出劳斯表如下：

s^4	1	6	K_r
s^3	4	4	0
s^2	5	K_r	0
s^1	$\frac{20-4K_r}{5}$	0	
s^0	K_r		

令劳斯表中 s^1 行的首项系数为零，求得 $K_{rc} = 5$ ，
由 s^2 行系数写出辅助方程为 $5s^2 + K_r = 0$

令 $s = j\omega$ ，并将 $K_r = K_{rc} = 5$ 代入辅助方程可求出 $\omega_c = \pm 1$ 。系统的根轨迹如图4-13所示。

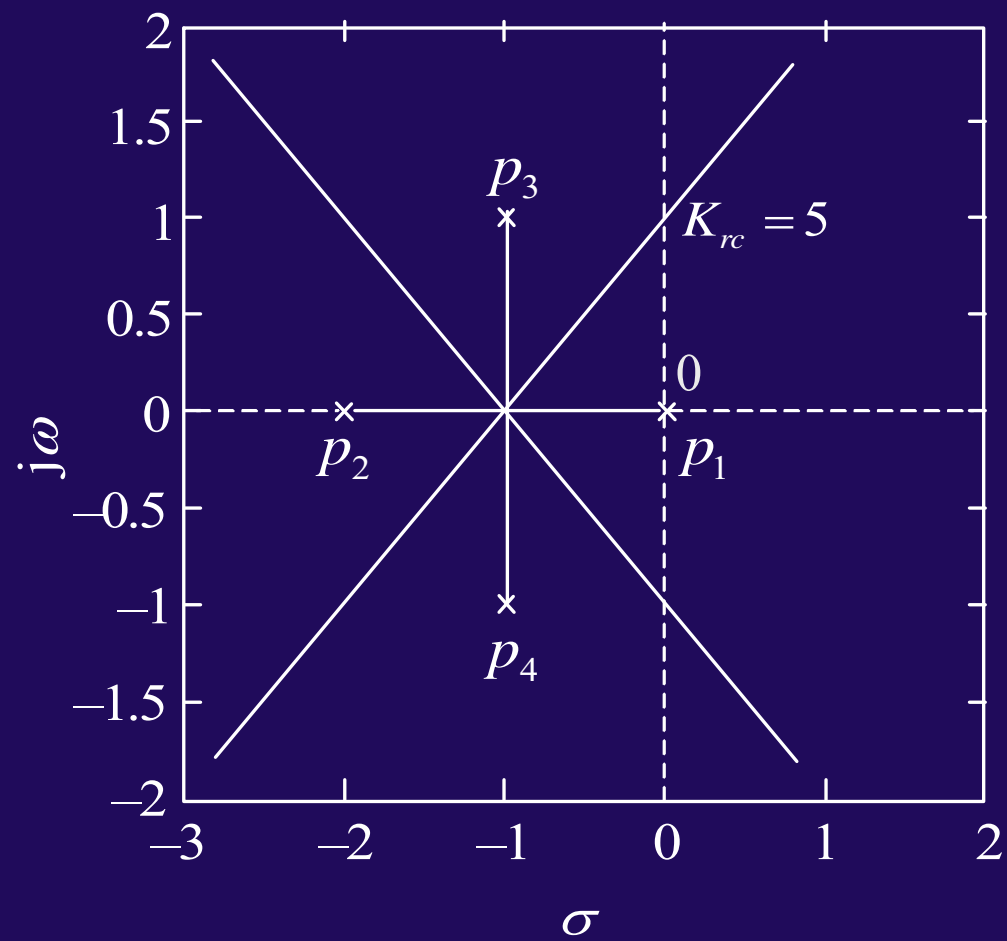


图4-13 例4-9系统的根轨迹图

4.3 广义根轨迹

一. 参数根轨迹

前面介绍的普通根轨迹或一般根轨迹的绘制规则是以开环根轨迹增益 K_T 为可变参数的，大多数系统都属于这种情况。但有时候，为了分析系统方便起见，或着重研究某个系统参数(如时间常数、反馈系数等)对系统性能的影响，也常常以这些参数作为可变参数绘制根轨迹，我们把以非开环根轨增益 K_T 作为可变参数绘制的根轨迹叫做参数根轨迹(或广义根轨迹)。

例4-10 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{2}{s(Ts + 1)(s + 1)}$$

试绘制以时间常数 T 为可变参数的根轨迹。

解 (1)系统的特征方程

$$s(Ts + 1)(s + 1) + 2 = 0$$

或
$$Ts^2(s + 1) + s^2 + s + 2 = 0$$

用 $s^2 + s + 2$ 除等式两边得

$$1 + \frac{Ts^2(s + 1)}{s^2 + s + 2} = 0$$

$$\text{令 } G'(s)H'(s) = \frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2} \quad (4-35)$$

$$\text{则有 } 1 + G'(s)H'(s) = 0 \quad (4-36)$$

称 $G'(s)H'(s)$ 为系统的等效开环传递函数。在等效开环传递函数中，除时间常数 T 取代了普通根轨迹中开环根轨迹增益 K_r 的位置外，其形式与绘制普通根轨迹的开环传递函数完全一致，这样便可根据绘制普通根轨迹的七条基本规则来绘制参数根轨迹。

(2)系统特征方程的最高阶次是3，由规则一和规则二知，该系统有三条连续且对称于实轴的根轨迹，根轨迹的终点($T=\infty$)是等效开环传递函数的三个零点，即 $z_1 = z_2 = 0$, $z_3 = -1$ ；本例中，系统的等效开环传递函数的零点数为 $m=3$,极点数 $n=2$ ，即 $m>n$ 。在前面已经指出，这种情况在实际物理系统中一般不会出现，然而在绘制参数根轨迹时，其等效开环传递函数却常常出现这种情况。

与 $n > m$ 情况类似，这时可认为有 $m-n$ 条根轨迹起始于 S 平面的无穷远处（无限极点）。因此，本例的三条根轨迹的起点($T=0$)分别为 $p_1 = -0.5 + j0.866$ ， $p_2 = -0.5 - j0.866$ 和无穷远处（无限极点）。

由规则三知，实轴上的根轨迹是实轴上 -1 至 $-\infty$ 线段。

由规则六可求出两个起始角分别为

$$\theta_{p_1} = \mp 180^\circ + 60^\circ + 120^\circ + 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$$

$$\theta_{p_2} = -\theta_{p_1} = -30^\circ$$

由规则七可求出根轨迹与虚轴的两个交点，
用 $s = j\omega$ 代入特征方程得

$$-jT\omega^3 - (T+1)\omega^2 + j\omega + 2 = 0$$

由此得到虚部方程和实部方程分别为

$$\begin{cases} \omega - T\omega^3 = 0 \\ 2 - (T+1)\omega^2 = 0 \end{cases}$$

解虚部方程得 ω 的合理值为 $\omega_c = \pm\sqrt{\frac{1}{T}}$ ，
代入实部方程求得 $T_c = 1$ 秒，所以 $\omega_c = \pm 1$ 为根
轨迹与虚轴的两个交点。

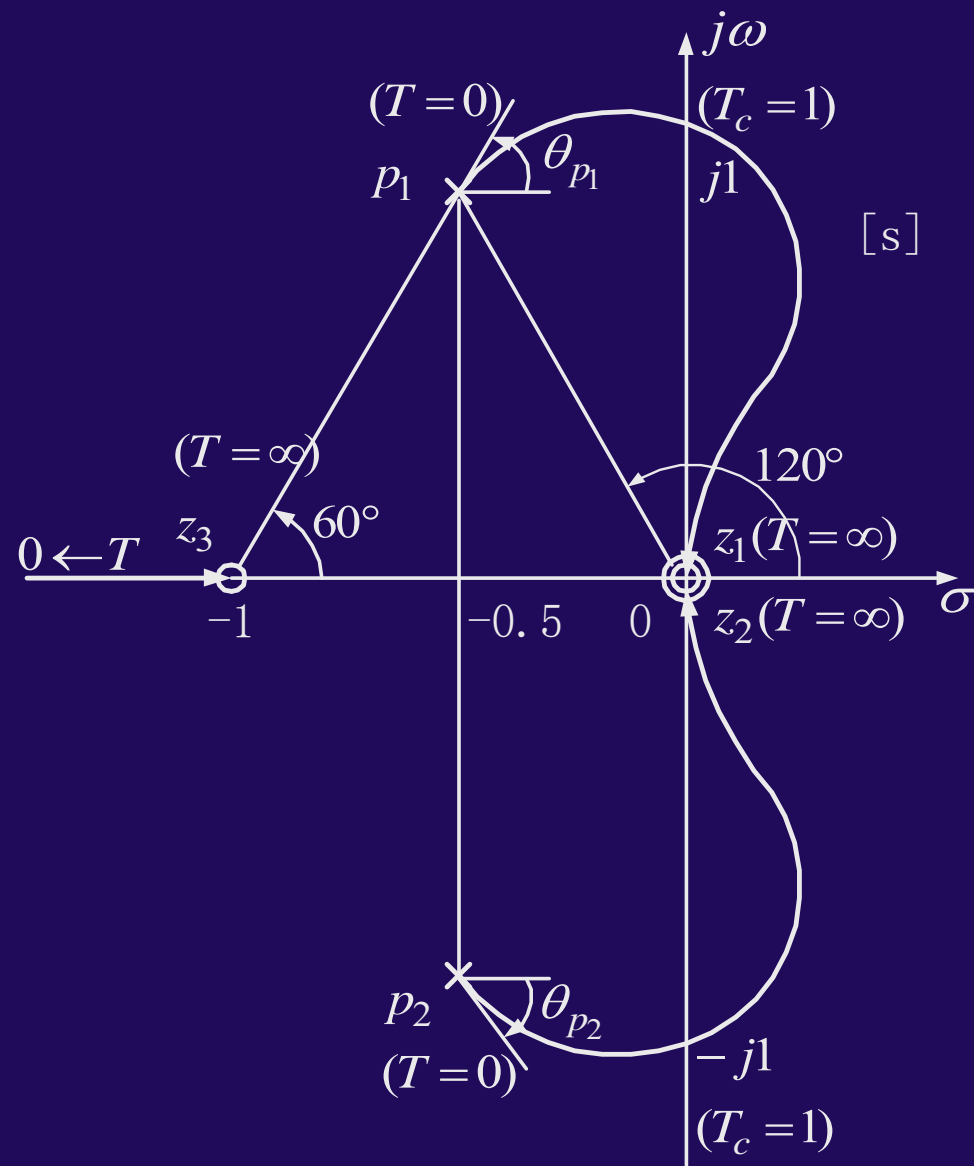


图4-14 例4-10系统的根轨迹图

由根轨迹图可知，时间常数 $T = T_c = 1$ 秒时，系统处于临界稳定状态， $T > 1$ 秒时，根轨迹在S平面右半部，系统不稳定。由此可知，参数根轨迹在研究非开环根轨迹增益 K_r 对系统性能的影响是很方便的。

由上面的例子，可将绘制参数根轨迹的方法归纳为下述两个步骤：

(1) 先根据系统的特征方程 $1 + G(s)H(s) = 0$

求出系统的等效开环传递函数 $G'(s)H'(s)$ ，使 $G'(s)H'(s)$ 与绘制普通根轨迹的开环传递函数有相同的形式，即

$$G'(s)H'(s) = \frac{K_r' \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (4-37)$$

（注：此处的零极点等效开环传递函数的零极点）

其中 K_r' 为除开环根轨迹增益 K_r 以外的任何参数，它是绘制参数根轨迹的可变参数。

(2) 根据绘制普通根轨迹的七条基本规则和等效开环传递函数 $G'(s)H'(s)$ 绘制出系统的参数根轨迹。

二 正反馈系统的根轨迹

正反馈系统的特征方程是

$$1 - G(s)H(s) = 0 \quad (4-38)$$

即 $G(s)H(s) = 1 \quad (4-39)$

由此可得到绘制正反馈系统根轨迹的幅值条件和相角条件分别为

$$|G(s)H(s)| = 1 \quad (4-40)$$

$$\angle G(s)H(s) = 0^\circ + k \cdot 360^\circ (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (4-41)$$

与负反馈系统根轨迹的幅值条件和相角条件相比知，正反馈系统和负反馈系统的幅值条件相同；

负反馈系统的根轨迹遵循 180° 相角条件，而正反馈系统的根轨迹遵循 0° 相角条件。故正反馈系统根轨迹又称为零度根轨迹。由于相角条件不同，在绘制正反馈系统根轨迹时，须对前面介绍的绘制负反馈系统普通根轨迹的七条基本规则中与相角条件有关的三条规则作相应修改，这些规则是：

(1)正反馈系统根轨迹的渐近线与实轴正方向的夹角应为

$$\varphi_a = \frac{2k\pi}{n-m} (k=0,1,2,\cdots,n-m-1) \quad (4-42)$$

(2) 正反馈系统在实轴上的根轨迹是那些在其右侧的开环实零点和开环实极点的总数为偶数或零的线段。

(3) 正反馈系统的起始角和终止角应为

$$\theta_{p_l} = 0^\circ + \sum_{j=1}^m (p_l - z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n (p_l - p_i)$$
$$\theta_{z_l} = 0^\circ + \sum_{j=1}^n (z_l - p_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^m (z_l - z_j)$$

下面通过示例进一步说明正反馈系统根轨迹的绘制方法。

例4-11 已知正反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+1)(s+2)}$$

试绘制该系统的根轨迹图。

解：由系统的开环传递函数与例4-7相同。

由修改后的规则三知，实轴上的根轨迹是由0至 $+\infty$ 线段和由-1至-2线段。

由修改后的规则四知，渐近线与实轴正方向的夹角分别是 0° （ $k = 0$ ）、 120° （ $k = 1$ ）和 -120° （ $k = 2$ ）。

在例4-7中，由规则五求出的极值方程的解有两个，即 $d_1 = -0.42$ 和 $d_2 = -1.58$ ，对于例4-7的负反馈系统， d_1 是根轨迹与实轴交点的合理值，因为它是实轴上根轨迹上的一点； d_2 不在实轴的根轨迹上，故在例4-7中被舍去。

这种情况在本例中正好相反，由于是正反馈系统，实轴上的根轨迹改变了， $d_2 = -1.58$ 在实轴的根轨迹上，它是根轨迹与实轴交点（分离点）的合理值，而 $d_1 = -0.42$ 不在实轴的根轨迹上，应舍去。由此可见，虽然规则五没有改变，但在确定分离点时，应考虑规则三变化的影响。

本例无共轭复数开环零、极点，不存在起始角和终止角问题，根轨迹与虚轴也无交点。本例的根轨迹如图4-16所示。由图4-16可看出，三条根轨迹中，有一条从起点到终点全部位于S平面右半部，这就意味着无论 K_r 为何值，系统都存在S平面右半部的闭环极点，该正反馈系统总是不稳定的。而有相同开环传递函数的负反馈系统(例4-7，[图4-11](#))，它的临界根轨迹增益 $K_{rc} = 6$ ，即当 $K_r > 6$ 时系统是不稳定的，当 $K_r < 6$ 时系统是稳定的。

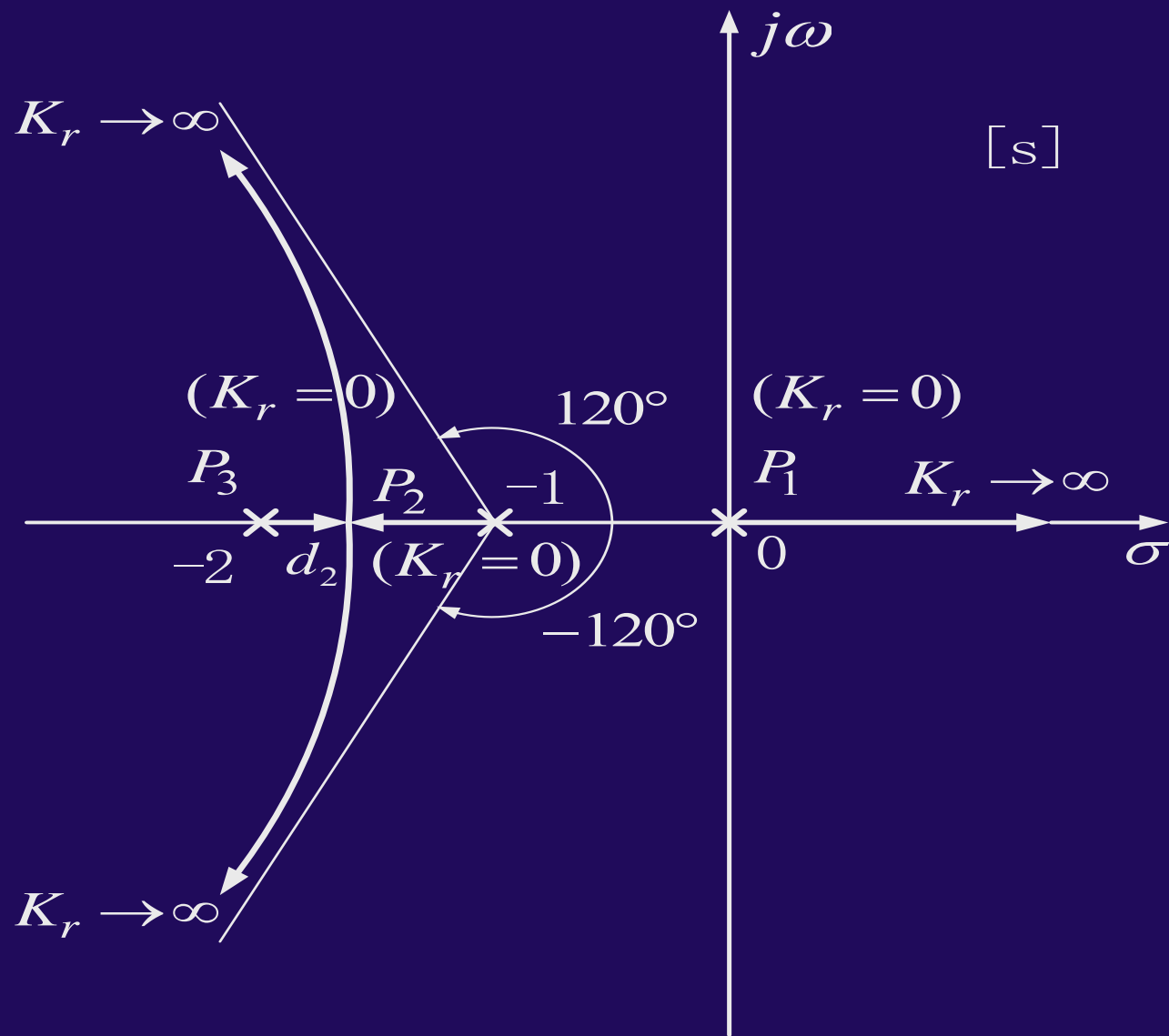


图4-16 正反馈系统的根轨迹

三 非最小相位系统的根轨迹

所谓非最小相位系统，是指那些在S平面右半部有开环极点和（或开环零点）的控制系统。所有开环零点和极点都位于S平面左半部的系统叫最小相位系统。本章前面介绍的示例都是最小相位系统。非最小相位系统一词源于对系统频率特性的描述，即在正弦信号的作用下，具有相同幅频特性的系统（或环节），最小相位系统的相位移最小，而非最小相位系统的相位移大于最小相位系统的相位移。

例4-12 已知负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r(s+1)}{s(s-1)(s^2+2s+2)}$$

试绘制该系统的根轨迹图。

解 该系统有一位于s平面右半部的开环极点 ($p_2=1$)，是非最小相位系统。系统特征方程的最高阶次是4，由规则一、二知该系统有四条连续且对称于实轴的根轨迹。四条根轨迹的起点分别是它的四个开环极点：

$$p_1=0 \quad p_2=1 \quad p_3=-1+j1 \quad p_4=-1-j1$$

根轨迹的一个终点是有限开环零点，即 $z_1 = -1$ ，其余三个终点均在无穷远处（无限零点）。

由规则四知，根轨迹的三条渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n P_i - \sum_{j=1}^m Z_j}{n - m} = 0$$

渐近线与实轴正方向的夹角分别是 60° ($k=0$), 180° ($k=1$) 和 -60° ($k=2$)。

由规则三知，实轴上的根轨迹是由0至1线段和-1至 $-\infty$ 线段。

由规则五的分离点方程可求出根轨迹与实轴的交点，即由方程

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{s(s-1)(s^2+2s+2)}{s+1} \right]_{s=d} = 0$$

得 $d^4 + 2d^3 + d^2 - \frac{2}{3} = 0$ ，解方程得到4个根分别为 $d_1 = 0.53$ ， $d_2 = -1.53$ ， $d_{3,4} = -0.5 \pm j0.75$ ，

显然， d_1 和 d_2 为根轨迹与实轴交点的合理值，即

d_1 和 d_2 为根轨迹的分离点。

由规则六可求出共轭复数极点 p_3 和 p_4 的起始角分别为

$$\theta_{p_3} = m180^\circ + 90^\circ - 135^\circ - 153.4^\circ - 90^\circ = -108.6^\circ$$

$$\theta_{p_4} = -\theta_{p_3} = 108.6^\circ$$

根轨迹与虚轴无交点。该系统的根轨迹如图4-17所示。

该非最小相位系统除了有位于s平面右半部的开环零、极点外，其绘制根轨迹的规则和步骤与最小相位系统完全相同。需要指出的是，如果非最小相位系统是正反馈系统，在绘制根轨迹时应遵循前面介绍的 0° 相角条件。

若某负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(1-\tau s)}{s(1+Ts)} \quad (\tau > 0, T > 0)$$

系统的特征方程为

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(1-\tau s)}{s(1+Ts)} = 1 - \frac{K(\tau s - 1)}{s(Ts + 1)} = 0$$

$$\frac{K(\tau s - 1)}{s(Ts + 1)} = 1$$

根轨迹方程与正反馈系统的一样，其幅值条件和相角条件分别为

$$\left| \frac{K(\tau s - 1)}{s(Ts + 1)} \right| = 1 \quad \angle(\tau s - 1) - \angle s - \angle(Ts + 1) = 2k\pi$$

4.4 线性系统的根轨迹分析法

自动控制系统的稳定性，由它的闭环极点唯一确定，其动态性能与系统的闭环极点和零点在 S 平面上的分布有关。因此确定控制系统闭环极点和零点在 S 平面上的分布，特别是从已知的开环零、极点的分布确定闭环零、极点的分布，是对控制系统进行分析必须首先要解决的问题。解决的方法之一，是第三章介绍的解析法，即求出系统特征方程的根。解析法虽然比较精确，但对四阶以上的高阶系统是很困难的。

根轨迹法是解决上述问题的另一途径，它是在已知系统的开环传递函数零、极点分布的基础上，研究某一个和某些参数的变化对系统闭环极点分布的影响的一种图解方法。由于根轨迹图直观、完整地反映系统特征方程的根在S平面上分布的大致情况，通过一些简单的作图和计算，就可以看到系统参数的变化对系统闭环极点的影响趋势。这对分析研究控制系统的性能和提出改善系统性能的合理途径都具有重要意义。下面通过示例简要介绍用根轨迹分析控制系统的方法。

例4-13 已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

试根据系统的根轨迹分析系统的稳定性和计算闭环主导极点具有阻尼比 $\zeta=0.5$ 时系统的动态性能指标。

解 (1)先根据系统的开环传递函数和绘制根轨迹的基本规则绘制出系统的根轨迹图。

系统的特征方程是

$$s(s+1)(s+2)(s+3) + K_r = 0$$

或
$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K_r = 0$$

由规则一、二知该系统有四条连续且对称于实轴的根轨迹，起点分别是系统的四个开环极点，即 $p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -2, p_4 = -3$ ；且四条根轨迹都趋向无穷远处。

由规则三知实轴上的根轨迹是由0至-1线段和由-2至-3线段。

由规则四可求出四条渐近线与实轴的交点为-1.5，它们与实轴正方向的夹角分别是 $\pm 45^\circ$ 和 $\pm 135^\circ$ 。

由规则六可求出根轨迹与实轴的两个交点（分离点）分别为 $d_1 = -0.38, d_2 = -2.62$ 。

由劳斯判据求根轨迹与虚轴的交点，先根据特征方程列出劳斯表

s^4	1	11	K_r
s^3	6	6	0
s^2	10	K_r	0
s^1	$\frac{60-6K_r}{10}$	0	
s^0	K_r		

由 s^1 行的首项系数求得 $K_{rc} = 10$ ，用 $s = j\omega$ 和 $K_{rc} = 10$ 代入 s^2 行辅助方程得到根轨迹与虚轴的交点为 $\omega_c = \pm 1$ 。绘制出根轨迹的大致图形如图4-18所示。

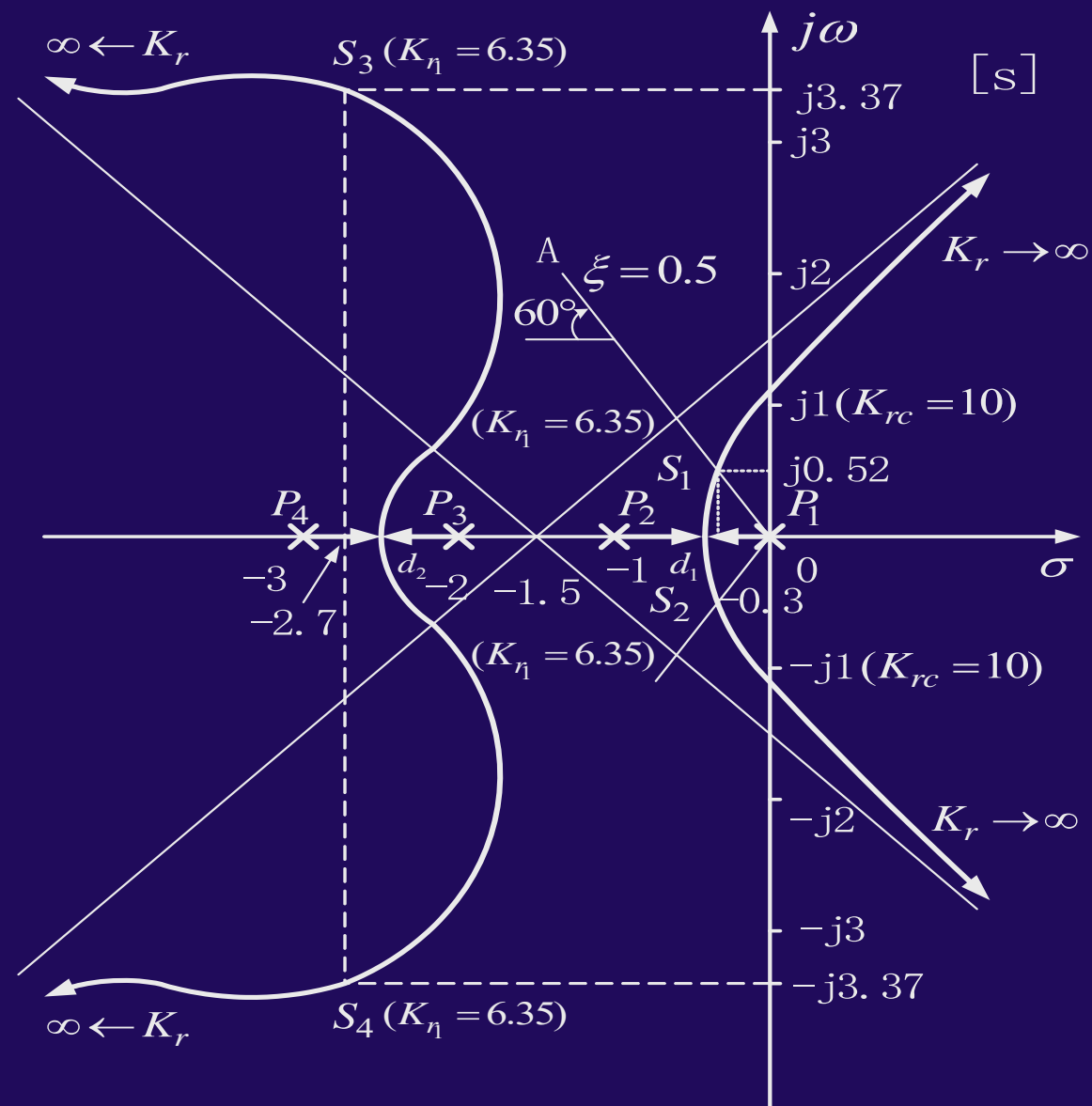


图4-18 例4-13的根轨迹图

(2)系统稳定性分析

由根轨迹图知，有两条从S平面左半部穿过虚轴进入S平面右半部，它们与虚轴的交点 $\omega_c = \pm 1$ ，且交点处对应的临界开环根轨迹增益 $K_{rc} = 10$ 。

由开环根轨迹增益 K_{rc} 与系统开环放大系数K之间的关系可求出系统稳定的临界开环放大系数

$$K_c = 10/6 = 1.67 \text{秒}^{-1}$$

(3)系统动态性能指标

首先求出满足阻尼比 $\zeta = 0.5$ 时系统的主导极点 s_1 s_2 的位置（假定 s_1 、 s_2 满足主导极点的条件）。

方法是作等阻尼比线oA，使oA与实轴负方向的夹角

$$\beta = \text{Cos}^{-1} \zeta = \text{Cos}^{-1} 0.5 = 60^\circ$$

等阻尼比线 σ_A 与根轨迹的交点 s_1 即为满足阻尼比 $\zeta=0.5$ 系统的一个闭环极点（即系统特征方程的一个根）。测得 s_1 在 s 平面上的坐标位置为 $s_1 = -0.3 + j0.52$ ，由根轨迹的对称性得到另一共轭复数极点为 $s_2 = -0.3 - j0.52$ 。

由幅值条件可求出闭环极点 s_1 所对应的系统开环根轨迹增益 K_{r1} 为 $K_{r1} = |s_1| |s_1 + 1| |s_1 + 2| |s_1 + 3| = 6.35$

将 s_1 、 s_2 和 K_{r1} 代入特征方程，由根和系数之间关系很容易得到另外两个闭环极点 s_3 、 s_4 ，它们也是一对共轭复数极点 $s_{3,4} = -2.7 \pm j3.37$

由此可计算出

$$\frac{\text{Re}[s_{3,4}]}{\text{Re}[s_{1,2}]} = \frac{-2.7}{-0.3} = 9$$

共轭复数极点 $s_{3,4}$ 与虚轴的距离是共轭复数极点 $s_{1,2}$ 与虚轴的距离的九倍，且闭环极点 $s_{1,2}$ 附近无闭环零点，这说明 s_1 、 s_2 满足主导极点的条件。

该系统可近似成由闭环主导极点构成的一个二阶系统，其闭环传递函数为

$$\begin{aligned}\phi(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{s_1 \cdot s_2}{(s - s_1)(s - s_2)} \\ &= \frac{0.36}{s^2 + 0.6s + 0.36}\end{aligned}$$

此时对应的系统开环放大系数

$$K_v = \frac{K_{r1}}{6} = 1.06 \text{秒}^{-1}$$

由此可求出系统的各项动态指标如下：

过渡过程时间

$$t_s = \frac{3 + \ln \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{\omega_n \zeta} = \frac{3 + \ln \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}}}{0.6 \times 0.5} = 10.5(\text{秒})$$

超调量

$$\sigma_p \% = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi} = e^{-\frac{0.5}{\sqrt{1-0.5^2}}\pi} = 16.3\%$$

峰值时间

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{0.6 \sqrt{1-0.5^2}} = 6.04(\text{秒})$$

通过上面的示例可以将用根轨迹分析自动控制系统的的方法和步骤归纳如下：

(1)根据系统的开环传递函数和绘制根轨迹的基本规则绘制出系统的根轨迹图。

(2)由根轨迹在 s 平面上的分布情况分析系统的稳定性。如果全部根轨迹都位于 s 平面左半部，则说明无论开环根轨迹增益 k_r 为何值，系统都是稳定的；如根轨迹有一条（或一条以上）的分支全部位于 s 平面的右半部，则说明无论开环根轨迹增益 k_r 如何改变，系统都是不稳定的；如果有一条（或一条以上）的根轨迹从 s 平面的左半部穿过虚轴进入 s 面的右半部（或反之），而其余的根轨迹分支位于 s 平面的左半部，则说明系统是有条件的稳定系统，即当开环根轨迹增益 k_r 大于临界值 K_{rc} 时系统便由稳定变为不稳定（或反之）。此时，关键是求出开环根轨迹增益 K_r 的临界值 K_{rc} 。这为分析和设计系统的稳定性提供了选择合适系统参数的依据和途径。

(3)根据对系统的要求和系统的根轨迹图分析系统的瞬态响应指标。对于一阶、二阶系统，很容易在它的根轨迹上确定对应参数的闭环极点，对于三阶以上的高阶系统，通常用简单的作图法（如作等阻尼比线等）求出系统的主导极点（如果存在的话），将高阶系统近似地简化成由主导极点（通常是一对共轭复数极点）构成的二阶系统，最后求出其各项性能指标。这种分析方法简单、方便、直观，在满足主导极点条件时，分析结果的误差很小。如果求出离虚轴较近的一对共轭复数极点不满足主导极点的条件，如它到虚轴的距离不小于其余极点到虚轴距离的五分之一或在它的附近有闭环零点存在等，这时还必须进一步考虑和分析这些闭环零、极点对系统瞬态响应性能指标的影响。

二. 附加开环零、极点对根轨迹的影响

1. 附加开环零点对根轨迹的影响

例4-14 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s^2(s+a)} \quad (a > 0)$$

试用根轨迹法分析系统的稳定性。如果给该系统增加一个开环零点，试分析附加开环零点对根轨迹的影响。

解 (1)原系统的根轨迹如图4-19所示。由于根轨迹的两条分支全部位于s平面的右半部，故该系统无论 K_r 为何值都是不稳定的。

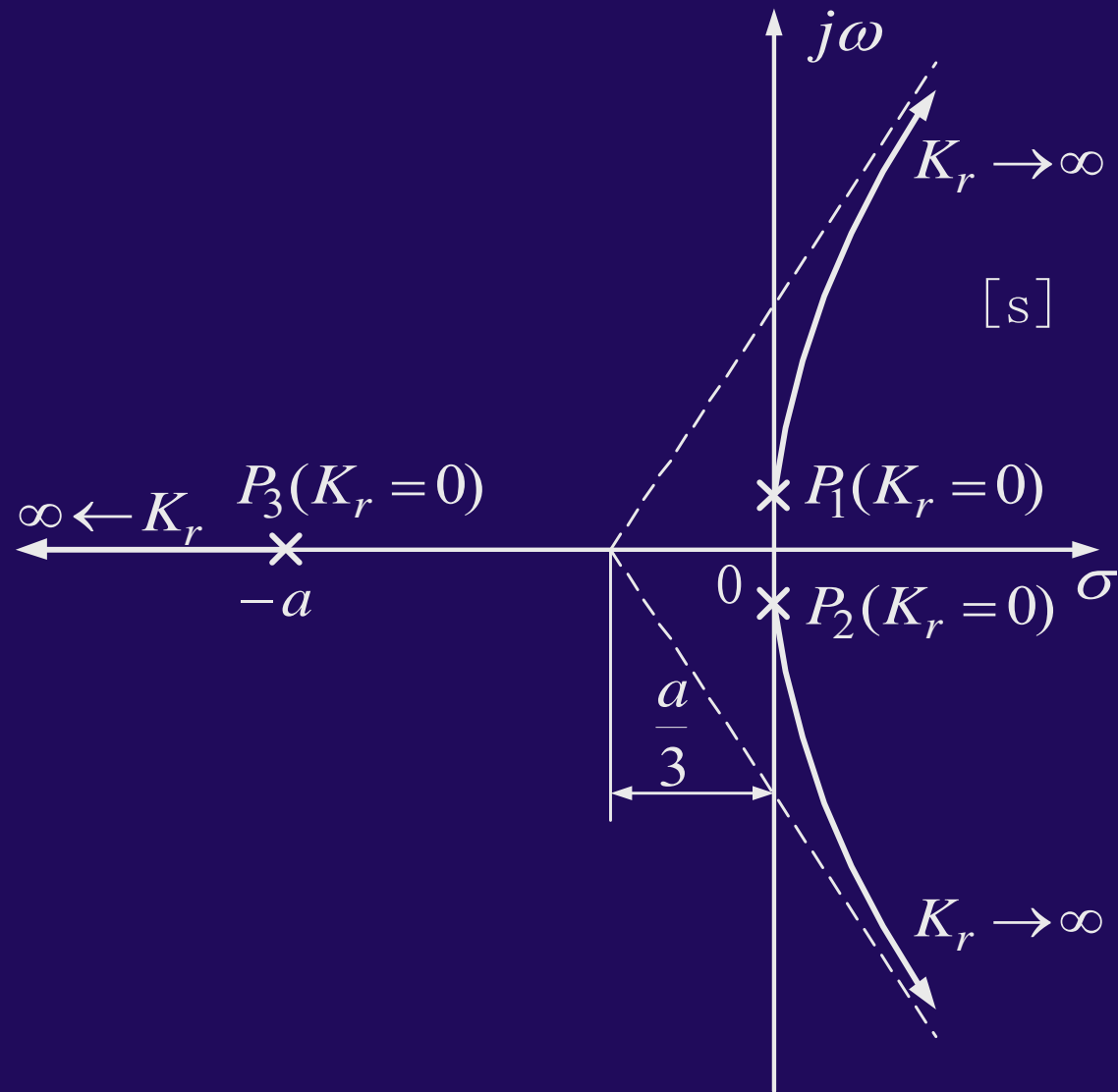


图4-19 原系统的根轨迹

(2)若给原系统增加一个负开环实零点 $z_1 = -b$ ($b > 0$) , 则开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r(s+b)}{s^2(s+a)}$$

◆ 当 $b < a$ 时, 根轨迹渐近线与实轴的交点为 $-\frac{a-b}{2} < 0$, 它们与实轴正方向的夹角分别为 90° 和 -90° , 三条根轨迹均在 s 平面左半部 (如图4-20 (a) 所示) 。这时, 无论根轨迹增益 K_r 为何值, 系统都是稳定的。

◆ 当 $b > a$ 时, 根轨迹的渐近线与实轴的交点为 $-\frac{a-b}{2} > 0$, 根轨迹如图4-20 (b) 所示, 与原系统比较, 虽然根轨迹的形状发生了变化, 但仍有两条根轨迹全部位于 s 平面右半部, 系统仍然是不稳定的。

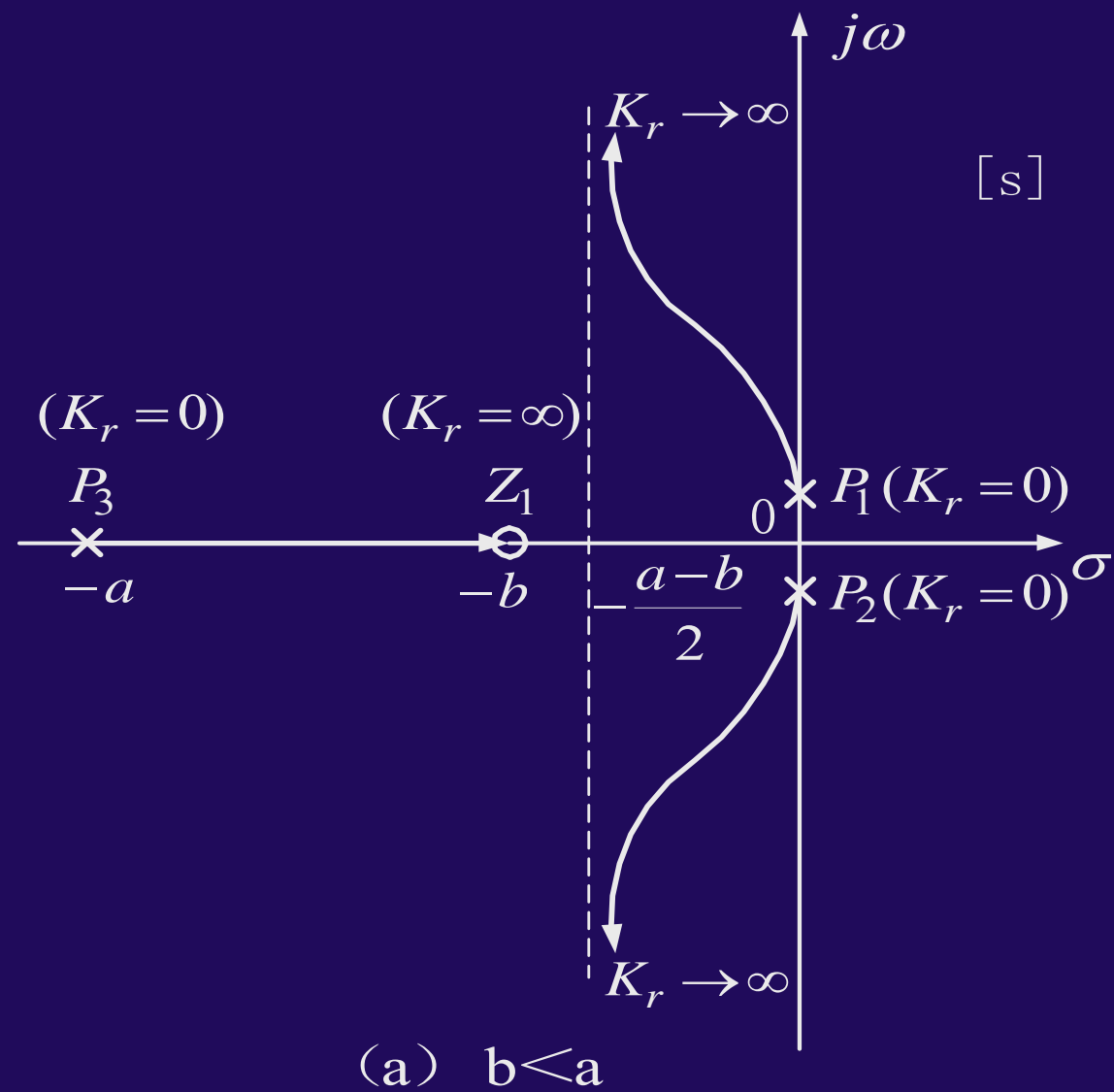


图4-20(a) 附加开环零点对根轨迹的影响

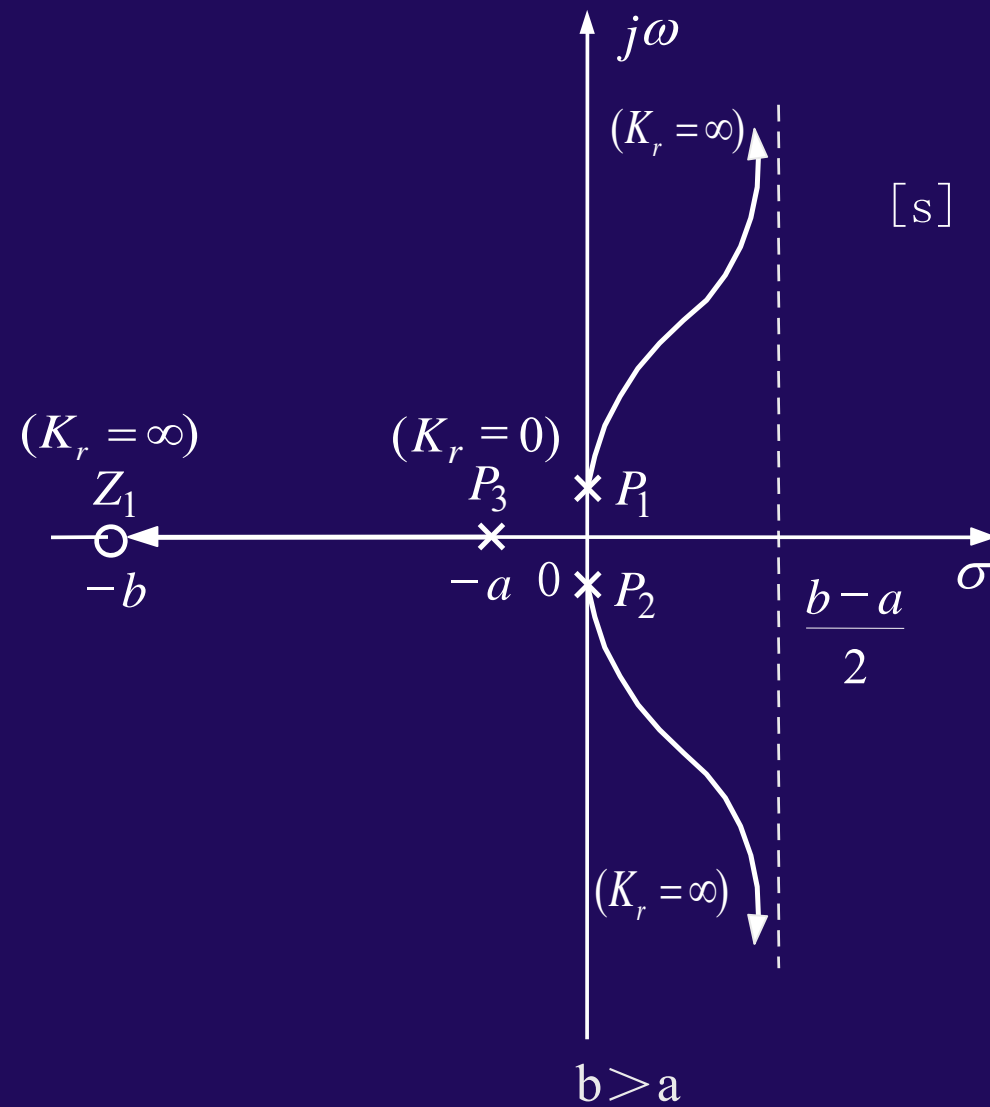


图4-20(b) 附加开环零点对根轨迹的影响

由上面的分析可以看出，附加开环零点可使原来不稳定的系统变成稳定系统，但附加零点的取值要适当，否则便达不到预期的目的。

例4-15 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s-p_2)(s-p_3)} \quad p_3 < p_2 < 0$$

试分析附加开环零点对系统性能的影响。

解 (1)原系统的根轨迹如图4-21所示，由图4-21可看出，当系统开环根轨迹增益 $K_r > K_{rc}$ 时，该系统有两条根轨迹进入S平面右半部成为不稳定系统。

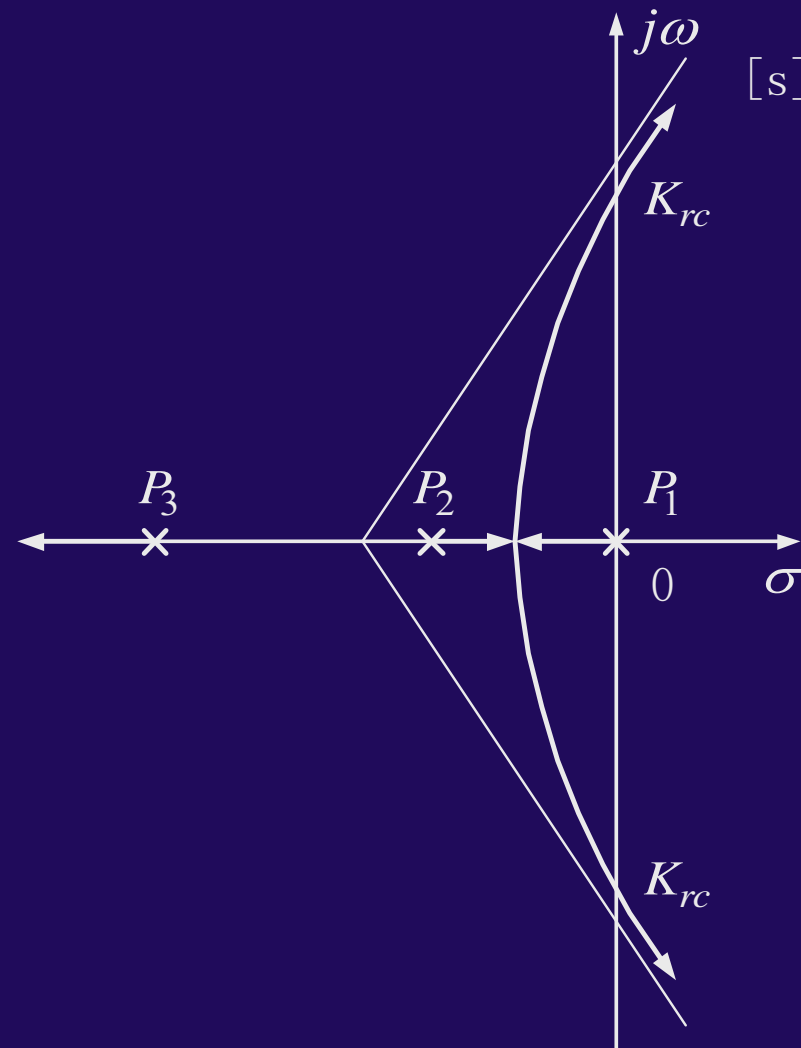


图4-21 例4-15原系统根轨迹

(2)给原系统增加一附加负实零点 z_1 ($z_1 < 0$) , 系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r(s - z_1)}{s(s - p_2)(s - p_3)}$$

此时, 开环传递函数分子与分母的最高阶次分别为 $n=3$, $m=1$; $n-m=2$ 。因此根轨迹渐近线与实轴正方向的夹角分别为 90° 和 -90° , 两条渐近线垂直于实轴, 它们与实轴的交点坐标位置视附加零点的取值而改变, 分别讨论如下。

(i) 当 $z_1 < p_2 + p_3 < 0$ 时 ($p_1 = 0$) 渐近线与实轴的交点

$$\sigma_a = \frac{\sum P_i - \sum Z_j}{n - m} > 0$$

渐近线位于S平面右半部，根轨迹如图4-22 (a) 所示。比较原系统的根轨迹 (图4-21)，虽然右边两条根轨迹形状发生了变化，但它们仍进入了平面右半部，当 $K_r > K'_{rc}$ 时 (K'_{rc} 为增加了开环零点后的开环根轨迹与虚轴交点对应的临界值)，系统仍是不稳定的系统。

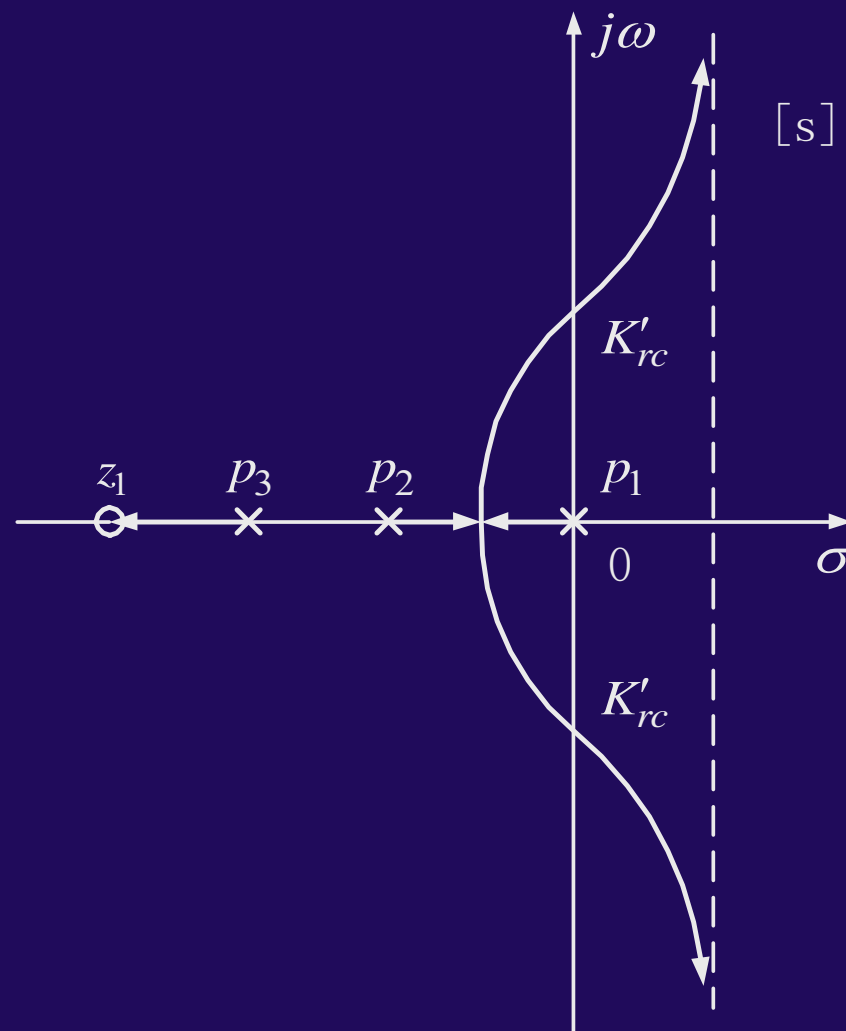


图4-22(a) 例4-15中不同附加开环零点对根轨迹的影响

(ii) 当 $p_3 < z_1 < p_2 < 0$ 时, 渐近线与实轴的交点

$$\sigma_a = \frac{\sum P_i - \sum Z_j}{n - m} < 0$$

渐近线位于S平面左半部, 根轨迹如图4-22 (b) 所示。此时系统的三条根轨迹全部位于S平面左半部, 无论 K_r 为何值, 系统都是稳定的系统。

(iii) 当 $p_3 < p_2 < z_1 < 0$ 时, 渐近线与实轴的交点也小于零, 根轨迹如图4-22 (c) 所示。

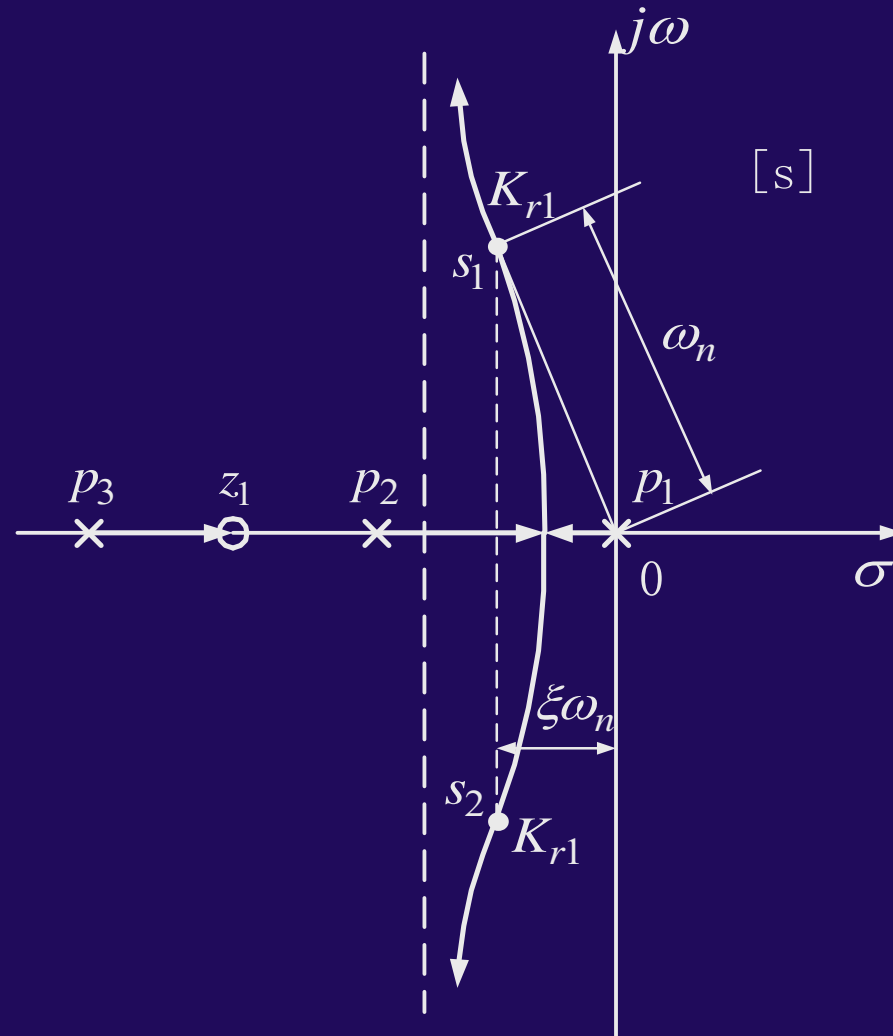


图4-22(b) 例4-15中不同附加开环零点对根轨迹的影响

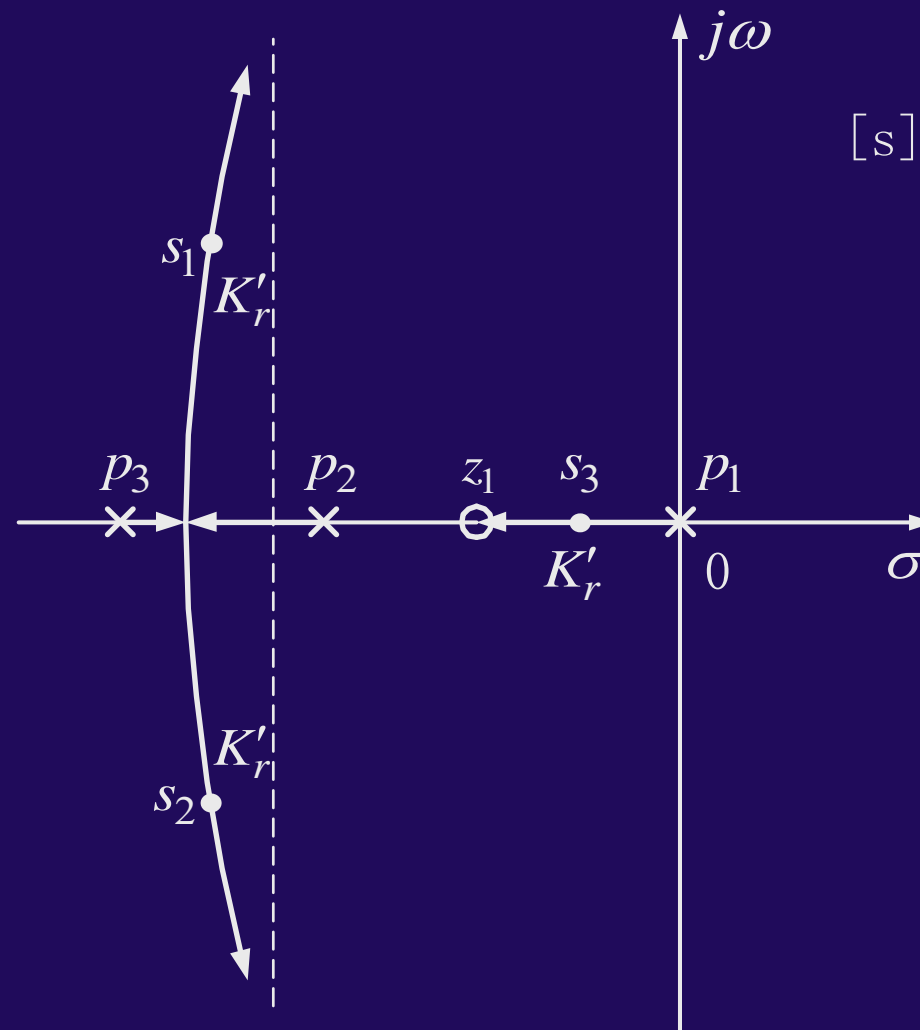


图4-22(c) 例4-15中不同附加开环零点对根轨迹的影响

比较图4-22 (b) 和4-22 (c) 会发现, 前者的渐近线离虚轴的距离较后者近。因此, 虽然从系统的稳定性角度看, 二者是一样的, 即无论 K_r 为何值系统都是稳定的。但从简化系统以便于分析系统的瞬态性能的角度看, 条件 (ii) 所对应的图4-22 (b) 则优于条件 (iii) 所对应的图4-22 (c)。这是因为图4-22 (b) 右边两条进入复平面的根轨迹离虚轴较近, 容易在其上面找到一对满足主导极点条件的共轭复数极点 $s_{1,2}$ (对应 K'_r), 这时便可将系统简化成闭环传递函数为

$$\phi(s) = \frac{s_1 \cdot s_2}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

的二阶系统, 而图4-22 (c) 所示系统不能满足这样的简化条件。

如图4-22 (c) 所示, 如果 s_1 、 s_2 、 s_3 分别为对应的系统参数 K'_r 的三个闭环极点, 由于 $\text{Re}[s_{1\ 2}] > \text{Re}[s_3]$, 共轭复数极点 s_1 、 s_2 不满足主导极点条件, 系统不能简化成二阶系统。但如果在图4-22 (c) 中, 闭环实极点 s_3 到虚轴的距离比闭环共轭复数极点 s_1 、 s_2 到虚轴的距离小五倍以上, 也可将系统简化为由闭环实极点 s_3 决定的一阶系统。

综上所述, 我们可以得到如下两点结论:

(1)附加负实零点具有将S平面上的根轨迹向左“拉”的作用，且附加零点愈靠近虚轴，这种“拉力”愈强，反之亦然。因此选择合适的附加零点有可能将系统的根轨迹从平面的右半部全部“拉”到S平面左半部，有利于改善系统的稳定性。

(2)适当选择附加零点的大小，不仅可改善系统的稳定性，还可改善系统的动态性能和简化系统分析。如上例中满足条件（ii）的附加零点可使三阶系统简化成由主导极点 s_1 、 s_2 所确定的二阶系统，适当选择附加零点的大小，就可以使由 s_1 、 s_2 所确定的二阶系统满足响应速度和阻尼比的要求，这在工程实践上是很有用的。

2 附加开环极点对根轨迹的影响

增加开环极点会使系统的阶次升高，一般来说这是不希望的。但有时为了改善系统的某项性能指标（如限制频带宽度或减小稳态误差），附加开环极点也不失为一种有效途径。下面通过一个示例分析附加开环极点对根轨迹的影响。

例4-16 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s^2 + 2s + 2)(s + a)} \quad (a > 0)$$

其中 $p_4 = -a$ 为附加开环极点，试分别绘制原系统（无附加开环极点）和 $a=0.5$ 、 $a=2$ 和 $a=6$ 时系统的根轨迹图。

解 根据系统的开环传递函数和绘制根轨迹的基本规则，将无附加开环极点的原系统和不同附加开环极点（不同 a 值）所对应的根轨迹的有关数据的计算结果列入表4-1中其对应的根轨迹图分别如图4-2 (a)、(b)、(c)、(d)所示。

由四个根轨迹图可以看出，附加开环极点的大小不同（即不同的 a 值）对根轨迹的形状会产生很大的影响，即开环极点（同样也包括开环零点）在 S 平面上位置的微小变化，有可能引起根轨迹形状的重大变化，这一点务必给予足够的重视。正是这种根轨迹形状的变化为系统的分析和设计提供了多种选择的可能。

表4-1 例4-16计算结果

项目 \ a	无附加开环极点	a=0.5	a=2	a=6
起 点 ($K_r = 0$) (n=3或4)	$p_1 = 0$ $p_2 = -1 + j$ $p_3 = -1 - j$	$p_1 = 0$ $p_2 = -1 + j$ $p_3 = -1 - j$ $p_4 = -0.5$	$p_1 = 0$ $p_2 = -1 + j$ $p_3 = -1 - j$ $p_4 = -2$	$p_1 = 0$ $p_2 = -1 + j$ $p_3 = -1 - j$ $p_4 = -6$
终 点 ($K_r \rightarrow \infty$) (m=0)	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$

渐近线 ($n-m=3$ 或 4)	交点: $\sigma_a = -0.7$ 交角: $\varphi_a = \pm 60^\circ \ 180^\circ$	交点: $\sigma_a = -0.625$ 交角: $\varphi_a = \pm 45^\circ \pm 135^\circ$	交点: $\sigma_a = -1$ 交角: $\varphi_a = \pm 45^\circ \pm 135^\circ$	交点: $\sigma_a = -2$ 交角: $\varphi_a = \pm 45^\circ \pm 135^\circ$
根轨迹与实轴的交点	无	$d = -0.255$	$d = -1$	$d = -4.62$
实轴上的根轨迹	$0 \rightarrow -\infty$	$0 \rightarrow -0.5$	$0 \rightarrow -2$	$0 \rightarrow -6$
出射角	$\theta_{p2} = -45^\circ$ $\theta_{p3} = +45^\circ$	$\theta_{p2} = -161.6^\circ$ $\theta_{p3} = +161.6^\circ$	$\theta_{p2} = -90^\circ$ $\theta_{p3} = +90^\circ$	$\theta_{p2} = -56.3^\circ$ $\theta_{p3} = +56.3^\circ$
根轨迹与虚轴的交点	$\omega_c = \pm\sqrt{2}$ $K_{rc} = 4$	$\omega_c = \pm j0.632$ $K_{rc} = 2.6$	$\omega_c = \pm j1$ $K_{rc} = 5$	$\omega_c = \pm j1.22$ $K_{rc} = 18.75$

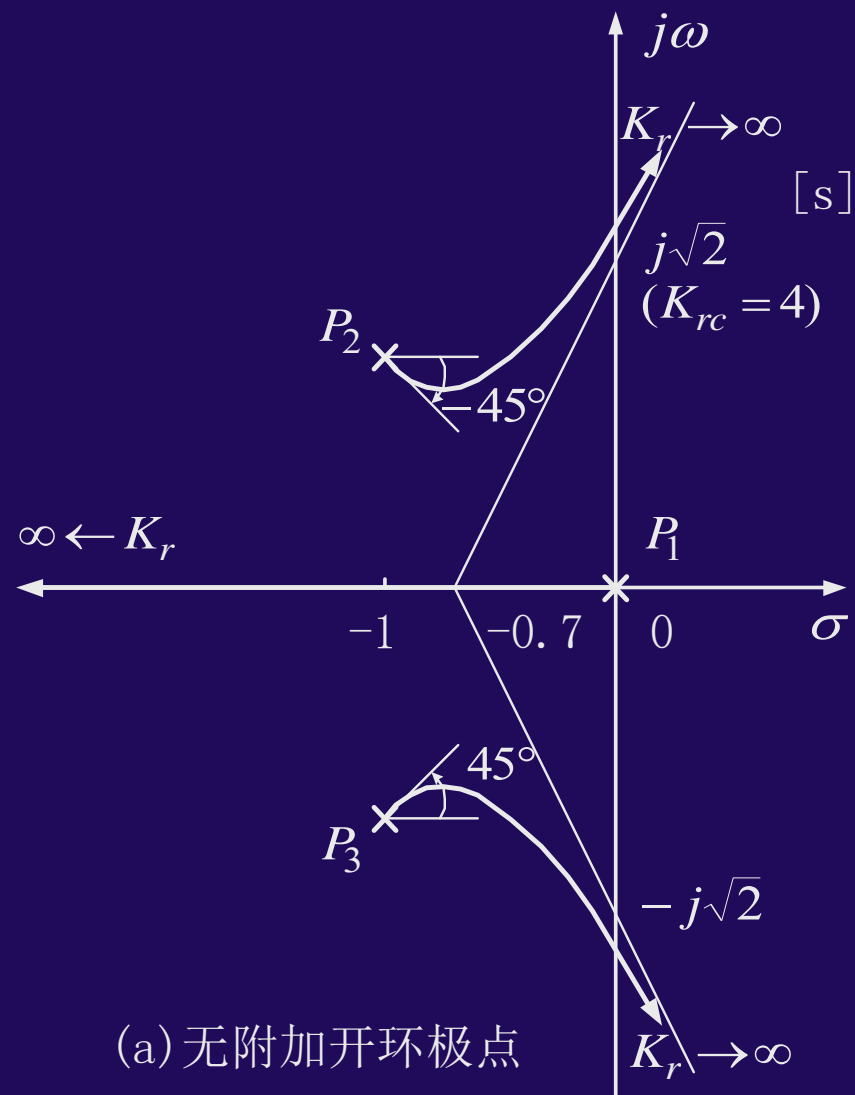


图4-23(a) 例4-16题图(附加开环极点对根轨迹的影响)

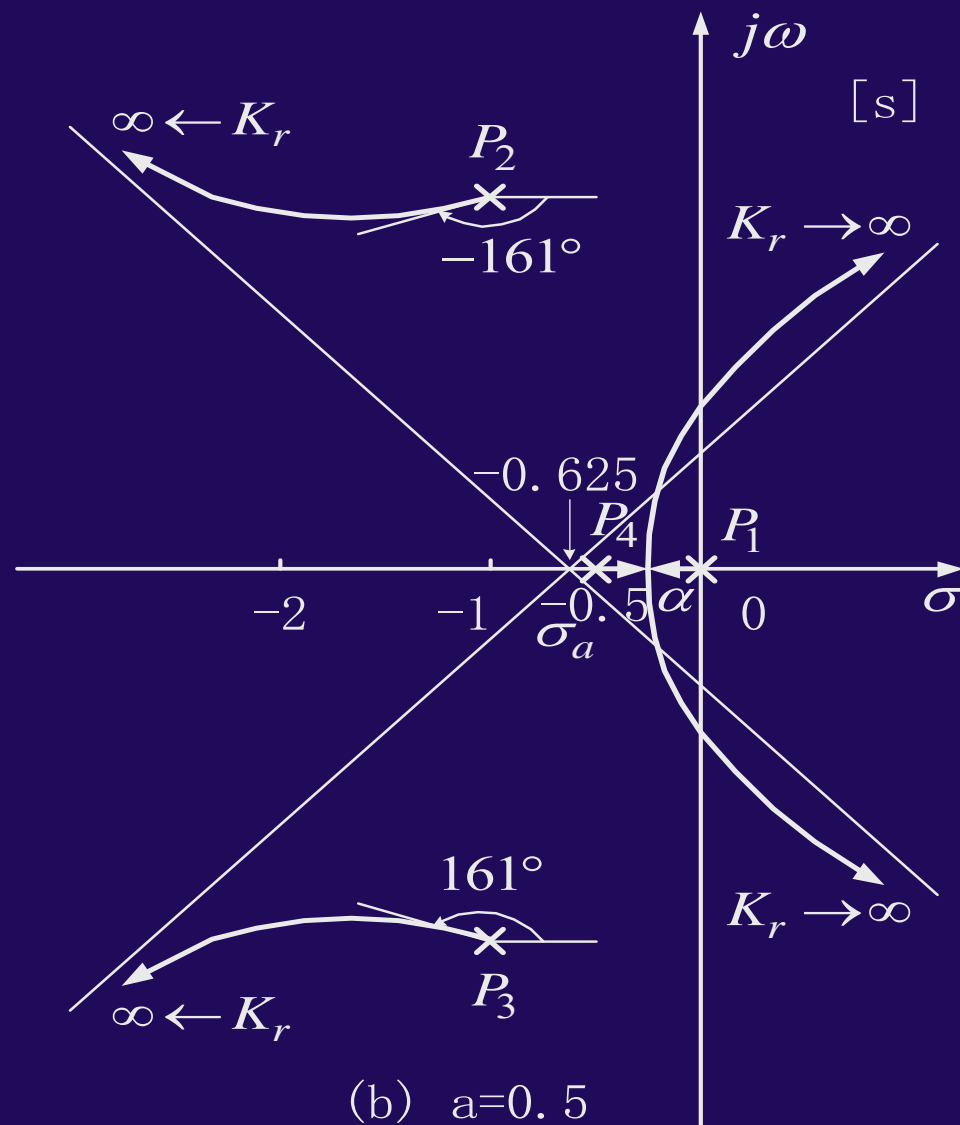


图4-23(b) 例4-16题图(附加开环极点对根轨迹的影响)

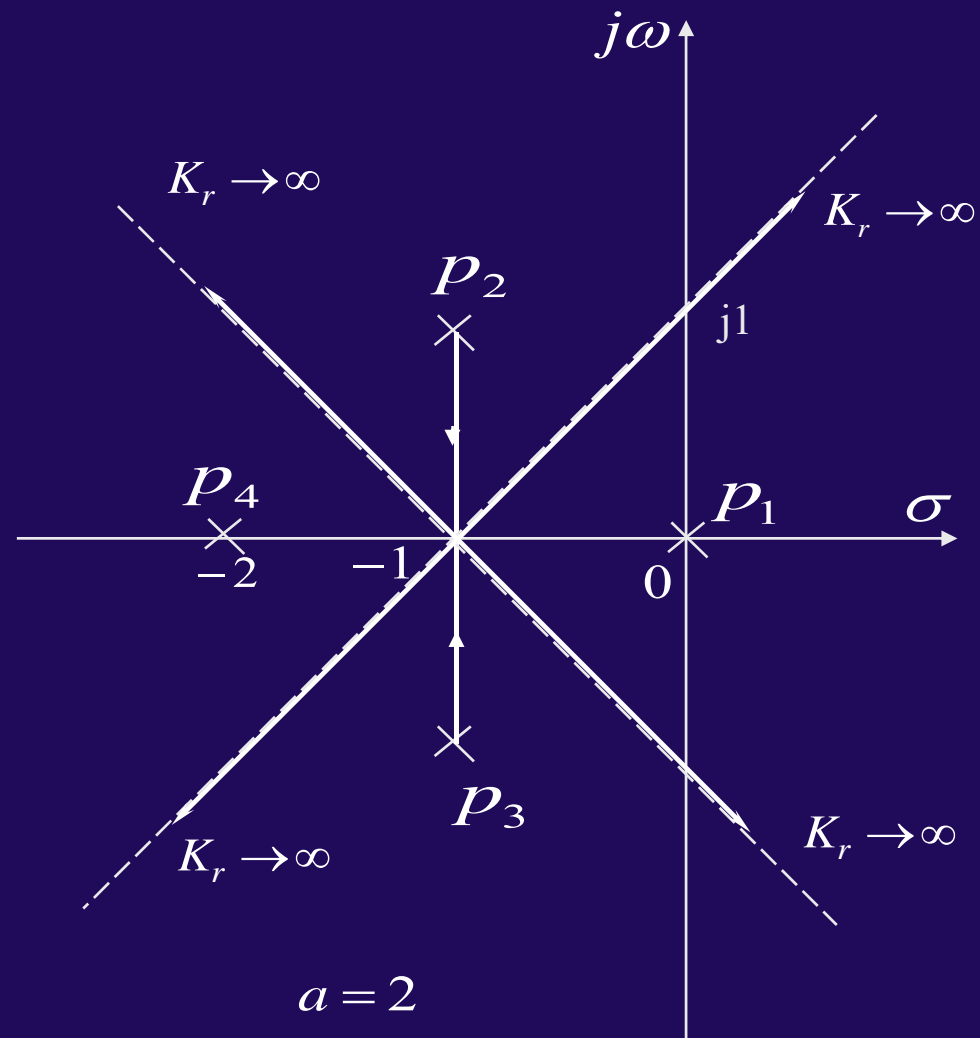


图4-23(c) 例4-16题图(附加开环极点对根轨迹的影响)

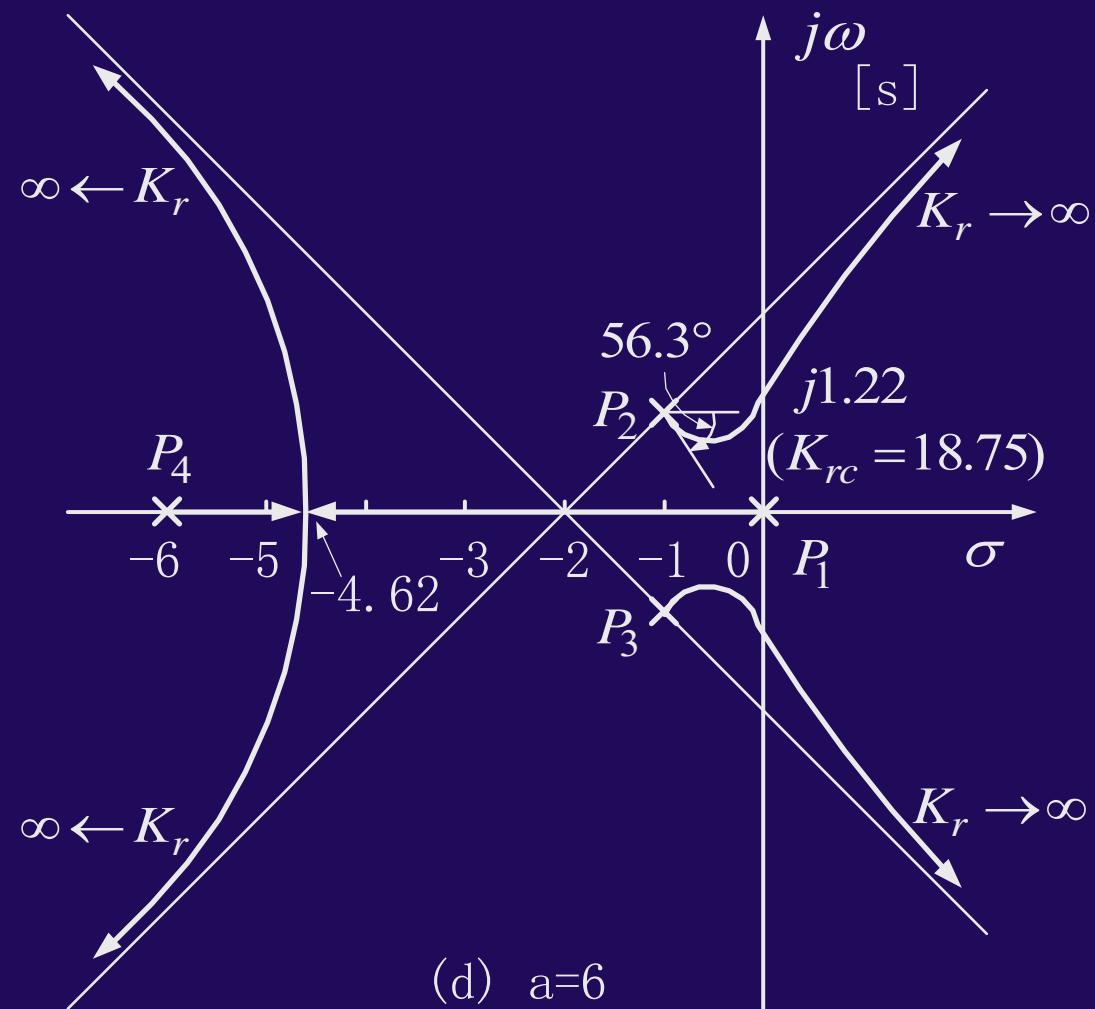
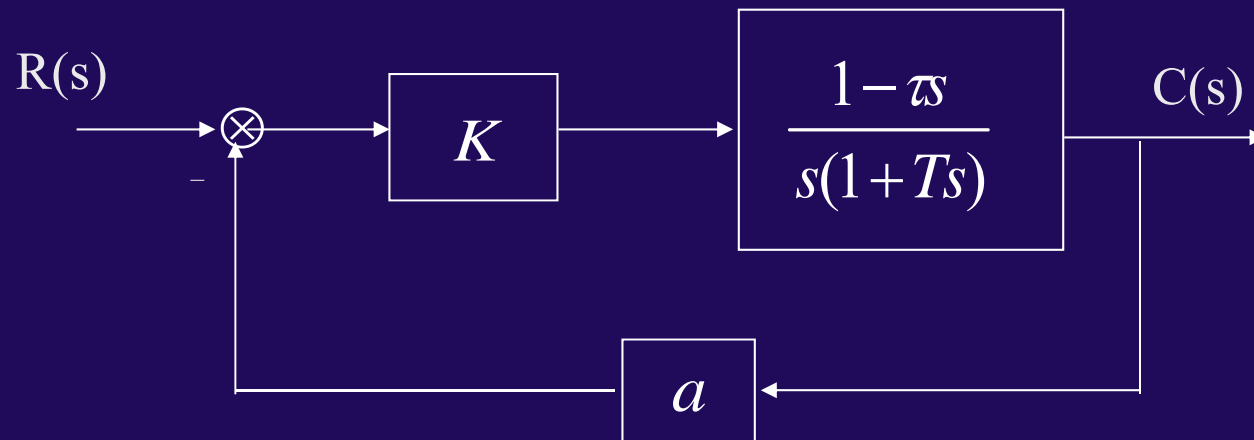


图4-23(d) 例4-16题图 (附加开环极点对根轨迹的影响)

课堂练习

1. 反馈控制系统的结构图所示，试画出闭环系统的根轨迹在 $a > 0$ 和 $a < 0$ 两种情况下的大致根轨迹，并分析系统的稳定性。



2. 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-3)}$$

要求

- (1) 绘制系统的根轨迹，并由根轨迹分析系统的性能；
- (2) 求出当 $K=10$ 时系统的单位阶跃响应，并说明响应有无超调。

1. 解 系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{aK(1-\varpi)}{s(1+Ts)} = -\frac{aK(\varpi-1)}{s(1+Ts)} = -ak^* \frac{(s-\frac{1}{\tau})}{s(s+\frac{1}{T})}$$

$$\text{式中, } k^* = \frac{\tau}{T} K$$

当 $a \neq 0$ 时, 闭环特征方程为

$$1 - \frac{ak^*(s-\frac{1}{\tau})}{s(s+\frac{1}{T})} = 1 + \frac{(-a)k^*(s-\frac{1}{\tau})}{s(s+\frac{1}{T})} = 0$$

按 180° 相角条件绘制根轨迹。

根轨迹分布在实轴上, $[0, \frac{1}{\tau}]$ $(-\infty, -\frac{1}{T}]$

当 $a > 0$ 时，闭环特征方程为

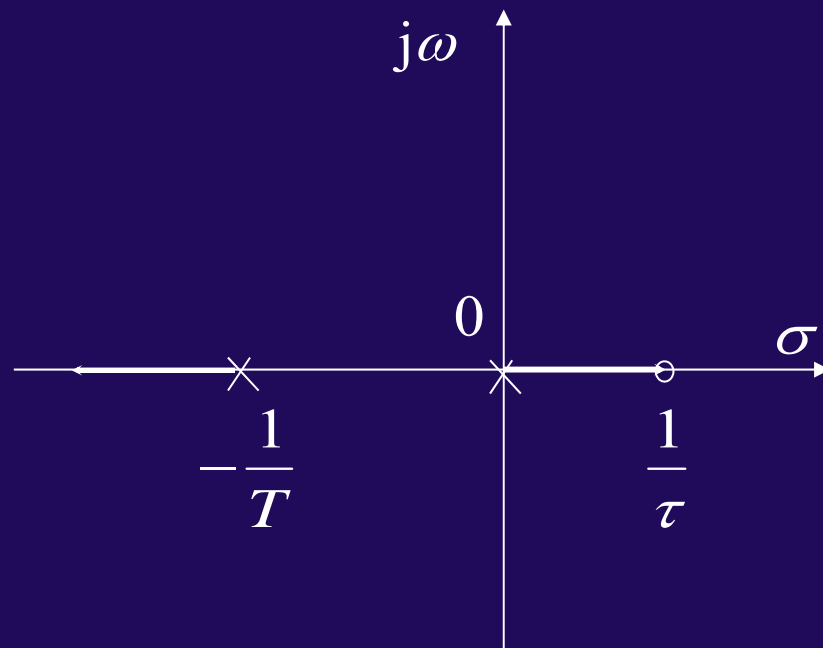
$$1 - \frac{ak^*(s - \frac{1}{\tau})}{s(s + \frac{1}{T})} = 0$$

其幅值条件和相角条件与正反馈系统的相同，故应按零度根轨迹的规则作图。

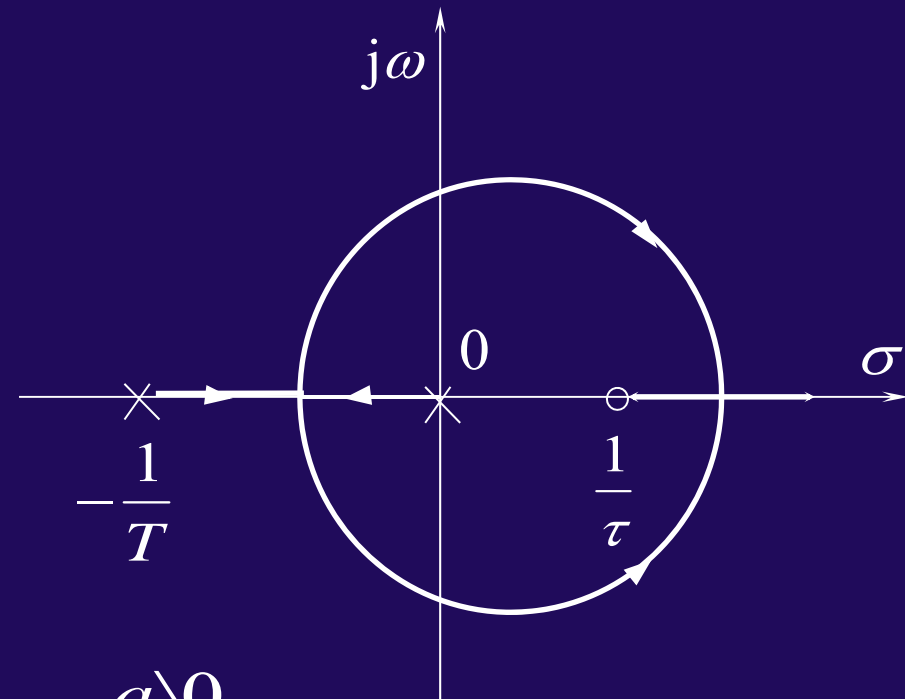
实轴上的根轨迹为 $[-\frac{1}{T}, 0], [\frac{1}{\tau}, +\infty]$ ，复平面上的根轨迹为一圆。

根轨迹与虚轴的交点及交点处的值可由劳斯判据求得。

$$K = 1/aT \quad s = \pm j\sqrt{\frac{1}{a\tau T}}$$



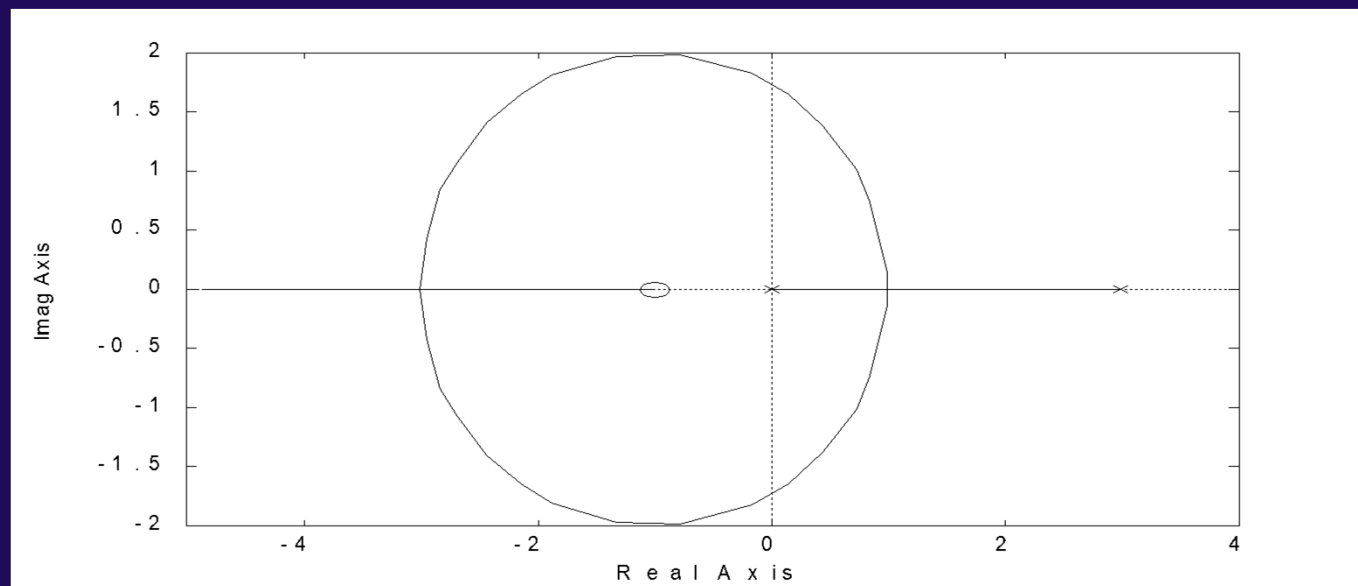
$a < 0$



$a > 0$

2. 系统的根轨迹在复平面上的一部分是一个以有限零点-1为圆心，以有限零点到分离点的距离为半径的圆，分离点的坐标为 $d_1 = 1$, $d_2 = -3$ ，与它们对应的 K 值为

$$K_1 = 1, K_2 = 9$$



可由根轨迹分析系统的稳定性和振荡性。

$K=10$ 时系统的闭环传递函数为

$$G_B(s) = \frac{10(s+1)}{s(s-3)+10(s+1)} = \frac{10(s+1)}{s^2+7s+10} = \frac{10(s+1)}{(s+2)(s+5)}$$

对于单位阶跃函数，系统的输出响应为

$$C(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+2)(s+5)}$$

其拉氏反变换为

$$c(t) = 1 + 1.67e^{-2t} - 2.67e^{-5t} \quad (t \geq 0)$$

系统的闭环极点为-2，-5。系统虽无振荡特性，但由于系统存在 $s=-1$ 的零点，所以响应有超调现象。

当时间为0.4秒时，超调量为40%。

可由 $\frac{dc(t)}{dt} = 0$ 求得 $c(t)$ 的最大值和对应的时间。