МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Кафедра вычислительной математики

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА. МЕТОД ПРОГОНКИ.

Учебно-методическое пособие
по курсу Вычислительная математика

Составитель В.В. Демченко

МОСКВА 2004

УДК 517.9

Составитель В.В. Демченко

Рецензент
Доктор физико-математических наук, профессор *А.М. Тер-Крикоров*

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Метод прогонки: Учебно-методическое пособие по курсу Вычислительная математика / Сост. В.В. Демченко. — М.: МФТИ, 2004. — 56 с.

Кратко рассмотрены способы получения разностных схем для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и метод прогонки для их решения. Предложены задачи для практикуму на ЭВМ.

Предназначено для студентов 3-го курса факультета аэрофизики и космических исследований Московского физико-технического института (государственного университета).

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ..5
I.ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ..5
I.1.Аналитическое решение модельной задачи............6
I.2. Численное решение модельной задачи..................8
I.2.1. Постановка разностной модельной задачи 8
I.2.2. Метод прогонки 9
I.3.Численное решение задачи с переменными коэффициентами 12
II. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ..........14
II.1. Аналитическое решение модельной задачи.........15
II.2. Численное решение модельной задачи..............17
II.2.1. Разностная модельная задача..........................17
II.2.2. Метод циклической прогонки..........................18
II.3. Численное решение разностной задачи с переменными коэффициентами 20
III.ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ............23
III.1. Аналитическое решение модельной задачи........24
III.2.Численное решение модельной задачи 27
III.2.1. Постановка разностной модельной задачи 27
III.2.2. Метод встречных прогонки..............................29

III.3. Численное решение задачи с переменными коэффициентами 33
IV. ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ 35
V. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА НА ЭВМ 37
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 39
ПРИЛОЖЕНИЕ 40

Введение

Большинство физических процессов, протекающих в окружающем человека материальном мире, имеет нестационарный диссипативный характер, но в ряде случаев оказывается, что условия, задаваемые на границах областей и определяющие решение, не зависят от времени. Тогда можно ожидать, что через некоторый конечный промежуток времени процесс станет стационарным и частные производные по времени от искомых функций обратятся в ноль. Например, если рассматриваются процессы теплопроводности или диффузии в конечном объеме вещества, граничные условия не зависят от времени, а исследователей интересуют установившиеся стационарные распределения температуры или концентрации в изучаемом пространстве, то искомое решение будет являться функцией от пространственных координат. Допустим к тому же, что задача обладает свойством изотропности по двум ортогональным пространственным направлениям из трех. Тогда математическая модель представляет собой краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Остановимся более подробно на трех возможных случаях постановки задачи [1].

I.Третья краевая задача для стационарного уравнения теплопроводности с непрерывными коэффициентами

Задача состоит в нахождении решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя краевыми условиями на интервале (0, 1) с точностью ε:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}[k(x)\frac{du}{dx}] - q(x)u = -f(x), \\ k(0)u'_x(0) = \delta_1 u(0) - \varepsilon_1, \\ -k(1)u'_x(1) = \delta_2 u(1) - \varepsilon_2, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $\delta_1, \delta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ – const, $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – непрерывные ограниченные положительные на (0,1) функции. Построить аналитическое решение задачи (1) для произвольных функций $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ не удастся, но если заменить указанные функции константами, тогда можно решить задачу (1) аналитически в общем виде и полученное решение использовать в дальнейшем для отладки численных программ. Поэтому прежде чем приступить к численному решению задачи (1), сначала рассмотрим вспомогательную модельную задачу с постоянными коэффициентами $\bar{k}, \bar{q}, \bar{f}$ на (0,1) и с той же точностью e:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\bar{k}\frac{du}{dx}] - \bar{q}u = -\bar{f}, \\ k(0)u'_x(0) = \delta_1 u(0) - \varepsilon_1, \\ -k(1)u'_x(1) = \delta_2 u(1) - \varepsilon_2, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где δ_1, δ_2, ε_1, ε_2 – const, $\bar{k} = k(0{,}5)$, $\bar{q} = q(0{,}5)$, $\bar{f} = f(0{,}5)$.

I.1. Аналитическое решение модельной задачи.

Общее решение дифференциального уравнения из (2) можно представить в виде $u = u_{\text{общ}} + u_{\text{частн}}$, где $u_{\text{общ}}$ – общее решение однородного уравнения, а $u_{\text{частн}}$ – какое-то частное решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (2).

Для нахождения общего решения однородного дифференциального уравнения второго порядка сделаем в нём подстановку

$u = e^{\lambda x}$ и после сокращения на $e^{\lambda x}$ придем к характеристическому уравнению:

$$\bar{k}\lambda^2 - \bar{q} = 0. \qquad (3)$$

Разрешая (3) относительно λ, получим

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}; (\lambda_1 = \sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}};\ \lambda_2 = -\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}).$$

Тогда общее решение однородного уравнения можно записать в виде

$$u_{\text{общ}} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}x}, \qquad (4)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. То, что $u_{\text{общ}}$ из (4) – общее решение однородного уравнения, проверяется подстановкой его в это уравнение и получением тождества. В качестве частного решения неоднородного уравнения можно взять

$$u_{\text{частн}} = \frac{\bar{f}}{\bar{q}},$$

и тогда общее решение задачи (2) представляется в виде

$$u = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{\bar{f}}{\bar{q}}. \qquad (5)$$

После подстановки в краевые условия выражения (5) приходим к системе из двух линейных уравнений относительно двух неизвестных постоянных C_1 и C_2.

$$\left.\begin{aligned} (\bar{k}\lambda_1 - \delta_1)C_1 + (\bar{k}\lambda_2 - \delta_1)C_2 = \delta_1\frac{\bar{f}}{\bar{q}} - \varepsilon_1, \\ -(\bar{k}\lambda_1 + \delta_2)e^{\lambda_1}C_1 - (\bar{k}\lambda_2 + \delta_2)e^{\lambda_2}C_2 = \delta_2\frac{\bar{f}}{\bar{q}} - \varepsilon_2. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Решая (6), получаем

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{(\bar{k}\lambda_2+\delta_2)(\delta_1\bar{f}-\varepsilon_1\bar{q})e^{\lambda_2}+(\bar{k}\lambda_2-\delta_1)(\delta_2\bar{f}-\varepsilon_2\bar{q})}{\bar{q}[(\bar{k}\lambda_1-\delta_1)(\bar{k}\lambda_2+\delta_2)e^{\lambda_2}-(\bar{k}\lambda_2-\delta_1)(\bar{k}\lambda_1+\delta_2)e^{\lambda_1}]} \\ C_2 &= \frac{(\bar{k}\lambda_1+\delta_2)(\delta_1\bar{f}-\varepsilon_1\bar{q})e^{\lambda_1}+(\bar{k}\lambda_1-\delta_1)(\delta_2\bar{f}-\varepsilon_2\bar{q})}{\bar{q}[(\bar{k}\lambda_2-\delta_1)(\bar{k}\lambda_1+\delta_2)e^{\lambda_1}-(\bar{k}\lambda_2+\delta_2)(\bar{k}\lambda_1-\delta_1)e^{\lambda_2}]} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

и тем самым находим решение задачи (2), подставляя (7) в (5).

I.2. Численное решение модельной задачи

I.2.1. Постановка разностной модельной задачи

Введем в области интегрирования на $[0,1]$ равномерную сетку, выбрав в качестве узлов точки $x_l = lh,\ l=\overline{0 \div L}$, где $h=\dfrac{1}{L}$. Если каждому узлу сетки $x_l,\ l=\overline{0 \div L}$ поставить в соответствие некоторое значение $f_l,\ l=\overline{0 \div L}$, то сеточную функцию можно определить как упорядоченное множество значений $\{f_l\}$, заданных на сетке $\{x_l\}$, $l=\overline{0 \div L}$. Рассмотрим конечномерное пространство размерности $L+1$, элементами которого будут сеточные функции $\{f_l\}=f^{(h)}$, определенные на сетке $\{x_l\}$. Если в этом пространстве ввести норму как $\left\|f^{(h)}\right\|_1 = \max\limits_l |f_l|$, то получим конечномерное нормированное пространство размерности $L+1$.

Для постановки разностной задачи поступим следующим образом: в каждом узле сетки $l=\overline{0 \div L-1}$ заменим вторую производную в дифференциальном уравнении (2) конечно-разностным отношением вида

$$\left[\frac{d}{dx}\bar{k}\frac{du}{dx}\right]_{x=x_l} \approx \frac{\bar{k}\left(\dfrac{u_{l+1}-u_l}{h}\right)-\bar{k}\left(\dfrac{u_l-u_{l-1}}{h}\right)}{h}$$

и в результате получим уравнение, приближающее дифференциальное в узле l:

$$\bar{k}\frac{u_{l+1}-2u_l+u_{l-1}}{h^2}-\bar{q}u_l=-\bar{f};\ l=\overline{1 \div L-1}. \tag{8}$$

Система уравнений (8) состоит из $L-1$ линейного уравнения, относительно $L+1$ неизвестного значения сеточной функции $u^{(h)}$ Для корректной постановки задачи воспользуемся двумя краевыми условиями из (2), записав приближенные выражения для первых производных:

$$\left.\begin{aligned} \bar{k}\frac{u_1-u_0}{h} &= \delta_1 u_0-\varepsilon_1, \\ -\bar{k}\frac{u_L-u_{L-1}}{h} &= \delta_2 u_L-\varepsilon_2. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Объединяя уравнения (8) и (9), получаем систему линейных уравнений $L+1$ порядка относительно $L+1$ неизвестного значения сеточной функции $u^{(h)}=\{u_l\}$, $l=\overline{0 \div L-1}$, которую и будем называть разностной модельной задачей.

I.2.2. Метод прогонки

Для решения разностной модельной задачи или, что то же самое, системы линейных уравнений порядка $L+1$ применим метод прогонки, обратив внимание на тот факт, что каждое уравнение системы содержит не более трех ближайших значений искомой сеточной функции. Для удобства последующих преобразований умножим уравнения (8) на h^2, а каждое из двух уравнений (9) – на h, затем после перегруппировки членов уравнений введем новые обозначения:

$a_l = \bar{k}$; $b_l = -2\bar{k} - \bar{q}h^2$; $c_l = \bar{k}$; $d_l = -\bar{f}h^2$, $l = \overline{1 \div L-1}$;

$a_0 = \bar{k}$; $b_0 = -\bar{k} - \delta_1 h$; $c_0 = 0$; $d_0 = -\varepsilon_1 h$;

$a_L = 0$; $b_L = -\bar{k} - \delta_2 h$; $c_L = \bar{k}$; $d_L = -\varepsilon_2 h$

и перепишем систему (8), (9) в виде

$$\left.\begin{array}{c} a_0 u_1 + b_0 u_0 = d_0, \\ a_l u_{l+1} + b_l u_l + c_l u_{l-1} = d_l,\ l = \overline{1 \div L-1}, \\ b_L u_L + c_L u_{L-1} = d_L. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Метод прогонки состоит из двух этапов: прямой и обратной прогонки.

При прямой прогонке сначала первое уравнение (10) разрешают относительно u_0:

$$u_0 = -\frac{a_0}{b_0}u_1 + \frac{d_0}{b_0}$$

и вводят обозначения

$$\alpha_0 = -\frac{a_0}{b_0};\ \beta_0 = \frac{d_0}{b_0};\ u_0 = \alpha_0 u_1 + \beta_0. \tag{11}$$

Далее, используя метод индукции, докажем, что систему линейных уравнений (10), имеющую трехдиагональную матрицу, можно преобразовать в систему линейных уравнений с двухдиагональной матрицей. Для доказательства предположим, что $l-1$ уравнение системы (10) уже представлено в виде

$$u_{l-1} = \alpha_{l-1}u_l + \beta_{l-1} \tag{12}$$

с известными коэффициентами α_{l-1} и β_{l-1}. Покажем, как к аналогичному виду приводится и l – уравнение системы (10). Подставим в него выражение для u_{l-1} из (12) и разрешим относительно u_l:

$$u_l = -\frac{a_l}{b_l + c_l\alpha_{l-1}}u_{l+1} + \frac{d_l - c_l\beta_{l-1}}{b_l + c_l\alpha_{l-1}}. \tag{13}$$

Обозначим

$$\alpha_l = -\frac{a_l}{b_l + c_l\alpha_{l-1}};\ \beta_l = \frac{d_l - c_l\beta_{l-1}}{b_l + c_l\alpha_{l-1}} \tag{14}$$

и перепишем (13):

$$u_l = \alpha_l u_{l+1} + \beta_l. \tag{15}$$

Значения α_l и β_l находятся, так как коэффициенты a_l, b_l, c_l, d_l задаются при постановке задачи (10), а значения α_{l-1} и β_{l-1} считаются известными по предположению индукции (12).

Учитывая формулы (11) и (15), в которых первое уравнение системы (10) и l – уравнение этой же системы приведены к виду (15) с известными коэффициентами α_l и β_l, согласно методу индукции делаем вывод о том, что любое уравнение системы (10) приводится к виду (15). Следовательно, это справедливо для $L-1$ уравнения системы (10) и оно представимо в той же форме с известными коэффициентами α_{L-1} и β_{L-1}:

$$u_{L-1} = \alpha_{L-1}u_L + \beta_{L-1}. \tag{16}$$

Подставим u_{L-1} из (16) в последнее уравнение системы (10) и разрешим относительно u_L:

$$u_L = \frac{d_L - c_L\beta_{L-1}}{b_L + c_L\alpha_{L-1}}. \tag{17}$$

Нахождением u_L заканчивается прямая прогонка.

При обратной прогонке, используя формулы (15) для $l = \overline{L-1 \div 0}$ и вычисленное значение u_L (17), находят все u_l, а следовательно, и сеточную функцию $u^{(h)}$, которая является решением разностной модельной задачи (8), (9).

1.3. Численное решение задачи с переменными коэффициентами

При решении задачи (1) с переменными коэффициентами вначале вводят в области интегрирования сетку, например, разбивая отрезок $[0,1]$ равномерно на L частей так, что расстояние между соседними узлами постоянно и равно $h = 1/L$. Совокупность точек $x_0 = 0; x_l = x_0 + lh, l = \overline{1 \div L}$ образует сетку. Подобно тому, как это было сделано в § 1.2, сформулируем разностную задачу, заменив во внутренних узловых точках x_l, $l = \overline{1 \div L-1}$ в дифференциальном уравнении (1) производные конечно-разностными отношениями и использовав следующие обозначения:

$$k(x_l \pm h/2) = k(x_{l\pm 1/2}) = k_{l\pm 1/2};$$
$$q(x_l) = q_l;\ f(x_l) = f_l;$$

$$\left[\frac{d}{dx}k(x)\frac{du}{dx}\right]_{x=x_l} \approx \frac{k_{l+1/2}\left(\dfrac{u_{l+1}-u_l}{h}\right) - k_{l-1/2}\left(\dfrac{u_l - u_{l-1}}{h}\right)}{h}.$$

После подстановки этих выражений в дифференциальное уравнение задачи (1) приходим к системе линейных уравнений порядка $L-1$ относительно $L+1$ неизвестного значения сеточной функции $u_l, l = \overline{0 \div L}$:

$$\frac{k_{l+1/2}(u_{l+1}-u_l) - k_{l-1/2}(u_l - u_{l-1})}{h^2} - q_l u_l = -f_l; l = \overline{1 \div L-1}. \tag{18}$$

Заменяя первые производные в краевых условиях (1) двухточечными конечно-разностными отношениями, получаем ещё два линейных уравнения, которые делают систему уравнений (18) полной:

$$\left.\begin{aligned} k_0 \frac{u_1 - u_0}{h} &= \delta_1 u_0 - \varepsilon_1, \\ -k_L \frac{u_L - u_{L-1}}{h} &= \delta_2 u_L - \varepsilon_2. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Преобразуем систему (18), (19), умножив на h^2 уравнения (18) и на h выражения (19). После этого сгруппируем члены с одинаковыми неизвестными и введем обозначения:

$$a_0 = k_0; b_0 = -(k_0 + \delta_1 h); c_0 = 0; d_0 = -\varepsilon_1 h;$$

$$a_l = k_{l+1/2}; b_l = -(k_{l+1/2} + k_{l-1/2} + q_l h^2); c_l = k_{l-1/2};$$

$$d_l = -f_l h^2; l = \overline{1 \div L-1};$$

$$a_L = 0; b_L = -(k_L + \delta_2 h); c_L = k_L; d_L = -\varepsilon_2 h.$$

Тогда систему уравнений (18), (19) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} a_0 u_1 + b_0 u_0 &= d_0, \\ a_l u_{l+1} + b_l u_l + c_l u_{l-1} &= d_l,\ l = \overline{1 \div L-1}, \\ b_L u_L + c_L u_{L-1} &= d_L, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

и она ничем не отличается от системы линейных уравнений (10) из § I.2.2 с точностью до значений коэффициентов $a_l, b_l, c_l, d_l, l = \overline{0 \div L}$. Следовательно, для решения системы (20) можно применить метод прогонки, рассмотренный в § I.2.2, а полученная в результате вычислений сеточная функция будет решением разностной задачи с переменными коэффициентами (18), (19).

II. Краевая задача для стационарного уравнения теплопроводности с периодическими коэффициентами

Задача состоит в построении периодического решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, имеющими период, равный 1, на интервале (0,1) с точностью e:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] - q(x)u = -f(x), \\ &u\Big|_{x=0+0} = u\Big|_{x=1-0}, \\ &ku'_x\Big|_{x=0+0} = ku'_x\Big|_{x=1-0}, \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

где $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – непрерывные, ограниченные, положительные, периодические функции, $k(x+1) = k(x)$, $q(x+1) = q(x)$, $f(x+1) = f(x)$.

В общем случае для произвольных $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ получить аналитическое решение не удается, но если указанные функции заменить константами, то тогда задача (21) решается аналитически в общем виде и найденное решение можно использовать в дальнейшем для отладки численных программ. Поэтому прежде, чем приступать к численному решению задачи (21), сформулируем вспомогательную задачу с постоянными

коэффициентами $\overline{k}$, $\overline{q}$ и заданной $\overline{f}(x)$ на (0,1) и с той же точностью e, что и в задаче (21):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(\overline{k}\frac{du}{dx}) - \overline{q}u = -\overline{f}(x), \\ &u\Big|_{x=0+0} = u\Big|_{x=1-0}, \\ &u'_x\Big|_{x=0+0} = u'_x\Big|_{x=1-0}, \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

где $\overline{k} = k(0)$; $\overline{q} = q(0)$, а $\overline{f}(x)$ определяется по номеру задания.

II.1 Аналитическое решение модельной задачи

Общее решение дифференциального уравнения из (22) можно представить в виде суммы $u = u_{общ} + u_{частн}$, где $u_{общ}$ – общее решение однородного уравнения, а $u_{частн}$ – какое-либо частное решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

Для нахождения $u_{общ}$ подставим в однородное уравнение $u = e^{\lambda x}$ и после сокращения на $e^{\lambda x}$ придем к характеристическому уравнению

$$\overline{k}\lambda^2 - \overline{q} = 0. \qquad (23)$$

Разрешая (23) относительно λ, получим

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\overline{q}}{\overline{k}}}\,;\ \lambda_2 = -\sqrt{\frac{\overline{q}}{\overline{k}}}\,.$$

Тогда общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$u_{общ} = C_1 e^{\sqrt{\frac{\overline{q}}{\overline{k}}}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\overline{q}}{\overline{k}}}x} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad (24)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. То, что $u_{общ}$ из (24) является решением однородного уравнения, проверяется подстановкой его в это уравнение и получением в результате тождества. Функцию $\overline{f}(x)$ из правой части дифференциального уравнения (22) можно представить в общем виде как $\overline{f}(x) = \mu + \nu F(x)$, где μ, ν – постоянные, а $F(x)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = -4\pi^2 F(x)\,;\; F(0) = F(1);\; F_x'(0) = F_x'(1)\,.$$

Тогда в качестве частного решения неоднородного уравнения можно взять

$$u_{частн} = \frac{\mu}{\overline{q}} + \frac{\nu}{4\pi^2\overline{k} + \overline{q}} F(x),$$

и общее решение задачи (22) представляется в виде

$$u_{частн} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{\mu}{\overline{q}} + \frac{\nu}{4\pi^2\overline{k} + \overline{q}} F(x). \qquad (25)$$

После подстановки выражения (25) в краевые условия задачи (22) приходим к системе из двух линейных уравнений относительно двух неизвестных постоянных C_1 и C_2:

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 + \frac{\mu}{q} + \frac{\nu F(0)}{4\pi^2\overline{k} + \overline{q}} &= C_1 e^{\lambda_1} + C_2 e^{\lambda_2} + \frac{\mu}{q} + \frac{\nu F(1)}{4\pi^2\overline{k} + \overline{q}} \\ C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + \frac{\nu F_x'(0)}{4\pi^2\overline{k} + \overline{q}} &= C_1\lambda_1 e^{\lambda_1} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2} + \frac{\nu F_x'(1)}{4\pi^2\overline{k} + \overline{q}} \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Так как в общем случае $\lambda_1 \neq \lambda_2$, получаем $C_1 = C_2 = 0$, и решение задачи (22) равняется

$$u = u_{частн} = \frac{\mu}{q} + \frac{\nu}{4\pi^2\overline{k} + \overline{q}} F(x). \qquad (27)$$

II.2. Численное решение модельной задачи

II.2.1. Разностная модельная задача

Введем в области интегрирования на $[0,1]$ равномерную сетку, выбрав в качестве узлов точки $x_l = lh$, $l = \overline{0 \div L}$, где $h = 1/L$ (см. § I.2.1). Для постановки разностной задачи поступим следующим образом: в каждом узле сетки $l = \overline{1 \div L-1}$ заменим вторую производную в дифференциальном уравнении (22) конечно-разностным отношением вида

$$\left[\frac{d}{dx}(\overline{k}\frac{du}{dx})\right]_{x=x_l} \approx \frac{\overline{k}(\frac{u_{l+1} - u_l}{h}) - \overline{k}(\frac{u_l - u_{l-1}}{h})}{h}$$

и получим уравнение, приближающее дифференциальное в узле l:

$$\overline{k}\frac{u_{l+1} - 2u_l + u_{l-1}}{h^2} - \overline{q}u_l = -f_l;\, l = \overline{1 \div L-1}. \qquad (28).$$

Если отрезок $[0,1]$ представляет собой замкнутую кривую, а координата x – длина дуги, отсчитываемая от произвольно выбранной на этой кривой точки $x = 0$, причем $\overline{f}(x) = \overline{f}(x+1)$, то тогда краевые условия в задаче (22)

$$u\big|_{x=0+0} = u\big|_{x=1-0};\; u_x'\big|_{x=0+0} = u_x'\big|_{x=1-0}$$

эквивалентны условиям периодичности $u(x) = u(x+1)$ и выполнения дифференциального уравнения в точке $x = 0$:

$$\frac{d}{dx}(\overline{k}\frac{du}{dx}) - \overline{q}u = -\overline{f}(x)\,.$$

Это означает, что в качестве конечно-разностного приближения краевых условий в задаче (22) можно использовать уравнения

$$\left.\begin{aligned}&\bar{k}\,\frac{(u_1-u_0)-(u_L-u_{L-1})}{h^2}-\bar{q}u_0=-\bar{f}_0,\\&u_L=u_0,\end{aligned}\right\}$$

или, исключая u_L из первого уравнения, приходим к

$$\left.\begin{aligned}&\bar{k}\,\frac{u_1-2u_0+u_{L-1}}{h^2}-\bar{q}u_0=-\bar{f}_0,\\&u_L=u_0.\end{aligned}\right\}\qquad(29)$$

Система уравнений (28), (29) содержит $L+1$ линейное уравнение относительно $L+1$ неизвестного значения u_l, $l=\overline{0\div L}$ сеточной функции $u^{(h)}$. Для ее решения можно применить метод циклической прогонки [2].

II.2.2. Метод циклической прогонки

Будем искать решение задачи (28), (29) в виде суммы двух сеточных функций, определенных на той же сетке $\{x_l\}$, $l=\overline{0\div L}$, что и сеточная функция $u^{(h)}=v^{(h)}+u_0w^{(h)}$, u_0 – const, но являющихся решением двух вспомогательных задач:

$$\left.\begin{aligned}&\bar{k}\,\frac{\upsilon_{l+1}-2\upsilon_l+\upsilon_{l-1}}{h^2}-\bar{q}\upsilon_l=-\bar{f}_l;\,l=\overline{1\div L-1},\\&\upsilon_0=\upsilon_L=0,\end{aligned}\right\}\qquad(30)$$

$$\left.\begin{aligned}&\bar{k}\,\frac{w_{l+1}-2w_l+w_{l-1}}{h^2}-\bar{q}w_l=0;\,l=\overline{1\div L-1},\\&w_0=w_L=1.\end{aligned}\right\}\qquad(31)$$

Умножим уравнения задач (30) и (31) при $l=\overline{1\div L-1}$ на h^2, сгруппируем члены с одинаковыми неизвестными и введём обозначения

$$a_l=\bar{k}\,;\quad b_l=-2\bar{k}-\bar{q}h^2\,;\quad c_l=\bar{k}.$$

Тогда задача (30) примет вид

$$\left.\begin{aligned}&a_l\upsilon_{l+1}+b_l\upsilon_l+c_l\upsilon_{l-1}=-h^2\bar{f}_l,\,l=\overline{1\div L-1},\\&\upsilon_0=\upsilon_L=0,\end{aligned}\right\}\qquad(32)$$

а задача (31) –

$$\left.\begin{aligned}&a_lw_{l+1}+b_lw_l+c_lw_{l-1}=0,\,l=\overline{1\div L-1},\\&w_0=w_L=1.\end{aligned}\right\}\qquad(33)$$

Введём в системе уравнений (32) обозначение $d_l=-h^2\mathrm{f}_1$, $l=\overline{1\div L-1}$ и перепишем условия: $\upsilon_0=0$ в виде $a_0\upsilon_1+b_0\upsilon_0=d_0$, где $a_0=0$, $b_0=1$, $d_0=0$ и $\upsilon_L=0$ в виде $b_L\upsilon_L+c_L\upsilon_{L-1}=d_L$, где $b_L=1$, $c_L=0$, $d_L=0$. В результате задача (32) запишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}&a_0\upsilon_1+b_0\upsilon_0=d_0,\\&a_l\upsilon_{l+1}+b_l\upsilon_l+c_l\upsilon_{l-1}=d_l,\,l=\overline{1\div L-1},\\&b_L\upsilon_L+c_L\upsilon_{L-1}=d_L.\end{aligned}\right\}\qquad(34)$$

Совершенно аналогично затем поступаем с системой линейных уравнений (33), вводя обозначения $d_l=0$, $l=\overline{1\div L-1}$ и переписывая условия: $w_0=1$ в виде $a_0w_1+b_0w_0=d_0$, где $a_0=0$, $b_0=1$, $d_0=1$ и $w_L=1$ в виде $b_Lw_L+c_Lw_{L-1}=d_L$, где $b_L=1$, $c_L=0$, $d_L=1$. Тогда задача (33) преобразуется к виду:

$$\left.\begin{aligned}&a_0w_1+b_0w_0=d_0,\\&a_lw_{l+1}+b_lw_l+c_lw_{l-1}=d_l,\,l=\overline{1\div L-1},\\&b_Lw_L+c_Lw_{L-1}=d_L.\end{aligned}\right\}\qquad(35)$$

Система линейных уравнений (34) и (35) отличается от системы (10) только, быть может, значениями коэффициентов

a_l, b_l, c_l, d_l и обозначением вектора неизвестных. Следовательно, найти их решение можно методом прогонки, уже рассмотренным в параграфе I.2.2 данного пособия. Система (28) тождественно удовлетворяется после подстановки в неё $u_l = \upsilon_l + u_0 w_l,\ l = \overline{1 \div L-1}$, где υ_l, w_l – решения задач (30) и (31), а u_0 – некоторая постоянная. В самом деле,

$$\bar{k}\frac{u_{l+1}-2u_l+u_{l-1}}{h^2} - \bar{q}u_l + \bar{f_l} = \bar{k}\frac{(\upsilon_{l+1}+u_0w_{l+1}) - 2(\upsilon_l+u_0w_l)}{h^2} +$$

$$+\frac{(\upsilon_{l-1}+u_0w_{l-1})}{h^2} - \bar{q}(v_l+u_0w_l) + \bar{f_l} = \bar{k}\frac{\upsilon_{l+1}-2\upsilon_l+\upsilon_{l-1}}{h^2} - \bar{q}\upsilon_l +$$

$$+\bar{f_l} + u_0\left(\bar{k}\frac{w_{l+1}-2w_l+w_{l-1}}{h^2} - \bar{q}w_l\right) = 0, l = \overline{1 \div L-1}.$$

Для того чтобы $u_l = \upsilon_l + u_0 w_l$, $l = \overline{0 \div L}$ было решением разностной модельной задачи (28), (29), необходимо потребовать, чтобы тождественно удовлетворялась система из двух уравнений (29). Подставим в неё выражения для u_L, u_{L-1}, u_1:

$$\left.\begin{aligned} &\upsilon_L + u_0 w_L = u_0 w_L = u_0, \\ &\bar{k}\frac{\upsilon_1 + u_0 w_1 - 2u_0 + \upsilon_{L-1} + u_0 w_{L-1}}{h^2} - \bar{q}u_0 = -\bar{f_0}. \end{aligned}\right\}$$

Второе уравнение в (29) превращается в тождество, а из первого (29) получаем

$$u_0 = \frac{\bar{k}(\upsilon_1 + \upsilon_{L-1}) + \bar{f_0}h^2}{2\bar{k} + \bar{q}h^2 - \bar{k}(w_1 + w_{L-1})}, \tag{36}$$

что и завершает решение разностной модельной задачи (28), (29).

II.3. Численное решение разностной задачи с переменными коэффициентами

Решение задачи (21) с переменными коэффициентами начинается с введения в области интегрирования сетки, например, разбивая отрезок $[0,1]$ равномерно на L частей так, что расстояние между соседними узлами постоянно и равно $h = \frac{1}{L}$.

Совокупность точек $x_0 = 0; x_l = x_0 + lh, l = \overline{1 \div L}$ называют сеткой. Аналогично тому, как это было сделано в § II.2, построим разностную задачу, заменив во внутренних узловых точках $x_l, l = \overline{1 \div L}$ в дифференциальном уравнении (21) производные конечно-разностными отношениями, использовав следующие обозначения:

$$k(x_l \pm \frac{h}{2}) = k(x_{l\pm\frac{1}{2}}) = k_{l\pm\frac{1}{2}},$$

$$q(x_l) = q_l; f(x_l) = f_l,$$

$$\left[\frac{d}{dx}k(x)\frac{du}{dx}\right]_{x=x_l} \approx \frac{k_{l+\frac{1}{2}}\dfrac{u_{l+1}-u_l}{h} - k_{l-\frac{1}{2}}\dfrac{u_l-u_{l-1}}{h}}{h}.$$

После подстановки этих выражений в дифференциальное уравнение задачи (21) приходим к системе линейных уравнений порядка L - 1 относительно L + 1 неизвестного значения сеточной функции $u_l, l = \overline{0 \div L}$:

$$\frac{k_{l+\frac{1}{2}}(u_{l+1}-u_l) - k_{l-\frac{1}{2}}(u_l - u_{l-1})}{h^2} - q_l u_l = -f_l, l = \overline{1 \div L-1}. \tag{37}$$

Подобно тому, как это было сделано для разностной модельной задачи, заменим краевые условия из (21) $u\big|_{x=0+0} = u\big|_{x=1-0}; ku'_x\big|_{x=0+0} = ku'_x\big|_{x=1-0}$ на эквивалентные им условия периодичности $u(x) = u(x+1)$ и выполнение дифференциального уравнения в точке $x = 0$:

$$\frac{d}{dx}(k(x)\frac{du}{dx}) - q(x)u = -f(x) \text{ (см. § II.2.1)},$$

т.е. будем считать, что

$$\left.\begin{aligned} &u_L = u_0, \\ &\frac{k_{\frac{1}{2}}(u_1-u_0)-k_{L-\frac{1}{2}}(u_0-u_{L-1})}{h^2}-q_0u_0=-f_0. \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

Преобразуем систему (37), (38), умножив на h^2 уравнения из (37) и второе уравнение из (38), а затем сгруппируем члены с одинаковыми неизвестными и введём новые обозначения:

$$a_l=k_{l+\frac{1}{2}};b_l=-(k_{l+\frac{1}{2}}+k_{l-\frac{1}{2}}+q_lh^2);c_l=k_{l-\frac{1}{2}};d_l=-f_lh^2;l=\overline{1\div L-1}.$$

С учётом сделанных преобразований и введённых обозначений перепишем задачу (37), (38):

$$\left.\begin{aligned} &a_lu_{l+1}+b_lu_l+c_lu_{l-1}=d_l, l=\overline{1\div L-1}, \\ &u_0=u_L, \\ &k_{\frac{1}{2}}u_1-(k_{L-\frac{1}{2}}+k_{\frac{1}{2}}+q_0h^2)u_0+k_{L-\frac{1}{2}}u_{L-1}=-f_0h^2. \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Для решения системы линейных уравнений (39) применим метод циклической прогонки, разобранный в параграфе II.2.2 данного пособия, т.е. будем искать решение (39) в виде суммы решений двух вспомогательных задач $u_l=\upsilon_l+u_0w_l, l=\overline{0\div L}$:

$$\left.\begin{aligned} &a_l\upsilon_{l+1}+b_l\upsilon_l+c_l\upsilon_{l-1}=d_l, l=\overline{1\div L-1}, \\ &\upsilon_0=\upsilon_L=0, \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

$$\left.\begin{aligned} &a_lw_{l-1}+b_lw_l+c_lw_{l-1}=0, l=\overline{1\div L-1}, \\ &w_0=w_L=1. \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Как решаются задачи (40) и (41), такие же, как (32) и (33), было рассмотрено в § II.2.2 и показано, что уравнения из (39) при $l=\overline{1\div L-1}$ тождественно удовлетворяются, если $u_l=\upsilon_l+u_0w_l, l=\overline{0\div L}$. Очевидно, что условие $u_0=u_L$ из (39)

тоже обращается в тождество после соответствующих подстановок, а из последнего уравнения (39) получаем

$$u_0=\frac{k_{\frac{1}{2}}\upsilon_1+k_{L-\frac{1}{2}}\upsilon_{L-1}+f_0h^2}{k_{\frac{1}{2}}+k_{L-\frac{1}{2}}+q_0h^2-k_{\frac{1}{2}}w_1-k_{L-\frac{1}{2}}w_{L-1}}, \qquad (42)$$

что и завершает решение разностной задачи с переменными коэффициентами (37), (38).

III.Первая краевая задача для стационарного уравнения теплопроводности с кусочно-непрерывными коэффициентами

Задача заключается в нахождении решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с кусочно-непрерывными коэффициентами, двумя краевыми условиями первого рода на интервале $(0,1)$ и точностью e:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right]-q(x)u=-f(x), \\ &u(0)=u^0;u(1)=u^1, \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

где u^0, u^1 – const, $k(x), q(x), f(x)$ – кусочно-непрерывные функции, имеющие разрыв первого рода в точке $x_0, x_0\in(0,1)$. В точке разрыва x_0 ставятся условия сопряжения, означающие непрерывность искомой функции u (температуры) и её потока $k(x)u'_x(x)$ (теплового потока).

$$\begin{aligned} &u\big|_{x=x_0-0}=u\big|_{x=x_0+0}, \\ &k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_0-0}=k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_0+0}. \end{aligned} \qquad (44)$$

Введём обозначения для коэффициентов:

$k(x)=k_\alpha(x); q(x)=q_\alpha(x); f(x)=f_\alpha(x)$ при $x<x_0$,

$k(x)=k_\beta(x); q(x)=q_\beta(x); f(x)=f_\beta(x)$ при $x>x_0$.

Построить аналитическое решение задачи (43) с условиями сопряжения (44) для произвольных функций $k(x), q(x), f(x)$ не удаётся, но если указанные функции заменить константами, тогда можно решить задачу (43), (44) аналитически в общем виде, а полученное решение использовать в дальнейшем для отладки численных программ. Поэтому прежде, чем приступить к численному решению задачи (43), (44), вначале рассмотрим вспомогательную модельную задачу с постоянными коэффициентами $\bar{k}, \bar{q}, \bar{f}$ на интервале $(0,1)$ и с заданной точностью e:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dx}\left(\bar{k}\dfrac{du}{dx}\right)-\bar{q}u=-\bar{f}, \\ u(0)=u^0; u(1)=u^1, \end{array}\right\} \qquad (45)$$

где u^0, u^1 – const,

$\bar{k}=k_\alpha(x_0)=\bar{k}_\alpha; \bar{q}=q_\alpha(x_0)=\bar{q}_\alpha; \bar{f}=f_\alpha(x_0)=\bar{f}_\alpha$

при $0<x<x_0$,

$\bar{k}=k_\beta(x_0)=\bar{k}_\beta; \bar{q}=q_\beta(x_0)=\bar{q}_\beta; \bar{f}=f_\beta(x_0)=\bar{f}_\beta$

при $x_0<x<1$.

Ш.1. Аналитическое решение модельной задачи

Общее решение дифференциального уравнения из (45) можно представить в виде $u=u_{\text{общ}}+u_{\text{частн}}$, где $u_{\text{общ}}$ – общее решение однородного уравнения, состоящее из двух частей $u_{\text{общ}}=(u_{\text{общ}})_\alpha+(u_{\text{общ}})_\beta$, $(u_{\text{общ}})_\alpha$ определено при $0<x<x_0$, $(u_{\text{общ}})_\beta$ – при $x_0<x<1$, а $u_{\text{частн}}$ – какое-то частное решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (45), представимое в виде суммы

$u_{\text{частн}}=(u_{\text{частн}})_\alpha+(u_{\text{частн}})_\beta$, $(u_{\text{частн}})_\alpha$ определено г
$0<x<x_0$, $(u_{\text{частн}})_\beta$ – при $x_0<x<1$.

Для нахождения общего решения однородного дифф ренциального уравнения второго порядка сделаем в нём п становку $u=e^{\lambda x}$ и после сокращения на $e^{\lambda x}$ придём к харак ристическому уравнению:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{k}_\alpha\lambda_\alpha^2-\bar{q}_\alpha=0; 0<x<x_0, \\ \bar{k}_\beta\lambda_\beta^2-\bar{q}_\beta=0; x_0<x<1. \end{array}\right\} \qquad (46)$$

Разрешая (46) относительно λ_α и λ_β, получим

$$(\lambda_\alpha)_{1,2}=\pm\lambda_\alpha=\pm\sqrt{\frac{\bar{q}_\alpha}{\bar{k}_\alpha}}; (\lambda_\beta)_{1,2}=\pm\lambda_\beta=\pm\sqrt{\frac{\bar{q}_\beta}{\bar{k}_\beta}}.$$

Тогда общее решение однородного уравнения можно записат виде

$$\left.\begin{array}{l} (u_{\text{общ}})_\alpha=c_1e^{\lambda_\alpha x}+c_2e^{-\lambda_\alpha x}, 0<x<x_0, \\ (u_{\text{общ}})_\beta=c_3e^{\lambda_\beta x}+c_4e^{-\lambda_\beta x}, x_0<x<1, \end{array}\right\} \qquad (4$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – произвольные постоянные. То, ч $u_{\text{общ}}=(u_{\text{общ}})_\alpha+(u_{\text{общ}})_\beta$ является общим решением од родного уравнения (45), проверяется подстановкой его в : уравнение и получением тождества. В качестве частного реш ния неоднородного уравнения можно взять

$$\left.\begin{array}{l} (u_{\text{частн}})_\alpha=\mu_\alpha=\dfrac{\bar{f}_\alpha}{\bar{q}_\alpha}, 0<x<x_0, \\ (u_{\text{частн}})_\beta=\mu_\beta=\dfrac{\bar{f}_\beta}{\bar{q}_\beta}, x_0<x<1, \end{array}\right\}$$

и тогда общее решение задачи (45) представится как

$$
\left.\begin{aligned}
u &= c_1 e^{\lambda_\alpha x} + c_2 e^{-\lambda_\alpha x} + \mu_\alpha, 0 < x < x_0, \\
u &= c_3 e^{\lambda_\beta x} + c_4 e^{-\lambda_\beta x} + \mu_\beta, x_0 < x < 1.
\end{aligned}\right\} \qquad (48)
$$

После подстановки выражения (48) в краевые условия задачи (45) и дополнительные условия (44) приходим к системе из четырёх линейных уравнений относительно четырёх неизвестных постоянных c_1, c_2, c_3 и c_4:

$$
\left.\begin{aligned}
& c_1 + c_2 = u^0 - \mu_\alpha, \\
& c_1 e^{\lambda_\alpha x_0} + c_2 e^{-\lambda_\alpha x_0} - c_3 e^{\lambda_\beta x_0} - c_4 e^{-\lambda_\beta x_0} = \mu_\beta - \mu_\alpha, \\
& \bar{k}_\alpha \lambda_\alpha c_1 e^{\lambda_\alpha x_0} - \bar{k}_\alpha \lambda_\alpha c_2 e^{-\lambda_\alpha x_0} - \bar{k}_\beta \lambda_\beta c_3 e^{\lambda_\beta x_0} + \\
& \bar{k}_\beta \lambda_\beta c_4 e^{-\lambda_\beta x_0} = 0, \\
& c_3 e^{\lambda_\beta} + c_4 e^{-\lambda_\beta} = u^1 - \mu_\beta.
\end{aligned}\right\}
$$

(49)

Решая (49), получаем

$$
\left.\begin{aligned}
& A_{11} = e^{-\lambda_\alpha x_0} - e^{\lambda_\alpha x_0}; A_{12} = e^{\lambda_\beta (2 - x_0)} - e^{\lambda_\beta x_0}; \\
& A_{21} = \bar{k}_\alpha \lambda_\alpha \left(e^{\lambda_\alpha x_0} + e^{-\lambda_\alpha x_0} \right); A_{22} = \bar{k}_\beta \lambda_\beta \times \\
& \left[e^{\lambda_\beta \left(2 - x_0\right)} + e^{\lambda_\beta x_0} \right];
\end{aligned}\right\} \qquad (50)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
& B_1 = \mu_\beta - \mu_\alpha + \left(\mu_\alpha - u^0\right) e^{\lambda_\alpha x_0} - \left(\mu_\beta - u^1\right) e^{\lambda_\beta \left(1 - x_0\right)}; \\
& B_1 = \mu_\beta - \mu_\alpha + \left(\mu_\alpha - u^0\right) e^{\lambda_\alpha x_0} - \left(\mu_\beta - u^1\right) e^{\lambda_\beta \left(1 - x_0\right)}; \\
& C_1 = \frac{\left[\left(u^0 - \mu_\alpha\right) A_{11} - B_1\right] A_{22} - \left[\left(u^0 - \mu_\alpha\right) A_{21} - B_2\right] A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}}; \\
& C_2 = \frac{B_1 A_{22} - B_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}}; \\
& C_3 = \frac{B_2 A_{11} - B_1 A_{21}}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}}; \\
& C_4 = \left(u^1 - \mu_\beta\right) e^{\lambda_\beta} - C_3 e^{2\lambda_\beta},
\end{aligned}\right\}
$$

(50’)

и тем самым находим решение задачи (45), (44), подставляя (50), (50’) в (48).

Ш.2. Численное решение модельной задачи

Ш.2.1. Постановка разностной модельной задачи

Введём на области интегрирования на $[0,1]$ равномерную сетку, выбрав в качестве узлов точки $x_\ell = \ell h, \ell = \overline{0 \div L}$, где $h = 1/L$.

Пусть точка разрыва x_0 находится между узлами ℓ_α и ℓ_β, так что $x_{\ell_\alpha} \le x_0 \le x_{\ell_\beta}$, $0 < \ell_\alpha, \ell_\beta < L$. Для постановки разностной задачи поступим следующим образом: в каждом узле сетки $\ell = \overline{1 \div \ell_\alpha - 1}$ и $\ell = \overline{\ell_\beta + 1 \div L - 1}$ заменим вторую производную в дифференциальном уравнении (45) конечно-разностным отношением вида

$$\left[\frac{d}{dx}\left(\bar{k}\frac{du}{dx}\right)\right]_{x=x_\ell} \approx \frac{\bar{k}_\alpha\left(\dfrac{u_{\ell+1}-u_\ell}{h}\right)-\bar{k}_\alpha\left(\dfrac{u_\ell-u_{\ell-1}}{h}\right)}{h},$$

$$\ell=\overline{1\div\ell_\alpha-1}$$

$$\left[\frac{d}{dx}\left(\bar{k}\frac{du}{dx}\right)\right]_{x=x_\ell} \approx \frac{\bar{k}_\beta\left(\dfrac{u_{\ell+1}-u_\ell}{h}\right)-\bar{k}_\beta\left(\dfrac{u_\ell-u_{\ell-1}}{h}\right)}{h}$$

$$\ell=\overline{\ell_\beta+1\div L-1}$$

и получим уравнение, приближающее дифференциальное в узле ℓ:

$$\left.\begin{aligned}&\bar{k}_\alpha\frac{u_{\ell+1}-2u_\ell+u_{\ell-1}}{h^2}-\bar{q}_\alpha u_\ell=-\bar{f}_\alpha,\ell=\overline{1\div\ell_\alpha-1},\\&\bar{k}_\beta\frac{u_{\ell+1}-2u_\ell+u_{\ell-1}}{h^2}-\bar{q}_\beta u_\ell=-\bar{f}_\beta,\ell=\overline{\ell_\beta+1\div L-1}.\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Система уравнений (51) состоит из $L-3$ линейного уравнения относительно $L+1$ неизвестного значения сеточной функции $u^{(h)}$. Для корректной постановки задачи дополним (51) двумя краевыми условиями из (45) и двумя условиями на разрыве (44), считая h достаточно малым и полагая $u(x_{\ell_\alpha})=u(x_{\ell_\beta})$, $k(x)\dfrac{du}{dx}\Big|_{x=x_{\ell_\alpha}}=k(x)\dfrac{du}{dx}\Big|_{x=x_{\ell_\beta}}$

$$\left.\begin{aligned}&u_0=u^0,\\&u_{\ell_\alpha}=u_{\ell_\beta},\\&\bar{k}_\alpha\frac{u_{\ell_\alpha}-u_{\ell_\alpha-1}}{h}=\bar{k}_\beta\frac{u_{\ell_\beta+1}-u_{\ell_\beta}}{h},\\&u_L=u^1.\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Объединяя уравнения (51) и (52), получаем систему линейных уравнений $L+1$ порядка относительно $L+1$ неизвестного значения сеточной функции $u^{(h)}=\{u_\ell\}, \ell=\overline{0\div L}$, которую и будем называть разностной модельной задачей.

Ш.2.2.Метод встречных прогонок

Для решения разностной модельной задачи (51), (52) применим метод встречных прогонок, который состоит в том, что, используя краевые условия на левой и правой границах области интегрирования, одновременно организуются вычисления двух последовательностей прогоночных коэффициентов: слева направо и справа налево, а затем после удовлетворения условиям сопряжения на разрыве осуществляются обратные прогонки к левой и правой границам. Для удобства последующих преобразований умножим уравнение (51) на h^2, а третье уравнение (52) – на h. После перегруппировки членов уравнений введём новые обозначения:

$a_\ell=\bar{k}_\alpha; b_\ell=-2\bar{k}_\alpha-\bar{q}_\alpha h^2; c_\ell=\bar{k}_\alpha; d_\ell=-\bar{f}_\alpha h^2;$

$\ell=\overline{1\div\ell_\alpha-1},$

$a_\ell=\bar{k}_\beta; b_l=-2\bar{k}_\beta-\bar{q}_\beta h^2; c_\ell=\bar{k}_\beta; d_\ell=-\bar{f}_\beta h^2;$

$\ell=\overline{L-1\div\ell_\beta+1}$

и перепишем систему (51), (52) в виде

$$\left.\begin{array}{c} u_0 = u^0, \\ a_\ell u_{\ell+1} + b_\ell u_\ell + c_\ell u_{\ell-1} = d_\ell, \ell = \overline{1 \div \ell_\alpha - 1}, \\ u_{\ell_\alpha} = u_{\ell_\beta}, \\ \bar{k}_\alpha \left(u_{\ell_\alpha} - u_{\ell_\alpha - 1} \right) = \bar{k}_\beta \left(u_{\ell_\beta + 1} - u_{\ell_\beta} \right), \\ a_\ell u_{\ell+1} + b_\ell u_\ell + c_\ell u_{\ell-1} = d_\ell, \ell = \overline{L-1 \div \ell_\beta - 1}, \\ u_L = u^1. \end{array}\right\} \quad (53)$$

При прямой прогонке вначале u_0 из первого уравнения (53) подставляют во второе при $\ell = 1$ и разрешают относительно u_1:

$$u_1 = -\frac{a_1}{b_1} u_2 + \frac{d_1 - c_1 u^0}{b_1} = \alpha_1 u_2 + \beta_1. \quad (54)$$

Аналогично из последнего уравнения (53) подставляют u_L в предпоследнее при $\ell = L - 1$ и выражают u_{L-1} через u_{L-2}:

$$u_{L-1} = -\frac{c_{L-1}}{b_{L-1}} u_{L-2} + \frac{d_{L-1} - c_{L-1} u^1}{b_{L-1}} = \alpha_{L-1} u_{L-2} + \beta_{L-1}.$$

(54')

Далее, используя метод индукции, докажем, что подсистемы линейных уравнений из (53) при $\ell = \overline{1 \div \ell_\alpha - 1}$ и $\ell = \overline{L - 1 \div \ell_\beta + 1}$ можно преобразовать в подсистемы линейных уравнений с двухдиагональной матрицей. Для этого предположим, что $\ell - 1$ уравнение подсистемы $\ell = \overline{1 \div \ell_\alpha - 1}$ из (53) представлено в виде

$$u_{\ell-1} = \alpha_{\ell-1} u_\ell + \beta_{\ell-1} \quad (55)$$

с известными коэффициентами $\alpha_{\ell-1}$ и $\beta_{\ell-1}$ и что $\ell + 1$ уравнение подсистемы $\ell = \overline{L - 1 \div \ell_\beta + 1}$ из (53) представлено в виде

$$u_{\ell+1} = \alpha_{\ell+1} u_\ell + \beta_{\ell+1} \quad (55')$$

с уже определёнными коэффициентами $\alpha_{\ell+1}$ и $\beta_{\ell+1}$.

Подставим (55) и (55') в ℓ уравнения соответствующих подсистем и разрешим относительно u_ℓ:

$$u_\ell = -\frac{a_\ell}{b_\ell + c_\ell \alpha_{\ell-1}} u_{\ell+1} + \frac{d_\ell - c_\ell \beta_{\ell-1}}{b_\ell + c_\ell \alpha_{\ell-1}}, \quad (56)$$

$$u_\ell = -\frac{c_\ell}{b_\ell + a_\ell \alpha_{\ell+1}} u_{\ell-1} + \frac{d_\ell - a_\ell \beta_{\ell+1}}{b_\ell + a_\ell \alpha_{\ell+1}}. \quad (56')$$

Обозначим

$$\alpha_\ell = -\frac{a_\ell}{b_\ell + c_\ell \alpha_{\ell-1}}; \quad \beta_\ell = \frac{d_\ell - c_\ell \beta_{\ell-1}}{b_\ell + c_\ell \alpha_{\ell-1}}, \quad \ell = \overline{2 \div \ell_\alpha - 1}, \quad (57)$$

$$\alpha_\ell = -\frac{c_\ell}{b_\ell + a_\ell \alpha_{\ell+1}}; \quad \beta_\ell = \frac{d_\ell - a_\ell \beta_{\ell+1}}{b_\ell + a_\ell \alpha_{\ell+1}}, \quad \ell = \overline{L - 2 \div \ell_\beta + 1}$$

(57')

и перепишем (56), (56') с учётом (57), (57'):

$$\begin{array}{ll} u_\ell = \alpha_\ell u_{\ell+1} + \beta_\ell, & \ell = \overline{1 \div \ell_\alpha - 1} \\ u_\ell = \alpha_\ell u_{\ell-1} + \beta_\ell, & \ell = \overline{L - 1 \div \ell_\beta + 1}. \end{array} \quad (58)$$

Значения α_ℓ и β_ℓ определяются, так как коэффициенты $a_\ell, b_\ell, c_\ell, d_\ell$ известны из постановки задачи (53), а значения $\alpha_{\ell-1}, \beta_{\ell-1}, \ell = \overline{1 \div \ell_\alpha - 1}, \alpha_{\ell+1}, \beta_{\ell+1}, \ell = \overline{L - 1 \div \ell_\beta + 1}$ считаются определёнными по предположению индукции и находятся из формул (54) и (54') при $\ell = 1$ и $\ell = L - 1$.

Согласно методу индукции $\ell_\alpha - 1$ и $\ell_\beta + 1$ уравнения системы линейных уравнений (53) могут быть записаны как

$$\begin{aligned} u_{\ell_\alpha - 1} &= \alpha_{\ell_\alpha - 1} u_{\ell_\alpha} + \beta_{\ell_\alpha - 1} \\ u_{\ell_\beta + 1} &= \alpha_{\ell_\beta + 1} u_{\ell_\beta} + \beta_{\ell_\beta + 1}, \end{aligned} \tag{59}$$

с определяемыми по формулам (54), (54'), (57), (57') коэффициентами $\alpha_{\ell_\alpha - 1}, \beta_{\ell_\alpha - 1}, \alpha_{\ell_\beta + 1}, \beta_{\ell_\beta + 1}$.

Добавим к уравнениям (59) два условия сопряжения на разрыве из (53):

$$\begin{gathered} u_{\ell_\alpha} = u_{\ell_\beta}, \\ \bar{k}_\alpha \left(u_{\ell_\alpha} - u_{\ell_\alpha - 1} \right) = \bar{k}_\beta \left(u_{\ell_\beta + 1} - u_{\ell_\beta} \right). \end{gathered} \tag{60}$$

Уравнения (59) и (60) образуют систему из четырёх линейных уравнений с четырьмя неизвестными $u_{\ell_\alpha - 1}, u_{\ell_\alpha}, u_{\ell_\beta}, u_{\ell_\beta + 1}$, решая которую находим

$$\begin{aligned} u_{\ell_\alpha} = u_{\ell_\beta} &= \frac{\bar{k}_\alpha \beta_{\ell_\alpha - 1} + \bar{k}_\beta \beta_{\ell_\beta + 1}}{\bar{k}_\alpha \left(1 - \alpha_{\ell_\alpha - 1} \right) + \bar{k}_\beta \left(1 - \alpha_{\ell_\beta + 1} \right)}, \\ u_{\ell_\alpha - 1} &= \alpha_{\ell_\alpha - 1} u_{\ell_\alpha} + \beta_{\ell_\alpha - 1}, \\ u_{\ell_\beta + 1} &= \alpha_{\ell_\beta + 1} u_{\ell_\beta} + \beta_{\ell_\beta + 1}. \end{aligned} \tag{61}$$

Нахождением $u_{\ell_\alpha - 1}, u_{\ell_\alpha}, u_{\ell_\beta}, u_{\ell_\beta + 1}$ заканчивается процедура прямой прогонки.

При обратной прогонке, используя формулы (58) и (61), определяют все $u_\ell, \ell = \overline{1 \div L - 1}$, а следовательно, и сеточную функцию $u^{(h)}$, которая является решением разностной модельной задачи (44), (45).

Ш.3. Численное решение задачи с переменными коэффициентами

Решение задачи (43), (44) начинают с введения в области интегрирования сетки, например, разбивая отрезок $[0,1]$ равномерно на L частей так, что расстояние между соседними узлами постоянно и равно $h = 1/L$. Совокупность точек $x_\ell = \ell h, \ell = \overline{0 \div L}$ образует сетку. Пусть точка разрыва первого рода x_0 расположена между узлами ℓ_α и ℓ_β, так что $x_{\ell_\alpha} \le x_0 \le x_{\ell_\beta}, 0 < \ell_\alpha,\ \ell_\beta < L$. Подобно тому, как это было сделано в § Ш.2, сформулируем разностную задачу, заменив во внутренних узловых точках $x_\ell, \ell = \overline{1 \div \ell_\alpha - 1},\ \ell = \overline{\ell_\beta + 1 \div L - 1}$ в дифференциальном уравнении (43) производные конечно-разностными отношениями и использовав следующие обозначения:

$$\begin{gathered} k_\alpha \left(x_\ell \pm h/2 \right) = k_\alpha \left(x_{\ell \pm 1/2} \right) = \left(k_\alpha \right)_{\ell \pm 1/2}; \\ k_\beta \left(x_\ell \pm h/2 \right) = k_\beta \left(x_{\ell \pm 1/2} \right) = \left(k_\beta \right)_{\ell \pm 1/2}; \\ q_\alpha \left(x_\ell \right) = \left(q_\alpha \right)_\ell ; f_\alpha \left(x_\ell \right) = \left(f_\alpha \right)_\ell ; \\ q_\beta \left(x_\ell \right) = \left(q_\beta \right)_\ell ; f_\beta \left(x_\ell \right) = \left(f_\beta \right)_\ell ; \end{gathered}$$

$$\left[\frac{d}{dx} k(x) \frac{du}{dx} \right]_{x = x_\ell} \approx \frac{\left(k_\alpha \right)_{\ell + 1/2} \dfrac{u_{\ell + 1} - u_\ell}{h} - \left(k_\alpha \right)_{\ell - 1/2} \dfrac{u_\ell - u_{\ell - 1}}{h}}{h}, \quad \ell = \overline{1 \div \ell_\alpha - 1}$$

$$\left[\frac{d}{dx} k(x) \frac{du}{dx} \right]_{x = x_\ell} \approx \frac{\left(k_\beta \right)_{\ell + 1/2} \dfrac{u_{\ell + 1} - u_\ell}{h} - \left(k_\beta \right)_{\ell - 1/2} \dfrac{u_\ell - u_{\ell - 1}}{h}}{h}. \quad \ell = \overline{\ell_\beta + 1 \div L - 1}$$

После подстановки этих выражений в дифференциальное уравнение задачи (43) приходим к системе линейных уравнений порядка $L-3$ относительно $L+1$ неизвестного значения сеточной функции $u_\ell, \ell=\overline{0 \div L}$:

$$\frac{(k_\alpha)_{\ell+1/2}(u_{\ell+1}-u_\ell)-(k_\alpha)_{\ell-1/2}(u_\ell-u_{\ell-1})}{h^2}-(q_\alpha)_\ell u_\ell=-(f_\alpha)_l, \quad \ell=\overline{1 \div \ell_\alpha-1}$$

$$\frac{(k_\beta)_{\ell+1/2}(u_{\ell+1}-u_\ell)-(k_\beta)_{\ell-1/2}(u_\ell-u_{\ell-1})}{h^2}-(q_\beta)_\ell u_\ell=-(f_\beta)_\ell. \quad \ell=\overline{\ell_{\beta+1} \div L-1}$$

(62)

Добавляя к (62) краевые условия задачи (43) и условия сопряжения на разрыве (44), заменив во втором выражении (44) первые производные двухточечными конечно-разностными отношениями, получаем ещё четыре линейных уравнения, которые делают систему уравнений (62) полной:

$$\left.\begin{array}{c} u_0=u^0, \\ u_{\ell_\alpha}=u_{\ell_\beta}, \\ (k_\alpha)_{\ell_\alpha}\dfrac{u_{\ell_\alpha}-u_{\ell_\alpha-1}}{h}=(k_\beta)_{\ell_\beta}\dfrac{u_{\ell_\beta+1}-u_{\ell_\beta}}{h}, \\ u_L=u^1. \end{array}\right\} \quad (63)$$

Преобразуем систему (62), (63), умножив на h^2 уравнения (62) и на h третье уравнение (63). После этого сгруппируем члены с одинаковыми неизвестными и введём обозначения:

$$a_\ell=(k_\alpha)_{\ell+1/2}; b_\ell=-\left[(k_\alpha)_{\ell+1/2}+(k_\alpha)_{\ell-1/2}+(q_\alpha)_\ell h^2\right];$$

$$c_\ell=(k_\alpha)_{\ell-1/2}; d_\ell=-(f_\alpha)_\ell h^2; \ell=\overline{1 \div \ell_\alpha-1};$$

$$a_\ell=(k_\beta)_{\ell+1/2}; b_\ell=-\left[(k_\beta)_{\ell+1/2}+(k_\beta)_{\ell-1/2}+(q_\beta)_\ell h^2\right];$$

$$c_\ell=(k_\beta)_{\ell-1/2}; d_\ell=-(f_\beta)_\ell h^2; \ell=\overline{\ell_\beta+1 \div L-1}.$$

Тогда систему уравнений (62), (63) можно переписать в виде

$$\left.\begin{array}{c} u_0=u^0, \\ a_\ell u_{\ell+1}+b_\ell u_\ell+c_\ell u_{\ell-1}=d_\ell, \ell=\overline{1 \div \ell_\alpha-1}, \\ u_{\ell_\alpha}=u_{\ell_\beta}, \\ (k_\alpha)_{\ell_\alpha}\left(u_{\ell_\alpha}-u_{\ell_\alpha-1}\right)=(k_\beta)_{\ell_\beta}\left(u_{\ell_\beta+1}-u_{\ell_\beta}\right), \\ a_\ell u_{\ell+1}+b_\ell u_\ell+c_\ell u_{\ell-1}=d_\ell, \ell=\overline{\ell_\beta+1 \div L-1}, \\ u_L=u^1, \end{array}\right\} \quad (64)$$

она аналогична системе линейных уравнений (53) и для её решения можно применить метод встречных прогонок, ужс разобранный в § Ш.2.2. Полученная в результате вычислений сеточная функция будет решением разностной задачи (62), (63) с переменными коэффициентами.

IV. Точность решения

Нахождение сеточной функции, удовлетворяющей разностной задаче на выбранной системе узлов, ещё не означает полного решения исходной дифференциальной задачи. В этом можно убедиться, сравнивая значения аналитических и численных решений модельных задач в узлах сетки. В § I.2.1. было введено понятие конечномерного нормированного пространства v_h размерности $L+1$. Определим отображение элемента из пространства решений исходного дифференциального уравнения на конечномерное пространство как вычисление значений гладкой функции в узлах сетки и построение на их основе сеточных функций. Будем рассматривать сеточную функцию – отображение (след) как эталон и заключать её в квадратные скобки в отличие от сеточных функций, являющихся решением разностных задач. Примем норму разности между сеточной функцией – отображением (следом) и решением разностной задачи в этом конечномерном нормированном пространстве за величину погрешности.

Для того, чтобы решение разностных задач имело смысл, результаты должны стремиться к функции – отображению (следу) при измельчении сетки, т.е.

$$\left\| [u]_h - u^{(h)} \right\|_{v_h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

Это обеспечивает получение решения с любой наперёд заданной степенью точности или погрешности, что проверяется на модельных задачах.

В случае, когда не удаётся построить аналитическое решение дифференциальной задачи, неизвестной оказывается и сеточная функция-отображение (след). Это означает, что непосредственно проверить условие сходимости невозможно. Тогда в качестве эталонного решения (функции-отображения) можно принять ту предельную функцию, к которой будет стремиться последовательность сеточных функций-решений соответствующих разностных задач, при измельчении сетки или, что то же самое, при стремлении шага сетки к нулю

$$[u]_h = \lim_{h \to 0} u^{(h)}.$$

Требование сходимости решений разностных задач при $h \to 0$ является необходимым условием их достоверности, но не достаточным условием. Достаточность в какой-то степени проверяется на модельных задачах.

Ещё одним важным моментом численного решения разностных задач является устойчивость, т.е. отсутствие быстрого роста случайных ошибок, связанных с округлением при вычислениях и при задании исходных данных. Это свойство определяется разностной задачей и методом её решения. Для используемого в данном пособии метода прогонки оно состоит в диагональном преобладании и записывается для разностных задач (10), (20), (34), (34), (40), (41), (53), (64) как

$$|a_l| + |c_l| < |b_l|,$$

что выполняется для всех рассмотренных задач с учётом сделанных предположений.

V. Лабораторная работа на ЭВМ

Выполнение лабораторной работы позволяет овладеть одним из численных методов решения линейных краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка – методом прогонки, применить на практике известные из курса обыкновенных дифференциальных уравнений приёмы нахождения аналитических решений для уравнений с постоянными коэффициентами, проверить в численном эксперименте теоретическое положение о сходимости разностных решений к следу аналитического решения в случае корректно поставленной конечно-разностной задачи, углубить навыки алгоритмической реализации сложных вычислительных процессов и провести их практическую проверку с использованием ЭВМ, накопить опыт в использовании алгоритмических языков высокого уровня и отладке программ. В процессе работы предполагается решение следующих проблем:

1) постановка и аналитическое решение модельной задачи;
2) численное решение модельной задачи с заданной степенью точности;

3) численное решение задачи с переменными коэффициентами и проверка сходимости на последовательно удваиваемых сетках.

При разработке алгоритма необходимо предусмотреть возможность проведения расчётов на последовательно увеличивающихся сетках, одновременный вывод на печать в одиннадцати равноудалённых точках с шагом $h = 0{,}1$ значений аналитического решения модельной задачи, численного решения модельной задачи, полученного на сетке с шагом h_x кратным h ($h = Nh_x$, N – целое число), их разности в тех же узлах, решения задачи с переменными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Трифонов Н.П., Пасхин Е.Н.* Практикум работы на ЭВМ. – М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит., 1982. – 288 с.
2. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит., 1978. – 592 с.

Приложение

Вариант № 1

Найти решение краевой задачи для одномерного стационарного уравнения теплопроводности

$$\frac{d}{dx}[k(x)\frac{du}{dx}]-q(x)u=-f(x)$$

в одиннадцати равноудалённых точках отрезка [0,1] с относительной точностью 0,0001. Отладку программы произвести на модельной задаче с постоянными коэффициентами.

Задание 1

Краевые условия задачи

$$\left.\begin{aligned} &k(0)u_x^{'}(0)=0,\\ &-k(x)u_x^{'}(1)=u(1),\end{aligned}\right\}$$

$$k(x)=e^x;q(x)=e^x;f(x)=\sin x.$$

Модельная задача

$$k(x)=\sqrt{e};q(x)=\sqrt{e};f(x)=\sin 0{,}5.$$

Задание 2

Краевые условия задачи

$$\left.\begin{aligned} &k(0)u_x^{'}(0)=u(0),\\ &-k(x)u_x^{'}(1)=u(1)-1,\end{aligned}\right\}$$

$$k(x)=e^x;q(x)=e^x;f(x)=\cos x.$$

Модельная задача

$$k(x)=\sqrt{e};q(x)=\sqrt{e};f(x)=\cos 0{,}5.$$

Задание 3

Краевые условия задачи

$$\left.\begin{aligned} &k(0)u_x^{'}(0)=100u(0),\\ &-k(x)u_x^{'}(1)=0,\end{aligned}\right\}$$

$$k(x)=x^2+1;q(x)=x+2;f(x)=\cos x.$$

Модельная задача

$$k(x)=1{,}25;q(x)=2{,}5;f(x)=\cos 0{,}5.$$

Задание 4

Краевые условия задачи

$$\left.\begin{aligned} &k(0)u_x^{'}(0)=u(0)-1,\\ &-k(x)u_x^{'}(1)=u(1)-1,\end{aligned}\right\}$$

$$k(x)=\sin^2 x+1;q(x)=\sin x;f(x)=e^x.$$

Модельная задача

$$k(x)=\sin^2 0{,}5+1;q(x)=\sin 0{,}5;f(x)=\sqrt{e}.$$

Задание 5

Краевые условия задачи

$$\left.\begin{aligned} &k(0)u_x^{'}(0)=0,\\ &-k(x)u_x^{'}(1)=u(1),\end{aligned}\right\}$$

$$k(x)=x^2+1;q(x)=x;f(x)=e^{-x}.$$

Модельная задача

$$k(x)=1{,}25;q(x)=0{,}5;f(x)=1/\sqrt{e}.$$

Задание 6

Краевые условия задачи

$$\left.\begin{aligned} &k(0)u_x^{'}(0)=u(0),\\ &-k(x)u_x^{'}(1)=u(1)-1,\end{aligned}\right\}$$

$$k(x)=1+\cos^2 x;q(x)=1;f(x)=\sin^2 x.$$

Модельная задача

$$k(x)=1+\cos^2 0{,}5;q(x)=1;f(x)=\sin^2 0.5.$$

Задание 7

Краевые условия задачи

$$\left.\begin{aligned} k(0)u_x'(0) &= u(0), \\ -k(x)u_x'(1) &= u(1), \end{aligned}\right\}$$

$$k(x) = e^{\sin x}; q(x) = e^{\cos x}; f(x) = 1.$$

Модельная задача

$$k(x) = e^{\sin 0,5}; q(x) = e^{\cos 0,5}; f(x) = 1.$$

Задание 8

Краевые условия задачи

$$\left.\begin{aligned} k(0)u_x'(0) &= u(0), \\ -k(x)u_x'(1) &= u(1), \end{aligned}\right\}$$

$$k(x) = e^{\cos x}; q(x) = e^{\sin x}; f(x) = 1.$$

Модельная задача

$$k(x) = e^{\cos 0,5}; q(x) = e^{\sin 0,5}; f(x) = 1.$$

Задание 9

Краевые условия задачи

$$\left.\begin{aligned} k(0)u_x'(0) &= 0, \\ -k(x)u_x'(1) &= u(1), \end{aligned}\right\}$$

$$k(x) = x + 1; q(x) = e^{x}; f(x) = e^{-x^2}.$$

Модельная задача

$$k(x) = 1,5; q(x) = \sqrt{e}; f(x) = e^{-0.25}.$$

Задание 10

Краевые условия задачи

$$\left.\begin{aligned} k(0)u_x'(0) &= u(0) - 1, \\ -k(x)u_x'(1) &= u(1) - 1, \end{aligned}\right\}$$

$$k(x) = 1 + \sin^2 x; q(x) = \cos x; f(x) = e^{x}.$$

Модельная задача

$$k(x) = 1 + \sin^2 0,5; q(x) = \cos 0,5; f(x) = e^{0,5}$$

Задание 11

Краевые условия задачи

$$\left.\begin{aligned} k(0)u_x'(0) &= 0, \\ -k(x)u_x'(1) &= u(1), \end{aligned}\right\}$$

$$k(x) = e^{x}; q(x) = 1 + x^3; f(x) = e^{-x}.$$

Модельная задача

$$k(x) = \sqrt{e}; q(x) = 1,125; f(x) = e^{-0,5}.$$

Задание 12

Краевые условия задачи

$$\left.\begin{aligned} k(0)u_x'(0) &= u(0) - 1, \\ -k(x)u_x'(1) &= u(1), \end{aligned}\right\}$$

$$k(x) = e^{x}; q(x) = e^{x}; f(x) = \cos x.$$

Модельная задача

$$k(x) = \sqrt{e}; q(x) = \sqrt{e}; f(x) = \cos 0.5.$$

Задание 13

Краевые условия задачи

$$\left.\begin{aligned} k(0)u_x'(0) &= u(0), \\ -k(x)u_x'(1) &= u(1), \end{aligned}\right\}$$

$$k(x) = e^{x}; q(x) = e^{x}; f(x) = e^{-x}.$$

Модельная задача

$$k(x) = \sqrt{e}; q(x) = \sqrt{e}; f(x) = e^{-0,5}.$$

Задание 14

Краевые условия задачи

$$\left.\begin{aligned} k(0)u_x'(0) &= 0,1u(0) - 100, \\ -k(x)u_x'(1) &= 0,1u(1) - 100, \end{aligned}\right\}$$

$$k(x) = x + 1; q(x) = x; f(x) = e^{-x^2}.$$

Модельная задача

$$k(x) = 1,5; q(x) = 0,5; f(x) = e^{-0,25}.$$

Задание 15

Краевые условия задачи

$$\left.\begin{array}{l} k(0)u'_x(0) = u(0), \\ -k(x)u'_x(1) = u(1), \end{array}\right\}$$

$$k(x) = e^x;\, q(x) = e^x;\, f(x) = \sin x.$$

Модельная задача

$$k(x) = \sqrt{e};\, q(x) = \sqrt{e};\, f(x) = \sin 0.5.$$

Задание 16

Краевые условия задачи

$$\left.\begin{array}{l} k(0)u'_x(0) = 0, \\ -k(x)u'_x(1) = u(1), \end{array}\right\}$$

$$k(x) = x+1;\, q(x) = x^2+1;\, f(x) = e^{-x}.$$

Модельная задача

$$k(x) = 1{,}5;\, q(x) = 1{,}25;\, f(x) = 1/\sqrt{e}.$$

Найти решение краевой задачи для одномерного стационарного уравнения теплопроводности

$$\frac{d}{dx}[k(x)\frac{du}{dx}] - q(x)u = -f(x)$$

в одиннадцати равноудалённых точках отрезка $[0,1]$ с относительной точностью 0,0001. Отладку программы произвести на модельной задаче с постоянными коэффициентами.

Задание 1

Краевые условия задачи (условия периодичности)

$$\left.\begin{array}{l} u(0+0) = u(1-0), \\ k(0+0)u'_x(0+0) = k(1-0)u'_x(1-0), \end{array}\right\}$$

$$k(x) = \sin 2\pi x + 1{,}5;\, q(x) = 1;\, f(x) = \cos 2\pi x.$$

Модельная задача

$$k(x) = 1{,}5;\, q(x) = 1;\, f(x) = \cos 2\pi x.$$

Задание 2

Краевые условия задачи (условия периодичности)

$$\left.\begin{array}{l} u(0+0) = u(1-0), \\ k(0+0)u'_x(0+0) = k(1-0)u'_x(1-0), \end{array}\right\}$$

$$k(x) = \cos^2 2\pi x + 1;\, q(x) = 1;\, f(x) = \sin 2\pi x.$$

Модельная задача

$$k(x) = 2;\, q(x) = 1;\, f(x) = \sin 2\pi x.$$

Задание 3

Краевые условия задачи (условия периодичности)

$$\left.\begin{array}{l} u(0+0) = u(1-0), \\ k(0+0)u'_x(0+0) = k(1-0)u'_x(1-0), \end{array}\right\}$$

$$k(x) = \cos^2 2\pi x + 1;\, q(x) = \sin 2\pi x + 1{,}5;\, f(x) = \sin 2\pi x.$$

Модельная задача

$$k(x) = 2;\, q(x) = 1{,}5;\, f(x) = \sin 2\pi x.$$

Задание 4

Краевые условия задачи (условия периодичности)

$$\left.\begin{aligned} &u(0+0)=u(1-0),\\ &k(0+0)u_x'(0+0)=k(1-0)u_x'(1-0),\end{aligned}\right\}$$

$$k(x)=e^{\sin 2\pi x};\ q(x)=1;\ f(x)=e^{\sin 2\pi x}.$$

Модельная задача

$$k(x)=1;\ q(x)=1;\ f(x)=1+\sin 2\pi x.$$

Задание 5

Краевые условия задачи (условия периодичности)

$$\left.\begin{aligned} &u(0+0)=u(1-0),\\ &k(0+0)u_x'(0+0)=k(1-0)u_x'(1-0),\end{aligned}\right\}$$

$$k(x)=1;\ q(x)=e^{\sin 2\pi x};\ f(x)=e^{\cos 2\pi x}.$$

Модельная задача

$$k(x)=1;\ q(x)=1;\ f(x)=1+\cos 2\pi x.$$

Задание 6

Краевые условия задачи (условия периодичности)

$$\left.\begin{aligned} &u(0+0)=u(1-0),\\ &k(0+0)u_x'(0+0)=k(1-0)u_x'(1-0),\end{aligned}\right\}$$

$$k(x)=e^{-\sin^2 2\pi x};\ q(x)=1;\ f(x)=\cos 2\pi x.$$

Модельная задача

$$k(x)=1;\ q(x)=1;\ f(x)=\cos 2\pi x.$$

Задание 7

Краевые условия задачи (условия периодичности)

$$\left.\begin{aligned} &u(0+0)=u(1-0),\\ &k(0+0)u_x'(0+0)=k(1-0)u_x'(1-0),\end{aligned}\right\}$$

$$k(x)=\cos^3 2\pi x+2;\ q(x)=e^{\sin 2\pi x};\ f(x)=1.$$

Модельная задача

$$k(x)=3;\ q(x)=1;\ f(x)=\cos 2\pi x.$$

Задание 8

Краевые условия задачи (условия периодичности)

$$\left.\begin{aligned} &u(0+0)=u(1-0),\\ &k(0+0)u_x'(0+0)=k(1-0)u_x'(1-0),\end{aligned}\right\}$$

$$k(x)=\ln(\sin 2\pi x+2);\ q(x)=1;\ f(x)=1.$$

Модельная задача

$$k(x)=\ln 2;\ q(x)=1;\ f(x)=\sin 2\pi x.$$

Задание 9

Краевые условия задачи (условия периодичности)

$$\left.\begin{aligned} &u(0+0)=u(1-0),\\ &k(0+0)u_x'(0+0)=k(1-0)u_x'(1-0),\end{aligned}\right\}$$

$$k(x)=\cos^2 2\pi x+1;\ q(x)=\ln(2+\sin 2\pi x);\ f(x)=\cos$$

Модельная задача

$$k(x)=2;\ q(x)=\ln 2;\ f(x)=\cos 2\pi x.$$

Задание 10

Краевые условия задачи (условия периодичности)

$$\left.\begin{aligned} &u(0+0)=u(1-0),\\ &k(0+0)u_x'(0+0)=k(1-0)u_x'(1-0),\end{aligned}\right\}$$

$$k(x)=\sin^4 2\pi x+1;\ q(x)=\cos^3 2\pi x+2;\ f(x)=e^{\cos 2}$$

Модельная задача

$$k(x)=1;\ q(x)=3;\ f(x)=\cos 2\pi x+1.$$

Задание 11

Краевые условия задачи (условия периодичности)

$$\left.\begin{aligned} &u(0+0)=u(1-0),\\ &k(0+0)u_x'(0+0)=k(1-0)u_x'(1-0),\end{aligned}\right\}$$

$$k(x)=e^{\sin 2\pi x};\ q(x)=1;\ f(x)=e^{\cos 2\pi x}$$

Модельная задача

$$k(x)=1;\ q(x)=1;\ f(x)=\cos 2\pi x.$$

Задание 12

Краевые условия задачи (условия периодичности)

$$\left.\begin{array}{l} u(0+0)=u(1-0), \\ k(0+0)u'_x(0+0)=k(1-0)u'_x(1-0), \end{array}\right\}$$

$$k(x)=e^{-\sin 2\pi x};\ q(x)=1;\ f(x)=\cos 2\pi x.$$

Модельная задача

$$k(x)=1;\ q(x)=1;\ f(x)=\cos 2\pi x+1.$$

Задание 13

Краевые условия задачи (условия периодичности)

$$\left.\begin{array}{l} u(0+0)=u(1-0), \\ k(0+0)u'_x(0+0)=k(1-0)u'_x(1-0), \end{array}\right\}$$

$$k(x)=\cos^2 2\pi x+1;\ q(x)=e^{\sin 2\pi x};\ f(x)=e^{\cos 2\pi x}.$$

Модельная задача

$$k(x)=2;\ q(x)=1;\ f(x)=\cos 2\pi x.$$

Задание 14

Краевые условия задачи (условия периодичности)

$$\left.\begin{array}{l} u(0+0)=u(1-0), \\ k(0+0)u'_x(0+0)=k(1-0)u'_x(1-0), \end{array}\right\}$$

$$k(x)=\cos^3 2\pi x+2;\ q(x)=\sin 2\pi x+1{,}5;\ f(x)=\sin 2\pi x.$$

Модельная задача

$$k(x)=3;\ q(x)=1{,}5;\ f(x)=\sin 2\pi x+1.$$

Задание 15

Краевые условия задачи (условия периодичности)

$$\left.\begin{array}{l} u(0+0)=u(1-0), \\ k(0+0)u'_x(0+0)=k(1-0)u'_x(1-0), \end{array}\right\}$$

$$k(x)=1;\ q(x)=\ln(2+\sin 2\pi x);\ f(x)=\cos 2\pi x.$$

Модельная задача

$$k(x)=1;\ q(x)=\ln 2;\ f(x)=\cos 2\pi x$$

Задание 16

Краевые условия задачи (условия периодичности)

$$\left.\begin{array}{l} u(0+0)=u(1-0), \\ k(0+0)u'_x(0+0)=k(1-0)u'_x(1-0), \end{array}\right\}$$

$$k(x)=\sin 2\pi x+1;\ q(x)=\cos^3 2\pi x+2;\ f(x)=1.$$

Модельная задача

$$k(x)=1{,}5;\ q(x)=3;\ f(x)=1+\cos 2\pi x.$$

Вариант № 3

Найти решение краевой задачи для одномерного стационарного уравнения теплопроводности

$$\frac{d}{dx}[k(x)\frac{du}{dx}]-q(x)u=-f(x)$$

в одиннадцати равноудалённых точках отрезка [0,1] с относительной точностью 0,0001. Отладку программы произвести на модельной задаче с постоянными коэффициентами.

Задание 1

Краевые условия задачи $u(0)=0;\ u(1)=1$.

Дополнительные условия в точке разрыва

$$\left.\begin{array}{l} u(x_0-0)=u(x_0+0), \\ k(x_0-0)u'_x(x_0-0)=k(x_0+0)u'_x(x_0+0), \end{array}\right\}$$

$$x<x_0=0{,}525;\ k(x)=x^2+1;\ q(x)=e^{-x};\ f(x)=1;$$

$$x>x_0=0{,}525;\ k(x)=x;\ q(x)=e^{-x};\ f(x)=x^3.$$

Модельная задача

$$x_0=0{,}525\ k(x)=k(x_0);q(x)=q(x_0);f(x)=f(x_0).$$

Задание 2

Краевые условия задачи $u(0)=1;\ u(1)=0$.

Дополнительные условия в точке разрыва

$$\left.\begin{array}{l} u(x_0-0)=u(x_0+0), \\ k(x_0-0)u'_x(x_0-0)=k(x_0+0)u'_x(x_0+0), \end{array}\right\}$$

$$x<x_0=1/\sqrt{2};\ k(x)=x^2+0{,}5;\ q(x)=1;\ f(x)=1;$$

$$x>x_0=1/\sqrt{2};\ k(x)=x^2+0{,}5;\ q(x)=e^{-x^2};\ f(x)=\cos x.$$

Модельная задача

$$x_0=1/\sqrt{2};k(x)=k(x_0);q(x)=q(x_0);f(x)=f(x_0).$$

Задание 3

Краевые условия задачи $u(0)=1;\ u(1)=2$.

Дополнительные условия в точке разрыва

$$\left.\begin{array}{l} u(x_0-0)=u(x_0+0), \\ k(x_0-0)u'_x(x_0-0)=k(x_0+0)u'_x(x_0+0), \end{array}\right\}$$

$$x<x_0=1/\sqrt{5};\ k(x)=\sin x^2+1;\ q(x)=x;\ f(x)=1;$$

$$x>x_0=1/\sqrt{5};\ k(x)=\sin x^2+1;\ q(x)=x^3;\ f(x)=x^2-1.$$

Модельная задача

$$x_0=1/\sqrt{5};k(x)=k(x_0);q(x)=q(x_0);f(x)=f(x_0).$$

Задание 4

Краевые условия задачи $u(0)=1;\ u(1)=0$.

Дополнительные условия в точке разрыва

$$\left.\begin{array}{l} u(x_0-0)=u(x_0+0), \\ k(x_0-0)u'_x(x_0-0)=k(x_0+0)u'_x(x_0+0), \end{array}\right\}$$

$$x<x_0=1/\sqrt{2};\ k(x)=e^{-x};\ q(x)=x^2;\ f(x)=1;$$

$$x>x_0=1/\sqrt{2};\ k(x)=1;\ q(x)=e^{-x^2};\ f(x)=\cos x.$$

Модельная задача

$$x_0=1/\sqrt{2};k(x)=k(x_0);q(x)=q(x_0);f(x)=f(x_0).$$

Задание 5

Краевые условия задачи $u(0)=1;\ u(1)=0$.

Дополнительные условия в точке разрыва

$$\left.\begin{array}{l} u(x_0-0)=u(x_0+0), \\ k(x_0-0)u'_x(x_0-0)=k(x_0+0)u'_x(x_0+0), \end{array}\right\}$$

$$x<x_0=1/\sqrt{2};\ k(x)=1;\ q(x)=1;\ f(x)=e^{x};$$

$$x>x_0=1/\sqrt{2};\ k(x)=e^{\sin x};\ q(x)=2;\ f(x)=e^{x}.$$

Модельная задача

$$x_0=1/\sqrt{2};k(x)=k(x_0);q(x)=q(x_0);f(x)=f(x_0).$$

Задание 6

Краевые условия задачи $u(0) = 0;\ u(1) = 1$.

Дополнительные условия в точке разрыва

$$\left.\begin{aligned} &u(x_0 - 0) = u(x_0 + 0), \\ &k(x_0 - 0)u_x'(x_0 - 0) = k(x_0 + 0)u_x'(x_0 + 0), \end{aligned}\right\}$$

$$x < x_0 = 0{,}525;\ k(x) = e^{-x^2};\ q(x) = x^2;\ f(x) = \sin x;$$

$$x > x_0 = 0{,}525;\ k(x) = x;\ q(x) = x^2;\ f(x) = \sin x.$$

Модельная задача

$$x_0 = 0{,}525\ k(x) = k(x_0);\ q(x) = q(x_0);\ f(x) = f(x_0).$$

Задание 7

Краевые условия задачи $u(0) = 0;\ u(1) = 1$.

Дополнительные условия в точке разрыва

$$\left.\begin{aligned} &u(x_0 - 0) = u(x_0 + 0), \\ &k(x_0 - 0)u_x'(x_0 - 0) = k(x_0 + 0)u_x'(x_0 + 0), \end{aligned}\right\}$$

$$x < x_0 = 1/\sqrt{2};\ k(x) = e^{\sin x};\ q(x) = 2;\ f(x) = e^x;$$

$$x > x_0 = 1/\sqrt{2};\ k(x) = 1;\ q(x) = 1;\ f(x) = e.^x$$

Модельная задача

$$x_0 = 1/\sqrt{2};\ k(x) = k(x_0);\ q(x) = q(x_0);\ f(x) = f(x_0).$$

Задание 8

Краевые условия задачи $u(0) = 1;\ u(1) = 0$.

Дополнительные условия в точке разрыва

$$\left.\begin{aligned} &u(x_0 - 0) = u(x_0 + 0), \\ &k(x_0 - 0)u_x'(x_0 - 0) = k(x_0 + 0)u_x'(x_0 + 0), \end{aligned}\right\}$$

$$x < x_0 = 1/\sqrt{10};\ k(x) = \cos x + 2;\ q(x) = 1;\ f(x) = 2x;$$

$$x > x_0 = 1/\sqrt{10};\ k(x) = \sin x + 2;\ q(x) = 1;\ f(x) = 0.$$

Модельная задача

$$x_0 = 1/\sqrt{10};\ k(x) = k(x_0);\ q(x) = q(x_0);\ f(x) = f(x_0).$$

Задание 9

Краевые условия задачи $u(0) = 0;\ u(1) = 1$.

Дополнительные условия в точке разрыва

$$\left.\begin{aligned} &u(x_0 - 0) = u(x_0 + 0), \\ &k(x_0 - 0)u_x'(x_0 - 0) = k(x_0 + 0)u_x'(x_0 + 0), \end{aligned}\right\}$$

$$x < x_0 = 1/\sqrt{3};\ k(x) = 1;\ q(x) = x^2;\ f(x) = x^2 - 1;$$

$$x > x_0 = 1/\sqrt{3};\ k(x) = e^{-x};\ q(x) = x;\ f(x) = 1.$$

Модельная задача

$$x_0 = 1/\sqrt{3};\ k(x) = k(x_0);\ q(x) = q(x_0);\ f(x) = f(x_0).$$

Задание 10

Краевые условия задачи $u(0) = 0;\ u(1) = 1$.

Дополнительные условия в точке разрыва

$$\left.\begin{aligned} &u(x_0 - 0) = u(x_0 + 0), \\ &k(x_0 - 0)u_x'(x_0 - 0) = k(x_0 + 0)u_x'(x_0 + 0), \end{aligned}\right\}$$

$$x < x_0 = 1/\sqrt{2};\ k(x) = x^2 + 0{,}5;\ q(x) = e^{-x^2};\ f(x) = \cos x;$$

$$x > x_0 = 1/\sqrt{2};\ k(x) = x^2 + 0{,}5;\ q(x) = 1;\ f(x) = 1.$$

Модельная задача

$$x_0 = 1/\sqrt{2};\ k(x) = k(x_0);\ q(x) = q(x_0);\ f(x) = f(x_0).$$

Задание 11

Краевые условия задачи $u(0) = 1;\ u(1) = 0$.

Дополнительные условия в точке разрыва

$$\left.\begin{aligned} &u(x_0 - 0) = u(x_0 + 0), \\ &k(x_0 - 0)u_x'(x_0 - 0) = k(x_0 + 0)u_x'(x_0 + 0), \end{aligned}\right\}$$

$$x < x_0 = 0{,}125;\ k(x) = x + 1;\ q(x) = x^2;\ f(x) = \cos x.$$

$$x > x_0 = 0{,}125;\ k(x) = x^2;\ q(x) = x^2;\ f(x) = \cos x$$

Модельная задача

$$x_0 = 0{,}125\ k(x) = k(x_0);\ q(x) = q(x_0);\ f(x) = f(x_0)$$

Задание 12

Краевые условия задачи $u(0)=1;\ u(1)=1$.

Дополнительные условия в точке разрыва

$$\left.\begin{aligned} &u(x_0-0)=u(x_0+0),\\ &k(x_0-0)u_x^{'}(x_0-0)=k(x_0+0)u_x^{'}(x_0+0),\end{aligned}\right\}$$

$$x<x_0=1/\sqrt{3};\ k(x)=1;\ q(x)=x^2;\ f(x)=\sin x;$$

$$x>x_0=1/\sqrt{3};\ k(x)=e^{\cos x};\ q(x)=x^2;\ f(x)=\sin x.$$

Модельная задача

$$x_0=0{,}125 k(x)=k(x_0); q(x)=q(x_0); f(x)=f(x_0).$$

Задание 13

Краевые условия задачи $u(0)=0;\ u(1)=1$.

Дополнительные условия в точке разрыва

$$\left.\begin{aligned} &u(x_0-0)=u(x_0+0),\\ &k(x_0-0)u_x^{'}(x_0-0)=k(x_0+0)u_x^{'}(x_0+0),\end{aligned}\right\}$$

$$x<x_0=0.525;\ k(x)=x+1;\ q(x)=e^{-x};\ f(x)=1;$$

$$x>x_0=0.525;\ k(x)=x;\ q(x)=e^{-x};\ f(x)=x^3.$$

Модельная задача

$$x_0=0{,}525 k(x)=k(x_0); q(x)=q(x_0); f(x)=f(x_0).$$

Задание 14

Краевые условия задачи $u(0)=0;\ u(1)=1$.

Дополнительные условия в точке разрыва

$$\left.\begin{aligned} &u(x_0-0)=u(x_0+0),\\ &k(x_0-0)u_x^{'}(x_0-0)=k(x_0+0)u_x^{'}(x_0+0),\end{aligned}\right\}$$

$$x<x_0=0{,}525;\ k(x)=x;\ q(x)=e^{-x};\ f(x)=x^3;$$

$$x>x_0=0{,}525;\ k(x)=x^2+1;\ q(x)=e^{-x};\ f(x)=1.$$

Модельная задача

$$x_0=0{,}525 k(x)=k(x_0); q(x)=q(x_0); f(x)=f(x_0).$$

Задание 15

Краевые условия задачи $u(0)=0;\ u(1)=0$.

Дополнительные условия в точке разрыва

$$\left.\begin{aligned} &u(x_0-0)=u(x_0+0),\\ &k(x_0-0)u_x^{'}(x_0-0)=k(x_0+0)u_x^{'}(x_0+0),\end{aligned}\right\}$$

$$x<x_0=0{,}125;\ k(x)=x+1;\ q(x)=e^{-x};\ f(x)=\cos x;$$

$$x>x_0=0{,}125;\ k(x)=x^2;\ q(x)=e^{-x};\ f(x)=1.$$

Модельная задача

$$x_0=0{,}125 k(x)=k(x_0); q(x)=q(x_0); f(x)=f(x_0).$$

Задание 16

Краевые условия задачи $u(0)=2;\ u(1)=1$.

Дополнительные условия в точке разрыва

$$\left.\begin{aligned} &u(x_0-0)=u(x_0+0),\\ &k(x_0-0)u_x^{'}(x_0-0)=k(x_0+0)u_x^{'}(x_0+0),\end{aligned}\right\}$$

$$x<x_0=1/\sqrt{3};\ k(x)=e^{-x};\ q(x)=x^3;\ f(x)=x^2-1;$$

$$x>x_0=1/\sqrt{3};\ k(x)=e^{-x};\ q(x)=x;\ f(x)=1.$$

Модельная задача

$$x_0=1/\sqrt{3}; k(x)=k(x_0); q(x)=q(x_0); f(x)=f(x_0).$$