Curs Nr. 1

Şiruri numerice (recapitulare)

Lector Dr. ADINA JURATONI
Departamentul de Matematică
UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA

0.1 Şiruri numerice

Definiţia 0.1.1 *Se numeşte şir de numere reale o funcţie* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *care asociază fiecărui număr natural* n *numărul real* a_n*, numit termenul general al şirului sau termenul de rang* n *al şirului.*

Definiţia 0.1.2 *Şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este monoton dacă şi numai dacă* $sgn(a_{n+1} - a_n)$ *este constant oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$.

- *Dacă* $a_{n+1}-a_n > 0$, *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$, *atunci şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este monoton crescător;*
- *Dacă* $a_{n+1}-a_n < 0$, *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$, *atunci şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este monoton descrescător*

Definiţia 0.1.3 *Şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este mărginit dacă există* $M > 0$ *astfel încât pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$.

Definiţia 0.1.4 *Şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent cu limita* $l \in \mathbb{R}$ *dacă şi numai dacă este verificată condiţia*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n \geq n_\varepsilon, |a_n - l| < \varepsilon.$$

În acest caz, notăm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

Un şir care nu este convergent se numeşte divergent.

Propoziţia 0.1.5 *(criteriul cleştelui) Fie* $(a_n), (b_n), (x_n)$ *trei şiruri de numere reale care îndeplinesc proprietăţile:*

i) şirurile $(a_n), (b_n)$ *sunt convergente cu aceeaşi limită* x

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x$$

ii) începând de la un rang n_0 *toţi termenii şirului* x_n *verifică dubla inegalitate*

$$a_n \leq x_n \leq b_n,$$

atunci şirul (x_n) *este convergent şi* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Corolarul 0.1.6 *(criteriul majorării) Fie* (x_n) *şi* (y_n) *două şiruri de numere reale cu proprietăţile:*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

ii) există $x \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $|x_n - x| \leq |y_n|$ *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Corolarul 0.1.7 *Fie* (x_n) *şi* (y_n) *două şiruri de numere reale, primul mărginit, iar cel de-al doilea convergent cu limita* 0. *Atunci şirul produs* $(x_n \cdot y_n)$ *este convergent şi are limita* 0.

Teorema 0.1.8 *(Weierstrass) Orice şir monoton şi mărginit este convergent.*

Reciproca aceste teoreme este falsă, există şiruri care sunt convergente, dar nu sunt monotone. Un astfel de exemplu este şirul cu termenul general $(-1)^n \frac{1}{n}$.

Propoziţia 0.1.9 *(Criteriul raportului) Fie* (x_n) *un şir de numere reale pozitive astfel încât există*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0, \infty).$$

i) Dacă $l < 1$ *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;

ii) Dacă $l > 1$ *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Propoziţia 0.1.10 *(Criteriul rădăcinii) Fie* (x_n) *un şir de numere reale pozitive astfel încât există*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0, \infty).$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

Definiţia 0.1.11 *Şirul* (x_n) *se numeşte şir fundamental, sau şir Cauchy, dacă şi numai dacă este verificată condiţia*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \ a.\hat{i}.\ \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^*, |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Teorema 0.1.12 *(completitudinea dreptei reale) Orice şir fundamental de numere reale este convergent.*

Limite remarcabile

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} 0, p>0 \\ 1, p=0 \\ \infty, p<0 \end{cases}$, 2. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, |q|<1 \\ 1, q=1 \\ \infty, q>1 \end{cases}$,

3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + ... + a_p) = \begin{cases} -\infty, a_0<0 \\ \infty, a_0>0 \end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + ... + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + ... + b_q} = \begin{cases} 0, p<q \\ \frac{a_0}{b_0}, p=q \\ \infty \cdot sgn\frac{a_0}{b_0}, p>q \end{cases}$,

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, (a \in \mathbb{R})$, 7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^r} = 0, (r>0)$,

8. $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = 1$, 9. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$,

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^{bn} = e^{ab}$, 11. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right) = e$,

12. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1) = \ln a, (a>0)$,

13. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^r - 1\right) = r, (r \in \mathbb{R})$,

14. $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, integrabilă $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int\limits_0^1 f(x)dx$,

15. Dacă (x_n) este un şir de numere reale nenule astfel încât $x_n \to 0$ atunci:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\arcsin x_n}{x_n} = 1$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tan x_n}{x_n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\arctan x_n}{x_n} = 1$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a, a \in (0,1)\cup(1,\infty)$,

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+x_n)^r - 1}{x_n} = r,\ r \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to\infty} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e.$

Teorema 0.1.13 *(Stolz-Cesàro) Fie (x_n) şi (y_n) două şiruri de numere reale care satifac condiţiile:*

i) şirul (y_n) este crescător şi nemărginit

ii) există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l$, (finită sau infinită)

atunci şirul cu termenul general $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ are limită şi în plus, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l$.