Wprowadzenie

Pokaz:

- wahadło matematyczne liniowe i nieliniowe
- symulacja wahadła matematycznego

Nazwa dziedziny:

- teoria chaosu
- dynamika układów nieliniowych

Jest częścią Fizyki Układów Złożonych (*Complex Systems* *hyperlink: http://www.scholarpedia.org/article/Complex_systems*)

Dział ten ma bardzo wiele zastosowań:
W układach fizycznych:

- Oscylacje nieliniowe różnych rodzajów
- Niestabilności (osobliwości) w przepływie ciepła oraz w hydrodynamice
- Przepływ prądu w nieliniowych układach elektrycznych (elektronicznych) w tym również w nadprzewodnikach
- Zjawiska w optyce (solitony optyczne, bistabilność optyczna)

W innych dziedzinach:

- Meteorologia i klimatologia
- Telekomunikacja, szyfrowanie danych
- Oscylacyjne reakcje chemiczne
- Elektrofizjologia serca, mięśni i naczyń krwionośnych
- Hemodynamika – opór obwodowy naczyń krwionośnych (fraktalność drzewa naczyniowego)
- Diagnostyka rytmu serca, nagłe zakończenie rytmu serca, ciągu potencjałów czynnościowych komórki itp.
- Neurologia i zjawiska w mózgu oraz układzie nerwowym

Na naszym Wydziale fizyką układów złożonych zajmują się:

- dr Agata Fronczak — fizyka statystyczna układów złożonych, zastosowania fizyki w ekonomii i socjologii
- dr Piotr Fronczak — przejścia fazowe w sieciach złożonych, zastosowania fizyki w ekonomii i socjologii, algorytmy genetyczne
- prof. Janusz Hołyst — sieci ewoluujące, sieci złożone, zastosowania fizyki w ekonomii i socjologii
- prof. Robert Kosiński — sieci neuronowe, automaty komórkowe, rozwój epidemii chorób zakaźnych, sieci złożone, zastosowania fizyki w socjologii
- dr hab. Andrzej Krawiecki — rezonans fal spinowych, rezonans stochastyczny, sieci ewoluujące, sieci złożone

- dr Teodor Buchner — fizyka układu krążenia człowieka w tym zagadnienia fizyczne w regulacji ciśnienia tętniczego, oddziaływanie oddechu na rytm serca, modele fizyczne układu krążenia człowieka; dynamika symboliczna oraz analiza sygnałów pochodzących z aparatury medycznej

- dr Monika Petelczyc — procesy stochastyczne; ocena zdolności adaptacyjnych rytmu serca; analiza rytmu serca jako procesu stochastycznego; stochastyczne metody usuwania szumu z sygnału; pomiar składowej szumowej sygnału; biofizyka

- prof. Jan Żebrowski — fizyka układu krążenia, zjawiska fizyczne związane z rytmem serca i jego regulacją, procesy stochastyczne; modele rytmu serca i modele serca, modelowanie komór serca jako ośrodków aktywnych; analiza stanów niestacjonarnych w układach dynamicznych, analiza fraktalna szeregów czasowych nieodwracalność biegu w czasie procesów w organizmach żywych

Często spotykamy się z danymi pomiarowymi (a nawet obliczonymi w modelu teoretycznym), które wyglądają jak szum:

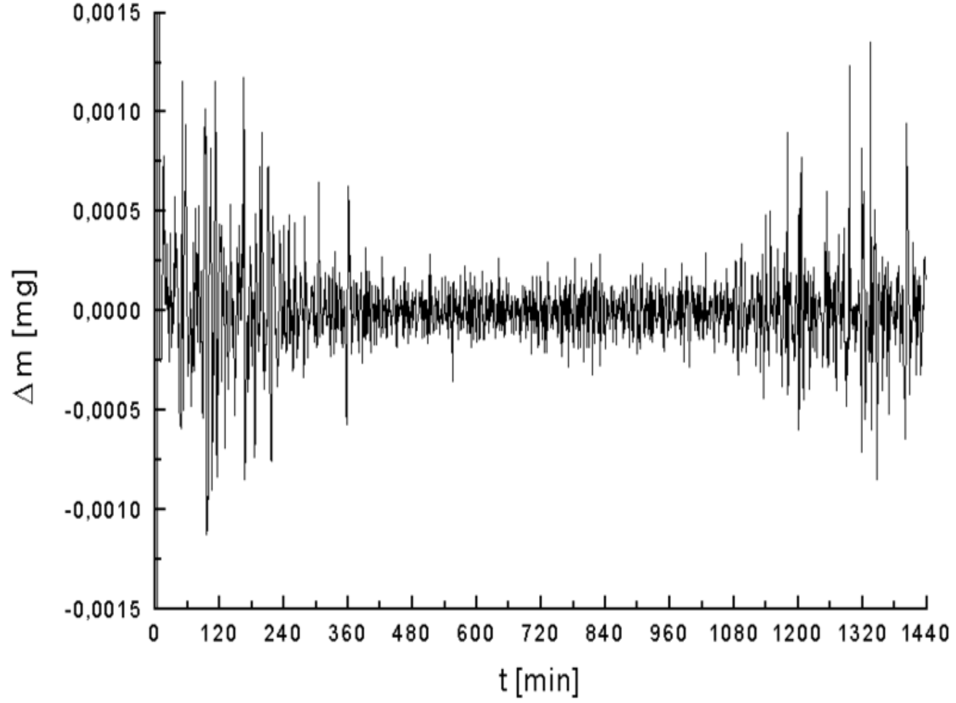
Sygnały te są:

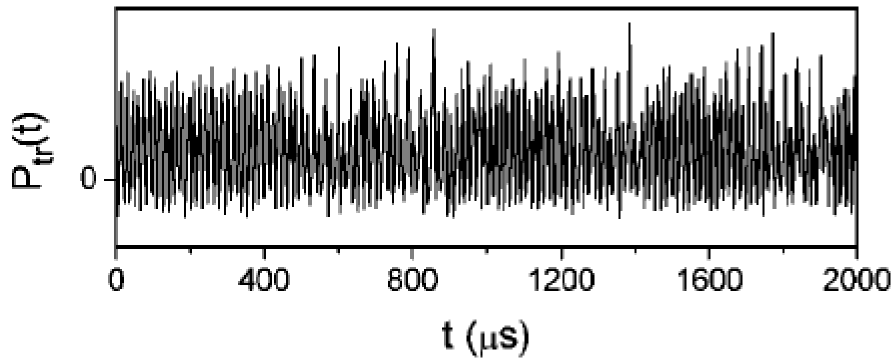
- nieregularne (oko nie wyławia wzorca, zmian okresowych)
- nieprzewidywalne.

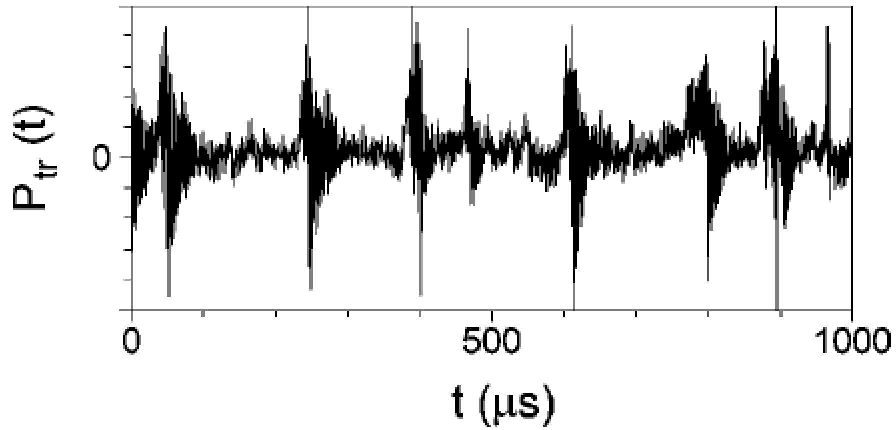
Przykład: dane [grawimetryczne](http://en.wikipedia.org/wiki/Gravimetric) (hyperlink: http://en.wikipedia.org/wiki/Gravimetric} w funkcji czasu;

moc pochłaniana w trakcie [rezonansu fal spinowych](http://en.wikipedia.org/wiki/Spin_wave)

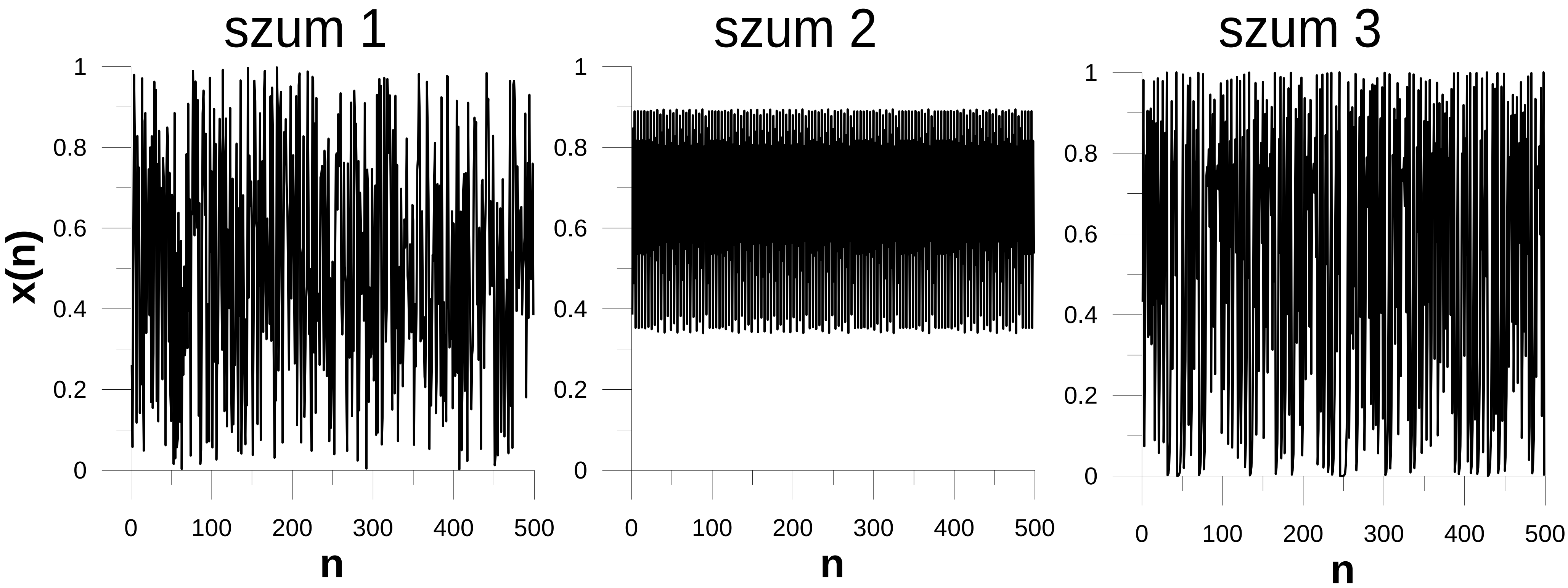
{hyperlin: http://en.wikipedia.org/wiki/Spin_wave}}







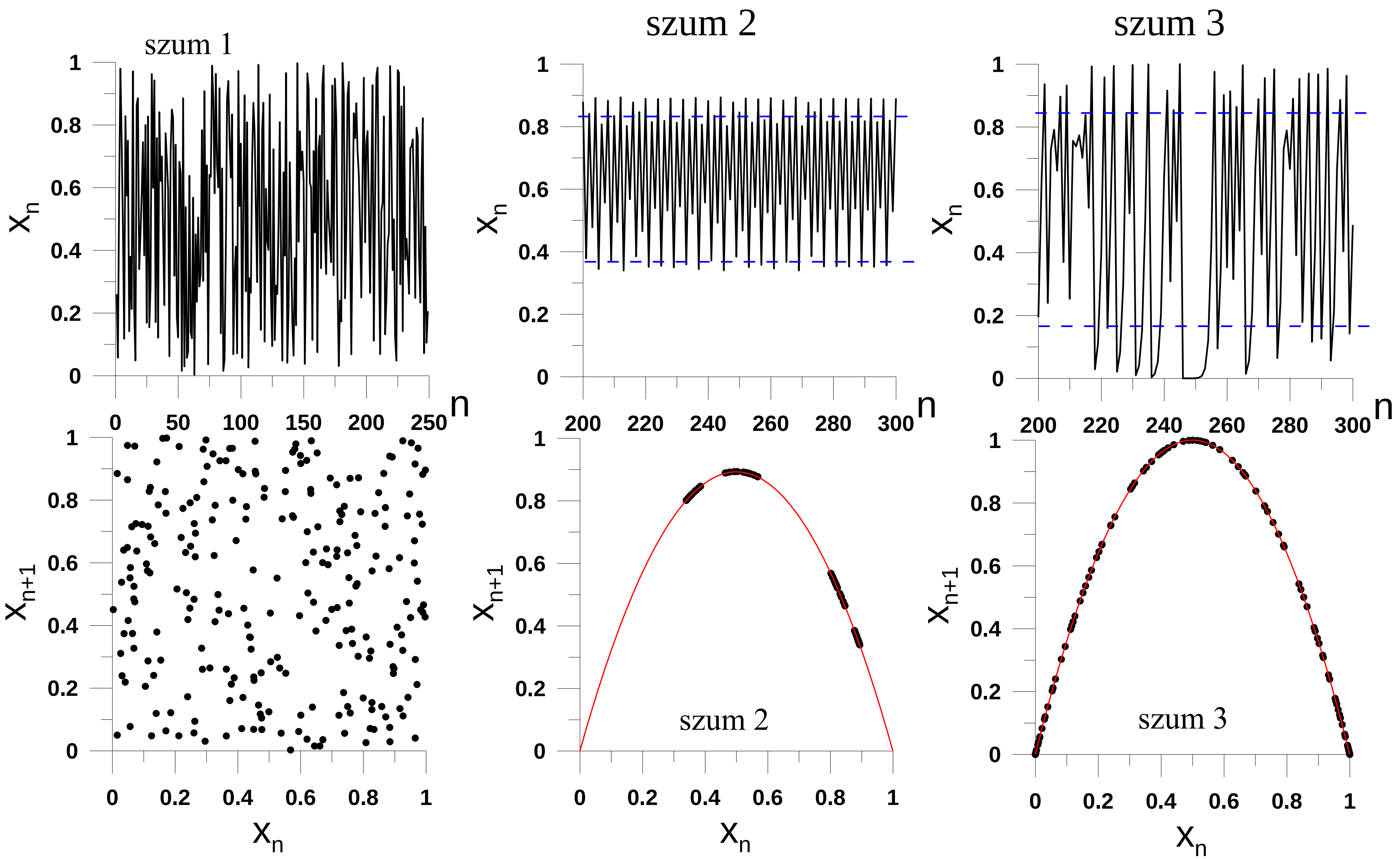
<u>Przykład:</u> Trzy przykładowe sygnały tego typu.



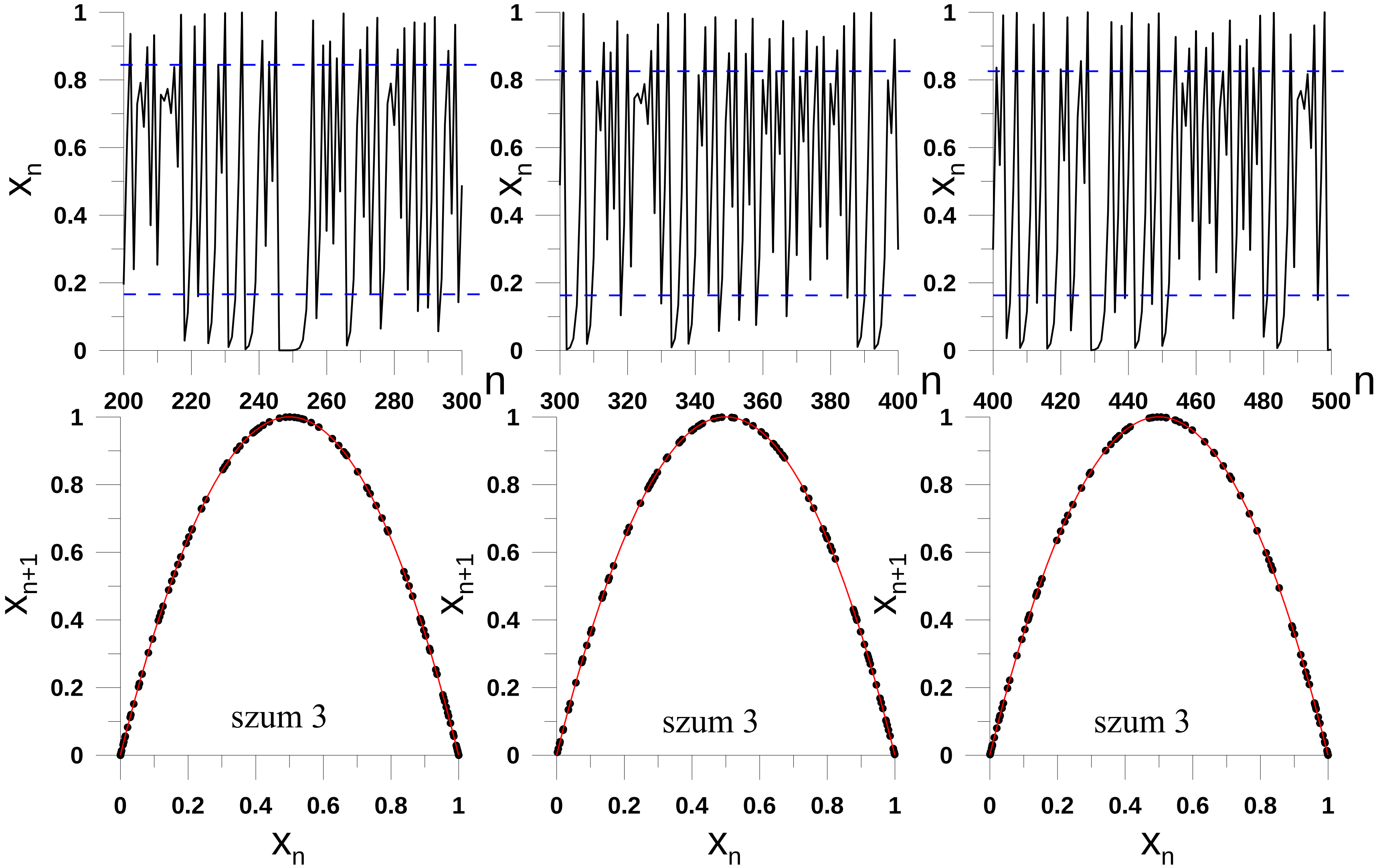
Zbadajmy korelację pomiędzy kolejnymi elementami każdego z tych sygnałów tworząc odwzorowanie

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

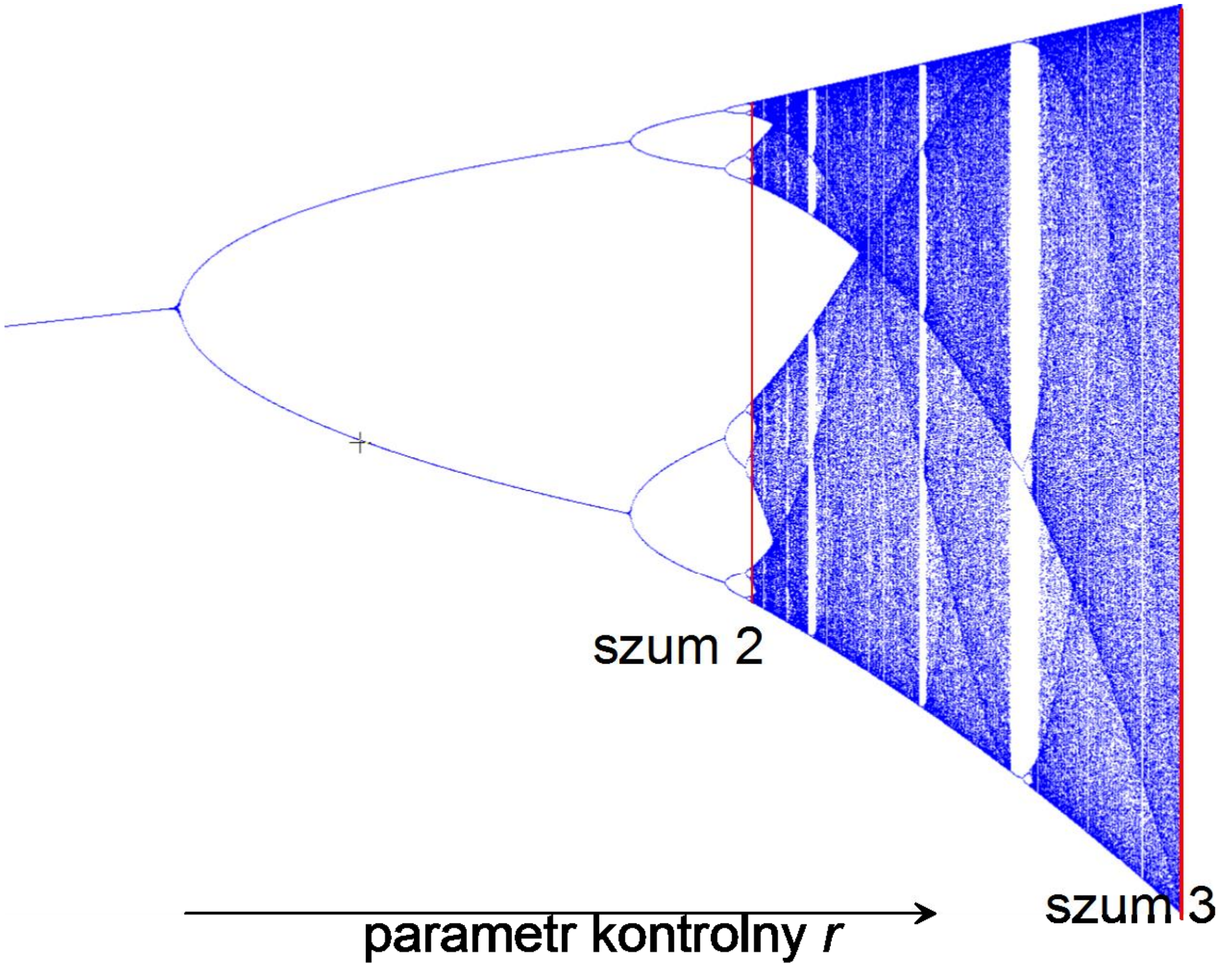
Do tego celu wystarczy odpowiedni wykres:



standardowy generator liczb losowych $\quad x_{n+1} = 3.575\, x_n (1 - x_n) \quad x_{n+1} = 4.0\, x_n (1 - x_n)$

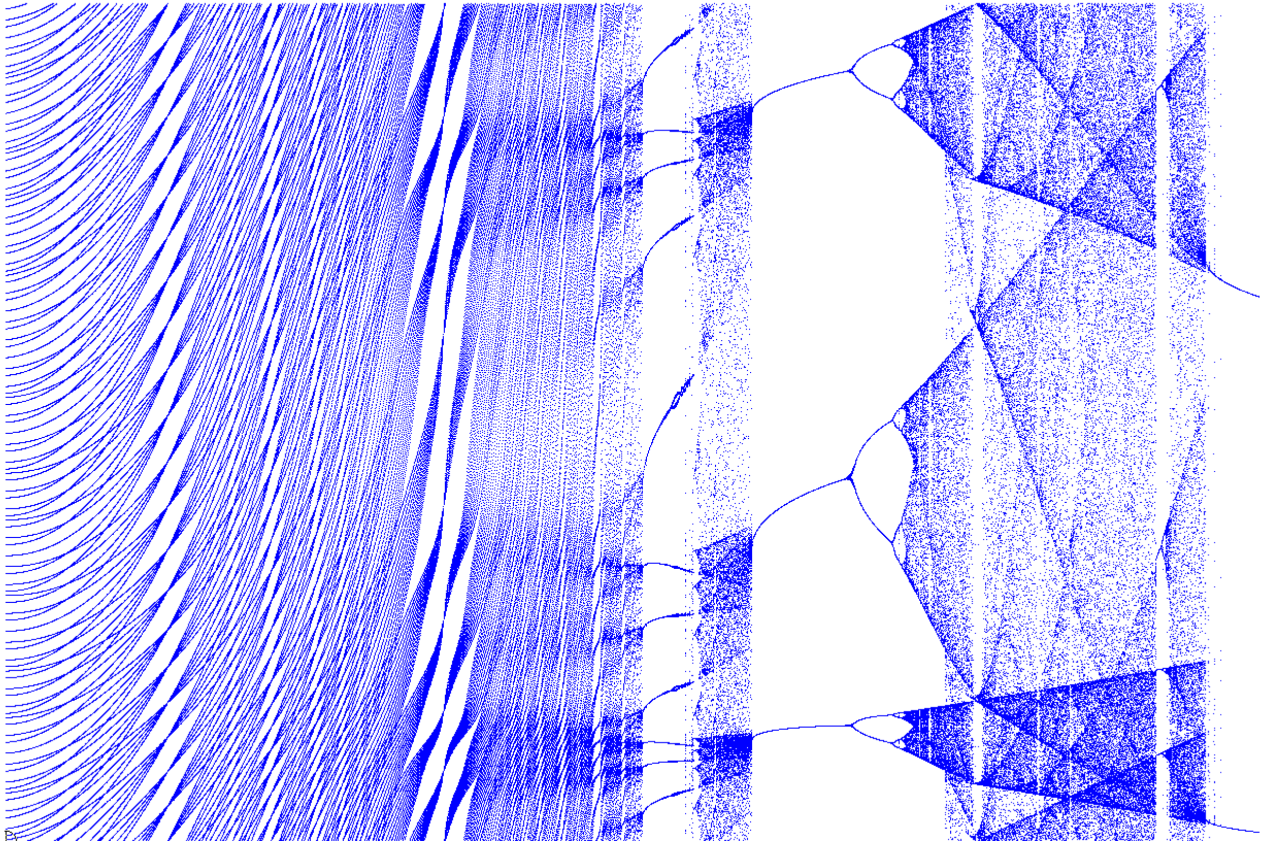


<u>Wniosek</u>: ewolucja w czasie układu deterministycznego może być nieprzewidywalna



Wykres (diagram) bifurkacyjny odwzorowania logistycznego $x_{n+1} = r\,x_n(1 - x_n)$

Takich wykresów bifurkacyjnych jest bardzo wiele różnych. Na przykład dla tzw. odwzorowania okręgu:



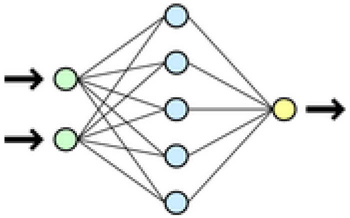
Widoczne raptowne przejścia (bifurkacje) pomiędzy rodzajami rozwiązań są to przejścia fazowe z dala od stanu równowagi.

Zjawiska nieprzewidywalne występują nie tylko w układach dyskretnych (odwzorowania dyskretne) ale przede wszystkim w układach z czasem ciągłym.

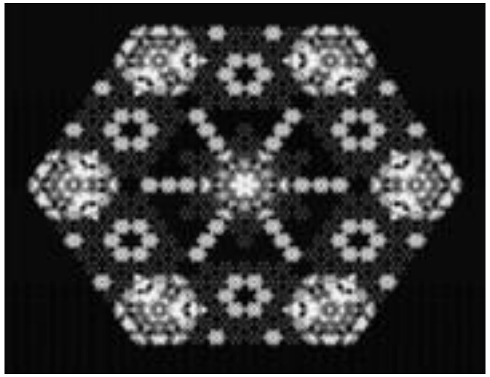
Przykład: program Dynamics Solver (http://tp.lc.ehu.es/jma.html), examples: Lorenz attractor.ds

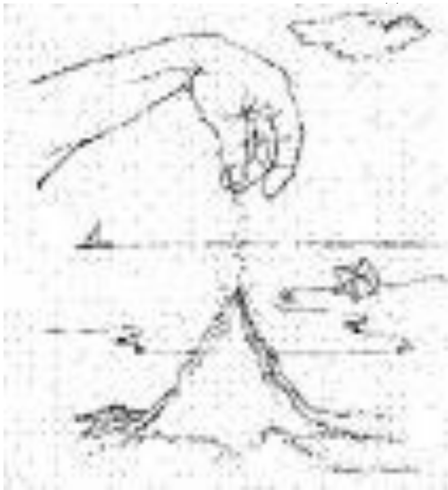
Z dynamiką nieliniową związanych jest szereg innych dziedzin:

- sieci neuronowe



- automaty komórkowe



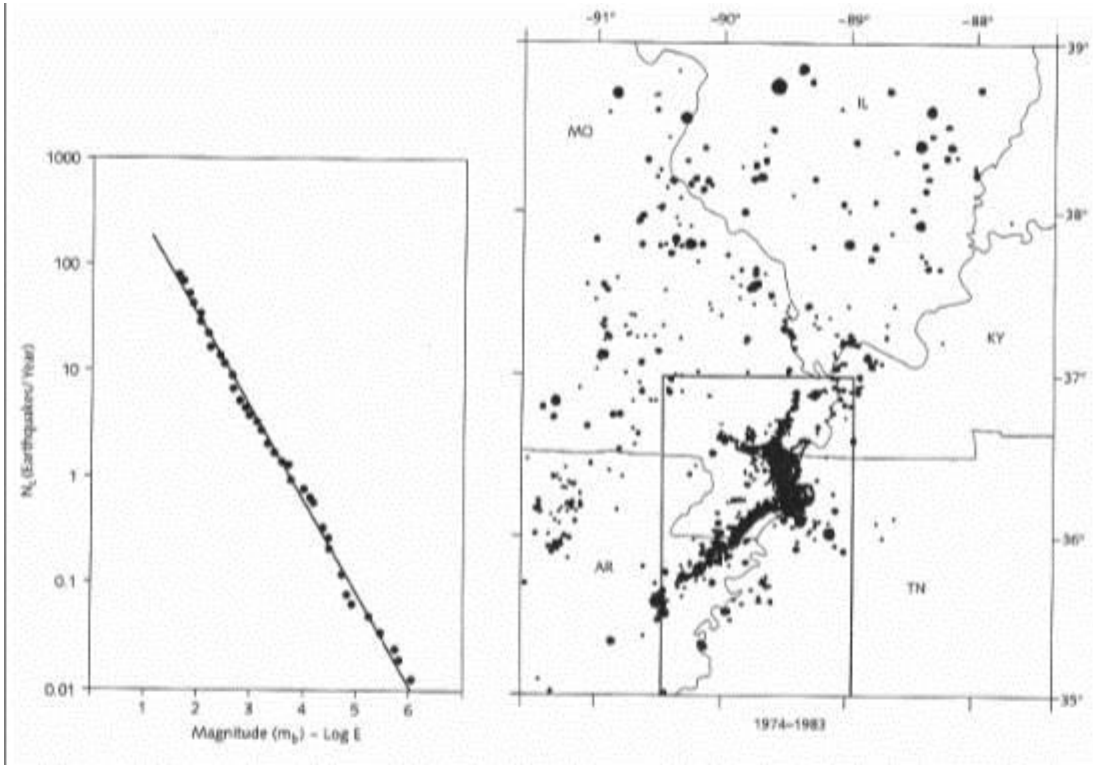


➢ samoorganizująca się krytyczność (self-organized criticality SOC) {hyperlink: http://en.wikipedia.org/wiki/Self-organized_criticality}

jedna z klas automatów komórkowych

Własności:

- prawa potęgowe np. skala trzęsień ziemi (skala Richtera)



Na prawym rysunku: występowanie trzęsień ziemi na pewnym obszarze.
Na lewym: wykres częstości tych trzęsień w stosunku do ich magnitudy (wielkości).

- geometria fraktalna

- szum typu $1/f^{\propto}$

Ale tez wiele innych nie związanych bezpośrednio z fizyką jak:

- filotaksja (sposób, w jaki liście rozmieszczone są na łodydze, z uwzględnieniem ich pozycji względem siebie: skrętoległe i okółkowe). Liczba liści oraz łusek szyszki są liczbami Fibonacciego

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0; \\ 1 & \text{if } n = 1; \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{if } n > 1. \end{cases}$$

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

- budowa liścia

a pękanie wysychających żeli

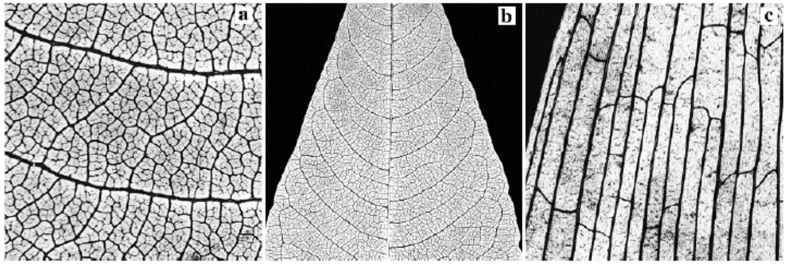


Fig. 1. Three examples of venation patterns. (a) The polygonal net-like structure of the small veins of a leaf of *Polygonum Polystachium*. (b) The secondary veins of *Polygonum Polystachium* are all connected to each other by loops located near the leaf margin. This is the 'brochidodromous' organisation [10]. (c) A detail of the venation of Lily of the valley, *Convallaria Maialis*, a monocotyledon.

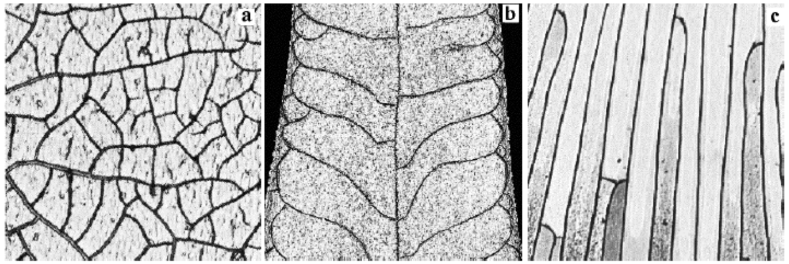


Fig. 3. (a) A pattern of cracks formed in a thin layer of gel, about 20 μm thick in which the drying is spatially homogeneous. The typical spacing of the cracks is 80 μm. (b) The cracks resulting from the drying of a wedge shaped strip of gel deposited on a silicon wafer. (c) A pattern of cracks obtained in a gel layer having a constant thickness gradient. The drying of the gel proceeds from the thin region (at the bottom) to the thick one. When a crack stops growing it connects perpendicularly, first to one of its neighbour (top of the photograph), then to the other (bottom).

Współczesna dynamika układów nieliniowych wyrosła z 3-ch różnych ‘korzeni’:

A matematyka dyskretnych układów dynamicznych (odwzorowania dyskretne)

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

gdzie f jest funkcją nieliniową.
Widzieliśmy już drzewo bifurkacyjne dla odwzorowania logistycznego $x_{n+1} = r\,x_n(1-x_n)$.

Jest wiele innych rodzajów odwzorowań

Pokaz symulacji odwzorowań dyskretnych

Ten obszar badań upowszechnił się po wynalezieniu kalkulatora programowalnego w latach 70-tych. wcześniej była to domena (nieraz b. trudnych) dociekań matematyków.

B układy dynamiczne z czasem ciągłym:

modele w postaci (układów) równań różniczkowych zwyczajnych oraz prace doświadczalne.

Na początku wykładu zademonstrowałem symulację: rozwiązanie numeryczne równania:

$$\ddot{x} + \alpha\,\dot{x} + \sin(\omega_0^2 x) = A\sin(\omega t)$$

To równanie jest równoważne dwóm równaniom 1-szego rzędu.
Okazuje się, że – aby otrzymać złożone rozwiązania - nie jest potrzebna tak skomplikowana nieliniowość jak funkcja sinus. Wystarczy:

$$\ddot{x} + \alpha\,\dot{x} + x^3 = A\sin(\omega t)$$

Pokaz: symulacja dla A = 3.0 (ruch periodyczny); 2.5 (ruch chaotyczny); 2.0 (inny ruch periodyczny)

Widzimy, że i w tym przypadku mamy do czynienia z oknami periodycznymi – podobnie było dla odwzorowania logistycznego.

Ważne własności nieliniowych układów dynamicznych:

- samopodobieństwo

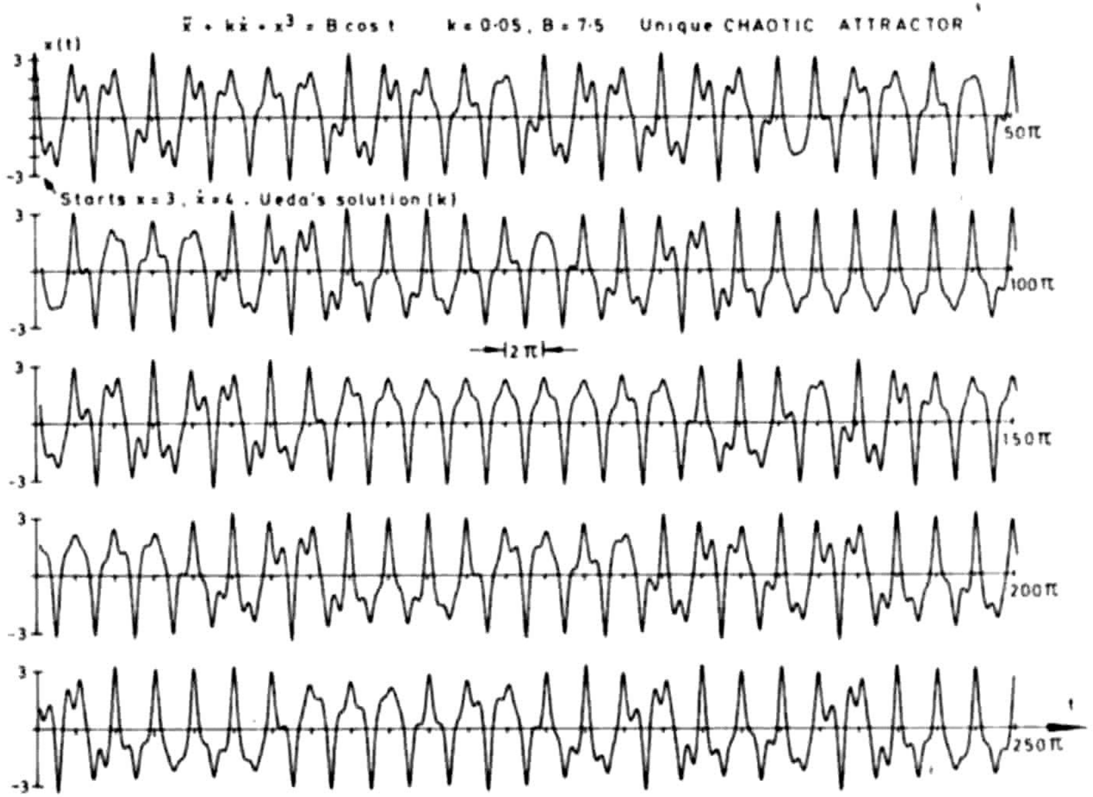


Figure 1.1 Time series of a steady-state chaotic response

- czułość na warunki poczatkowe

Program: Dynamics Solver; Examples: Duffing5.ds

Uniwersalność w dynamice układów nieliniowych:

Pozornie różne układy dynamiczne z czasem ciągłym okazują się często należeć do tej samej klasy: łączy je wspólny charakter odwzorowania dyskretnego.

Przykład: odwzorowanie dyskretne w układzie z czasem ciągłym – reakcji chemicznej opisanej nieliniowymi równaniami kinetyki reakcji (reakcja Bielousowa-Żabotynskiego):

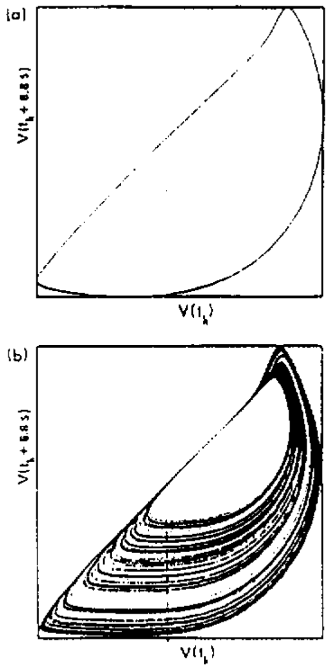


Figure 17.3 (a) A two-dimensional phase portrait for a periodic state observed in experiments on the Belousov–Zhabotinsky reaction; the corresponding power spectrum has a single sharp fundamental component and its harmonics. (b) A two-dimensional projection of a three-dimensional phase portrait (with the third axis, $V(t_k + 17.6\,s)$, normal to the page) for a chaotic state observed in the Belousov–Zhabotinsky reaction; the corresponding power spectrum contains broadband noise. The attractor in (a) is a limit cycle and in (b) a strange attractor

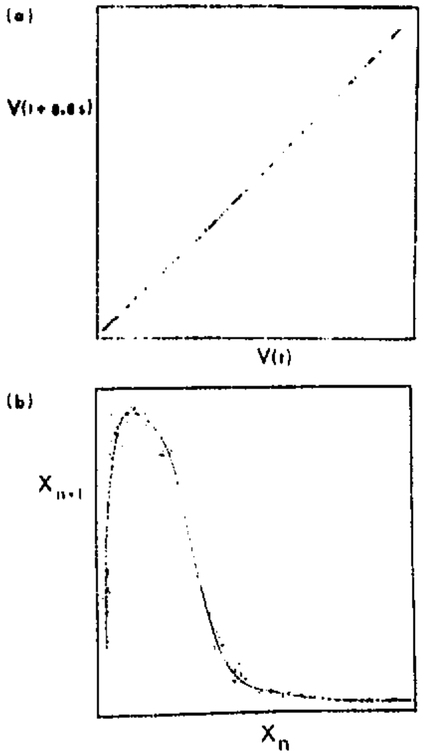
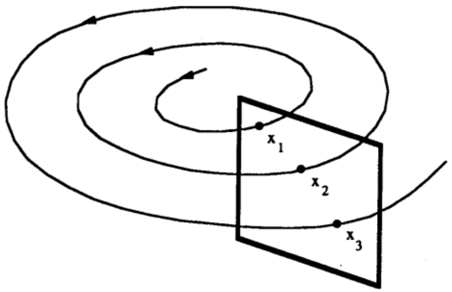


Figure 17.4 (a) A Poincaré section formed by the intersection of trajectories in a three-dimensional phase space with the plane (normal to the page) passing through the broken line in Figure 17.3 (b). (b) A one-dimensional map constructed from the data in (a)

Przekrój Poincaré :

{hyperlink: http://www.phy.davidson.edu/StuHome/chgreene/chaos/Pendulum/poincare_section.htm}



W tym przykładzie:

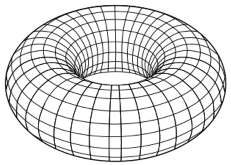
Odwzorowanie otrzymane w wyniku tej procedury ma pojedyncze, gładkie ekstremum (odwzorowanie unimodalne) i będzie miało bardzo zbliżone własności do m.in. odwzorowania logistycznego.

C fizyka układów zachowawczych

Właściwie tu się wszystko zaczęło: w XIX w Poincaré zbadał ruch 3-ch ciał i pokazał, że nie jest on całkowalny tzn. nie można napisać rozwiązania w postaci zwartego wzoru nie stosując przybliżeń.

Ale czy przybliżone rozwiązania są dostatecznie dokładne?
Przykład: sprzężone oscylatory Henona-Heilesa
{hyperlink: http://mathworld.wolfram.com/SurfaceofSection.html}
Dwa oscylatory (część całkowalna) sprzężone są za pomocą członu, którego obecność powoduje niecałkowalność, opisane są hamiltonianem (wyraża całkowitą energię mechaniczną układu):

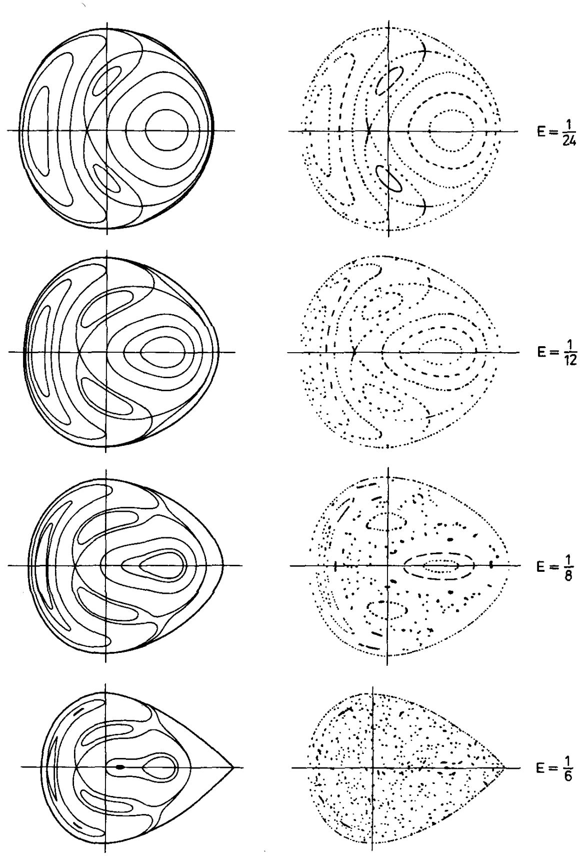
$$H = \frac{p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2}{2} + q_1^2 q_2 - \frac{q_2^2}{3}$$



Bez członu sprzężenia w przestrzeni fazowej odbywa się ruch po torusie.

Pierwotny ruch po torus ulega skomplikowaniu pod wpływem sprzężenia pomiędzy oscylatorami.

W kolumnie lewej rysunku obok widzimy przekrój Poincaré trajektorii fazowej układu otrzymany metodą rachunku zaburzeń (6 rząd).



Rys. 139. Odwzorowanie Poincarégo dla układu Hénona–Heilesa (wg Berry, 1978)

W kolumnie prawej – to samo uzyskane metodami numerycznymi. Widać, że dla wyższych energii E rozwiązanie staje się chaotyczne i nie do otrzymania metodą rachunku zaburzeń.

Istotna różnica pomiędzy układami zachowawczymi a dysypatywnymi:

W układach dysypatywnych występuja atraktory:

- Ograniczone obszary przestrzeni fazowej (tj. przestrzeni wszystkich zmiennych opisujących układ), do których zmierza trajektoria i na których trajektoria osiada.
- Każdy atraktor posiada zbiór warunków początkowych (basen atrakcji), który do niego prowadzi.

W układach zachowawczych o rodzaju ruchu decyduje warunek początkowy i ani atraktory ani baseny atrakcji nie występują.

Pokaz: czułość na warunki początkowe w układach zachowawczych

- Ruch trzech ciał
- Cząstki naładowane w kwadrupolowym polu magnetycznym

Przykład: odwzorowanie standardowe (odwzorowanie Chirikova)

$$p_{n+1} = Jp_n - K\sin(\vartheta_n)$$
$$\vartheta_{n+1} = \vartheta_n + Jp_n - K\sin(\vartheta_n)$$

Gdy K → 0 jest to zdyskretyzowana wersja równania wahadła przy czym:

θ kąt wychylenia

p moment pędu

To samo równanie może też opisywać

ruch kulki skaczącej pionowo nad oscylującym stołem (*bouncing ball*).

Dla J = 1 układ jest zachowawczy i o rodzaju ruchu decyduje warunek początkowy (θ_0, p_0).

Dla J < 1 układ jest dysypatywny i ma atraktor w (0,0).

Pokaz: symulacja odwzorowania standardowego

Jest wiele ważnych zastosowań dynamiki układów zachowawczych.

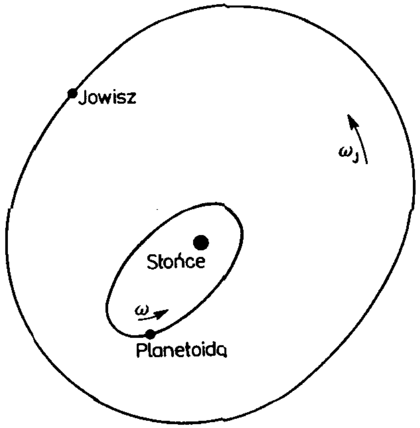
Przykład:

Nieliniowe rezonanse w układzie planetoid, Jowisza i Słońca.

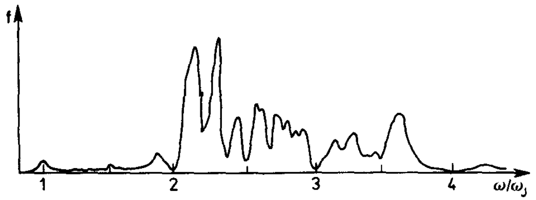
Takie zagadnienie jest niecałkowalne (problem wielu ciał w mechanice klasycznej).

Gdy stosunek częstości ω obiegu nie zaburzonego ruchu planetoidy wokół Słońca do częstości ω_J ruchu Jowisza jest liczbą wymierną (ułamek właściwy) ruch staje się niestabilny.

Konsekwencją są przerwy w gęstości planetoid – wykryte numerycznie w latach 70-tych i potwierdzone doświadczalnie przy pomocy naziemnego radaru.



Rys. 140. Zaburzenie ruchu planetoidy przez Jowisza

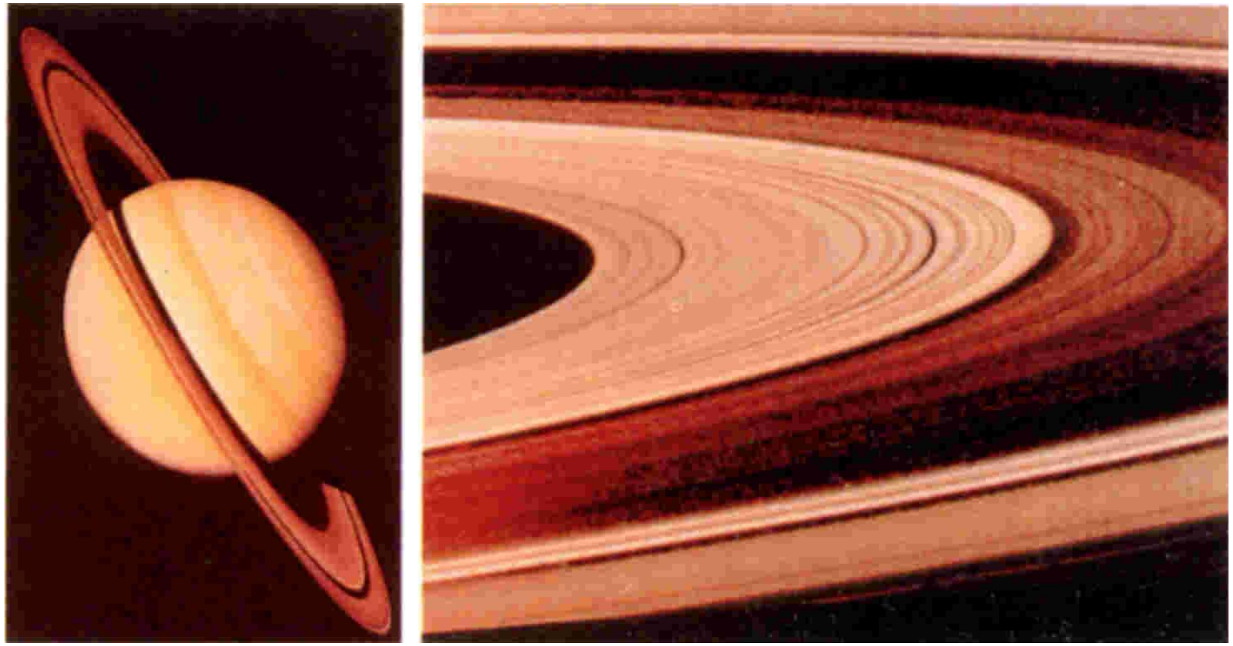


Rys. 141. Rozkład f planetoid, obserwowanych w pasie między Marsem i Jowiszem, jako funkcja ω/ω_J (wg Berry, 1978)

Przykład:

Fizyka pierścieni planetarnych

Pierścienie te powstają z podobnych przyczyn co opisane w poprzednim przykładzie. Niestabilność orbit drobnych satelitów planety wyjaśnia zarówno strukturę przerw pomiędzy pierścieniami jak (częściowo) strukturę samych pierścienie. Jednakże tej ostatniej do końca nie rozumiemy.



Przykład: stabilność wiązek w zderzaczach cząstek elementarnych

Literatura do wykładu *Dynamika układów nieliniowych*

Podręczniki Podstawowe:

- E. Ott, "Chaos w układach dynamicznych",WNT Warszawa 1997.
- H.G. Schuster "Chaos Deterministyczny - Wprowadzenie", Warszawa PWN 1993
- H.E.Nusse, J.A.Yorke, “Dynamika - badania numeryczne”, PWN Warszawa 1998
- G.L.Baker i J.P.Gollub, “Wstęp do dynamiki układów chaotycznych”, PWN Warszawa 1998.
- J.Kudrewicz, "Fraktale i Chaos", Warszawa, WNT 1993,

Literatura Uzupełniająca:

- J.Gleick, "Chaos - tworzenie nowej nauki”, Zysk i S-ka, Poznań 1996
- I.Stewart, "Czy Bóg Gra w Kości - Nowa Matematyka Chaosu", Warszawa, PWN 1994
- J.R.Dorfman, „Wprowadzenie do teorii chaosu w nierównowagowej mechanice statystycznej”, PWN Warszawa 2001
- C.Beck, F.Schlögl, “Thermodynamics of chaotic systems – an introduction”, Cambridge Nonlinear Science Series, Cambridge 1997
- I.Prigogine, I.Sanders, "Z Chaosu Ku Porządkowi", Warszawa, PIW 1990.
- Hao Bai-Lin, "Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems", World Scientific, Singapore 1989 (ISBN 9971-50-682-3, ISBN 9971-50-698-X)
- Hao Bai-Lin, Zheng Wei-Mou, “Applied Symbolic Dynamics and Chaos”, Directions in Chaos vol.7, World Scientific 1998 (ISBN 981-02-3512-7)