

Układy dynamiczne

Układem dynamicznym będziemy nazywali **deterministyczną** receptę na dokonanie ewolucji w czasie stanu danego układu.

Czas może być albo dyskretny albo wielkością ciągłą:

- odwzorowania dyskretne (mapy) są przykładem układów z dyskretnym czasem
- autonomiczne równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu - przykładem układów z czasem jako zmienną ciągłą

$$\frac{d \vec{x}}{d t} = \vec{F} [\vec{x}(t)]$$

Układy równań nieautonomicznych można zamienić na równania autonomiczne poprzez dodanie odpowiedniego równania do układu.

Uwagi:

a) W większości podręczników w części "teoretycznej" rozpatruje się albo odwzorowania dyskretne albo **tylko** równania różniczkowe **zwyczajne**. Wynika to raczej z ograniczeń matematyki niż realnej sytuacji w przyrodzie !

W tych samych podręcznikach analizuje się wiele doświadczeń, które ewidentnie nie mogą być opisane równaniami różniczkowymi zwyczajnymi (konwekcja, przepływ hydrodynamiczny, zmienność rytmu serca i inne).

b) żeby rozwiązania były nieregularne w czasie (**chaos deterministyczny**) układ dynamiczny musi być odpowiednio wielowymiarowy:

- w przypadku układów dyskretnych - już jednowymiarowe zagadnienia mogą dawać zachowania nieregularne (chaotyczne)
- w przypadku układów opisywanych układem równań różniczkowych liczba tych równań musi być conajmniej 3

Pytanie: dlaczego w takim razie równanie różniczkowe 2-giego rzędu dla wahadła daje odpowiedź chaotyczną ?

c) **przestrzeń fazowa**: przestrzeń wektorów $\mathbf{x}(t)$

- nie mylić z przestrzenią fazową z fizyki statystycznej: tam jest to przestrzeń $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)\}$ co wynika z 2-giego rzędu równań ruchu - natomiast tu są one 1-szego rzędu.

Dyskretne odwzorowania jednowymiarowe

Odwzorowania odcinkami liniowe:

Najprostszym odwzorowanie tego typu jest odwzorowanie Bernoulliego:

n-krotne iterowanie odwzorowania jednowymiarowego:

$$x_{n+1} = \sigma(x_n) = 2x_n \bmod 1$$

poczynając od warunku początkowego x_0

daje ciąg wartości $x_1 = \sigma(x_0), x_2 = \sigma(\sigma(x_0)), \dots, x_n = \sigma(\dots\sigma(\sigma(x_0)))$

Wprowadzimy **oznaczenie**: n -krotne wykonanie odwzorowania (n -krotne złożenie odwzorowania) będzie oznaczone przez górny indeks n .

Uwaga: n -krotne złożenie odwzorowania σ oznaczamy σ^n .

Przykład: program Modmap;

a) przyjąć parametry:

- parametr kontrolny 1.999999;
- warunek początkowy dowolny z zakresu (0,1);
- **argument modulo 100**;
- rząd złożenia 1

b) przyjąć parametry:

- parametr kontrolny 1.999999;
- warunek początkowy dowolny z zakresu (0,1);
- **argument modulo 1**;
- rząd złożenia 1

Definicja:

Punkt x^* jest **punktem stałym** odwzorowania σ jeżeli

$$x^* = \sigma(x^*)$$

tzn. **punkty stałe leżą na przecięciu wykresu $\sigma(x)$ z dwusieczną kąta prostego.**

Przedstawimy teraz warunek początkowy w postaci binarnej:

$$x_0 = \sum_{v=1}^{\infty} a_v 2^{-v}$$

tzn w postaci:

$$x_0 = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

gdzie a_v przyjmują wartości 0 lub 1.

Dla $x_0 < 0.5$ mamy $a_1 = 0$

Dla $x_0 > 0.5$ mamy $a_1 = 1$

Pierwsza iteracja odwzorowania $\sigma(x_0)$ oznacza przesunięcie ciągu reprezentacji binarnej o 1 miejsce w lewo (mnożenie wielkości binarnej przez 2) oraz usunięciu pierwszej cyfry ciągu (modulo 1).

tzn.

$$x_1 = 0, a_2 a_3 a_4 \dots$$

Przy każdej iteracji σ realizuje się więc

przesunięcie Bernoulliego

Ma ono następujące własności:

1) *Czułość na warunki początkowe*

Jeśli dwa warunki początkowe różnią się od siebie tylko na n -tym miejscu po przecinku to różnica jest powiększana przez działanie σ (2 krotnie z każdą iteracją)

2) Ciąg iteracji σ^n jest w takim samym stopniu **ciągami losowym** jak ciąg rzutów monetą: zawsze można tak dobrać x_0 aby 0 i 1 w zapisie binarnym odpowiadały kolejnym orłom i reszkom rzutu monetą
(te ciągi są wtedy izomorficzne)

3) chociaż badany układ jest deterministyczny i rozpoczyna ruch się z warunku początkowego $x_0 \in [0,1]$

na skutek kolejnych iteracji odwzorowania dyskretnego stan jest **ergodyczny**.

Oznacza to:

obrazy dowolnego $x_0 \in [0,1]$ zbliżają się na odległość $\varepsilon = 2^{-n}$ do każdego punktu odcinka $[0,1]$ nieskończenie wiele razy.

Przykład: program Modmap;

przyjąć parametry:

- parametr kontrolny 1.999999;
- warunek początkowy dowolny z zakresu (0,1);
- argument modulo 1;
- **rząd złożenia 1 a następnie 2, 4, 8,.....**

Przesunięcie Bernoulliego jest bezpośrednim powodem pojawiania się orbit periodycznych:

Przykład:

$$x_0 = 0.1010101010.... \quad (= 2/3)$$

$$x_1 = \sigma(x_0) = 0.0101010... \quad (= 1/3)$$

$$x_2 = \sigma(x_1) = 0.101010... \quad (= 2/3)$$

Mamy więc orbitę periodyczną o okresie p

gdy dobierzemy warunek początkowy tak aby jego zapis binarny $x_0 = 0,a_1a_2...a_p a_1a_2...a_p a_1a_2...a_p a_1a_2...a_p$ itd.

Przykład: program Modmap;

przyjąć parametry:

- parametr kontrolny 1.999999;
- warunek początkowy 0.666666 a następnie 0.333333333
- argument modulo 1;
- rząd złożenia 1

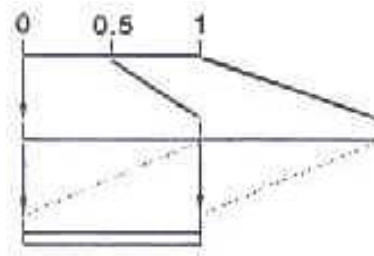
Punkt y na orbicie o okresie p jest również punktem stałym mapy p -krotnie złożonej tj.

$$y = \sigma^p(y)$$

Mechanizm powstawania chaosu deterministycznego w postaci przesunięcia Bernoulliego jest całkowicie uniwersalny:

- we wszystkich nieliniowych układach dynamicznych pojawia się rozciąganie a następnie składanie

Dla naszego jednowymiarowego odwzorowania σ :



- Początkowo dla $x_0 < 0.5$ odwzorowanie σ rozciąga odcinek $(0, x_0]$ o czynnik 2
- Następnie, gdy $n > n_0$ gdzie n_0 takie, że $2^{n_0} x_0 \geq 1$

zaczyna odgrywać rolę funkcja modulo:

odwzorowuje ona x_0 z powrotem w odcinek jednostkowy.

Innych możliwości nie ma: bez modulo nie byłoby rozwiązań ograniczonych do jakiegoś skończonego obszaru przestrzeni fazowej.

Wykładnik Lapunowa

Rozciąganie powoduje, że blisko siebie leżące punkty pod wpływem odwzorowania nieliniowego $f(x_n)$ oddalają się od siebie:

$$\begin{array}{c} \overbrace{\quad \quad \quad}^{\varepsilon} \quad \xrightarrow{N} \quad \overbrace{\quad \quad \quad}^{\varepsilon \exp(N \lambda(x_0))} \\ x_0 \quad \quad x_0 + \varepsilon \quad \quad f^N(x_0) \quad \quad f^N(x_0 + \varepsilon) \end{array}$$

gdzie λ jest **wykładnikiem Lapunowa**.

N pełni rolę czasu o wartościach dyskretnych a więc λ jest (średnią prędkością oddalania się (zbliżania) trajektorii.

Jak widać:

$$\varepsilon \exp(N \lambda(x_0)) = |f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)|$$

W granicy otrzymuje się ściśle wyrażenie na wykładnik Lapunowa $\lambda(x_0)$:

$$\begin{aligned} \lambda(x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)}{\varepsilon} \right| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)| \end{aligned}$$

Wykładnik Lapunowa mierzy **średni ubytek informacji** o położeniu punktu na odcinku $[0,1)$ po jednej iteracji odwzorowania.

Wykładnik Lapunowa a stabilność punktu stałego

Definicja:

Punkt stały x^* jest lokalnie stabilny, jeśli wszystkie punkty x_0 w pewnym otoczeniu x^* są do niego przyciągane: inaczej jeśli ciąg iteracji

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \rightarrow x^*$$

Analityczne kryterium lokalnej stabilności jest spełnione dla warunku:

$$\left| \frac{d}{dx} f(x^*) \right| < 1$$

dlatego, że odległość od punktu stałego:

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} &= |x_{n+1} - x^*| = |f(x^* + \delta_n) - x^*| \\ &\approx \left| \frac{d}{dx} f(x^*) \right| \delta_n \end{aligned}$$

Widzimy związek pomiędzy wykładnikiem Lapunowa a stabilnością punktu stałego odwzorowania.

Własność ta może być uogólniona:

dodatni wykładnik Lapunowa świadczy o niestabilności rozwiązania (ale nie o braku rozwiązania).

Przykład:

Odzworowanie trójkątne ("mapa namiotowa"):

$$\Delta(x) = a \left(1 - 2 \left| \frac{1}{2} - x \right| \right)$$

Dla $a < 0.5$ punkt stały $x^* = 0$ jest jedynym punktem stabilnym całego odcinka $[0,1)$

Dla $a > 0.5$ są dwa niestabilne punkty stałe: 0 i $2a/(1+2a)$.

Weźmy $\Delta^n(x_n)$ dla $a=1$. Jest ono też kawałkami liniowe.

Przykład: program TentMap

Przyjmując dowolny warunek początkowy obszaru basenu atrakcji $(0,1)$ oraz rząd złożenia 1

Prześledzić zachowanie odwzorowania namiotowego dla $0 < a < 0.5$ oraz $0.5 < a < 0.999999999$.

Sprawdzić, że dla $a = 0.9999999999$ osiąga się punkt stały $x^* = 2/3$.

Dla $0.5 < a < 0.999999999$ $x^* = 2a/(1+2a)$

Wszędzie poza przeliczalnym zbiorem punktów: $j \cdot 2^{-n}$ gdzie $j=0,1,2,\dots,2^n$

$$\left| \frac{d}{dx} \Delta^n(x) \right| = 2^n$$

Pochodna ta jest miarą stabilności rozwiązania.

Widzimy więc, że odległość (prawie) każdej pary punktów $x_0, x_0+\varepsilon$ rośnie wykładniczo z n .

Stąd wykładnik Lapunowa jest nie zależny od warunku początkowego x_0

$$\lambda = \ln 2$$

Dla dowolnej wartości parametru kontrolnego a

$$\lambda = \ln 2a$$

i zmienia znak dla wartości krytycznej $a_c = 1/2$

Pokaz: Wykładnik Lagunowa w funkcji parametru kontrolnego dla różnych odwzorowań

Analogia do zjawisk krytycznych fizyki statystycznej:

W pobliżu punktu krytycznego a_c wykładnik Lapunowa zmienia się zgodnie z prawem:

$$\lambda \propto (r - r_c)$$

Wykładnik Lapunowa spełnia więc rolę **parametru porządku** w analogii do przejść fazowych fizyki statystycznej stanów równowagi.

Miara niezmiennicza

Na początek:

Gęstość niezmiennicza $\rho(x)$ odwzorowania jednowymiarowego

$$x_{n+1} = f(x_n), \text{ dla } x_n \in [0,1], n=1,2,\dots$$

określa asymptotyczną gęstość iteracji na odcinku jednostkowym (**naturalna gęstość niezmiennicza**):

$$\rho(x) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \delta[x - f^i(x_0)]$$

Układ jest **ergodyczny** jeśli $\rho(x)$ nie zależy od warunku początkowego x_0 .

Pokaz: Miara naturalna dla różnych odwzorowań jednowymiarowych

W takim przypadku - podobnie jak w fizyce statystycznej - średnie po czasie funkcji $g(x)$ można wyrazić jako **średnie z gęstością niezmienniczą**:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N g(x_i) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N g[f^i(x_0)] = \int_0^1 \rho(x) g(x) dx$$

Jest to jednowymiarowy odpowiednik termodynamicznego uśredniania z klasycznej fizyki statystycznej:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A[x(t)] dt = \int \rho(x) A(x) dx$$

gdzie

- $\mathbf{x}=[\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)]$,
- $A(\mathbf{x})$ jest dowolną funkcją
- współrzędne uogólnione \mathbf{q} i pędy uogólnione \mathbf{p} spełniają równania Hamiltona.

W klasycznej fizyce statystycznej operator Liouville'a L określa ewolucję w czasie gęstości prawdopodobieństwa w wyrażeniu na średnią po zespole statystycznym:

$$\dot{\rho}(x, t) = -i L \rho(x, t)$$

gdzie operator Liouville'a:

$$L = i \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right]$$

Ewolucję w czasie gęstości iteracji $\rho(x)$ odwzorowania dyskretnego określa **operator Frobenius-Perona**:

$$\rho_{n+1}(x) = \int \rho_n(y) \delta [x - f(y)] dy$$

Przykład: Operator Frobeniusa-Perona dla odwzorowania namiotowego

Dane jest odwzorowanie:

$$\Delta(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

tak, że $x_{i+1} = \Delta(x_i)$, $i=0,1,2,\dots$

Zamiast analizować jak odwzorowanie Δ działa na pojedynczy punkt odcinka $(0,1)$, rozpatrzmy gęstość początkową ρ .

Gdy Δ działa na ρ otrzymujemy pewną nową gęstość $P\rho$.

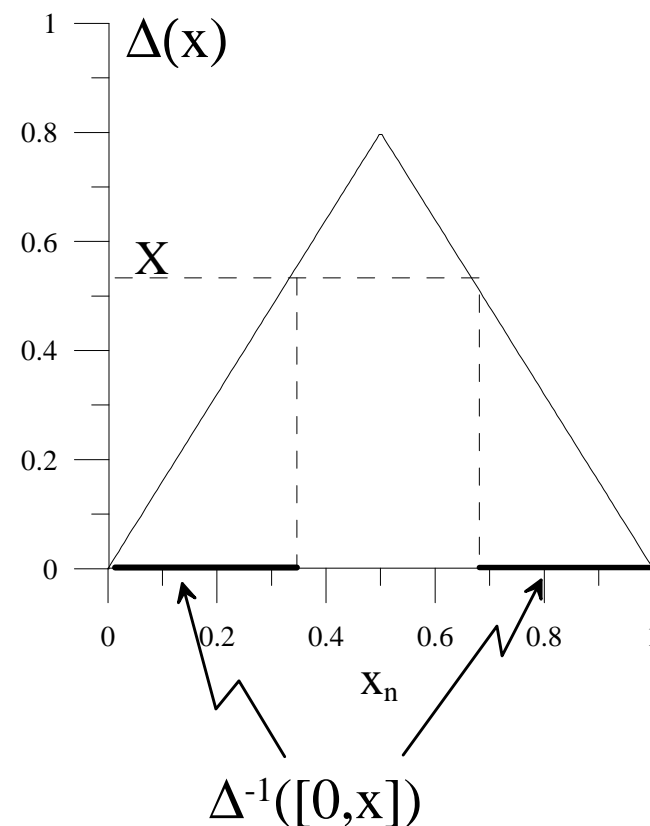
Ułamek gęstości $P\rho$ na odcinku $[0,x]$ jest

$$\int_0^x P\rho(s)ds$$

Po jednej iteracji odwzorowania Δ :

punkty w $[0,x]$ pochodzą z przeciwobrazu $\Delta^{-1}([0,x])$ odwzorowania

$$\Delta^{-1}([0,x]) = \{y : \Delta(y) \in [0,x]\}$$



Łatwo obliczyć, że

$$\Delta^{-1}([0, x]) = [0, \frac{1}{2}x] \cap [1 - \frac{1}{2}x, 1]$$

Stąd

$$\int_0^x P\rho(s)ds = \int_0^{\frac{x}{2}} \rho(s)ds + \int_{1-\frac{x}{2}}^1 \rho(s)ds$$

Jeśli tą funkcję górnej granicy całkowania zróżniczkować po x otrzymuje się jawną postać operatora Frobeniusa-Perona dla odwzorowania namiotowego:

$$P\rho(x) = \frac{1}{2} \left[\rho\left(\frac{x}{2}\right) + \rho\left(1 - \frac{x}{2}\right) \right]$$

Gęstość niezmiennicza ma tę własność, że:

$$\rho(x) = \int \rho(y) \delta[x - f(y)] dy$$

Rozwiązaniem tego ostatniego równania są również niestabilne punkty stałe odwzorowania.

Jednakże przy obliczeniach numerycznych (zaokrąglenia)

jak również na skutek fluktuacji w układach rzeczywistych

prawdopodobieństwo trafienia w taki niestabilny punkt stały jest nieistotne.

Przykład:

Dla odwzorowania "namiotowego" $\Delta(x)$ z parametrem $a = 1$ równanie na gęstość niezmienniczą:

$$\rho(x) = \frac{1}{2} \left[\rho\left(\frac{x}{2}\right) + \rho\left(1 - \frac{x}{2}\right) \right]$$

i ma rozwiązanie: $\rho(x) = 1$ a więc jest stała na całym odcinku $[0,1]$.

Odwzorowanie to jest więc ergodyczne.

W wielu wypadkach naturalna gęstość niezmiennicza nie istnieje.

Np wtedy gdy w wyniku działania odwzorowania dyskretnego $f(x)$ otrzymuje się asymptotycznie zbiór fraktalny (np. zbiór Cantora).

Wtedy wprowadza się (ogólniejszą) gęstość iteracji μ posługując się pojęciem przeciwobrazu $f^{-1}(x)$ odwzorowania $f(x)$.

Podobnie postąpiliśmy w przykładzie wyprowadzenia operatora Frobeniusa-Perona dla odwzorowania namiotowego.

Wtedy mówimy, że miara μ jest niezmiennicza gdy

$$\mu(S) = \mu(f^{-1}(S))$$

gdzie S jest zbiorem, na który działa dane odwzorowanie.

Przykład: Dyfuzja deterministyczna.

Program: dyfuzja

Uwaga: program wymaga DOS-extendera DOS4GW.EXE w tym samym katalogu lub na ścieżce.

Parametry:

Parametr kontrolny 1.05

Przyjmij warunek początkowy: $x_0 = 2.155$

Iterując krok po kroku zaobserwuj, w którą stronę trajektoria opuści wykres.

Zmień warunek początkowy (klawisz „i”) na 2.16 i zaobserwuj w którą stronę teraz trajektoria opuści wykres.