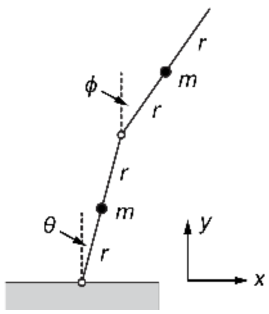
Klassieke Mechanica TN2321

16 december 2016, 13:30 – 16:30
Opstellers en tweede lezers tentamen: Sander Otte en Wim Bouwman
Het tentamen bestaat uit 3 vragen die gelden voor 40, 30 en 30 punten.
Toegestane hulpmiddelen en informatiebronnen: potlood, gum en pen
MAAK ELKE VRAAG OP EEN APART VEL! Veel succes!

1. We beschouwen twee rigide staven met lengte $2r$ die bovenop elkaar staan. De onderste staaf zit vast aan de grond en de bovenste staaf zit vast aan de onderste. Beide staven kunnen roteren in het xy-vlak, zie figuur. De staven worden elk gekenmerkt door een puntmassa m in het midden van de staaf en zijn verder massaloos. In de beginsituatie geldt $\theta = 0$ en $\phi = \epsilon$, waar ϵ een heel klein positief getal is, net voldoende om de symmetrie te breken.



   (a) (10 punten) Druk de posities (x, y) en snelheden $(\dot{x}, \dot{y})$ van beide massa's uit in termen van de hoeken θ en ϕ, en stel de Lagrangiaan op. Hierbij kun je gebruiken dat $\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) = \cos(a - b)$.

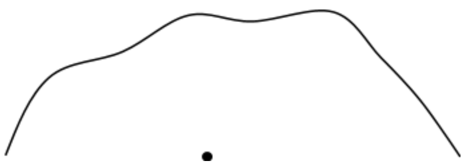
   Om de initiële hoekversnellingen te bepalen, maken we gebruik van een kleine hoekbenadering. Voor de kinetische energie mag je $\cos(x) \simeq 1$ gebruiken, maar voor de potentiële energie is $\cos(x) \simeq 1 - x^2/2$ vereist.

   (b) (10 punten) Bepaal de bewegingsvergelijkingen in deze benadering.

   (c) (10 punten) Bepaal de initiële hoekversnellingen, gebruikmakend van de gegeven begincondities. In welke richtingen vallen de staven en welke valt het snelst?

   (d) (10 punten) Stel, uitgaande van bovenstaande benadering, de gegeneraliseerde impulsen op en druk de hoeksnelheden $\dot{\theta}$ en $\dot{\phi}$ uit in termen van deze impulsen.

2. Een halve draadlus ligt in een vlak. De vorm van de draadlus wordt gegeven door de functie $r(\phi)$, waarbij r de afstand tot de oorsprong is en ϕ de hoek tussen de lijn vanuit de oorsprong naar een bepaald punt op de draadlus en de x-as.



De hoek ϕ ligt tussen 0 en π. De afstand van het draadeinde op $\phi = 0$ tot de oorsprong is r_0 en de afstand van het andere eind $\phi = \pi$ tot de oorsprong is r_π. We nemen aan dat de draad uniform elektrisch geladen is. Dit betekent dat de lading van een stuk draad evenredig is met de lengte ervan. Gebruik geen constraint voor de lengte. Bereken de vorm van de draad om een minimale potentiaal in de oorsprong te hebben. (Je herinnert je dat de potentiaal van een puntlading q evenredig is met q/r waarbij r de afstand tot die puntlading is.)

(a) (6 punten) Geef de uitdrukking voor een stukje draadlengte in poolcoordinaten.

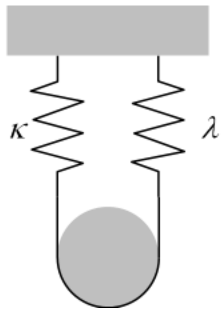
(b) (6 punten) Geef de uitdrukking voor de potentiaal in de oorsprong.

(c) (6 punten) Bepaal de vergelijking waaraan $r(\phi)$ moet voldoen om de potentiaal in de oorsprong maximaal te hebben.

(d) (6 punten) Los de hierboven gevonden differentiaalvergelijking op.

(e) (6 punten) Schrijf de berekende vorm $r(\phi)$ uit in termen van r_0 en r_π zodat deze aan de randvoorwaarden voldoet.

3. We kijken naar twee verticaal hangende veren met veerconstanten κ en λ. Een touw verbindt beide einden van de veren. In dit touw ligt een schijf, die in het touw kan rollen (niet slippen). De schijf heeft massa m en een straal a. Het traagheidsmoment van de schijf om het middelpunt is $I = ma^2/2$.



(a) (6 punten) Beschrijf voor jezelf welke normal modes je verwacht in het geval dat $\kappa = \lambda$ en wat dan handige gegeneraliseerde coördinaten zijn.

(b) (6 punten) Stel de Lagrangiaan op voor dit systeem in handige gegeneraliseerde coördinaten in het algemene geval dat $\kappa \neq \lambda$. Definieer duidelijk je gekozen coördinaten.

(c) (6 punten) Bereken de massa-matrix en de matrix horende bij de potentiële energie.

(d) (6 punten) Bereken de normal mode frequenties.

(e) (6 punten) Bereken en beschrijf de normal modes in het geval dat $\kappa = \lambda$.

Klassieke Mechanica – TN2321
Uitwerking tentamen 16 december 2016

1. (a) (10 punten)

$$x_1 = r\sin(\theta), \dot{x}_1 = r\cos(\theta)\dot{\theta}$$

$$y_1 = r\cos(\theta), \dot{y}_1 = -r\sin(\theta)\dot{\theta}$$

$$x_2 = 2r\sin(\theta) + r\sin(\phi), \dot{x}_2 = 2r\cos(\theta)\dot{\theta} + r\cos(\phi)\dot{\phi}$$

$$y_2 = 2r\cos(\theta) + r\cos(\phi), \dot{y}_2 = -2r\sin(\theta)\dot{\theta} - r\sin(\phi)\dot{\phi}$$

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}mr^2\left(5\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 4\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\big(\theta - \phi\big)\right) - mgr\left(3\cos\theta + \cos\phi\right)$$

(b) (10 punten)

$$\mathscr{L}^* = \frac{1}{2}mr^2\left(5\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 4\dot{\theta}\dot{\phi}\right) + \frac{1}{2}mgr\left(3\theta^2 + \phi^2\right)$$

$$\theta = \frac{r}{g}\left(\frac{5}{3}\ddot{\theta} + \frac{2}{3}\ddot{\phi}\right)$$

$$\phi = \frac{r}{g}\left(2\ddot{\theta} + \ddot{\phi}\right)$$

(c) (10 punten)

$$\ddot{\theta} = -\frac{2g\epsilon}{r}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{5g\epsilon}{r}$$

(d) (10 punten)

$$p_\theta = 5mr^2\dot{\theta} + 2mr^2\dot{\phi}$$

$$p_\phi = mr^2\dot{\phi} + 2mr^2\dot{\theta}$$

$$\dot{\phi} = \frac{5p_\phi - 2p_\theta}{mr^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta - 2p_\phi}{mr^2}$$

2. (a) (6 punten) $ds = \sqrt{dr^2 + (rd\phi)^2} = \sqrt{r'^2 + r^2}\,d\phi$.

(b) (6 punten) $V = \int \frac{ds}{r} = \int \frac{\sqrt{r'^2+r^2}}{r}d\phi$.

(c) (6 punten)

$$\frac{\sqrt{r'^2 + r^2}}{r} - \frac{r'}{r}\frac{2r'}{2\sqrt{r'^2 + r^2}} = C$$

$$r = C\sqrt{r'^2 + r^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{1 - C^2}{C^2}}\,r'$$

(d) (6 punten) Een algemene oplossing hiervoor is $r = Ae^{\gamma\phi}$.

(e) (6 punten) $r_0 = A$ en $r_\pi = r_0 e^{\gamma\pi} \Rightarrow \gamma = \frac{\ln(r_\pi/r_0)}{\pi}$.

3. (a) (6 punten) Je verwacht een verticale oscillatie van de schijf waarbij de beide veren synchroon uitrekken en je verwacht een rotatie om het middelpunt van de schijf waarbij de veren in tegenfase bewegen. Handige gegeneraliseerde coördinaten om deze normal modes onafhankelijk te beschrijven zijn de hoogte van het massamiddelpunt y en de draaihoek θ van de schijf.

(b) (6 punten) Lengte κ-veer is $y - a\theta$ en lengte λ-veer is $y + a\theta$.

$$T = \frac{m}{2}\dot{y}^2 + \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 .$$

$$V = \frac{\kappa}{2}(y - a\theta)^2 + \frac{\lambda}{2}(y + a\theta)^2 + mgy .$$

$$L = T - V$$

(c) (6 punten) Bereken de massa-matrix en de matrix horende bij de potentiële energie.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{2} \end{pmatrix} \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \kappa + \lambda & (\lambda - \kappa)a \\ (\lambda - \kappa)a & (\kappa + \lambda)a^2 \end{pmatrix}$$

(d) (6 punten) Stel de determinant van $\mathbf{M}\omega^2 - \mathbf{K} = 0$.

$$0 = \left(m\omega^2 - (\kappa + \lambda)\right)\left(\frac{ma^2\omega^2}{2} - (\kappa + \lambda)a^2\right) - a^2(\lambda - \kappa)^2 \quad (1)$$

$$0 = a^2\left(\frac{m^2}{2}\omega^4 - \frac{3m(\kappa + \lambda)}{2}\omega^2 + (\kappa + \lambda)^2 - (\lambda - \kappa)^2\right) \quad (2)$$

$$\omega^2 = \frac{\frac{3}{2}m(\kappa + \lambda) \pm \sqrt{\frac{9}{4}m^2(\kappa + \lambda) - 8m\kappa\lambda}}{m^2} \quad (3)$$

$$= \frac{3(\kappa + \lambda)}{2m} \pm \frac{\sqrt{\frac{9}{4}(\kappa + \lambda)^2 - 8\kappa\lambda}}{m} \quad (4)$$

(e) (6 punten) Wanneer $\kappa = \lambda$ volgt $\omega^2 = 2k/m$, corresponderend met een verticale trilling van de schijf of $\omega^2 = 4k/m$, corresponderend met een draaiende oscillatie om het middelpunt. Dit volgt direct uit de Lagrangiaan wanneer je $\kappa = \lambda$ invult.