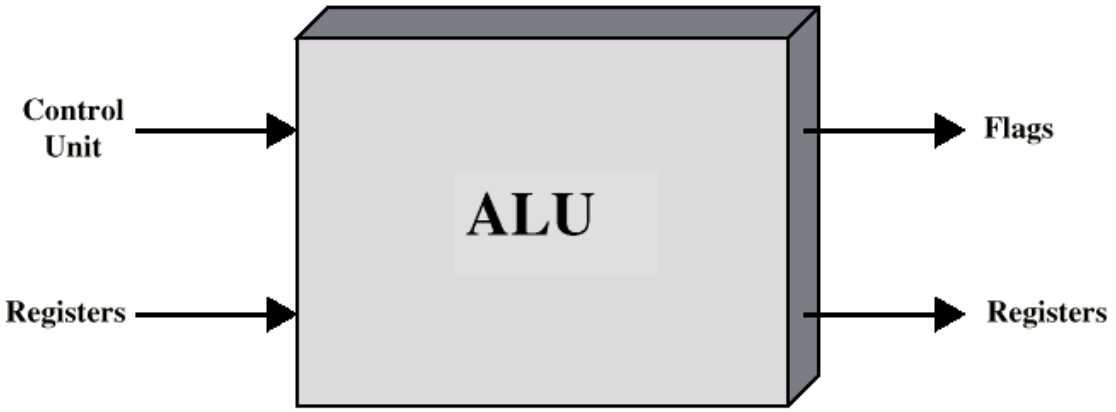
Aritmetica del calcolatore

Unità aritmetica e logica

- Esegue le operazioni aritmetiche e logiche
- Ogni altra componente nel calcolatore serve questa unità
- Gestisce gli interi
- Può gestire anche i numeri reali

Input e output della ALU



Rappresentazione degli interi

- Possiamo solo usare 0 e 1 per rappresentare tutto
- I numeri positivi sono scritti in binario come sappiamo
  - e.g. 41=00101001
- Non c'è bisogno del segno

Rappresentazione in modulo e segno

- Segno: bit più a sinistra
  - 0 significa positivo
  - 1 significa negativo
- Esempio:
  - +18 = 00010010
  - -18 = 10010010
- Problemi
  - Per eseguire operazioni aritmetiche bisogna considerare sia i moduli che i segni
  - Due rappresentazioni per lo 0: +0 and -0

Complemento a due: in generale

- Positivi: da 0 (n zeri) a 2^{n-1} -1 (uno zero seguito da n-1 uni)
- Negativi:
  - Bit più significativo (più a sinistra) a 1
  - I restanti n-1 bit possono assumere 2^{n-1} configurazioni diverse, quindi da -1 a -2^{n-1}
- Se sequenza di bit $a_{n-1}\ a_{n-2}\ \ldots\ a_1\ a_0$,

$$\text{numero} = -2^{n-1}\, a_{n-1} + \sum_{(i=0,\ \ldots,\ n-2)} 2^i\, a_i$$

- Numeri positivi: $a_{n-1} = 0$
- Numeri negativi: positivo – 2^{n-1}
- NOTA BENE: la formula ***definisce*** il complemento a due

Rappresentazione in complemento a due

- bit più a sinistra → -2^{n-1}
- Per n bit: possiamo rappresentare tutti i numeri da -2^{n-1} a $+2^{n-1} - 1$
- Per i numeri positivi, come per modulo e segno
  - n zeri rappresentano lo 0, poi 1, 2, … in binario per rappresentare 1, 2, … positivi
- Per i numeri negativi, da n uni per il -1, andando indietro

Complemento a due su 3 e 4 bit

Bit pattern	Value represented
011	3
010	2
001	1
000	0
111	−1
110	−2
101	−3
100	−4

Bit pattern	Value represented
0111	7
0110	6
0101	5
0100	4
0011	3
0010	2
0001	1
0000	0
1111	−1
1110	−2
1101	−3
1100	−4
1011	−5
1010	−6
1001	−7
1000	−8

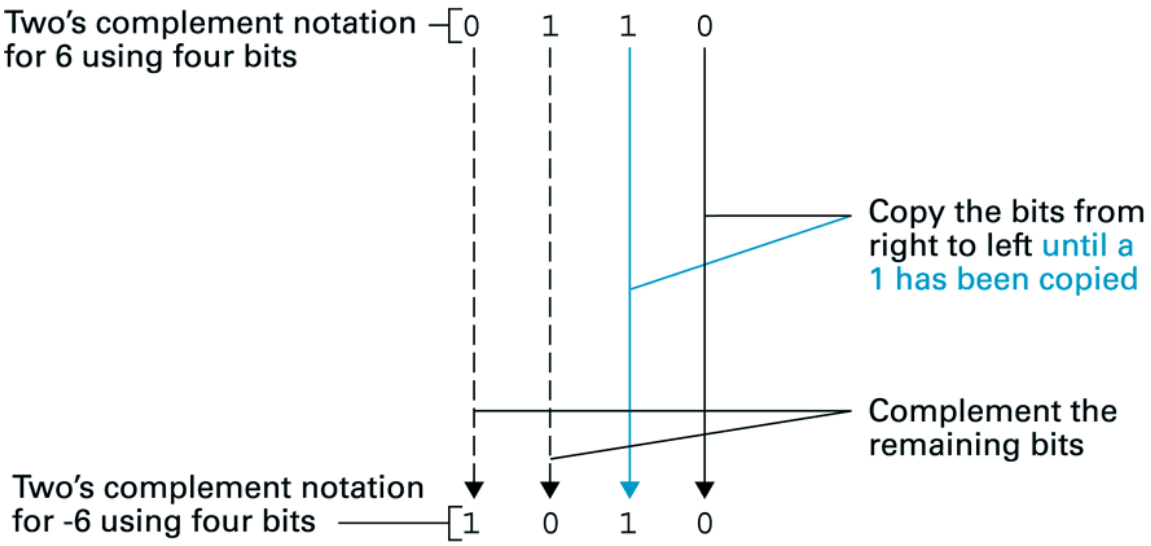
Complemento a due: numeri negativi

- Confrontiamo le rappresentazioni di k e –k
  - da destra a sinistra, uguali fino al primo 1 incluso
  - poi una il complemento dell'altra
- Esempio (su 4 bit): 2=0010, -2=1110

Complemento a due: decodifica veloce

- Se bit più a sinistra =0 ➔ positivo, altrimenti negativo
- Se positivo, basta leggere gli altri bit
- Se negativo, scrivere gli stessi bit da destra a sinistra fino al primo 1, poi complementare, e poi leggere
- Es.: 1010 è sicuramente negativo (bit più a sinistra vale -2^{n-1}), rappresenta 0110 (6), quindi -6

Da k a -k



Complemento a due: altro metodo di decodifica veloce

- Data la rappresentazione di k (positivo), -k si può anche ottenere così:
  - Complemento bit a bit della rappresentazione di k
  - Somma di 1 al risultato
- Esempio:
  - 2=0010
  - Complemento: 1101
  - 1101 +1 = 1110
  - -2=1110

Benefici del complemento a 2

- Una sola rappresentazione dello zero
- Le operazioni aritmetiche sono facili
- La negazione è facile
  - 3 = 00000011
  - Complemento Booleano 11111100
  - Somma di 1 11111101

Numeri rappresentabili

- Complemento a 2 su 8 bit
  - Numero più grande: +127 = 01111111 = 2^7 -1
  - Numero più piccolo: -128 = 10000000 = -2^7
- Complemento a 2 su 16 bit
  - +32767 = 01111111 11111111 = 2^{15} - 1
  - -32768 = 10000000 00000000 = -2^{15}

Conversione tra diverse lunghezze

- Da una rappresentazione su n bit ad una rappresentazione dello stesso numero su m bit (m > n)

- Modulo e segno: facile
  - Bit di segno nel bit più a sinistra
  - m-n zeri aggiunti a sinistra
  - Esempio (da 4 a 8 bit): 1001 ➔ 10000001

Conversione tra diverse lunghezze

- Complemento a 2: stessa cosa del modulo e segno per numeri positivi
- Per numeri negativi: replicare il bit più significativo dalla posizione attuale alla nuova
- Esempi:
  - +18 (8 bit) = 00010010
  - +18 (16 bit) = 00000000 00010010
  - -18 (8 bit) = 11101110
  - -18 (16 bit) = 11111111 11101110

Opposto: caso speciale 1

- 0 = 00000000
- Complemento: 11111111
- Somma 1: +1
- Risultato: 1 00000000
- L'uno più a sinistra è un overflow, ed è ignorato. Quindi - 0 = 0

Opposto: caso speciale 2

- -128 = 10000000
- Complemento: 01111111
- Somma 1: +1
- Risultato: 10000000
- Quindi, -(-128) = -128 !
- 2^n stringhe su n bit, un numero positivo in più di quelli negativi: -2^n si può rappresentare, ma $+2^n$ no ➔ -2^n non può essere complementato

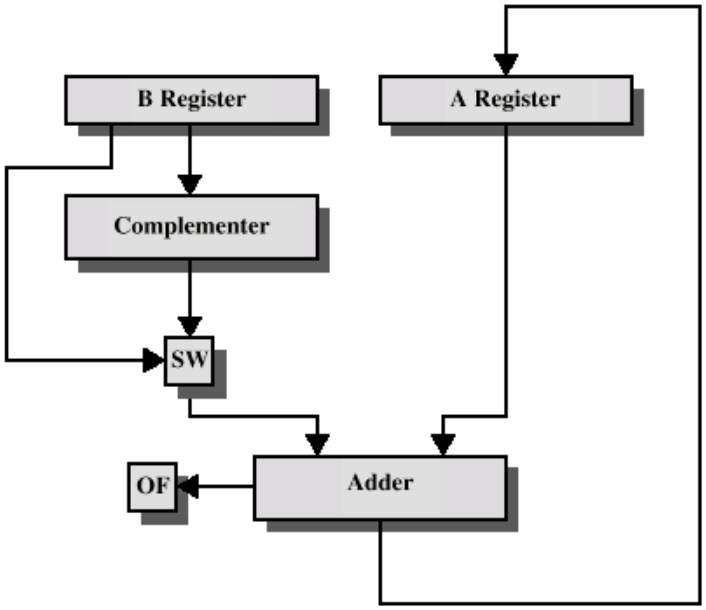
Somma e sottrazione

- Per la somma: normale somma binaria
  - Controllare il bit più significativo per l'overflow
- Per la sottrazione: basta avere i circuiti per somma e complemento
  - Es. (4 bit): 7-5 = 7 +(-5) = 0111 + 1011 = 0010
  - 5 = 0101 ➔ -5 = 1011

Esempi di somme

Problem in base ten		Problem in two's complement		Answer in base ten
3 + 2	→	0011 + 0010 0101	→	5
−3 + −2	→	1101 + 1110 1011	→	−5
7 + −5	→	0111 + 1011 0010	→	2

Hardware per somma e sottrazione



OF = overflow bit
SW = Switch (select addition or subtraction)

Overflow

- Overflow: quando si sommano due numeri positivi tali che il risultato è maggiore del massimo numero positivo rappresentabile con i bit fissati (lo stesso per somma di due negativi)
- Se la somma dà overflow, il risultato non è corretto
- Come si riconosce? Basta guardare il bit più significativo della risposta: se 0 (1) e i numeri sono entrambi negativi (positivi) ➔ overflow

Esempi di somme su 4 bit

- -4 (1100) + 4 (0100) = 10000 (0)
  - Riporto ma non overflow
- -4 (1100) - 1 (1111): 11011 (-5)
  - Riporto ma non overflow
- -7 (1001) -6 (1010) = 10011 (non è -13, ma 3)
  - Overflow
- + 7 (0111) + 7 (0111) = 1110 (non è 14, ma -2)
  - Overflow

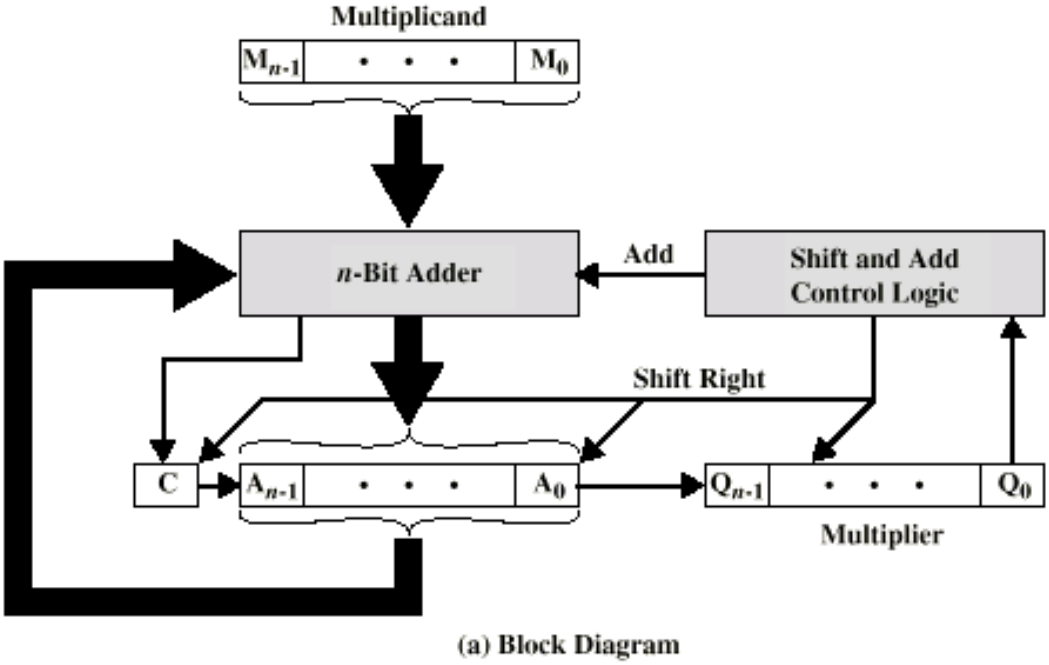
Moltiplicazione

- Più complessa
- Calcolare il prodotto parziale per ogni cifra
- Sommare i prodotti parziali

Esempio di moltiplicazione

- 1011 Moltiplicando (11 decimale)
- x 1101 Moltiplicatore (13 decimale)
- 1011 Prodotto parziale 1
- 0000 Prodotto parziale 2
- 1011 Prodotto parziale 3
- 1011 Prodotto parziale 4
- 10001111 Prodotto (143 decimale)
- Nota: da due numeri di n bit potremmo generare un numero di 2n bit

Moltiplicazione di interi senza segno

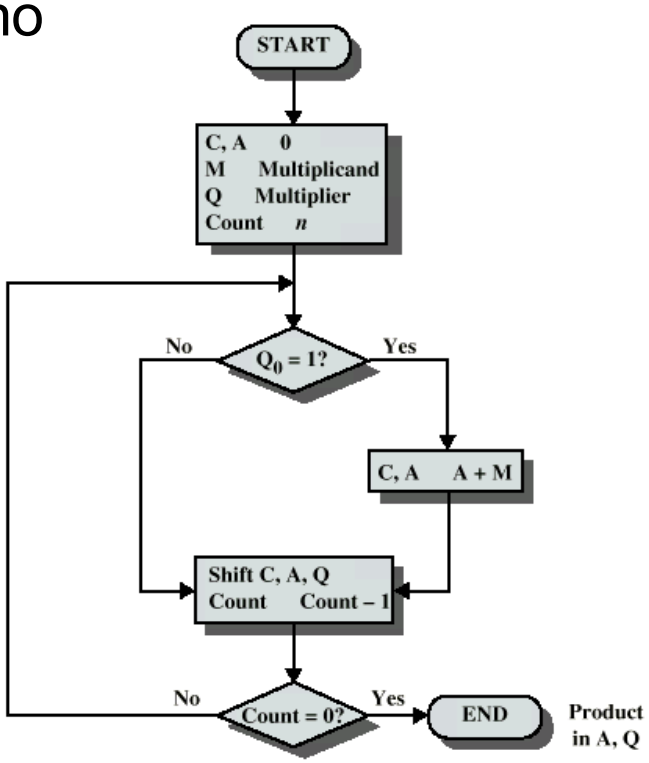


(a) Block Diagram

Implementazione

- Se $Q_0 = 0$, traslazione di C, A e Q
- Se $Q_0 = 1$, somma di A e M in A, overflow in C, poi traslazione di C, A, e Q
- Ripetere per ciascun bit di Q
- Prodotto (2n bit) in A e Q

Diagramma di flusso per la moltiplicazione senza segno



Un esempio

C	A	Q	M		
0	0000	1101	1011	Initial Values	
0	1011	1101	1011	Add	First Cycle
0	0101	1110	1011	Shift	
0	0010	1111	1011	Shift	Second Cycle
0	1101	1111	1011	Add	Third Cycle
0	0110	1111	1011	Shift	
1	0001	1111	1011	Add	Fourth Cycle
0	1000	1111	1011	Shift	

Moltiplicare numeri in complemento a 2

- Per la somma, i numeri in complemento a 2 possono essere considerati come numeri senza segno
- Esempio:
  - 1001 + 0011 = 1100
  - Interi senza segno: 9+3=12
  - Complemento a 2: -7+3=-4

Moltiplicare numeri in complemento a 2

- Per la moltiplicazione, questo non funziona!
- Esempio: 11 (1011) x 13 (1101)
  - Interi senza segno: 143 (10001111)
  - Se interpretiamo come complemento a 2: -5 (1011) x -3 (1101) dovrebbe essere 15, invece otteniamo 10001111 (-113)
- Non funziona se almeno uno dei due numeri è negativo

Moltiplicare numeri in complemento a 2

- Bisogna usare la rappresentazione in complemento a due per i prodotti parziali:

1001 (9) ×0011 (3) 00001001 1001 × 2^0 00010010 1001 × 2^1 00011011 (27)	1001 (−7) ×0011 (3) 11111001 (−7) × 2^0 = (−7) 11110010 (−7) × 2^1 = (−14) 11101011 (−21)
(a) Unsigned integers	(b) Twos complement integers

- Problemi anche se moltiplicatore negativo
- Una possibile soluzione:
  1. convertire I fattori negativi in numeri positivi
  2. effettuare la moltiplicazione
  3. se necessario (-+ o +-), cambiare di segno il risultato
- **Soluzione utilizzata: algoritmo di Booth (più veloce)**

Divisione

- Più complessa della moltiplicazione
- Basata sugli stessi principi generali
- Utilizza traslazioni, somme e sottrazioni ripetute