Esercizi rappresentazione binaria, ottale, esadecimale

Architettura degli elaboratori

Laurea in Informatica

Docente: Federico Corò

Rappresentazione binaria

- $(124)_{10} = \sum_{\{k=n,\ldots,0\}} d_k * 10^k = 1 * 10^2 + 2 * 10^1 + 4 * 10^0$

Stessa regola, ma con basi diverse:

- Ci permette di convertire da qualunque base alla base 10
- $(124)_8 = \sum_{\{k=n,\ldots,0\}} d_k * 8^k = 1 * 8^2 + 2 * 8^1 + 4 * 8^0$
- $(1010)_2 = \sum_{\{k=n,\ldots,0\}} d_k * 2^k = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0$

Attenzione: la base definisce anche quali simboli si possono utilizzare!

  - Base 10: 0…9
  - Base 8: 0…7
  - Base 16: 0…9,A..F
  - Base 2: 0,1

Da base 10 a base diversa

- Come passare da base 10 a una base diversa?

Si consideri un numero n espresso in base 10 e da convertire in base b

- Idea: individuare la potenza di b più grande $<=$ n, chiamiamola i.
  - E.g. $(84)_{10} \geq 8^2$ ma $(84)_8 < 8^3$, quindi $i = 2$
- n in base b avrà la cifra di indice i (partendo da 0) sicuramente > 0
  - In particolare, avrà valore $\frac{n}{b^i}$
  - Nel nostro esempio, la cifra di indice 2 sarà 84/64=1
- Ripeto il punto 1 con $n = n \; mod \; b^i$
  - n=84 mod 64=20

Risultato: $(84)_{10} = (124)_8$

Da base 10 a base diversa

- Come passare da base 10 a una base diversa?

Algoritmo che segue la medesima idea:

Si consideri un numero n espresso in base 10 e da convertire in base b

- Si divide n per b con quoziente q e resto r
  - r è la cifra più a destra della rappresentazione in base b di n
- Si ripete il procedimento con $n = q$ finchè il risultato della divisione è 0

Operazione	Quoziente	Resto
84/8	10	4
10/8	1	2
1/8	0	1

Risultato: $(84)_{10} = (124)_8$

Esercizi

Trasformare i seguenti numeri da base indicata a base 10:

- $(111)_2 = (??)_{10}$
- $(1000)_2 = (??)_{10}$
- $(0111)_2 = (??)_{10}$
- $(1A)_{16} = (??)_{10}$

Trasformare i seguenti numeri da base 10 a base indicata:

- $(10)_{10} = (??)_2$ $(10)_{10} = (??)_8$ $(10)_{10} = (??)_{16}$
- $(142)_{10} = (??)_8$ $(142)_{10} = (??)_{16}$

Trasformare i seguenti numeri nella base indicata:

- $(101)_2 = (??)_8$
- $(1001)_2 = (??)_{16}$
- $(101011)_2 = (??)_8$
- $(10010101)_2 = (??)_{16}$ $(??)_8$

- $(111)_2 = (1 * 2^2) + (1 * 2^1) + (1 * 2^0) = 4 + 2 + 1 = 7$
- $(1000)_2 = (1 * 2^3) + (0 * 2^2) + (0 * 2^1) + (0 * 2^0) = 8 + 0 + 0 + 0 = 8$
- $(0111)_2 = (0 * 2^3) + (1 * 2^2) + (1 * 2^1) + (1 * 2^0) = 0 + 4 + 2 + 1 = 7$
- $(1A)_{16} = (1 * 16^1) + (10 * 16^0) = 16 + 10 = 26$

- $(10)_{10}$ -> 2^3 <= 10 < 2^4 -> i=3

  c3 = 10/(2^3) = 1 resto 2

  c2 = 2/(2^2) = 0 resto 2

  c1 = 2/2 = 1 resto 0

  c0 = 0/1 = 0 resto 0

  -> $(1010)_2$

- $(101)_2$ = (1 * 2^2) + (0 * 2^1) + (1 * 2^0) = 4 + 1 = 5

  $(5)_{10}$ -> 8^0 <= 5 < 8 -> i=0

  c0 = 5/1 = 5 resto 0

  -> $(5)_8$

Esercizi - soluzioni

Trasformare i seguenti numeri da base indicata a base 10:

- $(111)_2 = (7)_{10}$
- $(1000)_2 = (8)_{10}$
- $(0111)_2 = (7)_{10}$
- $(1A)_{16} = (26)_{10}$

Trasformare i seguenti numeri da base 10 a base indicata:

- $(10)_{10} = (1010)_2$ $(10)_{10} = (12)_8$ $(10)_{10} = (A)_{16}$
- $(142)_{10} = (216)_8$ $(142)_{10} = (8E)_{16}$

Trasformare i seguenti numeri nella base indicata:

- $(101)_2 = (5)_8$
- $(1001)_2 = (9)_{16}$
- $(101011)_2 = (53)_8$
- $(10010101)_2 = (95)_{16}$ $(225)_8$

Conversione a blocchi

- Se un gruppo di m cifre della base di partenza presenta le stesse configurazioni di un gruppo di m' cifre della base di destinazione
  - Si può effettuare la conversione di base in modo molto più semplice per blocchi
- Quante possibili configurazioni per:
  - 1 bit (banale)? 2 bit ? 3 bit? 4 bit?
  - 1 cifra in base 8 ?
  - 1 cifra in base 16?

- Esempio: $(\underbrace{1001}_{(??)_{16}}\ \underbrace{0101}_{(??)_{16}})_2 = (??)_{16}$ $(95)_{16}$

Esercizi Conversione a blocchi

Trasformare i seguenti numeri da base 2 alla base indicata utilizzando la tecnica della divisione per blocchi

- $(101011)_2 = (??)_8$ (stesso esempio visto prima)
- $(10010101)_2 = (??)_{16}$ (stesso esempio visto prima)
- $(101101010)_2 = (??)_8$

Come definiamo i blocchi nei seguenti casi?

- $(11000)_2 = (??)_8$
- $(10101)_2 = (??)_{16}$
- $(101101010)_2 = (??)_{16}$

Esercizi Conversione a blocchi - soluzioni

Trasformare i seguenti numeri da base 2 alla base indicata utilizzando la tecnica della divisione per blocchi

- $(101\ 011)_2 = (53)_8$ (stesso esempio visto prima)
- $(1001\ 0101)_2 = (95)_{16}$ (stesso esempio visto prima)
- $(101\ 101\ 010)_2 = (552)_8$

Come definiamo i blocchi nei seguenti casi?

- $(11\ 000)_2 = (30)_8$ - blocchi di 3 bit, padding (aggiungo uno 0 a sinistra)
- $(1\ 0101)_2 = (15)_{16}$
- $(1\ 0110\ 1010)_2 = (16A)_{16}$ - blocchi di 4 bit, aggiungo 3 bit a 0 a sinisra

Algebra di Boole

- Una variabile logica A può prendere valore Vero o Falso
  - Mapping con bit: 0=Falso, 1= Vero (per convenzione)
- Operazioni logiche: operazioni di base definite su una o più variabili logiche
- Ogni operazione è definita **univocamente** dalla sua **tabella di verità**
- Operazioni logiche di base: AND, OR, NOT

A	B	A AND B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	B	A OR B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A	NOT A
1	0
0	1

- Possono essere combinate per creare formule più complesse

Algebra di Boole

- Esempio di operazione più complessa: eXclusive OR, XOR
  - Definita dalla formula (A OR B) AND NOT(A AND B)
- Come possiamo calcolare la tabella di verità?
  - Scomponiamo la formula in componenti più semplici e poi li combiniamo (divide et impera)

A	B	A OR B	A AND B	NOT(A AND B)	(A OR B) AND NOT(A AND B)
1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

- Quante possibili funzioni esistono su 2 variabili booleane?
- E quante formule?

Postulati e proprietà algebra Booleana

- Come possiamo dimostrare che due formule logiche sono equivalenti?
  - Confrontando le tabelle di verità
  - Se agli stessi input corrispondono gli stessi output, allora sono equivalenti

Provate a dimostrare:

- A AND (B OR C) = (A AND B) OR (A AND C)
- NOT (A AND B)= (NOT A) OR (NOT B)
- NOT (A OR B)= (NOT A) AND (NOT B)

Postulati e proprietà algebra Booleana

- Esempio dimostrazione prima equazione

  A AND (B OR C) = (A AND B) OR (A AND C)

- Considero entrambi i termini e ne calcolo la tabella di verità

A	B	C	B OR C	A AND (B OR C)
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	1	0
0	0	0	0	0

A	B	C	A AND B	A AND C	(A AND B) OR (A AND C)
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

- Confronto le tabelle riga per riga (stessi input -> stessi output)
- Se sono identiche, allora l'equazione è verificata