Esercizi sulla rappresentazione in virgola mobile

Architettura degli elaboratori

Laurea in Informatica

Docente: Federico Corò

Modulo e Segno

Segno	Modulo

- Segno:
  - 0: segno positivo
  - 1: segno negativo
- E.g.
  - +18: 00010010
  - -18: 10010010
- Problemi: operazioni aritmetiche complesse
- Doppia rappresentazione per lo 0 (spreco di spazio)

Complemento a due

- In generale, su sequenza di bit $a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1a_0$:

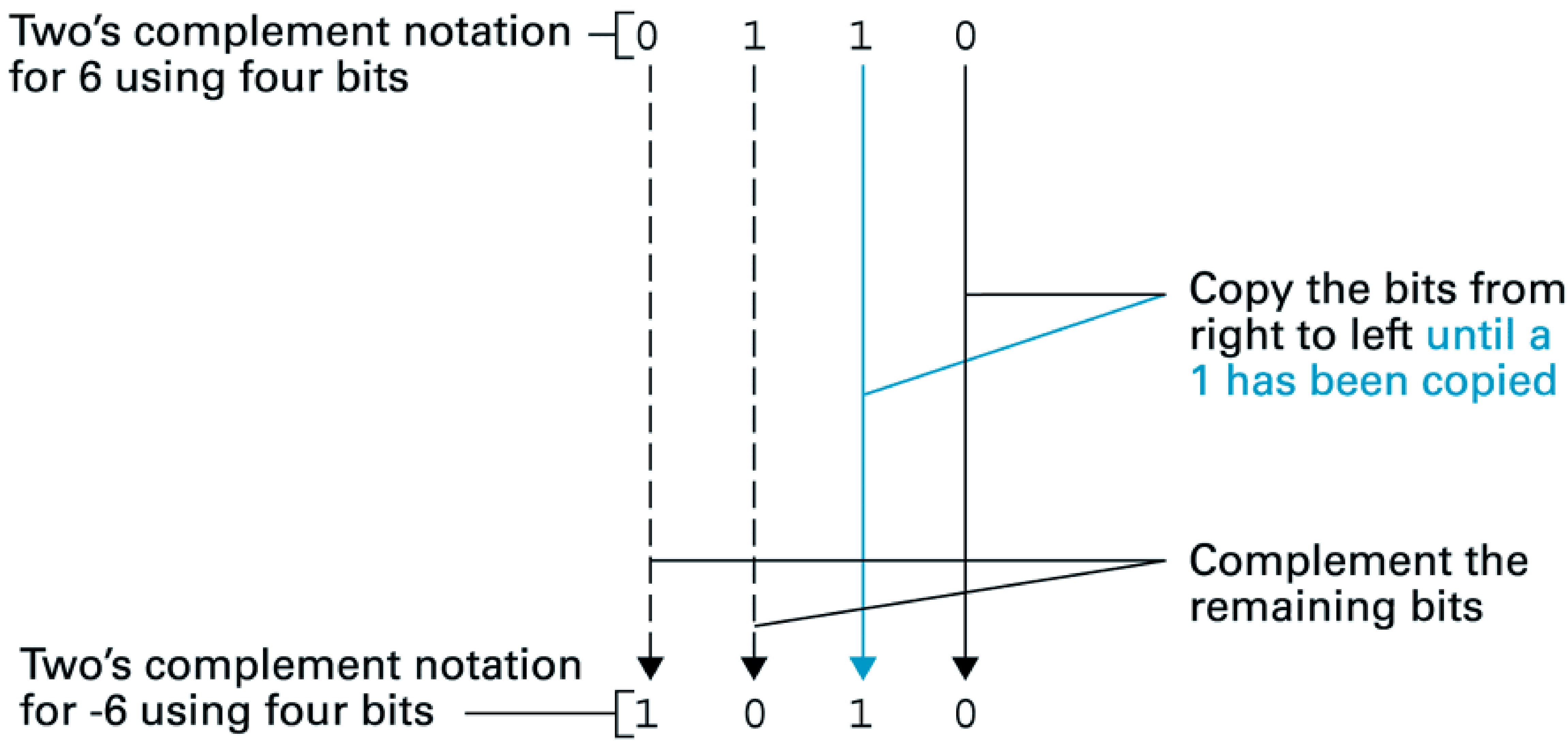
$$numero = -2^{n-1}a_{n-1} + \sum_{i=0,\dots,n-2} 2^i a_i$$

- Il primo bit a sinistra corrisponde al termine -2^{n-1}
  - Se a 1, il segno è negativo, ma la semantica è diversa dal bit di segno
- Positivi: da 0 a $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1$
- Negativi: da -2^{n-1} a $-2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 = -1$

Complemento a due: numeri negativi

- Confrontiamo le rappresentazioni di k e –k
    - da destra a sinistra, uguali fino al primo 1 incluso
    - poi una il complemento dell’altra
- Esempio (su 4 bit):
    - 2=0010
    - -2=1110

Complemento a due: da positivo a negativo e viceversa



Esercizi Complemento a due

- Da complemento a 2 a base 10:
  - 00011, 01111, 11100, 11010, 00000, 10000
- Da base 10 a complemento a 2 su 8 bit:
  - 6, -6, 13, -1, 0
- Dare il numero più grande e più piccolo rappresentabile per la notazione in complemento a 2 su 4, 6, 8 bit

Soluzione Esercizi Complemento a due

  - 00011: 3
  - 01111: 15
  - 11100: -16+12=-4
  - 11010: -16+10=-6
  - 00000: 0
  - 10000: -16+0=-16
- Da base 10 a complemento a 2 su 8 bit:
  - 6: 00000110 -6: 11111010
  - 13: 00001101 -1: 11111111
  - 0: 00000000
- Dare il numero più grande e più piccolo rappresentabile per la notazione in complemento a 2 su 4, 6, 8 bit
- 4 bit: 1000: $-2^{n-1} = -8$ 0111= $2^{n-1} - 1 = 7$
- 6 bit: 100000: $-2^{n-1} = -32$ 011111= $2^{n-1} - 1 = 31$
- 8 bit: 10000000: $-2^{n-1} = -128$ 01111111= $2^{n-1} - 1 = 127$

Notazione Scientifica

- Notazione scientifica:

$$976.000.000.000.000 = 9.76 * 10^{14}$$
$$0,00000000000000976 = 9.76 * 10^{-14}$$

- Vantaggio: numeri molto grandi e molto piccoli con poche cifre
  - Cioè se il numero di cifre a disposizione è <u>finito</u>
  - Stesso principio per numeri binari: $+/- S \cdot B^{+/- E}$
  - S = significando o mantissa (come 976)
  - Si assume la virgola dopo una cifra della mantissa
  - B = base

Virgola mobile: esponente

Segno	Esponente polarizzato	Significando o Mantissa

- Numero rappresentato

$$+/-1.mantissa \cdot 2^{esponente}$$

- Esponente polarizzato: una valore fisso viene sottratto per ottenere il vero esponente
  - k bit per esponente polarizzato $\rightarrow 2^{k-1}-1$

$$e = ep - (2^{k-1}-1)$$

- E.g. 8 bit esponente:
  - Valori da 0 a 255
  - polarizzazione: $2^{8-1}-1 = 127$
  - Esponente polarizzato: da -127 a +128

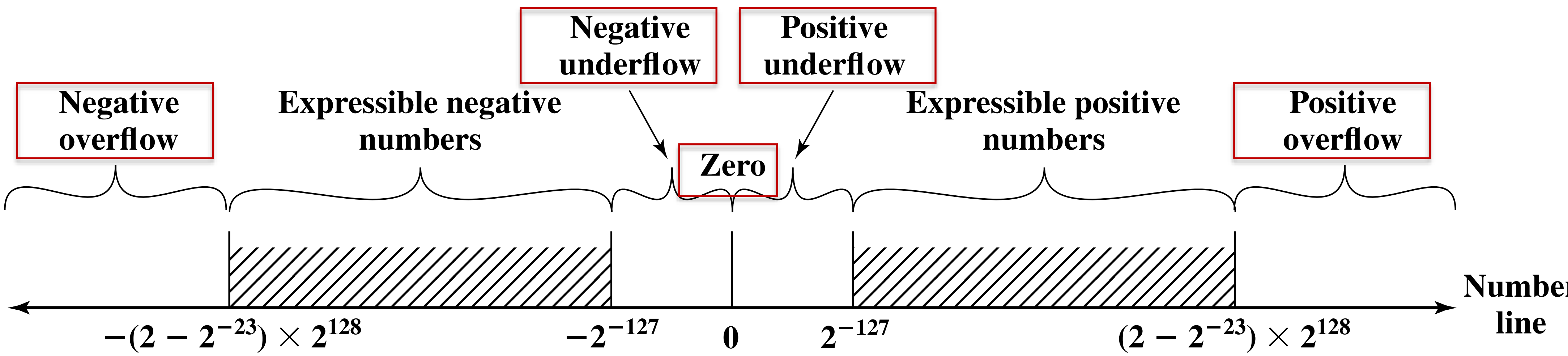
Virgola mobile

Normalizzazione:

- I numeri in virgola mobile di solito sono normalizzati
- L'esponente è aggiustato in modo che il bit più significativo della mantissa sia 1
- Dato che è sempre 1 non c'è bisogno di specificarlo
- Numero: $+/-1.mantissa \cdot 2^{esponente}$
- Il primo 1 non viene rappresentato nei bit a disposizione
  - se 23 bit per la mantissa, posso rappresentare numeri in [1,2)
- Standard IEEE 754 prevede combinazioni speciali per zero e infinito

Virgola mobile

5 regioni non rappresentabili



(b) Floating-point numbers

ESERCIZIO 1 Numeri in virgola mobile

Supponendo di avere a disposizione 3 bit per l'esponente e 4 bit per la mantissa:

a) dire quali numeri rappresentano le seguenti configurazioni di bit

- 11111111
- 01011011
- 01101111

- b) dare la rappresentazione binaria in virgola mobile dei seguenti numeri reali
  - 6,5
  - 2,25
  - -7,3

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

- Calcoliamo la polarizzazione dell'esponente: $2^{k-1} - 1$
  - Se $k = 3$, la polarizzazione vale 3
  - Per calcolare l'esponente vero a partire da quello polarizzato, dobbiamo sottrarre la polarizzazione

- $1\ 111\ 1111\ \rightarrow -1{,}1111 \cdot\ 2^{7-3} =\ -11111 = -(16 + 8 + 4 + 2 + 1) = -31$
- $0\ 101\ 1011\ \rightarrow\ +1{,}1011 \cdot\ 2^{5-3} = +110{,}11\ =\ +(6 + 0{,}5 + 0{,}25)\ =\ +6{,}75$
- $0\ 110\ 1111\ \rightarrow\ 1{,}1111 \cdot\ 2^{6-3} =\ +1111{,}1\ =\ +15{,}5$
- $6{,}5\ \rightarrow\ 110{,}1\ \rightarrow\ 1{,}101 \cdot\ 2^{2}\ \rightarrow 1{,}101 \cdot\ 2^{5-3} \rightarrow\ 0\ 101\ 1010$
- $2{,}25\ \rightarrow\ 10{,}01\ \rightarrow\ 1{,}001\ \cdot 2^{1}\ \rightarrow\ 1{,}001 \cdot\ 2^{4-3} \rightarrow\ 0\ 100\ 0010$
- -7,3 $\rightarrow\ -111{,}01001 \dots\ \rightarrow\ -1{,}1101001 \dots \cdot\ 2^{2}\ \rightarrow\ -1{,}1101 \cdot\ 2^{5-3} \rightarrow$
  $1\ 101\ 1101$ (approssimato)

ESERCIZIO 2 Numeri in virgola mobile

Supponendo di avere a disposizione 3 bit per l'esponente e 4 bit per la mantissa:

a) dire quali numeri rappresentano le seguenti configurazioni di bit

- 01111011
- 11001011
- 01011111
- b) dare la rappresentazione binaria in virgola mobile dei seguenti numeri reali
  - 2.3
  - -0.25

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

- 3 bit per esponente (quindi e-3), 4 bit per mantissa
- $0\ 111\ 1011\ \rightarrow 1{,}1011 \cdot\ 2^{7-3} = 11011 = 16 + 8 + 2 + 1\ =\ 27$
- $1\ 100\ 1011\ \rightarrow\ -1{,}1011 \cdot\ 2^{4-3} = -11{,}011\ =\ -3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = -3{,}375$
- $0\ 101\ 1111\ \rightarrow\ 1{,}1111 \cdot\ 2^{5-3} = 111{,}11 = 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 7{,}75$
- $2{,}3\ \rightarrow\ 10{,}0100..\rightarrow\ 1{,}00100..\cdot 2\ \rightarrow 1{,}00100..\cdot\ 2^{4-3} \rightarrow$ $0\ 100\ 0010$ (approssimato)
- $-0{,}25 \rightarrow -0{,}0100 \rightarrow -1{,}0000 \cdot\ 2^{-2} \rightarrow -1{,}0000 \cdot 2^{1-3} \rightarrow 1\ 001\ 0000$

ESERCIZIO 3 Numeri in virgola mobile

- Supponendo di avere a disposizione 3 bit per l'esponente e 4 bit per la mantissa, dire quale è
  - Il numero più grande positivo rappresentabile
  - Il numero più piccolo positivo rappresentabile
  - Il numero più grande negativo rappresentabile
  - Il numero più piccolo negativo rappresentabile
- Supponendo invece di avere 7 bit per l'esponente e 8 per la mantissa?

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

- 3 bit esponente, polarizzazione: $e - (2^2 - 1) = e - 3$
  - Esponente più piccolo = $000 \rightarrow -3$
    Esponente più grande = 111 → 7-3=4
- Mantissa: da $1{,}0000\ (= 1)$ a $1{,}1111\ (= 2 - 1/16\ =\ 1{,}9375)$
- Numero più grande positivo: $+\ 1{,}9375 \cdot 2^4 = 31$
- Numero più piccolo positivo: $+1 \cdot 2^{-3} =\ 1/8\ =\ +0{,}125$
- Numero più grande negativo: $-\ 0{,}125$
- Numero più piccolo negativo: $-\ 31$

- <u>Esponente 7 bit:</u> $e - (2^6 - 1) = e - 63$
  - Da -63 a +64
- Mantissa da 8 bit: da $1{,}00000000\ (= 1)$ a $1{,}11111111\ (= 2 - 1/256\ =\ 1{,}9960..)$