Numeri reali

- Numeri con frazioni
- Possono essere rappresentati anche in binario
  - Es.: 1001.1010 = $2^3 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-3} = 9.625$
- Quante cifre dopo la virgola?
- Se numero fisso, molto limitato
- Se mobile, dobbiamo saper specificare dove si trova la virgola

Notazione scientifica (decimale)

- 976.000.000.000.000 viene rappresentato come $9{,}76 \times 10^{14}$
- 0,0000000000000976 viene rappresentato come $9{,}76 \times 10^{-14}$
- Vantaggio: numeri molto grandi e molto piccoli con poche cifre
- Lo stesso per numeri binari: $+/- \; S \times B^{+/-E}$
  - S = significando o mantissa (come 976)
  - Si assume la virgola dopo una cifra della mantissa
  - B = base

Floating Point

Bit di segno	Esponente Polarizzato	Significando o Mantissa

- Numero rappresentato:
  $$+/- \ 1.\text{mantissa} \times 2^{\text{esponente}}$$
- Esponente polarizzato: una valore fisso viene sottratto per ottenere il vero esponente
  k bit per esponente polarizzato ➔ $2^{k-1} -1$
  $e = ep - (2^{k-1} -1)$

Es.: 8 bit ➔ valori tra 0 e 255 ➔ 2^7-1=127 ➔ esponente da -127 a +128

Normalizzazione

- I numeri in virgola mobile di solito sono normalizzati
- L'esponente è aggiustato in modo che il bit più significativo della mantissa sia 1
- Dato che è sempre 1 non c'è bisogno di specificarlo
- Numero: +/- 1.mantissa x $2^{\text{esponente}}$
- L'1 non viene rappresentato nei bit a disposizione ➔ se 23 bit per la mantissa, posso rappresentare numeri in [1,2)
- Se non normalizzato, aggiusto l'esponente
  - Es.: $0,1 \times 2^0 = 1,0 \times 2^{-1}$

Esempi

(a) Format

$$
\begin{array}{rcl}
1.1010001 \times 2^{10100} & = 0\ 10010011\ 10100010000000000000000 = & 1.638125 \times 2^{20} \\
-1.1010001 \times 2^{10100} & = 1\ 10010011\ 10100010000000000000000 = & -1.638125 \times 2^{20} \\
1.1010001 \times 2^{-10100} & = 0\ 01101011\ 10100010000000000000000 = & 1.638125 \times 2^{-20} \\
-1.1010001 \times 2^{-10100} & = 1\ 01101011\ 10100010000000000000000 = & -1.638125 \times 2^{-20}
\end{array}
$$

(b) Examples

Numeri rappresentabili (32 bit)

- Complemento a due: da -2^{31} a $+ 2^{31} -1$
- Virgola mobile (con 8 bit per esponente):

  Esponente: da -127 (tutti 0) a 128 (tutti 1)

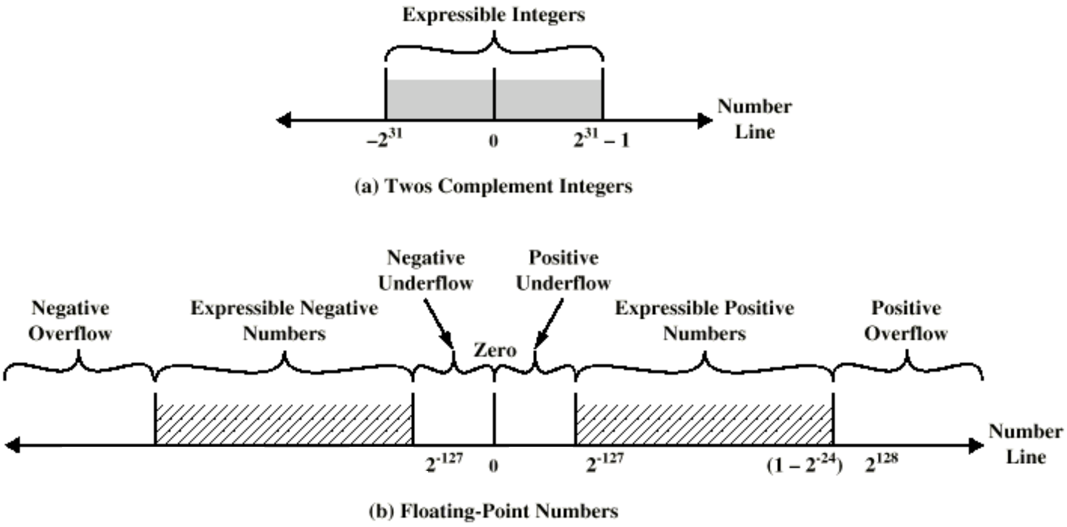
  Mantissa: 1.0 (tutti 0) a $2-2^{-23}$ (tutti 1, cioè 1. 1...1, cioè $1 + 2^{-1} + 2^{-2} + ... + 2^{-23} = 2-2^{-23}$)

  Negativi: Da $-2^{128} \times (2-2^{-23})$ a -2^{-127}

  Positivi: da 2^{-127} a $2^{128} \times (2-2^{-23})$

  richiamo: $\sum_{k=0}^{N} (q)^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$

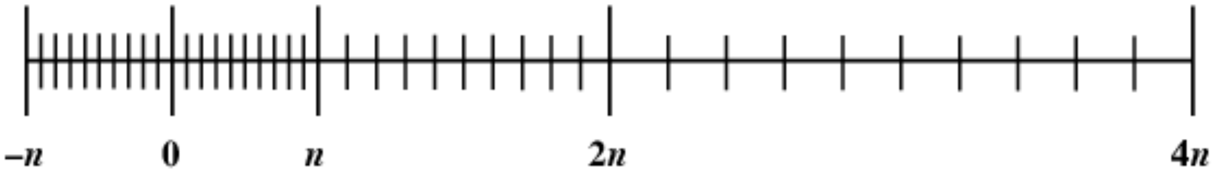
Numeri rappresentabili (32 bit)



Numeri non rappresentabili (32 bit)

- Negativi minori di $-2^{128} \times (2-2^{-23})$ [overflow negativo]
- Negativi maggiori di -2^{-127} [underflow negativo]
- Positivi minori di 2^{-127} [underflow positivo]
- Positivi maggiori di $2^{128} \times (2-2^{-23})$ [overflow positivo]
- Non c'è una rappresentazione per lo 0
- I numeri positivi e negativi molto piccoli (valore assoluto minore di 2^{-127}) possono essere approssimati con lo 0
- Non rappresentiamo più numeri di 2^{32}, ma li abbiamo divisi in modo diverso tra positivi e negativi
- I numeri rappresentati non sono equidistanti tra loro: più densi vicino allo 0 (errori di arrotondamento)

Densità dei numeri in virgola mobile



Precisione e densità

- Nell'esempio, 8 bit per esponente e 23 bit per mantissa
- Se più bit per l'esponente (e meno per la mantissa), espandiamo l'intervallo rappresentabile, ma i numeri sono più distanti tra loro ➔ minore precisione
- La precisione aumenta solo aumentando il numero dei bit
- Di solito, precisione singola (32 bit) o doppia (64 bit)

Densità

- Numero (positivo) = 1,m x 2^e
- Fissato e, i numeri rappresentabili sono tra 2^e (mantissa tutta a 0) e 2^e x $(2-2^{-23})$
  - Quanti numeri? 2^{23}
- Consideriamo adesso e+1 ➔ i numeri rappresentabili sono tra 2x2^e e 2x2^e x $(2-2^{-23})$
  - Intervallo grande il doppio
  - Quanti numeri? Sempre 2^{23}

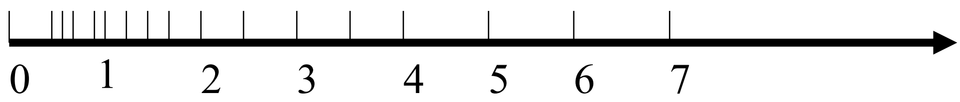
Esempio con 4 bit (+ segno)

fe (due bit per esponente), ab (due bit per mantissa)

Numero= $2^{fx2+e-1}x(1+ax2^{-1}+bx2^{-2})$

f	e	a	b		numero	
0	0	0	0		0.5	
0	0	0	1		0.625	
0	0	1	0		0.75	
0	0	1	1		0.875	
0	1	0	0		1	
0	1	0	1		1.25	
0	1	1	0		1.5	
0	1	1	1		1.75	
1	0	0	0		2	
1	0	0	1		2.5	
1	0	1	0		3	
1	0	0	1		3.5	
1	1	0	0		4	
1	1	0	1		5	
1	1	1	0		6	
1	1	1	1		7	

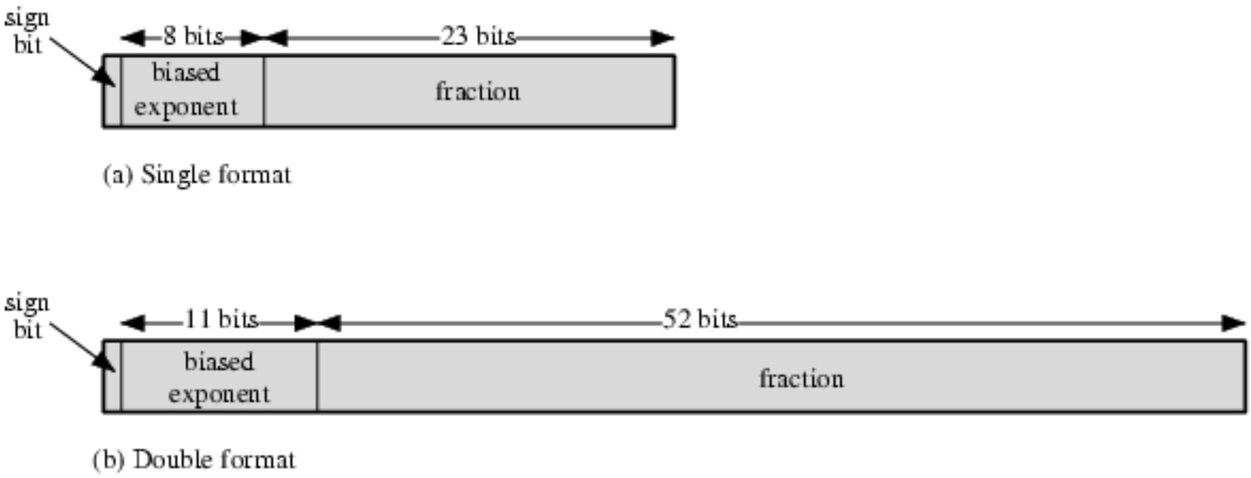
- Numeri positivi rappresentati con 2 bit esponente e 2 bit mantissa



Standard IEEE 754

- Standard per numeri in virgola mobile
- Formato singolo a 32 bit e doppio a 64 bit
- Esponente con 8 e 11 bit
- 1 implicito a sinistra della virgola
- Formati estesi (più bit per mantissa ed esponente) per risultati intermedi
  - Più precisi → minore possibilità di risultato finale con eccessivo arrotondamento

Formati IEEE 754



Numeri rappresentati (formato singolo)

- Alcune combinazioni (es.: valori estremi dell'esponente) sono interpretate in modo speciale
- Esponente polarizzato da 1 a 254 (cioè esponente da -126 a +127): numeri normalizzati non nulli in virgola mobile ➔ $+/- 2^{e-127} \times 1.f$
- Esponente 0, mantissa (frazione) 0: rappresenta 0 positivo e negativo
- Esponente con tutti 1, mantissa 0: infinito positivo e negativo
  - Overflow può essere errore o dare il valore infinito come risultato
- Esponente 0, mantissa non nulla: numero denormalizzato
  - Bit a sinistra della virgola: 0, vero esponente: -126
  - Positivo o negativo
  - numero: $2^{-126} \times 0.f$
- Esponente tutti 1, mantissa non nulla: errore (Not A Number)

Aritmetica in virgola mobile

- Allineare gli operandi aggiustando gli esponenti (per somma e sottrazione)
- Possibili eccezioni del risultato:
  - Overflow dell'esponente: esponente positivo che è più grande del massimo
  - Underflow dell'esponente: esponente negativo minore del minimo valore (numero troppo piccolo)
  - Underflow della mantissa: mantissa 0 (allineando, gli 1 sono usciti fuori)
  - Overflow della mantissa: riporto del bit più significativo

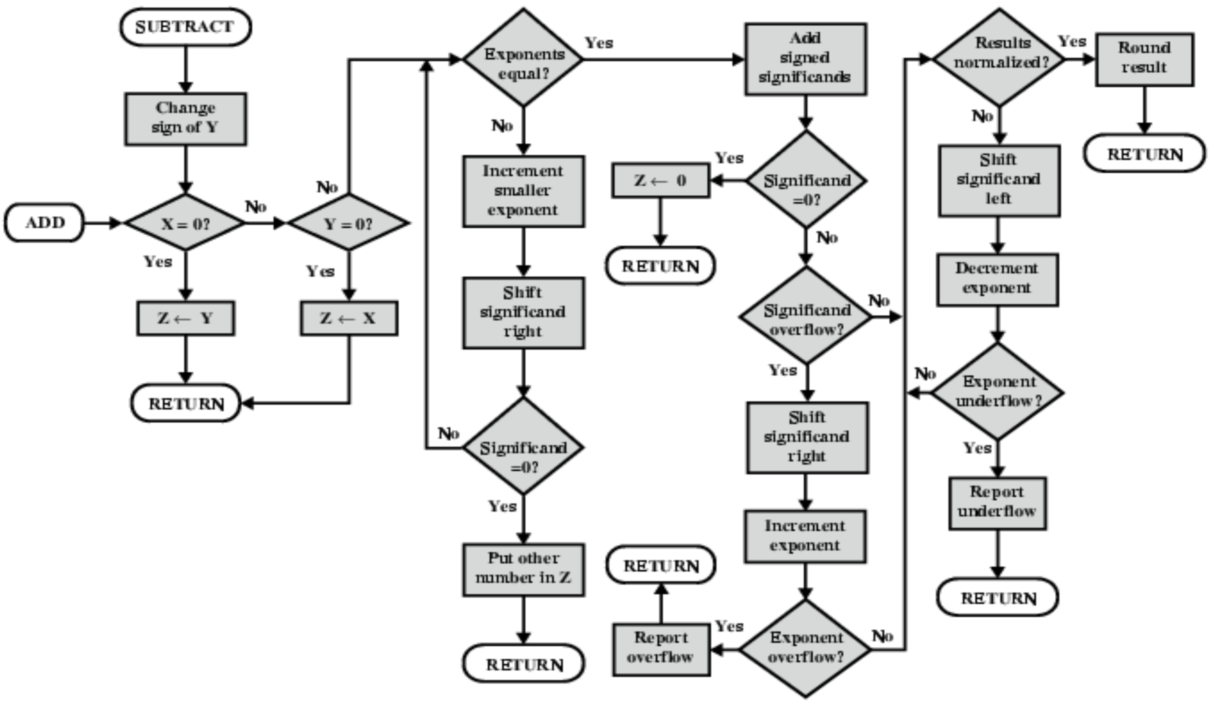
Somma e sottrazione

- Quattro fasi:
  - Controllo dello zero
    - Se uno dei due è 0, il risultato è l'altro numero
  - Allineamento delle mantisse
    - Rendere uguali gli esponenti
  - Somma o sottrazione delle mantisse
  - Normalizzazione del risultato
    - Traslare a sinistra finché la cifra più significativa è diversa da 0

Allineamento delle mantisse

- Esempio (in base 10):
- $(123 \times 10^0) + (456 \times 10^{-2})$
- 123 + 4,56 ➔ Non possiamo semplicemente sommare 123 a 456: il 4 deve essere allineato sotto il 3
- Nuova rappresentazione: $(123 \times 10^0) + (4{,}56 \times 10^0)$
- Adesso posso sommare le mantisse (123 + 4,56 = 127,56)
- Risultato: $127{,}56 \times 10^0$

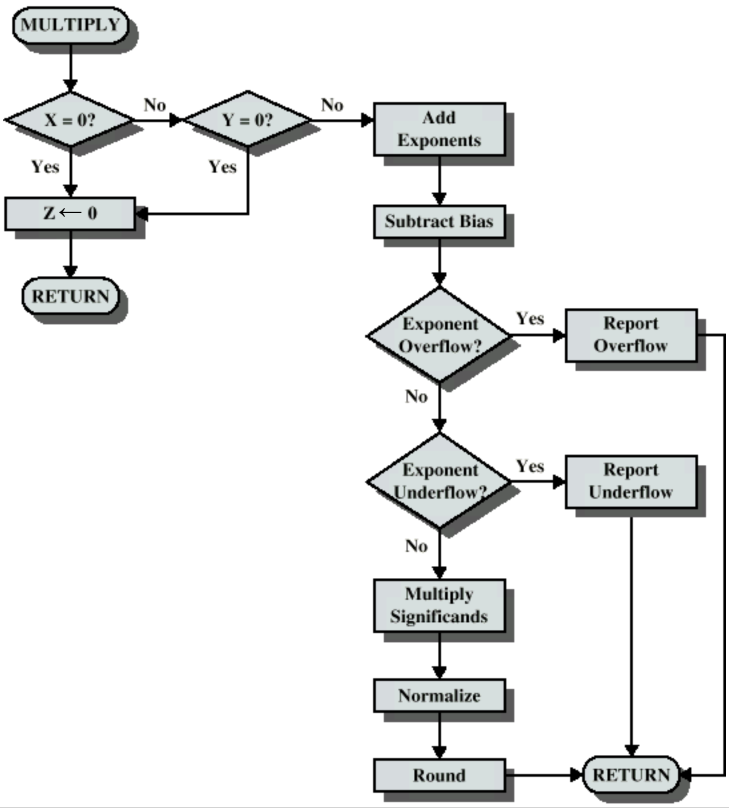
Somma e sottrazione in virgola mobile



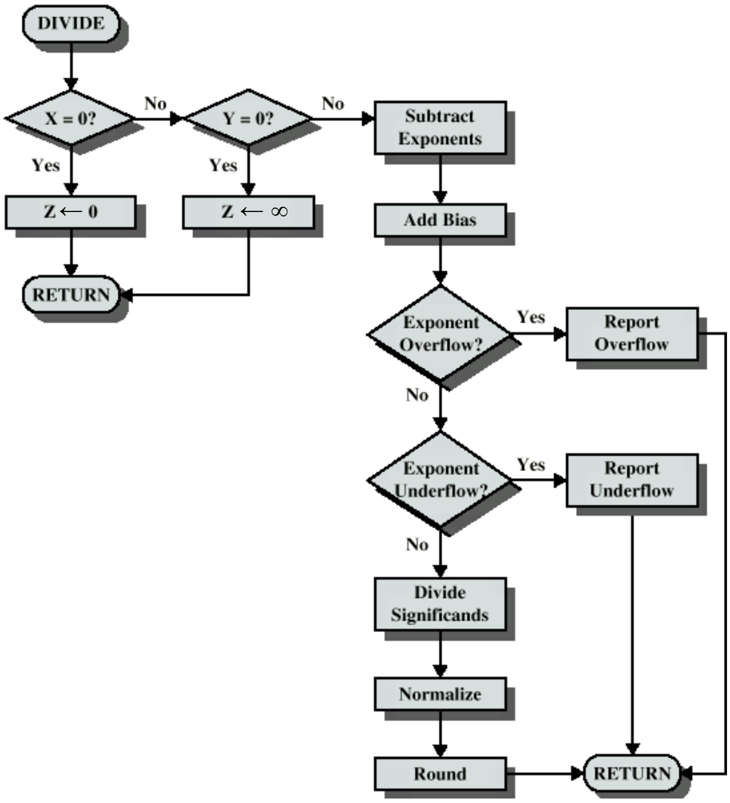
Moltiplicazione

- Controllo dello zero
- Somma degli esponenti
- Sottrazione polarizzazione
- Moltiplicazione operandi
- Normalizzazione
- Arrotondamento

Moltiplicazione in virgola mobile



Divisione in virgola mobile



Precisione del risultato: bit di guardia

- Di solito operandi nei registri della ALU, che hanno più bit di quelli necessari per la mantissa +1 ➔ i bit più a destra sono messi a 0 e permettono di non perdere bit se i numeri vengono shiftati a destra
- Es.: X-Y, con Y=1,11...11 x 2^0 e X=1,00...00 x 2^1
- Y va shiftato a destra di un bit, cioè diventa 0,111...11 x 2^1 ➔ un 1 viene perso senza i bit di guardia
- Risultato:
  - Senza bit di guardia:
    (1,0...0 – 0,1...1) x 2 = 0,0...01 x 2 = 1,0...0 x 2^{-22}
  - Con bit di guardia:
    (1,0...0 – 0,1...11) x 2 = 0,0...001 x 2 = 1,0...0 x 2^{-23}

Precisione del risultato: arrotondamento

- Se il risultato è in un registro più lungo, quando lo si riporta nel formato in virgola mobile, bisogna arrotondarlo
- Quattro approcci:
  - Arrotondamento al più vicino (default)
    - Bit aggiuntivi che iniziano con 1 ➔ sommo 1
      - Bit aggiuntivi 10...0 ➔ sommo 1 se l'ultimo bit è 1, altrimenti 0
    - Bit aggiuntivi che iniziano con 0 → elimino
  - Arrotondamento (per eccesso) a $+\infty$ e arrotondamento (per difetto) a $-\infty$
    - Usati nell'aritmetica degli intervalli
  - Arrotondamento a 0 (cioè troncamento dei bit in più)