Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»
Кафедра информатики

Отчет по лабораторной работе №14

Аппроксимации граничных условий второго рода в методе конечных разностей на примере уравнения теплопроводности

Выполнил:
студент гр. 953501
Кореневский С. А.

Руководитель:
доцент
Анисимов В. Я

Минск 2021

Содержание

Цель работы - ознакомиться с наиболее часто применяемыми способами аппроксимации граничных условий второго рода (граничных условий (ГУ) Неймана) в методе конечных разностей (на примере ГУ для одномерного нестационарного уравнения теплопроводности).

Постановка задачи

Задачи, которые будут использоваться для анализа свойств численных решений с ГУ второго рода, формулируются так: в стержне длиной L с *теплоизолированной* боковой поверхностью торец $x = 0$ *поддерживается* при *постоянной* температуре T_0 (ГУ первого рода), а торец $x = 1$ – *теплоизолирован* (ГУ второго рода); температуропроводность материала стержня постоянна и равна a; в начальный момент времени $t = 0$ стержень нагрет до температуры $T_{нач}(x)$ (координата x отсчитывается от левого торца стержня (рис. 2.4)). Найти распределение температуры по стержню в любой момент времени, т. е. найти функцию $T(x, t)$ для $0 < x \le L$ и $t > 0$.

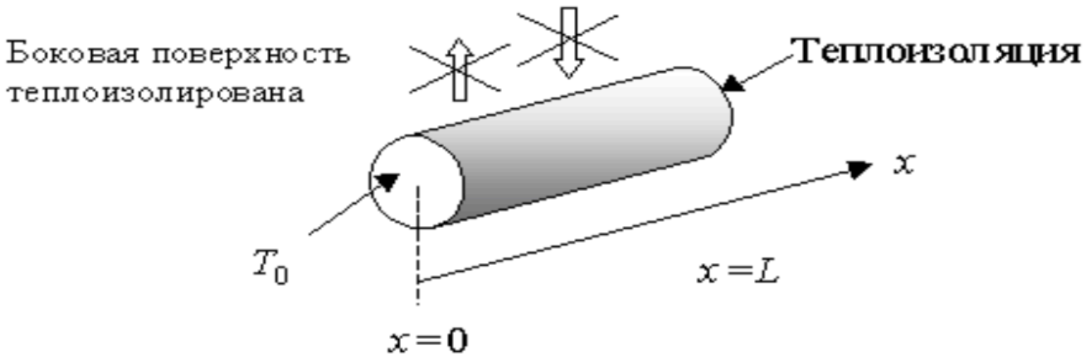


Рис. 2.4.

Стержень круглого сечения нарисован условно – сечение может иметь любую форму, и если боковая поверхность теплоизолирована, то температура любой точки стержня может зависеть только от координаты x и не будет зависеть от координаты поперек стержня).

Искомая функция $T(x,t)$ является решением одномерного уравнения теплопроводности, которое в безразмерных координатах имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\ 0 < x < 1,\ 0 < t \le T.$$

Граничные условия:

$$T(0,t) = T_0, \quad \frac{\partial T(1,t)}{\partial x} = 0, \text{ для } 0 < t \le T$$

(на границе $x = 0$ граничное условие первого рода, а при $x = 1$ – второго).

Начальные условия: $T(x,0) = T_{\text{нач}}(x)$ при $0 < x < 1$.

Способы реализации ГУ второго рода

Методы конечных разностей, применяемые для численного решения задач с граничными условиями второго (и третьего) рода, не имеют *никаких принципиальных отличий* от методов, применяемых для задач с ГУ первого рода. Для решения поставленной задачи методом конечных разностей необходимо представить граничное условие второго рода в «естественном» для этого метода виде, т. е. с использованием численного решения (величин T_i^n). Иными словами, производную в граничном условии надо заменить ее разностной аппроксимацией, а это можно сделать многими способами. Рассмотрим только два способа реализации ГУ второго рода, которые будут использованы в расчетах. При рассмотрении используем ту же равномерную сетку, что и в лабораторной работе №13.

Первый способ. Приближенно значение производной при $x = 1$ можно записать, используя аппроксимацию производной по x левой разностью:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_N^n - T_{N-1}^n}{h}, \tag{2.43}$$

а поскольку значение этой производной в рассматриваемой задаче равно нулю, то аппроксимация граничного условия выглядит так:

$$T_N^n - T_{N-1}^n = 0. \qquad (2.44)$$

Численное решение ДУ с граничным условием второго рода при $x = 1$ происходит почти так же, как и с ГУ первого рода: на каждом шаге по времени с помощью разностной схемы вычисляются все T_i^n при, $1 \le i \le N-1$, а значение T_N^n (на границе) вычисляется по формуле (2.44). Это и есть первый способ реализации граничного условия второго рода. Следует обратить внимание на то, что разностная аппроксимация первой производной левой разностью (формула (2.43)) имеет первый порядок точности по h, т. е. $O(h)$.

Второй способ можно пояснить на примере явной разностной схемы аппроксимации уравнения теплопроводности. Алгоритм явной схемы можно записать так:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\tau}{h^2}(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \qquad (2.45)$$

Из этого выражения следует, что для вычисления величины T_1^0 требуется какая-то величина T_{N+1}^n, которая *не входит* в расчетную область. Однако ее можно вычислить, используя аппроксимацию производной в граничном условии центральной разностью:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{N+1}^n - T_{N-1}^n}{2h}, \qquad (2.46)$$

а поскольку значение этой производной в рассматриваемой задаче равно нулю, то аппроксимация граничного условия выглядит так:

$$T_N^n = T_{N-1}^n. \qquad (2.47)$$

Способ реализации граничного условия здесь несколько иной: на каждом шаге по времени с помощью разностной схемы вычисляются все T_i^{n+1} при, $\mathbf{1 \le \boldsymbol{i} \le \boldsymbol{N}-1}$, а при вычислении T_1^0 в разностной схеме заменяются T_{N+1}^n на T_{N-1}^n (используется равенство (2.45)).

Обратите внимание на то, что разностная аппроксимация первой производной центральной разностью (формула (2.46)) имеет второй порядок точности по h, т.е. $O(h^2)$. Рассмотренному выше второму способу реализации ГУ второго рода можно дать другую интерпретацию, которая может оказаться более наглядной и полезной в сложных задачах. Эта другая интерпретация связана с введением «фиктивных» узлов (узлов вне зоны расчета). На рис.(2.5) показаны такие узлы (линия узлов, находящихся на

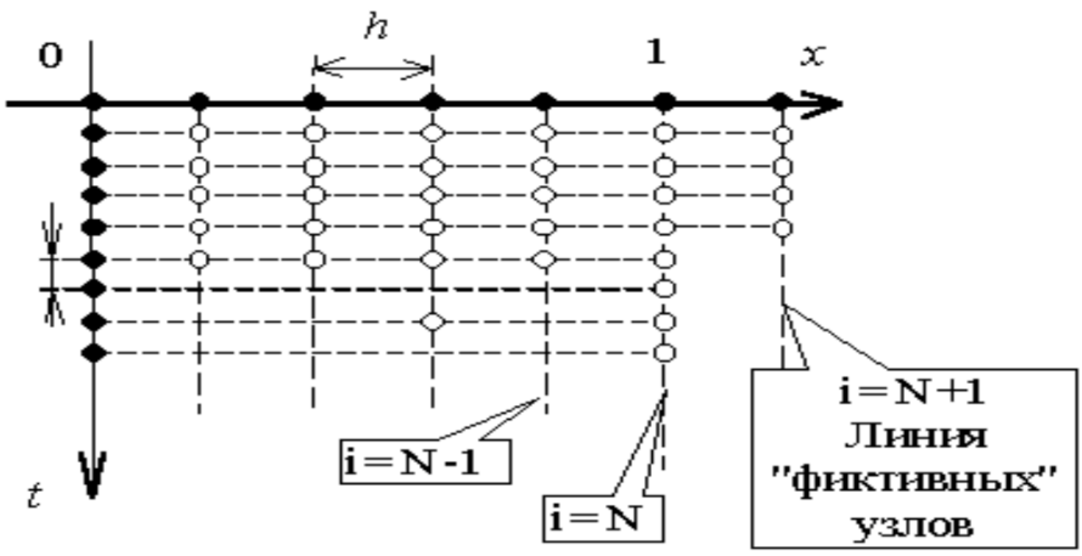


рис.(2.5)

расстоянии h от границы, на которой поставлено ГУ второго рода).

Если температуру в этих узлах задавать равной значениям температуры в соответствующих симметричных относительно границы узлах (согласно равенству (2.45)), то для расчета будет использоваться *одна и та же* разностная схема для всех узлов (включая и узлы при $i=N$). В работе должна быть предусмотрена возможность численного решения уравнения теплопроводности с помощью неявной и явной разностных схем.

Возможность использования различных граничных и начальных условий ограничена задачами, которые позволяют в достаточной мере познакомиться с основными способами реализации ГУ второго рода и их свойствами.

Шаги сетки выбираются также как и в лабораторной работе №13. Расчетная область по времени, реализованная в программе, составляет во всех случаях отрезок [0, 1]. Результаты расчета выводятся в виде таблицы (2.10). После расчета необходимо построить такие же, как в лабораторной работе №13, графики решений.

3. Программная реализация

ЗАДАЧА1. Найти приближенное решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \ \ a < x < b, \ \ 0 < t \le T, \\ u(a,t) = g_1(t), \ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(b,t) = g_2(t), \ \ 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ \ a \le x \le b, \end{cases} .$$

используя явную и неявную разностные схемы. Исходные данные указаны в табл. 2.9. Изобразить графики зависимости приближенного решения от x при $t=0$, $2\tau, 4\tau, \ldots T$.

Таблица исходных данных к задаче 1

№	a	b	k	T	$\varphi(x)$	$g_1(t)$	$g_2(t)$	$f(x,t)$
5	0	1	0.1	0.5	x	$2\sin(t)$	$\cos(t)$	0

УКАЗАНИЕ. Условие устойчивости для явной разностной схемы имеет вид $\tau \le 0.5(h^2/k)$.

Результат работы программы:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{dt} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), a < x < b, 0 < t \le T \\ u(a,t) = g_1(t), \frac{\partial u}{\partial x}(b,t) = g_2(t), 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \varphi(x), a \le x \le b. \end{cases}$$

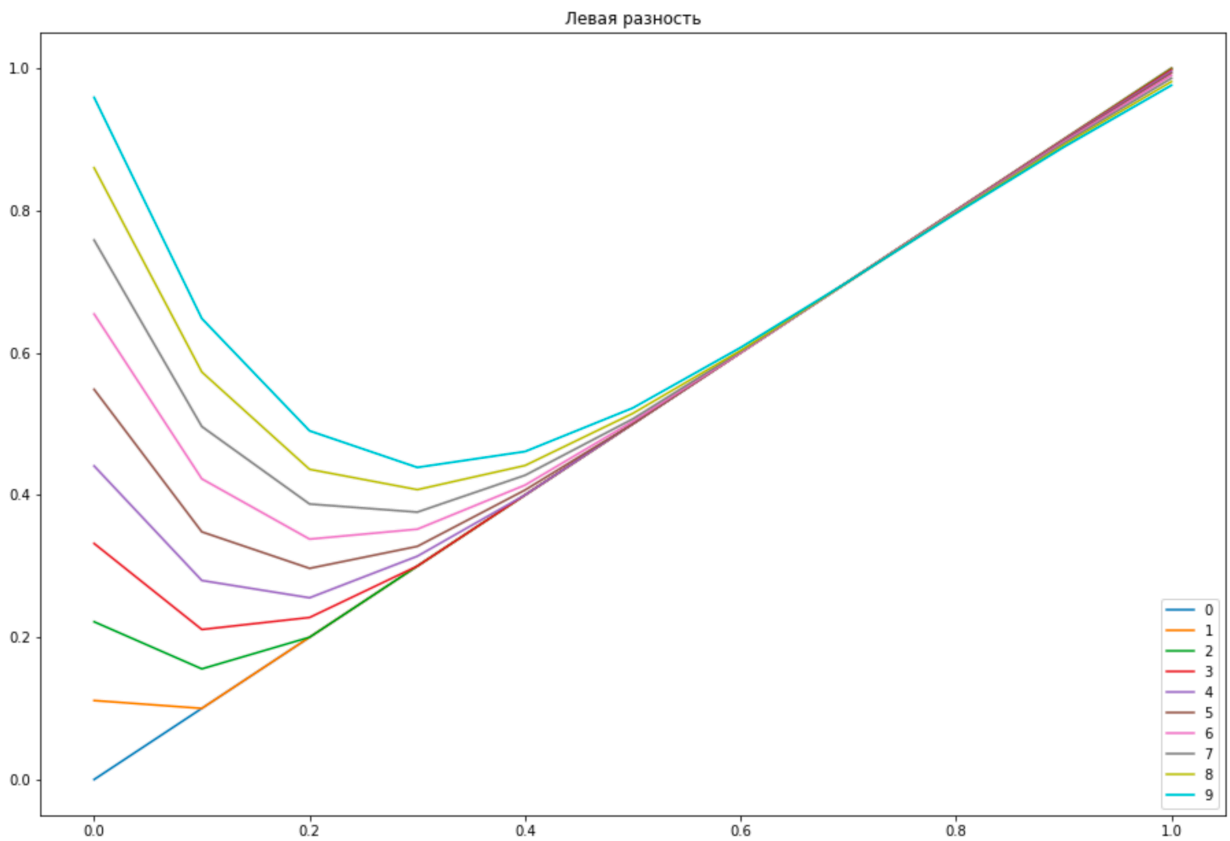
Явная схема

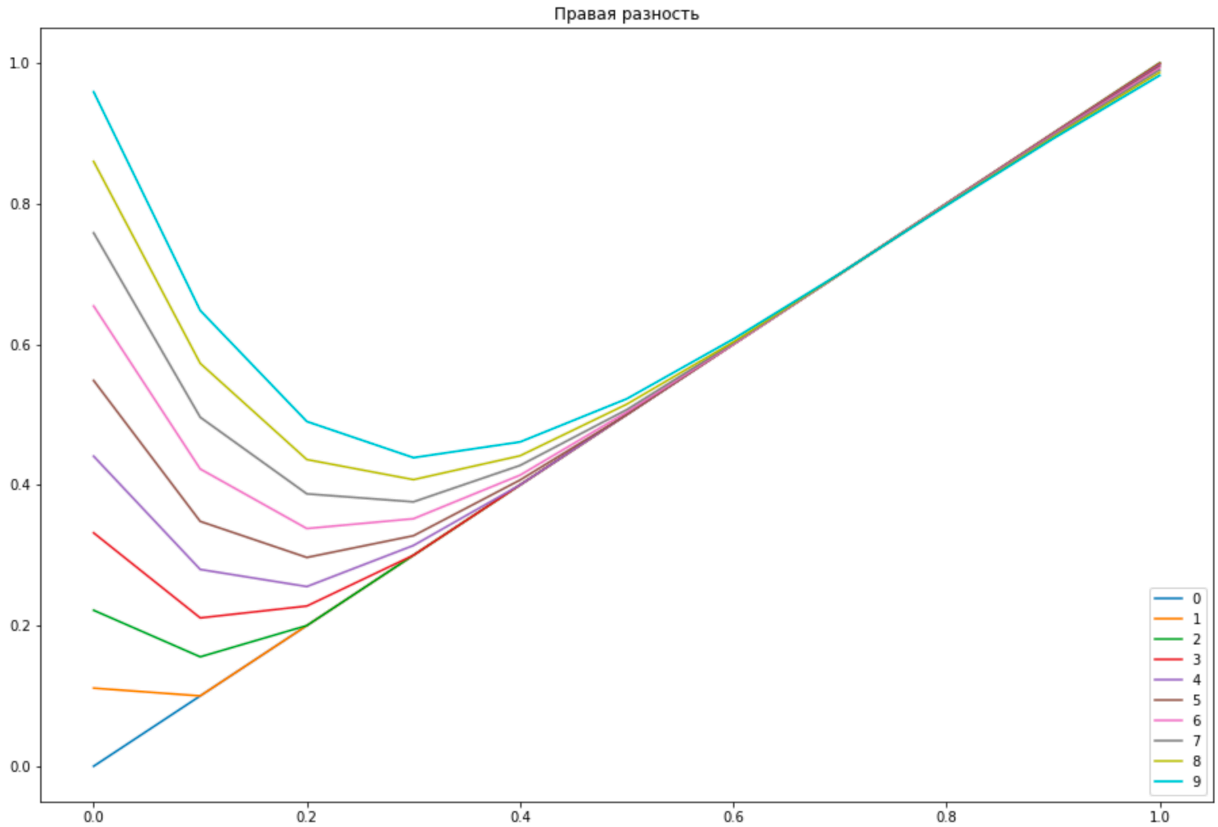
Левая разность

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x_n, \tau_N) - u(x_{n-1}, \tau_N)}{h}$, тогда $g_2(\tau_N) = \frac{u(x_n, \tau_N) - u(x_{n-1}, \tau_N)}{h}$.
Таким образом, $u(x_n, \tau_N) = u(x_{n-1}, \tau_N) + hg_2(\tau_N)$

Центральная разность

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x_{n+1}, \tau_N) - u(x_{n-1}, \tau_N)}{2h}$, тогда $g_2(\tau_N) = \frac{u(x_{n+1}, \tau_N) - u(x_{n-1}, \tau_N)}{2h}$.
Таким образом, $u(x_{n+1}, \tau_N) = u(x_{n-1}, \tau_N) + 2hg_2(\tau_N)$





Для оценки работы методов использовался метод Рунге, в качестве нормы было выбрано L_2, L_∞. Временные слои $t_{n1} = 30, t_{n2} = 75$

	N	t	s(t=tn1)	s(t=tn2)	max|tn1|	max|tn2|
0	5.0	0.0001	0.010839	0.010668	0.082737	0.081518
1	10.0	0.0001	0.007881	0.007833	0.046263	0.045265
2	20.0	0.0001	0.004248	0.004221	0.023835	0.023167

	N	t	s(t=tn1)	s(t=tn2})	max|tn1|	max|tn2|
0	3.0	0.0001	0.011020	0.010888	0.099573	0.098942
1	6.0	0.0001	0.013179	0.013098	0.072381	0.071852
2	12.0	0.0001	0.007278	0.007237	0.039217	0.038772
3	24.0	0.0001	0.003613	0.003593	0.020081	0.019778

Неявная схема

Запишем аппроксимацию уравнения теплопроводности для неявной схемы:

$$\frac{u(x,t+\tau)-u(x,t)}{\tau} = k\frac{u(x-h,t+\tau)-2u(x,t+\tau)+u(x+h,t+\tau)}{h^2} + f(x,t)$$

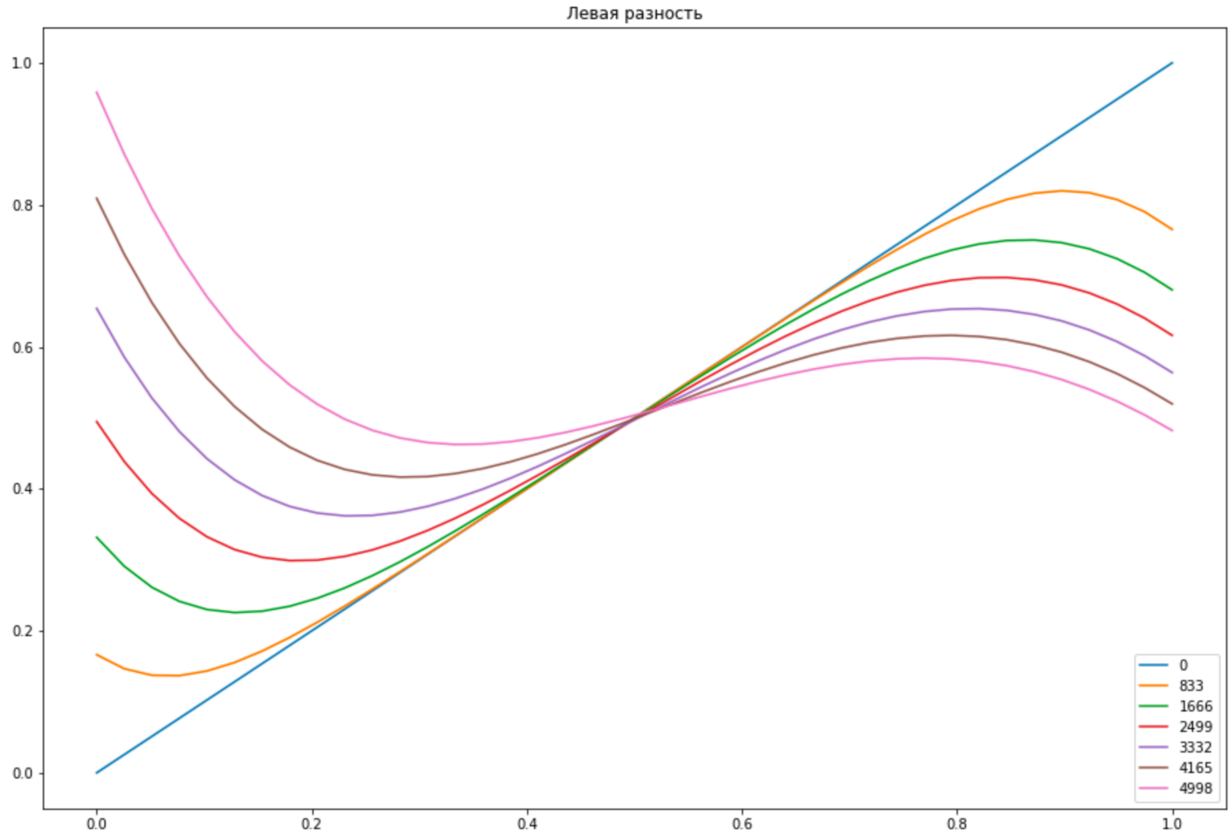
В этой схеме $u(x-h,t+\tau)$,$u(x,t+\tau)$, $u(x+h,t+\tau)$ — неизвестные значения. Выразим неизвестные значения:

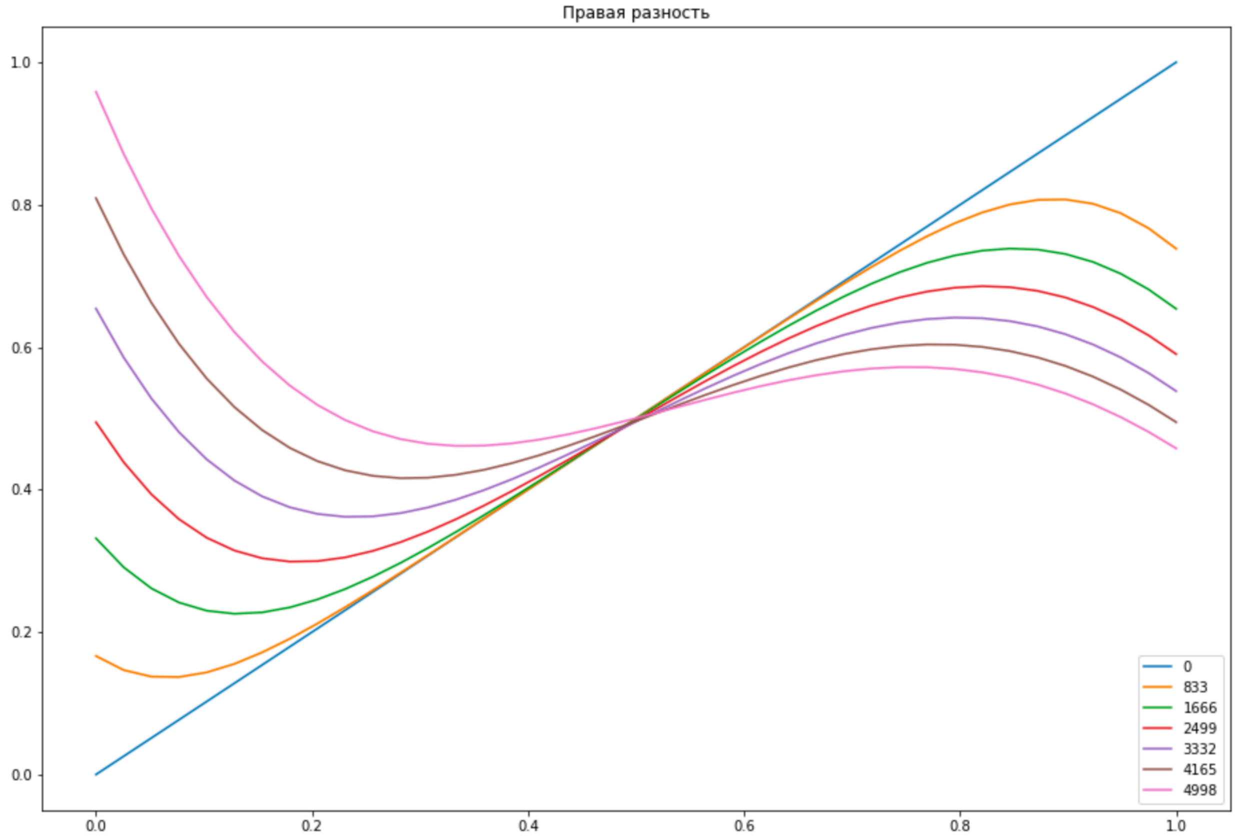
$$\frac{k\tau}{h^2}u(x-h,t+\tau) - (1+\frac{2k\tau}{h^2})u(x,t+\tau) + \frac{k\tau}{h^2}u(x+h,t+\tau) = -(u(x,t)+\tau f(x,t))$$

Переобозначим коэффициенты при неизвестных:

$$A_i u(x-h,t+\tau) - B_i u(x,t+\tau) + C_i u(x+h,t+\tau) = D_i$$

Получили трехдиагональную систему линейных уравнений.





	N	t	s(t=tn1)	s(t=tn2)	max|tn1|	max|tn2|
0	10.0	0.0001	0.029868	0.027319	0.153104	0.146826
1	20.0	0.0001	0.008127	0.007113	0.068784	0.063343
2	40.0	0.0001	0.002669	0.002516	0.029886	0.028209
3	80.0	0.0001	0.001125	0.001100	0.013681	0.013372

	N	t	s(t=tn1)	s(t=tn2)	max|tn1|	max|tn2|
0	10.0	0.0001	0.126966	0.109530	0.347849	0.323271
1	20.0	0.0001	0.025097	0.019433	0.147964	0.127214
2	40.0	0.0001	0.005203	0.004564	0.057519	0.049653
3	80.0	0.0001	0.001608	0.001611	0.023348	0.021739

Выводы:

В рамках данной лабораторной работы были разработаны методы для решения уравнения теплопроводности с заданными граничными условиями. Основной задачей было рассмотреть ошибку вычисления методов.

Полученные результаты подтверждают теоретические результаты анализа методов - ошибка зависит от шага h как $O(h^2)$ и от шага t как O(t). Также стоит отметить, что для более поздних временных слоев значение ошибки меньше, чем для более ранних.

В анализе ошибки использовался метод Рунге - сравнивалась работа методов с шагом h и $2h$, при этом метрика для сравнения была выбрана L_2, L_∞.

Таким образом, разработанный программный продукт работает корректно и позволяет исследовать указанные в задании уравнения.