3. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

3.1. СУЩНОСТЬ ЗАДАЧИ ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Статистическая гипотеза представляет собой некоторое предположение о законе распределения случайной величины или о параметрах этого закона, формулируемое на основе выборки. Примерами статистических гипотез являются предположения: генеральная совокупность распределена по экспоненциальному закону; математические ожидания двух экспоненциально распределенных выборок равны друг другу. В первой из них высказано предположение о виде закона распределения, а во второй – о параметрах двух распределений.

Гипотезы, в основе которых нет никаких допущений о конкретном виде закона распределения, называют *непараметрическими*.

Предположение, которое касается неизвестного значения параметра распределения, входящего в некоторое параметрическое семейство распределений, называется *параметрической* гипотезой (напомним, что параметр может быть и многомерным).

Гипотезу, утверждающую, что различие между сравниваемыми характеристиками отсутствует, а наблюдаемые отклонения объясняются лишь случайными колебаниями в выборках, на основании которых производится сравнение, называют *нулевой (основной)* гипотезой и обозначают H_0. Наряду с основной гипотезой рассматривают и альтернативную (конкурирующую, противоречащую) ей гипотезу H_1. И если нулевая гипотеза будет отвергнута, то будет иметь место альтернативная гипотеза.

Различают простые и сложные гипотезы. Гипотезу называют *простой*, если она однозначно характеризует параметр распределения случайной величины. Например, если λ является параметром экспоненциального распределения, то гипотеза H_0 о равенстве $\lambda = 10$ – простая гипотеза. *Сложной* называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного множества простых гипотез. Сложная гипотеза H_0 о неравенстве $\lambda > 10$ состоит из бесконечного множества простых гипотез H_0 о равенстве $\lambda = b_i$, где b_i – любое число, большее 10. Гипотеза H_0 о том, что математическое ожидание нормального распределения равно двум при неизвестной дисперсии, тоже является сложной. Сложной гипотезой будет предположение о распределении случайной величины X по нормальному закону, если не фиксируются конкретные значения математического ожидания и дисперсии.

Проверка гипотезы основывается на вычислении некоторой случайной величины – критерия, точное или приближенное распределение которого известно. Обозначим эту величину через Z, ее значение является функцией от элементов выборки

$$Z=Z(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Процедура проверки гипотезы предписывает каждому значению критерия одно из двух решений – принять или отвергнуть гипотезу. Тем самым все выборочное пространство и соответственно множество значений критерия делятся на два непересекающихся подмножества S_0 и S_1. Если значение критерия z попадает в область S_0, то гипотеза принимается, а если в область S_1, – гипотеза отклоняется. Множество S_0 называется *областью принятия гипотезы* или *областью допустимых значений*, а множество S_1 – *областью отклонения гипотезы* или *критической областью*. Выбор одной области однозначно определяет и другую область.

Принятие или отклонение гипотезы H_0 по случайной выборке соответствует истине с некоторой вероятностью и, соответственно, возможны два рода ошибок.

Ошибка первого рода возникает с вероятностью α тогда, когда ***отвергается верная гипотеза*** H_0 и принимается конкурирующая гипотеза H_1.

Ошибка второго рода возникает с вероятностью β в том случае, когда ***принимается неверная гипотеза*** H_0, в то время как справедлива конкурирующая гипотеза H_1.

Доверительная вероятность – это вероятность не совершить ошибку первого рода и принять верную гипотезу H_0.

Вероятность отвергнуть ложную гипотезу H_0 называется ***мощностью критерия.*** Следовательно, при проверке гипотезы возможны четыре варианта исходов, табл. 3.1.

Таблица 3.1.

Гипотеза H_0	Решение	Вероятность	примечание
Верна	Принимается	$1-\alpha$	Доверительная вероятность
	Отвергается	α	Вероятность ошибки первого рада
Неверна	Принимается	b	Вероятность ошибки второго рода
	Отвергается	$1-b$	Мощность критерия

Например, рассмотрим случай, когда некоторая несмещенная оценка параметра $\boldsymbol{\Theta^*}$ вычислена по выборке объема n, и эта оценка имеет плотность распределения $f(\boldsymbol{\Theta^*})$, рис. 3.1.

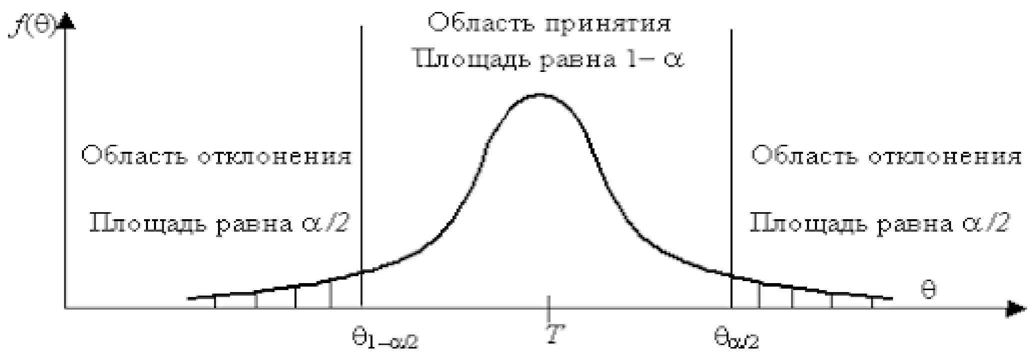
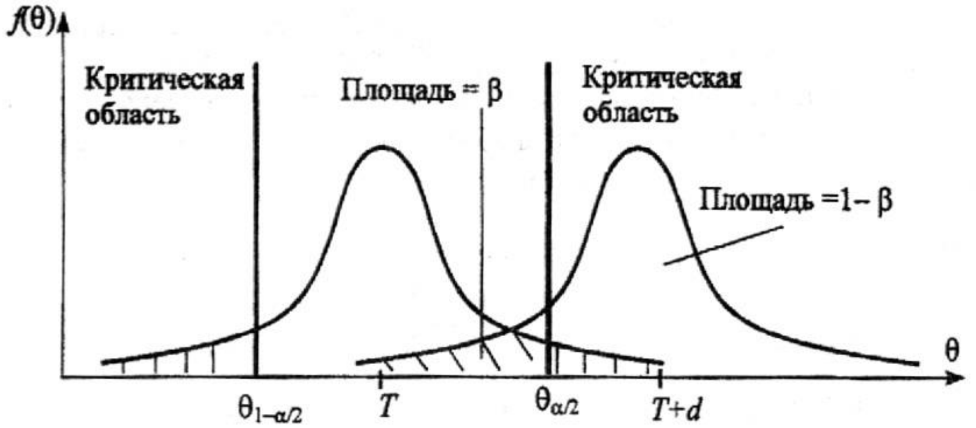


Рис. 3.1 Области принятия и отклонения гипотезы

Предположим, что истинное значение оцениваемого параметра равно $\boldsymbol{\Theta}$. Если рассматривать гипотезу H_0 о равенстве $\boldsymbol{\Theta^*} = \boldsymbol{\Theta}$, то насколько велико должно быть различие между $\boldsymbol{\Theta^*}$ и $\boldsymbol{\Theta}$, чтобы эту гипотезу отвергнуть. Ответить на данный вопрос можно в статистическом смысле, рассматривая вероятность достижения некоторой заданной разности между $\boldsymbol{\Theta^*}$ и $\boldsymbol{\Theta}$ на основе выборочного распределения параметра $\boldsymbol{\Theta^*}$.

Целесообразно полагать одинаковыми значения вероятности выхода параметра $\boldsymbol{\Theta^*}$ за нижний и верхний пределы интервала. Такое допущение во многих случаях позволяет минимизировать доверительный интервал, т.е. повысить мощность критерия проверки. Суммарная вероятность того, что параметр $\boldsymbol{\Theta^*}$ выйдет за пределы интервала с границами $\boldsymbol{\Theta^*}_{1-a/2}$ и $\boldsymbol{\Theta^*}_{a/2}$, составляет величину α. Эту величину следует выбрать настолько малой, чтобы выход за пределы интервала был маловероятен. Если оценка параметра попала в заданный интервал, то в таком случае нет оснований подвергать сомнению проверяемую гипотезу, следовательно, гипотезу равенства $\boldsymbol{\Theta^*} = \boldsymbol{\Theta}$ можно принять. Но если после получения выборки окажется, что оценка выходит за установленные пределы, то в этом случае есть серьезные основания отвергнуть гипотезу H_0. Отсюда следует, что вероятность допустить ошибку первого рода равна α (равна уровню значимости критерия).

Если предположить, например, что истинное значение параметра в действительности равно $\boldsymbol{\Theta}+d$, то согласно гипотезе H_0 о равенстве $\boldsymbol{\Theta^*} = \boldsymbol{\Theta}$, вероятность того, что оценка параметра $\boldsymbol{\Theta^*}$ попадет в область принятия гипотезы, составит b, рис. 3.2.



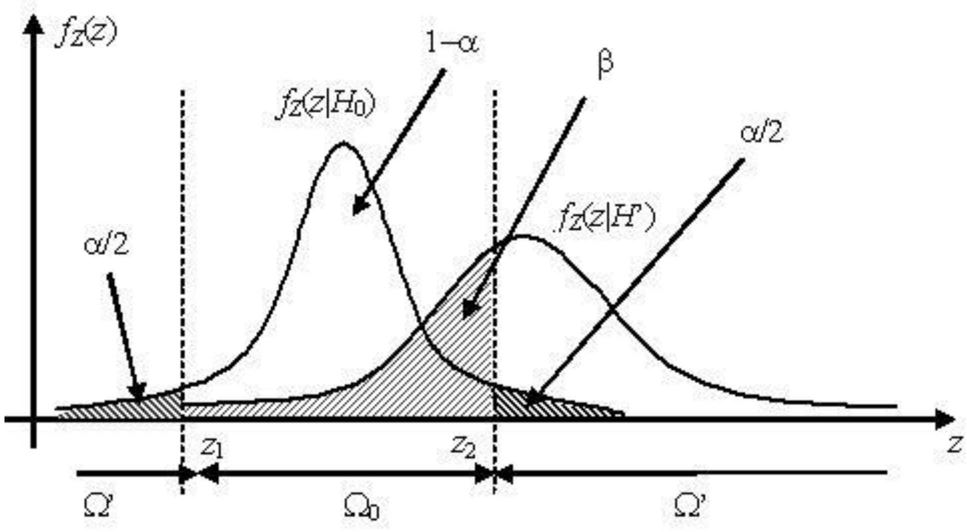


Рис.3.2. Области принятия и отклонения гипотезы

При заданном объеме выборки вероятность совершения ошибки первого рода можно уменьшить, снижая уровень значимости α. Однако при этом увеличивается вероятность ошибки второго рода b (снижается мощность критерия). Аналогичные рассуждения можно провести для случая, когда истинное значение параметра равно $\boldsymbol{\Theta} - d$.

Единственный способ уменьшить обе вероятности состоит в увеличении объема выборки (плотность распределения оценки параметра при этом становится более "узкой"). При выборе критической области руководствуются правилом Неймана – Пирсона: следует так выбирать критическую область, чтобы вероятность α была мала, если гипотеза верна, и велика в противном случае. Однако выбор конкретного значения α относительно произволен. Употребительные значения лежат в пределах от 0,001 до 0,2. В целях упрощения ручных расчетов составлены таблицы интервалов с границами $\boldsymbol{\Theta}^*_{1-a/2}$ и $\boldsymbol{\Theta}^*_{a/2}$ для типовых значений α и различных способов построения критерия.

При выборе уровня значимости необходимо учитывать мощность критерия при альтернативной гипотезе. Иногда большая мощность критерия оказывается существеннее малого уровня значимости, и его значение выбирают относительно большим, например 0,3. Такой выбор оправдан, если последствия ошибок второго рода более существенны, чем ошибок первого рода. Например, если отвергнуто правильное решение "продолжить работу пользователей с текущими паролями", то ошибка первого рода приведет к некоторой задержке в нормальном функционировании системы, связанной со сменой паролей. Если же принято решения не менять пароли, несмотря на опасность несанкционированного доступа посторонних лиц к информации, то эта ошибка повлечет более серьезные последствия.

В зависимости от сущности проверяемой гипотезы и используемых мер расхождения оценки характеристики от ее теоретического значения применяют различные критерии. К числу наиболее часто применяемых критериев для проверки гипотез о законах распределения относят критерии хи-квадрат Пирсона, Колмогорова, Мизеса, Вилкоксона, о значениях параметров – критерии Фишера, Стьюдента.

3.2. ТИПОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

При проверке гипотез широкое применение находит ряд теоретических законов распределения. Наиболее важным из них является нормальное распределение. С ним связаны распределения χ^2 (хи-квадрат), Стьюдента, Фишера, а также интеграл вероятностей. Для указанных законов функции распределения аналитически не представимы. Значения функций определяются по таблицам или с использованием стандартных процедур пакетов прикладных программ. Указанные таблицы обычно построены в целях удобства проверки статистических гипотез в ущерб теории распределений – они содержат не значения функций распределения, а критические значения аргумента *z(α)*.

Для односторонней критической области z(α) = z_{1-a}, т.е. критическое значение аргумента z(α)) соответствует квантили z_{1-a} уровня 1– α, так как

$$\int_{z(\alpha)}^{\infty} f(z)dz = \alpha = 1 - \int_{-\infty}^{z(\alpha)} f(z)dz ,$$

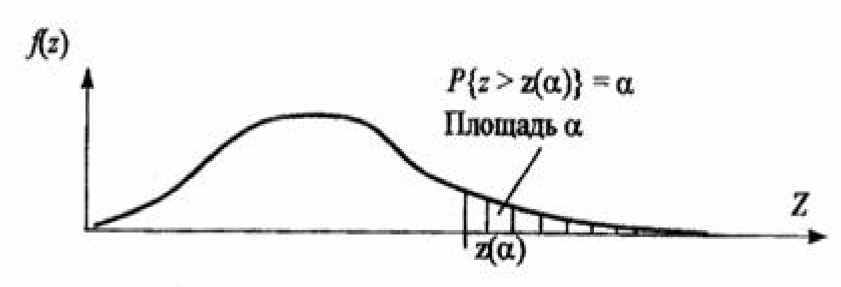


Рис. 3.3. Односторонняя критическая область

Для двусторонней критической области, с уровнем значимости *α*, размер левой области α_2, правой α_1 ($\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$), рис. 3.4. Значения $z(\alpha_2)$ и $z(\alpha_1)$ связаны с квантилями распределения соотношениями

$$z(\alpha_1) = z_{1-a1}, \quad z(a_2) = z_{a2},$$

так как

$$\int_{-\infty}^{z(\alpha_1)} f(z)dz = 1 - \alpha_1, \int_{-\infty}^{z(\alpha_2)} f(z)dz = \alpha_2 .$$

Для симметричной функции плотности распределения *f(z)* критическую область выбирают из условия $a_1 = a_2 = a/2$ (обеспечивается наибольшая мощность критерия). В таком случае левая и правая границы будут равны $|z(a/2)|$.

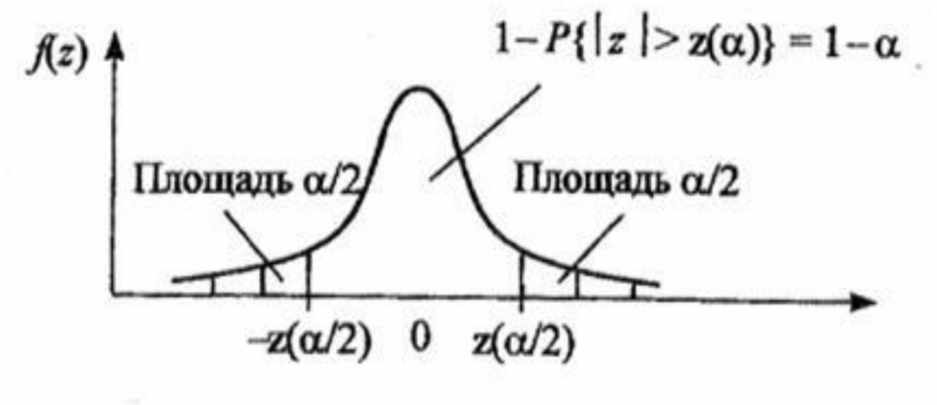


Рис. 3.4. Двусторонняя критическая область

3.2.1. Нормальное распределение

Этот вид распределения является наиболее важным в связи с центральной предельной теоремой теории вероятностей: распределение суммы независимых случайных величин стремится к нормальному с увеличением их количества при произвольном законе распределения отдельных слагаемых, если слагаемые обладают конечной дисперсией. Кроме того, А.М. Ляпунов доказал, что распределение параметра стремится к нормальному, если на параметр оказывает влияние большое количество факторов и ни один из них не является превалирующим. Функция плотности нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{3.1}$$

– унимодальная, симметричная, аргумент x может принимать любые действительные значения, рис. 3.5.

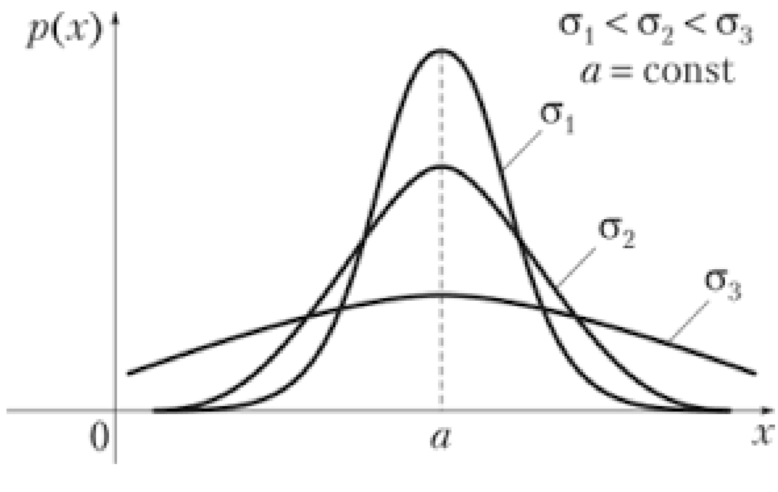


Рис. 3.5. Плотность нормального распределения

Функция плотности нормального распределения стандартизованной величины *U* имеет вид

$$f(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[\frac{-u^2}{2}\right].$$

Вычисление значений функции распределения *Ф(u)* для стандартизованного неотрицательного аргумента *u (u,0)* можно произвести с помощью полинома наилучшего приближения:

$$Ф(u) = 1-0{,}5(1+0{,}196854u+0{,}115194u^2+0{,}000344u^3+0{,}019527u^4)^{-4}. \quad (3.2)$$

Такая аппроксимация обеспечивает абсолютную ошибку не более 0,00025. Для вычисления *Ф(u)* в области отрицательных значений стандартизованного аргумента *u* ($u<0$) следует воспользоваться свойством симметрии нормального распределения

$$Ф(u) = 1 - Ф(-u).$$

Иногда в справочниках вместо значений функции *Ф(u)* приводят значения *интеграла вероятностей* (для $u > 0$)

$$F(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u \exp(-x^2/2)dx \quad (3.3)$$

Интеграл вероятностей связан с функцией нормального распределения стандартизованной величины *u* соотношением

$$Ф(u) = 0{,}5 + F(u).$$

3.2.2. Распределение χ^2 (хи-квадрат)

Распределению хи-квадрат (χ^2-распределению) с *k* степенями свободы соответствует распределение суммы $\chi^2=\sum_{i=1}^{n}u_i^2$ квадратов *n* стандартизованных случайных величин u_i, каждая из которых распределена по нормальному закону, причем *k* из них независимы, $n>k$. Функция плотности χ^2-распределению с *k* степенями свободы

$$f(x)=\left[2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^{-1}(x)^{\frac{k}{2}-1}e^{\frac{-x^2}{2}}, \ \mathrm{x} > 0, \quad (3.4)$$

где $x = \chi^2$, $\Gamma(k/2)$ – гамма-функция.

Число степеней свободы k определяет количество независимых слагаемых в выражении для χ^2. Функция плотности при k, равном одному или двум, – монотонная, а при $k>2$ – унимодальная, несимметричная, рис. 3.6.

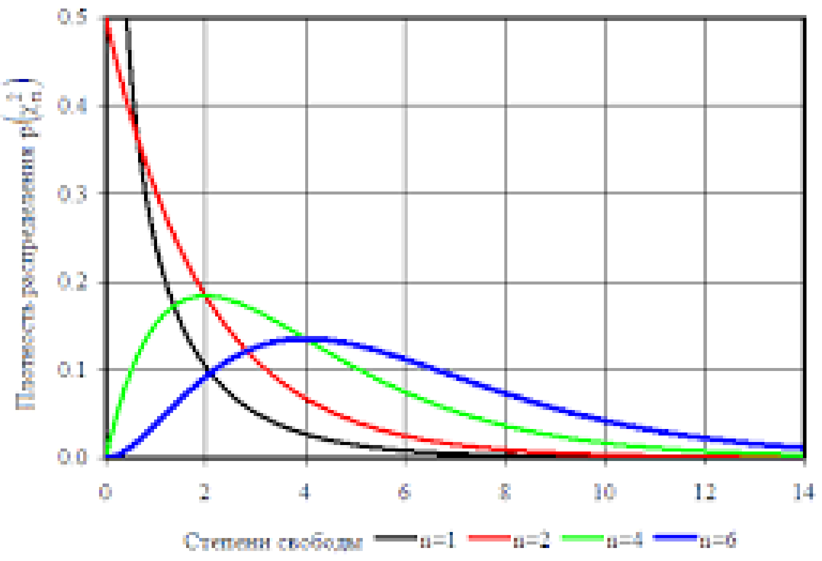


Рис. 3.6. Плотность χ^2-распределение

Математическое ожидание и дисперсия величины χ^2 равны соответственно k и $2k$. χ^2-распределение является частным случаем более общего гамма-распределения, а величина, равная корню квадратному из χ^2 с двумя степенями свободы, подчиняется распределению Рэлея.

С увеличением числа степеней свободы ($k>30$) χ^2-распределение приближается к нормальному распределению с математическим ожиданием k и дисперсией $2k$. В таких случаях критическое значение $\chi^2(k;a)$ » $u_{1-a}(k,2k)$, где $u_{1-a}(k,2k)$ – квантиль нормального распределения. Погрешность аппроксимации не превышает нескольких процентов.

3.2.3. Распределение Стьюдента

Распределение Стьюдента (t-распределение, предложено в 1908 г. английским статистиком В. Госсетом, публиковавшим научные труды под псевдонимом Student) характеризует распределение случайной величины

$$t=\frac{u_0}{\sqrt{(u_1^2+u_2^2+\ldots+u_k^2)/2}},$$

где $u_0, u_1, \ldots, u_k$ взаимно независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и конечной дисперсией. Аргумент t не зависит от дисперсии слагаемых. Функция плотности распределения Стьюдента

$$f(t) = \frac{\Gamma\left[(k+1)/2\right]}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma(k/2)}\left[1+\frac{t^2}{k}\right]^{-\frac{k+1}{2}} \tag{3.5}$$

Величина k характеризует количество степеней свободы. Плотность распределения – унимодальная и симметричная функция, похожая на нормальное распределение, рис. 3.7.

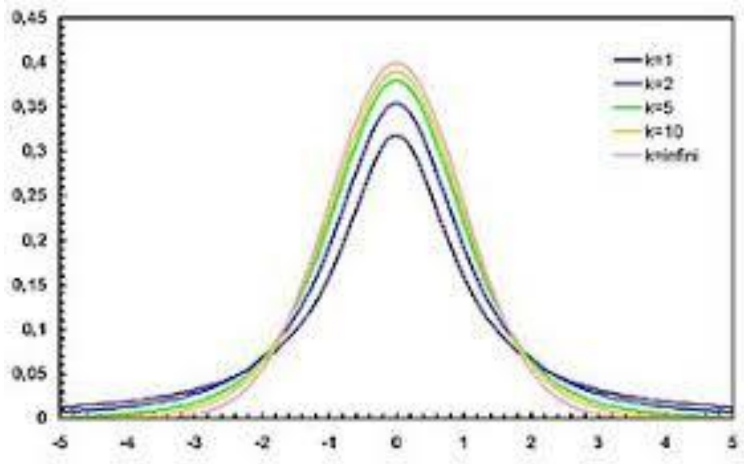


Рис. 3.7. Плотность распределения Стьюдента

Область изменения аргумента t от $-\infty$ до ∞. Математическое ожидание и дисперсия равны 0 и $k/(k-2)$ соответственно, при $k>2$. По сравнению с нормальным распределение Стьюдента более пологое, оно имеет меньшую дисперсию. Это отличие заметно при небольших значениях k, что следует учитывать при проверке статистических гипотез (критические значения аргумента распределения Стьюдента превышают аналогичные показатели нормального распределения). Таблицы распределения содержат значения для односторонней (пределы интегрирования от $r(k;a)$ до ∞.

$$\int_{r(k,a)}^{\infty} f(t)dt = \alpha$$

или двусторонней (пределы интегрирования от $-r(k;a)$ до $r(k;a)$)

$$\int_{-r(k;a)}^{r(k;a)} f(t)dt = \alpha$$

критической области.

Распределение Стьюдента применяется для описания ошибок выборки при $k < 30$. При k, превышающем 100, данное распределение практически соответствует нормальному, для значений k из диапазона от 30 до 100 различия между распределением Стьюдента и нормальным распределением составляют несколько процентов. Поэтому относительно оценки ошибок малыми считаются выборки объемом не более 30 единиц, большими – объемом более 100 единиц. При аппроксимации распределения Стьюдента нормальным распределением для односторонней критической области вероятность

$$P\{t > t(k; a)\} = u_{1-a}(0, k/(k-2)),$$

где $u_{1-a}(0, k/(k-2))$ – квантиль нормального распределения. Аналогичное соотношение можно составить и для двусторонней критической области.

3.3.4. Распределение Фишера

Распределению Р.А. Фишера (F-распределению Фишера – Снедекора) подчиняется случайная величина

$$x = [(y_1/k_1)/(y_2/k_2)],$$

равная отношению двух случайных величин y_1 и y_2, имеющих χ^2-распределение с k_1 и k_2 степенями свободы. Область изменения аргумента x от 0 до ∞. Плотность распределения

$$f(x) = \left[\frac{k_1}{k_2}\right]^{\frac{k_1}{k_2}} \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)} x^{(k_1+k_2)/2}\left(1+\frac{k_1}{k_2}x\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}} \qquad (3.6)$$

В этом выражении k_1 обозначает число степеней свободы величины y_1 с большей дисперсией, k_2 – число степеней свободы величины y_2 с меньшей дисперсией. Плотность распределения–унимодальная, несимметричная, рис. 3.8.

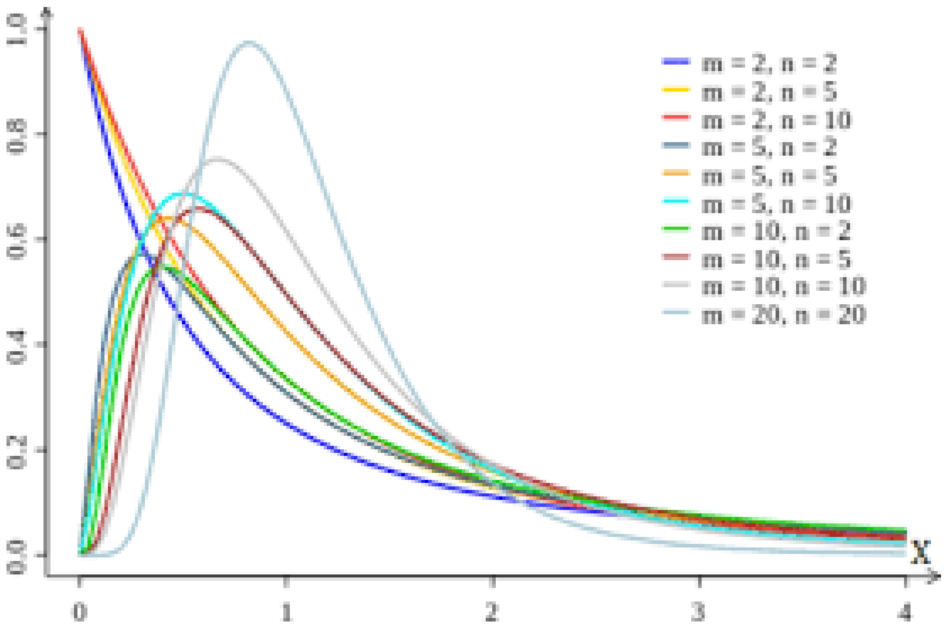


Рис. 3.8. Плотность распределения Фишера

Математическое ожидание случайной величины x

$$m = \alpha_1 = k_2/(k_2 - 2) \text{ при } k_2 > 2,$$

дисперсия

$$D = \mu_2 = [2\, k_2^2\, (k_1 + k_2 - 2)]/[k_1 (k_2 - 2)^2 (k_2 - 4)] \text{ при } k_2 > 4.$$

При $k_1 > 30$ и $k_2 > 30$ величина x распределена приближенно нормально с центром распределения $(k_1 - k_2)/(2\, k_1\, k_2)$ и дисперсией $(k_1 + k_2)/(2\, k_1\, k_2)$.

3.3. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Обычно сущность проверки гипотезы о законе распределения ЭД заключается в следующем. Имеется выборка ЭД фиксированного объема, выбран или известен вид закона распределения генеральной совокупности. Необходимо оценить по этой выборке параметры закона, определить степень согласованности ЭД и выбранного закона распределения, в котором параметры заменены их оценками. Пока не будем касаться способов нахождения оценок параметров распределения, а рассмотрим только вопрос проверки согласованности распределений с использованием наиболее употребительных критериев.

3.3.1. Критерий хи-квадрат К. Пирсона

Использование этого критерия основано на применении такой меры (статистики) расхождения между теоретическим $F(x)$ и эмпирическим распределением $F^*_n(x)$, которая приближенно подчиняется закону распределения χ^2. Гипотеза H_0 о согласованности распределений проверяется путем анализа распределения этой статистики. Применение критерия требует построения статистического ряда.

Итак, пусть выборка представлена статистическим рядом с количеством разрядов M. Наблюдаемая частота попаданий в i-й разряд n_i. В соответствии с теоретическим законом распределения ожидаемая частота попаданий в i-й разряд составляет F_i. Разность между наблюдаемой и ожидаемой частотой составит величину $(n_i - F_i)$. Для нахождения общей степени расхождения между $F(x)$ и $F^*_n(x)$ необходимо подсчитать взвешенную сумму квадратов разностей по всем разрядам статистического ряда

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{M} \frac{(n_i - F_i)^2}{F_i}.$$

(3.7)

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{M} \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i}.$$

Величина χ^2 при неограниченном увеличении n имеет χ^2-распределение (асимптотически распределена как χ^2). Это распределение зависит от числа степеней свободы k, т.е. количества независимых значений слагаемых в выражении (3.7). Число степеней свободы равно числу y минус число линейных связей, наложенных на выборку. Одна связь существует в силу того, что любая частота может быть вычислена по совокупности частот в оставшихся M–1 разрядах. Кроме того, если параметры распределения неизвестны заранее, то имеется еще одно ограничение, обусловленное подгонкой распределения к выборке. Если по выборке определяются S параметров распределения, то число степеней свободы составит

$$k=M-S-1.$$

Область принятия гипотезы H_0 определяется условием $\chi^2 < \chi^2(k;a)$, где $\chi^2(k;a)$ – критическая точка χ2-распределения с уровнем значимости a. Вероятность ошибки первого рода равна a, вероятность ошибки второго рода четко определить нельзя, потому что существует бесконечно большое множество различных способов несовпадения распределений. Мощность критерия зависит от количества разрядов и объема выборки. Критерий рекомендуется применять при n>200, допускается применение при n>40, именно при таких условиях критерий состоятелен (как правило, отвергает неверную нулевую гипотезу).

Алгоритм проверки по критерию

1. Построить гистограмму равновероятностным способом.
2. По виду гистограммы выдвинуть гипотезу

$$H_0 : f(x) = f_0(x),$$
$$H_1 : f(x) \neq f_0(x),$$

где $f_0(x)$ - плотность вероятности гипотетического закона распределения (например, равномерного, экспоненциального, нормального).

Замечание. Гипотезу об экспоненциальном законе распределения можно выдвигать в том случае, если все числа в выборке положительные.

3. Вычислить значение критерия по формуле

$$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{M}\frac{\left(p_i-p_i^*\right)^2}{p_i} = \sum_{i=1}^{M}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i},$$

где $p_i^* = {}^{n_i}/_{n}$ –частота попадания в i-тый интервал;

p_i - теоретическая вероятность попадания случайной величины в i- тый интервал при условии, что гипотеза H_0 верна.

Формулы для расчета p_i в случае экспоненциального, равномерного и нормального законов соответственно равны.

Экспоненциальный закон

$$p_i = e^{\frac{-A_i}{\bar{x}}} - e^{\frac{-B_i}{\bar{x}}}. \qquad (3.8)$$

При этом $A_1 = 0$, $B_m = +\infty$.

Равномерный закон

$$p_i = (B_i - A_i)/(\hat{x}_n - \hat{x}_1). \qquad (3.9)$$

Нормальный закон

$$p_i = 0{,}5\left(\Phi\left(\frac{B_i - \bar{x}}{S_0}\right) - \Phi\left(\frac{A_i - \bar{x}}{S_0}\right)\right). \qquad (3.10)$$

При этом $A_1 = -\infty$, $В_М = +\infty$.

Замечания. После вычисления всех вероятностей p_i проверить, выполняется ли контрольное соотношение

$$\left|1 - \sum_{i=1}^{M} p_i\right| \le 0{,}01.$$

Функция $\Phi(x)$- нечетная. $\Phi(+\infty) = 1$.

4. Из таблицы " Хи-квадрат" Приложения выбирается значение $\chi^2_{\alpha,k}$, где α - заданный уровень значимости ($\alpha = 0{,}05$ или $\alpha = 0{,}01$), а k- число степеней свободы, определяемое по формуле

$$k = M - 1 - S.$$

Здесь S - число параметров, от которых зависит выбранный гипотезой H_0 закон распределения. Значения S для равномерного закона равно 2, для экспоненциального - 1, для нормального - 2.

5. Если $\chi^2 > \chi^2_{\alpha,k}$, то гипотеза H_0 отклоняется. В противном случае нет оснований ее отклонить: с вероятностью 1 - β она верна, а с вероятностью - β неверна, но величина β неизвестна.

<u>*Пример3.*</u>1. С помощью критерия χ^2 выдвинуть и проверить гипотезу о законе распределения случайной величины X, вариационный ряд, интервальные таблицы и гистограммы распределения которой приведены в примере 1.2. Уровень значимости α равен 0,05.

<u>*Решение*</u>. По виду гистограмм выдвигаем гипотезу о том, что случайная величина X распределена по нормальному закону:

$H_0 : f(x) = N(m, \sigma)$;

$H_1 : f(x) \ne N(m, \sigma)$.

Значение критерия вычисляем по формуле :

$$\chi^2 = 100\sum_{i=1}^{10}\frac{(p_i - p_i^*)^2}{p_i}. \qquad (3.11)$$

Как отмечалось выше, при проверке гипотезы предпочтительнее использовать равновероятностную гистограмму. В этом случае

$$p_i^* = {}^{n_i}\!/_{n} = {}^{10}\!/_{100} = 0{,}1.$$

Теоретические вероятности p_i рассчитываем по формуле (3.10). При этом полагаем, что

$$\bar{x} = 1{,}7; \quad S_0 = 1{,}98.$$

p_1 = 0,5(Ф((-4,5245+1,7)/1,98)-Ф((-∞+1,7)/1,98)) = 0,5(Ф(-1,427)-Ф(-∞)) = = 0,5(-0,845+1) = 0,078.

p_2 = 0,5(Ф((-3,8865+1,7)/1,98)-Ф((-4,5245+1,7)/1,98)) = = 0,5(Ф(-1,104)+0,845) = 0,5(-0,729+0,845) = 0,058.

p_3 = 0,094; p_4 = 0,135; p_5 = 0,118; p_6 = 0,097; p_7 = 0,073; p_8 = 0,059; p_9 = 0,174;

p_{10} = 0,5(Ф((+∞+1,7)/1,98)-Ф((0,6932+1,7)/1,98)) = 0,114.

После этого проверяем выполнение контрольного соотношения

$$\left|1 - \sum_{i=1}^{10} p_i\right| = 0 < 0{,}01.$$

Тогда

$$\chi^2 = 100 \cdot \left(\frac{(0{,}078 - 0{,}1)^2}{0{,}078} + \frac{(0{,}064 - 0{,}1)^2}{0{,}064} + \cdots + \frac{(0{,}114 - 0{,}1)^2}{0{,}114}\right) =$$

= 100 · (0,0062 + 0,0304 + 0,0004 + 0,0091 + 0,0028 + 0,0001 + 0,0100 + + 0,0285 + 0,0315 + 0,0017) = 100 · 0,1207 = 12,07.

После этого из таблицы "Хи - квадрат" выбираем критическое значение

$$\chi^2_{\alpha;k} = \chi^2_{0{,}05;7} = 14{,}07.$$

Так как $\chi^2 < 14{,}07$, то гипотеза H_0 принимается (нет основания ее отклонить).

3.3.2. Критерий А.Н. Колмогорова

Для применения критерия А.Н. Колмогорова ЭД требуется представить в виде вариационного ряда (ЭД недопустимо объединять в разряды). В качестве меры расхождения между теоретической $F(x)$ и эмпирической $F^*_n(x)$ функциями распределения непрерывной случайной величины X используется модуль максимальной разности

$$d_n = \max\left|F(x) - F_n(x).\right| \qquad (3.12)$$

А.Н. Колмогоров доказал, что какова бы ни была функция распределения *F(x)* величины *X* при неограниченном увеличении количества наблюдений n функция распределения случайной величины d_n асимптотически приближается к функции распределения

$$K(\lambda) = P(d\sqrt{n} > \lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k \, exp(-2x^2\lambda^2).$$

Иначе говоря, критерий А.Н. Колмогорова характеризует вероятность того, что величина d_n не будет превосходить параметр l для любой теоретической функции распределения. Уровень значимости a выбирается из условия

$$P(d\sqrt{n} > \lambda) = \alpha = 1 - K(\lambda).$$

в силу предположения, что почти невозможно получить это равенство, когда существует соответствие между функциями *F(x)* и $F^*_n(x)$. Критерий А.Н. Колмогорова позволяет проверить согласованность распределений по малым выборкам, он проще критерия хи-квадрат, поэтому его часто применяют на практике. Но требуется учитывать два обстоятельства.

1. В соответствии с условиями его применения необходимо пользоваться следующим соотношением

$$d = \max(d_n^+, d_n^-)$$

где

$$d_n^+ = \max\left|\frac{i}{n} - F(x_i)\right|; \quad d_n^- = \max\left|F(x_i) - \frac{i-1}{n}\right|$$

2. Условия применения критерия предусматривают, что теоретическая функция распределения известна полностью – известны вид функции и значения ее параметров. На практике параметры обычно неизвестны и оцениваются по ЭД. Но критерий не учитывает уменьшение числа степеней свободы при оценке параметров распределения по исходной выборке. Это приводит к завышению значения вероятности соблюдения нулевой гипотезы, т.е. повышается риск принять в качестве правдоподобной гипотезу, которая плохо согласуется с ЭД (повышается вероятность совершить ошибку второго рода). В качестве меры противодействия такому выводу следует увеличить уровень значимости а, приняв его равным 0,1 – 0,2, что приведет к уменьшению зоны допустимых отклонений.

Последовательность действий при проверке гипотезы следующая.

1. Построить вариационный ряд.

2. Построить график эмпирической функции распределения $F^*(x)$.

3. Выдвинуть гипотезу:

$$H_0 : F(x) = F_0(x) \, ,$$

$$H_1 : F(x) \neq F_0(x) \, ,$$

где $F_0(x)$ - теоретическая функция распределения типового закона: равномерного, экспоненциального или нормального. Ниже приведены формулы для расчета F_0(x).

Равномерный закон

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, x < \hat{x}_1 \\ (x - \hat{x}_1)/(\hat{x}_n - \hat{x}_1), \hat{x}_1 \le x \le \hat{x}_n \\ 1, x > \hat{x}_n \end{cases}$$

Экспоненциальный закон

$$F_0(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\bar{x}}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

Нормальный закон

$$F_0(x) = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{s_0}\right)$$

4. Рассчитать по формулам 10-20 значений и построить зависимость функции $F_0(x)$ в одной системе координат с функцией $F^*{}_n(x)$.

5. По графику определить максимальное по модулю отклонение между функциями $F^*{}_n(x)$ и $F_0(x)$.

6. Вычислить значение критерия

$$\lambda = \sqrt{n} \cdot \max\left|F^*(x) - F_0(x)\right|.$$

7. Принимают тот или иной уровень значимости (чаще всего 0,05 или 0,01). Тогда доверительная вероятность $\gamma = 1 - \alpha$.

8. Из таблицы вероятностей Колмогорова выбрать критическое значение λ_γ.

9. Если $\lambda > \lambda_\gamma$, то нулевая гипотеза H_0 отклоняется, в противном случае - принимается, хотя она может быть неверна.

Достоинства критерия Колмогорова по сравнению с критерием χ^2: возможность применения при очень маленьких объемах выборки ($n < 20$) , более высокая "чувствительность", а следовательно, меньшая трудоемкость вычислений.

Недостаток: критерий можно использовать в том случае, если параметры $Q_1, ..., Q_k$ распределения заранее известны, а эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ должна быть построена по *несгруппированным* выборочным данным.

Пример 3.3. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о равномерном законе распределения $R(0{,}5;\ 5{,}25)$ случайной величины по выборке объема 10: 2,68 1,83 2,90 1,03 0,90 4,07 5,05 0,94 0,71 1,16, уровень значимости 0,5.

Решение. Вариационный ряд данной выборки имеет вид:

0,71 0,90 0,94 1,03 1,16 1,83 2,68 2,90 4,07 5,05.

После этого строим график эмпирической функции распределения $F^*(x)$.

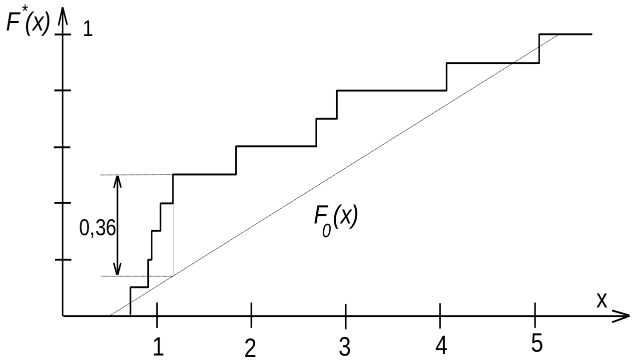


Рис. 2.9

Теоретическая функция распределения $F_0(x)$ равномерного закона $R(0{,}5;5{,}25)$ равна

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, x < 0{,}5 \\ (x-0{,}5)/(5{,}25-0{,}5), 0{,}5 \le x < 5{,}25. \\ 1, x > 5{,}25 \end{cases}$$

Максимальная разность по модулю между графиками $F^*(x)$ и $F_0(x)$ равна 0,36 при $x = 1{,}16$.

Вычислим значение статистики λ

$$\lambda = \sqrt{n} \cdot \max\left|F_0(x) - F^*(x)\right| = \sqrt{10} \cdot 0{,}36 = 1{,}14.$$

Из таблицы Колмогорова выбираем критическое значение $\lambda_\gamma = \lambda_{1-\alpha} = \lambda_{0{,}95} = 1{,}36$. Так как $\lambda < 1{,}36$, то гипотеза о равномерном законе распределения принимается.

3.3.3. Критерий Р. Мизеса

В качестве меры различия теоретической функции распределения *F(x)* и эмпирической $F^*_n(x)$ по критерию Мизеса (критерию w^2) выступает средний квадрат отклонений по всем значениям аргумента *x*

$$\varpi_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(F_n(x) - F(x)\right)^2 dF(x). \qquad (3.12)$$

Статистика критерия

$$n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{j=1}^{n} \left(F(x_i) - \frac{i-0.5}{n}\right)^2 \qquad (3.13)$$

При неограниченном увеличении *n* существует предельное распределение статистики nw_n^2. Задав значение вероятности а можно определить критические значения $nw_n^2(a)$. Проверка гипотезы о законе распределения осуществляется обычным образом: если фактическое значение nw_n^2 окажется больше критического или равно ему, то согласно критерию Мизеса с уровнем значимости а гипотеза Но о том, что закон распределения генеральной совокупности соответствует *F(x)*, должна быть отвергнута.

Пример 3.3. Проверить с помощью критерия Мизеса гипотезу о том, что ЭД, представленные вариационным рядом в табл. подчиняются нормальному распределению при уровне значимости a = 0,1.

Решение. Исходные данные и результаты вычислений представлены в табл. 3.1.

i	x_i	$F_n(x_i)$	$F(x_i)$	D_i	i	x_i	$F_n(x_i)$	$F(x_i)$	D_i
1	25,79	0,011	0,036	0,618	**23**	27,40	0,511	0,456	3,103
2	25,98	0,034	0,055	0,429	**24**	27,49	0,534	0,492	1,765
3	25,98	0,057	0,055	0,003	**25**	27,64	0,557	0,555	0,003
4	26,12	0,080	0,073	0,047	**26**	27,66	0,580	0,561	0,332
5	26,13	0,102	0,075	0,726	**27**	27,71	0,602	0,583	0,374
6	26,49	0,125	0,144	0,378	**28**	27,78	0,625	0,610	0,216
7	26,52	0,148	0,151	0,009	**29**	27,89	0,648	0,656	0,063
8	26,60	0,171	0,170	0,000	**30**	27,89	0,671	0,656	0,213
9	26,66	0,193	0,188	0,025	**31**	28,01	0,693	0,701	0,067
10	26,69	0,216	0,196	0,409	**32**	28,10	0,716	0,731	0,238
11	26,74	0,237	0,211	0,742	**33**	28,11	0,739	0,735	0,013
12	26,85	0,261	0,246	0,231	**34**	28,37	0,761	0,817	3,090
13	26,90	0,284	0,263	0,439	**35**	28,38	0,784	0,819	1,230
14	26,91	0,307	0,267	1,572	**36**	28,50	0,807	0,851	1,908
15	26,96	0,330	0,284	2,071	**37**	28,63	0,830	0,879	2,461
16	27,02	0,352	0,305	2,243	**38**	28,67	0,852	0,888	1,271
17	27,11	0,375	0,337	1,467	**39**	28,90	0,875	0,928	2,791
18	27,19	0,398	0,371	0,717	**40**	28,99	0,898	0,939	1,737
19	27,21	0,421	0,378	1,790	**41**	28,99	0,921	0,940	0,381
20	27,28	0,443	0,406	1,391	**42**	29,03	0,943	0,944	0,001
21	27,30	0,466	0,412	2,866	**43**	29,12	0,966	0,954	0,149
22	27,38	0,489	0,447	1,755	**44**	29,28	0,989	0,968	0,432

В этой таблице:

$F_n(x_i)=(i–0,5)/44$ – значение эмпирической функции распределения;

$F(x_i)$ – значение теоретической функции распределения, соответствует значению функции нормального распределения в точке x_i;

$D_i =1000[F_n(x_i) – F(x_i)]^2$. Здесь масштабный множитель 1000 введен для удобства отображения данных в таблице, при расчетах он не используется.

Критическое значение статистики критерия Мизеса при заданном уровне значимости равно 0,347, (таблица приведена в приложении в разделе «Практика»). Фактическое значение статистики

$$n\varpi_n^2 = \frac{1}{12\cdot 44} + \sum_{i=1}^{44} \Delta_i /1000 = 0,044$$

что меньше критического значения. Следовательно, гипотеза H_0 не противоречит имеющимся данным.

Достоинством критерия Мизеса является быстрая сходимость к предельному закону, для этого достаточно не менее 40 наблюдений в области часто используемых на практике больших значений nw_n (а не несколько сот, как для критерия хи-квадрат).

Сопоставляя возможности различных критериев, необходимо отметить следующие особенности. Критерий Пирсона устойчив к отдельным случайным ошибкам в ЭД. Однако его применение требует группирования данных по интервалам, выбор которых относительно произволен и подвержен противоречивым рекомендациям. Критерий Колмогорова слабо чувствителен к виду закона распределения и подвержен влиянию помех в исходной выборке, но прост в применении. Критерий Мизеса имеет ряд общих свойств с критерием Колмогорова: оба основаны непосредственно на результатах наблюдения и не требуют построения статистического ряда, что повышает объективность выводов; оба не учитывают уменьшение числа степеней свободы при определении параметров распределения по выборке, а это ведет к риску принятия ошибочной гипотезы. Их предпочтительно применять в тех случаях, когда параметры закона распределения известны априори, например, при проверке датчиков случайных чисел.

При проверке гипотез о законе распределения следует помнить, что слишком хорошее совпадение с выбранным законом распределения может быть обусловлено некачественным экспериментом («подчистка» ЭД) или предвзятой предварительной обработкой результатов (некоторые результаты отбрасываются или округляются).

Выбор критерия проверки гипотезы относительно произволен. Разные критерии могут давать различные выводы о справедливости гипотезы, окончательное заключение в таком случае принимается на основе неформальных соображений. Точно также нет однозначных рекомендаций по выбору уровня значимости.

Рассмотренный подход к проверке гипотез, основанный на применении специальных таблиц критических точек распределения, сложился в эпоху "ручной" обработки ЭД, когда наличие таких таблиц существенно снижало трудоемкость вычислений. В настоящее время математические пакеты включают процедуры вычисления стандартных функций распределений, что позволяет отказаться от использования таблиц, но может потребовать изменения правил проверки. Например, соблюдению гипотезы H_0 соответствует такое значение функции распределения критерия, которое не превышает значение доверительной вероятности $1-a$ (оценка статистики критерия соответствует доверительному интервалу).