Исследование операций
О.И. Дугинов

Лабораторная работа 1
«Метод ветвей и границ»

Пусть имеется задача целочисленного линейного программирования с двусторонними ограничениями

$$
\begin{aligned}
&\overline{c}^{\intercal}\overline{x} \to \max \\
&\overline{A}\overline{x} \leqslant \overline{b} \\
&\overline{d}^{-} \leqslant \overline{x} \leqslant \overline{d}^{+},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\overline{c} \in \mathbb{Z}^n$, $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)^{\intercal} \in \mathbb{Z}^n$ — вектор переменных, $\overline{A} \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ — целочисленная матрица, в которой m строк и n столбцов, $\overline{b} \in \mathbb{Z}^m$, $\overline{d}^{-} \in \mathbb{Z}^n$ и $\overline{d}^{+} \in \mathbb{Z}^n$. Требуется определить совместна ли задача и в случае положительного ответа найти оптимальный план. Это можно сделать с помощью метода ветвей и границ. Цель настоящей лабораторной работы — реализовать метод ветвей и границ для решения задач целочисленного линейного программирования с двусторонними ограничениями. Метод состоит в следующем.

Шаг 1. Преобразуем задачу (1) таким образом, чтобы $\overline{c} \leqslant 0$. Для каждого индекса $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ такого, что $\overline{c}_i > 0$

а) в векторе $\overline{c}$ i-ую компоненту умножим на -1;
б) в матрице $\overline{A}$ i-ый столбец умножим на -1;
в) в каждом из векторов $\overline{d}^{+}$ и $\overline{d}^{-}$ i-ую компоненту умножим на -1;
г) i-ую компоненту вектора $\overline{d}^{-}$ и i-ую компоненту вектора $\overline{d}^{+}$ поменяем местами.

Шаг 2. Отбросим условие целочисленности на переменные и приведем полученную задачу линейного программирования в каноническую форму без учета ограничений неотрицательности

$$
\begin{aligned}
&c^{\intercal}x + \alpha \to \max \\
&Ax = b \\
&d^{-} \leqslant x,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\alpha = 0, \\
&x = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n+m})^{\intercal} \in \mathbb{R}^{2n+m}, \\
&c = (\overline{c}_1, \overline{c}_2, \dots, \overline{c}_n, 0, 0, \dots, 0)^{\intercal} \in \mathbb{Z}^{2n+m}
\end{aligned}
$$

и

$$
A = \begin{pmatrix} \overline{A} & \\ E_n & E_{m+n} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \overline{b} \\ \overline{d}^{+} \end{pmatrix}, d^{-} = \left(\overline{d}_1^{-}, \overline{d}_2^{-}, \dots, \overline{d}_n^{-}, 0, 0, \dots, 0\right)^{\intercal} \in \mathbb{Z}^{2n+m}.
$$

Шаг 3. Создадим переменные x^*, r и пустой стек S. В переменной x^* будем хранить наилучший допустимый целочисленный план задачи (2). Значение целевой функции задачи (2) на плане x^* будем хранить в переменной r, т.е. $r = c^\intercal x^*$. Поместим в стек S задачу (2) вместе с вектором $\Delta = d^-$.

Шаг 4. Рассмотрим два случая в зависимости от того пустой стек S или нет.

Случай 1. Пусть стек S пустой. Метод завершает свою работу. Если в переменной x^* нет плана, то возвращаем сообщение «задача (1) несовместна». Иначе x^* — это оптимальный план задачи (2) и, в этом случае, возвратим оптимальный план x задачи (1), восстановленный по x^*, следующим образом: для каждого индекса $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$x_i = \begin{cases} x_i^*, & \text{если } \bar{c}_i < 0 \\ -x_i^*, & \text{если } \bar{c}_i \geqslant 0 \end{cases}$$

относительно вектора $\bar{c}$ стоимостей исходной задачи (1).

Случай 2. Пусть стек S непустой. Извлечем из стека S задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} & c^\intercal x + \alpha \to \max \\ & Ax = b \\ & d^- \leqslant x \\ & x \in \mathbb{R}^{2n+m}. \end{aligned}$$

с вектором $\Delta \in \mathbb{Z}^{2n+m}$. Заметим, что вектор d^- не всегда нулевой. Приведем эту задачу к канонической форме

$$\begin{aligned} & c^\intercal x + \alpha' \to \max \\ & Ax = b' \\ & 0 \leqslant x \\ & x \in \mathbb{R}^{2n+m}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\alpha' = \alpha + c^\intercal d^-$, $b' = b - Ad^-$. Построим начальный базисный двойственный план (y, B), в котором $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n}$ и $B = \{j_1 = n+1, j_2 = n+2, \ldots, j_{n+m} = 2n+m\}$. Решим задачу (3) двойственным симплекс-методом и найдем оптимальный план $\widetilde{x}$.

Рассмотрим два случая в зависимости от того является план $\widetilde{x}$ целочисленным или нет.

Случай 1. Пусть план $\widetilde{x}$ целочисленный. По этому плану восстановим допустимый план задачи (2) следующим образом. Прибавим к плану $\widetilde{x}$ вектор Δ. Полученный в результате вектор обозначим через $\hat{x}$. Если в переменной x^* нет плана или $r < c^\intercal \hat{x} + \alpha'$, то запишем в переменную x^* план $\hat{x}$, а в переменную r значение $c^\intercal \hat{x} + \alpha'$.

Случай 2. Пусть план $\widetilde{x}$ дробный. Выберем дробную компоненту $\widetilde{x}_i$ из числа первых n компонент плана $\widetilde{x}$. Если в переменной x^* нет плана или $\lfloor c^\intercal \widetilde{x} + \alpha' \rfloor > r$, то построим две новые задачи линейного программирования

$$\begin{aligned} & c^\intercal x + \alpha' \to \max \\ & Ax = b'' \\ & x \geqslant 0 = d^- \\ & x \in \mathbb{R}^{2n+m}, \end{aligned}$$

где вектор b'' получается из вектора b' заменой $(m+i)$-ой компоненты на $\lfloor \widetilde{x}_i \rfloor$ и

$$\begin{aligned}
&c^{\mathsf{T}} x + \alpha' \to \max\\
&Ax = b'\\
&x \geqslant d^-\\
&x \in \mathbb{R}^{2n+m},
\end{aligned}$$

где d^- — это $(2n+m)$-мерный вектор, который получается из нулевого вектора заменой i-ой компоненты на $\lceil \widetilde{x}_i \rceil$. Обе задачи поместим в стек S вместе с вектором $\Delta + d^-$.

Повторим ШАГ 4.

Проиллюстрируем работу метода ветвей и границ на примере. Рассмотрим задачу целочисленного линейного программирования с двусторонними ограничениями

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 \to \max\\
&5x_1 + 9x_2 \leqslant 63\\
&9x_1 + 5x_2 \leqslant 63\\
&1 \leqslant x_1 \leqslant 6\\
&1 \leqslant x_2 \leqslant 6\\
&x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Число переменных $n = 2$ и число основных ограничений $m = 2$. В векторно-матричном виде задача выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}
&\overline{c}^{\mathsf{T}} \overline{x} \to \max\\
&\overline{A}\overline{x} \leqslant \overline{b}\\
&\overline{d}^- \leqslant \overline{x} \leqslant \overline{d}^+,
\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\overline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{A} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 63 \\ 63 \end{pmatrix}, \overline{d}^- = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{d}^+ = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

ШАГ 1. Обе компоненты вектора $\overline{c}$ положительны. Умножим на -1 векторы $\overline{c}, \overline{d}^-, \overline{d}^+$, а также матрицу $\overline{A}$. Компоненты вектора $\overline{d}^-$ заменим на компоненты вектора $\overline{d}^+$, а компоненты вектора $\overline{d}^+$ заменим на компоненты вектора $\overline{d}^-$

$$\overline{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{A} = \begin{pmatrix} -5 & -9 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}, \overline{d}^- = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \overline{d}^+ = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

ШАГ 2. Отбросим условия целочисленности на переменные и приведем полученную задачу линейного программирования к канонической форме без учета ограничений неотрицательности

$$\begin{aligned}
&c^{\mathsf{T}} x + \alpha \to \max\\
&Ax = b\\
&d^- \leqslant x\\
&x \in \mathbb{R}^6,
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -5 & -9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 63 \\ 63 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, d^- = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Создадим переменные x^*, r и пустой стек S. Добавим в стек S задачу (5) вместе с вектором $\Delta = d^- = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\intercal$.

Шаг 4 (итерация 1). Извлечем из стека S задачу с вектором Δ — задачу (5) вместе с вектором Δ. Преобразуем задачу в задачу

$$\begin{aligned} & c^\intercal x + \alpha' \to \max \\ & Ax = b' \\ & 0 \leqslant x \\ & x \in \mathbb{R}^6, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\alpha' = \alpha + c^\intercal d^- = 0 + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\intercal \cdot \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\intercal = 12,$$

$$b' = b - Ad^- = \begin{pmatrix} 63 \\ 63 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & -9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ -21 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Изготовим начальный базисный двойственный план (y, B), где

$$y^\intercal = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \{j_1 = 3, j_2 = 4, j_3 = 5, j_4 = 6\}.$$

Решим задачу (6) двойственным симплекс-методом. Оптимальный план задачи (6)

$$\widetilde{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}^\intercal.$$

Этот план не целочисленный. Выберем в нем дробную компоненту

$$\widetilde{x}_2 = \frac{3}{2}.$$

Округлим ее в ме́ньшую и бо́льшую стороны

$$\lfloor \widetilde{x}_2 \rfloor = 1, \lceil \widetilde{x}_2 \rceil = 2.$$

В переменной x^* нет плана. Породим две новые задачи

$$\begin{aligned} & c^\intercal x + \alpha' \to \max \\ & Ax = b'' \\ & d^- = 0 \leqslant x \\ & x \in \mathbb{R}^6, \end{aligned} \tag{7}$$

где $b'' = \begin{pmatrix}-21 & -21 & 5 & 1\end{pmatrix}^\intercal$ и

$$\begin{aligned} & c^\intercal x + \alpha' \to \max \\ & Ax = b' \\ & d^- \leqslant x \\ & x \in \mathbb{R}^6, \end{aligned} \tag{8}$$

где $d^- = \begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\intercal$. Добавим в стек S задачу (7) с вектором $\Delta + d^- = \begin{pmatrix}-6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\intercal + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\intercal = \begin{pmatrix}-6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\intercal$ и задачу (8) с вектором $\Delta + d^- = \begin{pmatrix}-6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\intercal + \begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\intercal = \begin{pmatrix}-6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\intercal$.

Шаг 4 (итерация 2). Стек S непустой. Извлечем задачу из стека S с вектором Δ — задачу (8) с вектором $\Delta = \begin{pmatrix}-6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\intercal$. Приведем эту задачу в каноническую форму

$$\begin{aligned} & c^\intercal x + \alpha'' \to \max \\ & Ax = b'' \\ & 0 \leqslant x \\ & x \in \mathbb{R}^6, \end{aligned}$$

где

$$\alpha'' = \alpha' + c^\intercal d^- = 12 + \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\intercal = 10.$$

$$b'' = b' - Ad^- = \begin{pmatrix}-21 \\ -21 \\ 5 \\ 5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5 & -9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 \\ -11 \\ 5 \\ 3\end{pmatrix}.$$

Построим начальный базисный двойственный план (y, B)

$$y^\intercal = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, B = \{j_1 = 3, j_2 = 4, j_3 = 5, j_4 = 6\}.$$

Решим задачу двойственным симплекс-методом. Оптимальный план задачи

$$\widetilde{x} = \begin{pmatrix}\frac{11}{9} & 0 & \frac{28}{9} & 0 & \frac{34}{9} & 3\end{pmatrix}^\intercal.$$

План не целочисленный. Выберем дробную компоненту

$$\widetilde{x}_1 = \frac{11}{9}.$$

Округлим в ме́ньшую и бо́льшую стороны

$$\lfloor \widetilde{x}_1 \rfloor = 1, \lceil \widetilde{x}_2 \rceil = 2.$$

Породим две новые задачи

$$\begin{aligned} & c^\intercal x + \alpha'' \to \max \\ & Ax = b''' \\ & d^- = 0 \leqslant x \\ & x \in \mathbb{R}^6, \end{aligned} \tag{9}$$

где $b''' = \begin{pmatrix}-3 & -11 & 1 & 3\end{pmatrix}^\intercal$ и

$$\begin{aligned} & c^\intercal x + \alpha'' \to \max \\ & Ax = b'' \\ & d^- \leqslant x \\ & x \in \mathbb{R}^6, \end{aligned} \tag{10}$$

где $d^- = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\intercal$. Добавим в стек S задачу (9) с вектором $\Delta + d^- = \begin{pmatrix}-6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\intercal + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\intercal = \begin{pmatrix}-6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\intercal$ и задачу (10) с вектором $\Delta + d^- = \begin{pmatrix}-6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\intercal + \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\intercal = \begin{pmatrix}-4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\intercal$.

Шаг 4 (итерация 3). Стек S непустой. Извлечем задачу из стека S — задачу (10) вместе с вектором $\Delta = \begin{pmatrix}-4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\intercal$. Приведем эту задачу в каноническую форму

$$\begin{aligned} & c^\intercal x + \alpha''' \to \max \\ & Ax = b''' \\ & 0 \leqslant x \\ & x \in \mathbb{R}^6, \end{aligned}$$

где

$$\alpha''' = \alpha'' + c^\intercal d^- = 10 + \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\intercal = 8.$$

$$b''' = b'' - Ad^- = \begin{pmatrix}-3 \\ -11 \\ 5 \\ 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5 & -9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 \\ 7 \\ 3 \\ 3\end{pmatrix}.$$

Построим начальный базисный двойственный план (y, B)

$$y^\intercal = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, B = \{j_1 = 3, j_2 = 4, j_3 = 5, j_4 = 6\}.$$

Решим задачу двойственным симплекс-методом. Оптимальный план задачи

$$\widetilde{x} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 7 & 7 & 3 & 3\end{pmatrix}^\intercal.$$

План целочисленный. Построим допустимый целочисленный план задачи (5). Прибавим к $\widetilde{x}$ вектор Δ и результат сохраним в переменную x^*

$$x^* = \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 7 \\ 7 \\ 3 \\ 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 \\ -4 \\ 7 \\ 7 \\ 3 \\ 3\end{pmatrix}.$$

Сохраним в переменной r значение целевой функции на плане $\widetilde{x}$

$$r = c^\intercal \widetilde{x} + \alpha''' = 8.$$

Шаг 4 (итерация 4). Стек S непустой. Из стека S извлечем задачу с соответствующим вектором Δ — задачу (9) с вектором Δ. Построим начальный базисный двойственный план (y, B)

$$y^{\intercal} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \{j_1 = 3, j_2 = 4, j_3 = 5, j_4 = 6\}.$$

Решим задачу двойственным симплекс-методом. Оптимальный план задачи

$$\widetilde{x} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{19}{5} & 0 & 0 & \frac{13}{5} \end{pmatrix}^{\intercal}.$$

Проверим условие $\lfloor c^{\intercal}\widetilde{x} + \alpha'' \rfloor > r$. Это условие не выполняется

$$\lfloor c^{\intercal}\widetilde{x} + \alpha'' \rfloor = 8r = 8.$$

Шаг 4 (итерация 5). Стек S непустой. Извлечем задачу с вектором Δ из стека S. Получим задачу (7). Построим начальный базисный двойственный план (y, B)

$$y^{\intercal} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \{j_1 = 3, j_2 = 4, j_3 = 5, j_4 = 6\}.$$

Решим задачу двойственным симплекс-методом. Оптимальный план задачи

$$\widetilde{x} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} & 1 & 0 & \frac{28}{5} & \frac{13}{5} & 0 \end{pmatrix}^{\intercal}.$$

Проверим условие $\lfloor c^{\intercal}\widetilde{x} + \alpha'' \rfloor > r$. Это условие не выполняется

$$\lfloor c^{\intercal}\widetilde{x} + \alpha'' \rfloor = 8r = 8.$$

Шаг 5 (итерация 4). Стек S пустой. По плану $x^* = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 7 & 7 & 3 & 3 \end{pmatrix}^{\intercal}$ восстановим оптимальный план исходной задачи. Так как в векторе c из задачи (4) обе компоненты положительные, то оптимальный план задачи (4) — план $(4, 4)$.