«Матричные игры»

Введение

Теория игр изучает принципы принятия решений игроками в играх, в которых решение, принятое одним игроком, оказывает влияние на решения остальных игроков. Примеры: шахматы; карточные игры; камень, ножницы и бумага.

Для того, чтобы задать игру в нормальной форме, необходимо:

а) указать множество игроков, участвующих в игре;

б) указать множество возможных стратегий каждого игрока;

в) указать выигрыш, которую получает каждый игрок при всех возможных исходах игры;

Будем использовать следующие обозначения:

$I = \{1, 2, \dots , n\}$ – множество игроков, S_i – множество (чистых) стратегий i-го игрока.

Каждый игрок выбирает одну стратегию из своего множества стратегий. Получаем набор выбранных стратегий $(s_1, s_2, \dots , s_n)$. После того как каждый игрок определился со стратегией можно найти исход игры. Исход игры – это вектор $(u_1, u_2, \dots , u_n)$, в котором u_i – это прибыль i-го игрока.

Пример. Рассмотрим игру, в которой два участника – муж (h) и жена (w). Муж желает посмотреть футбол, а жена – балет. Жена и муж желают провести вечер вместе. Итак, $I = \{h, w\}$, где h – муж, а w – жена. У каждого из игроков есть две возможные стратегии $S_h = S_w = \{$*балет*, *футбол*$\}$. Здесь есть четыре возможные конфигурации стратегий: (*футбол*, *футбол*), (*футбол, балет*), (*балет, футбол*), (*балет, балет*). В каждой паре первая стратегия – стратегия мужа, а вторая стратегия – стратегия жены. Теперь необходимо определить выигрыши каждого игрока в каждой возможной паре стратегий. Эту ситуацию можно представить в виде матрицы, в которой строки соответствуют стратегиям мужа, а столбцы соответствуют стратегиям жены. На пересечении строки и столбца записываем выигрыши, которые получают игроки, выбрав соответствующие стратегии. Матрица выигрышей имеет вид

	балет	*футбол*
балет	5 / 4	1 / 1
футбол	0 / 0	4 / 5

Каждый из игроков стремится выбрать ту стратегию, которая принесет ему максимальный выигрыш.

Доминирующие стратегии. Равновесия в терминах доминирования.

Рассмотрим игру с двумя игроками. Матрица выигрышей в этой игре имеет вид

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	2 / 7	3 / 2	7 / 5	5 / 6
a_2	1 / 9	2 / 8	5 / 4	3 / 0

Мы играем за первого игрока. Априори мы не знаем какую стратегию второй игрок. Поэтому рассмотрим все возможные стратегии второго игрока. Пусть второй игрок выбрал первую стратегию b_1. Какую стратегию выберет первый игрок, желая максимизировать выигрыш? Первую стратегию a_1. Нетрудно видеть, что какую бы стратегию не выбрал второй игрок, наилучшим ответом первого игрока является стратегия a_1. Такие стратегии называются *доминирующими*.

Поиграем теперь за второго игрока. Мы знаем, что первый игрок будет играть стратегию a_1. Естественно второй игрок выберет стратегию b_1, поскольку именно она принесет ему максимальный выигрыш в этой ситуации. Предположим, что первый игрок вместо стратегии a_1 сыграл стратегию a_2. Заметим, что и в этом случае, наибольший выигрыш второй игрок получит, выбрав ту же стратегию b_1. Нетрудно видеть, что стратегия b_1 является доминирующей для второго игрока.

Конфигурация стратегий $(s_1, s_2, \dots , s_n)$ называется *равновесием в доминирующих стратегиях*, если каждая стратегия s_i – доминирующая стратегия i-го игрока.

Таким образом, для рассмотренной выше игры пара стратегий (a_1, b_1) – равновесие в доминирующих стратегиях.

Не все игры имеют равновесие в доминирующих стратегиях. Рассмотрим игру

	b_1	b_2	b_3
a_1	6 / 5	3 / 6	3 / 9
a_2	7 / 7	3 / 0	4 / 1

У второго игрока нет доминирующей стратегии.

Посмотрим на стратегии второго игрока – стратегии b_2 и b_3. Заметим, что как бы не играл первый игрок, второй игрок, выбирая стратегию b_3, получит больший выигрыш, чем при выборе стратегии b_2. В этом случае мы говорим, что стратегия b_2 доминируется стратегией b_3. Заметим также, что стратегия a_1 доминируется стратегией a_2. Стратегии, которые доминируются другими стратегиями можно исключить

	b_1	b_3
a_1	6 / 5	3 / 9
a_2	7 / 7	4 / 1

	b_1	b_3
a_2	7 / 7	4 / 1

	b_1
a_2	7 / 7

Пара стратегий (a_2, b_1) называется *равновесием, полученным исключением доминируемых стратегий*.

Равновесие по Нэшу

Рассмотрим матрицу игры

	балет	*футбол*
балет	5 / 4	1 / 1
футбол	0 / 0	4 / 5

Супруга играет оптимальную стратегию (стратегию, приносящую максимальный выигрыш) в ответ на стратегию мужа. Муж играет оптимальную стратегию в ответ на стратегию жены. Все пары стратегий мужа и жены можно разбить на два типа. Первый тип пар стратегий составляют пары стратегий, в которых каждый игрок играет оптимально. Второй тип пар стратегий – пары стратегий, в которых хотя бы один игрок играет не оптимально. Например, рассмотрим пару стратегий (*футбол*, *футбол*). Эта пара относится к первому типу. Действительно, изменение стратегии одного любого игрока (при фиксированной стратегии другого) приводит к уменьшению его выигрыша. Пара стратегий (*футбол*, *балет*) относится ко второму типу. В самом деле, если любой один игрок изменит свою текущую стратегию, то он получит больший выигрыш.

Стратегии первого типа называются равновесиями по Нэшу. Формально говоря, конфигурация стратегий (s_1, s_2, … , s_n) называется *равновесием по Нэшу*, если для любого игрока и для любой его стратегии выполняется следующее условие: если игрок играет стратегию из этой конфигурации, то он получает не меньший выигрыш, чем если он отклонится и сыграет другую стратегию при условии, что все остальные игроки продолжают играть те же самые стратегии. Другими словами, равновесие по Нэшу – это такая конфигурация стратегий, что ни одному из игроков не выгодно отклониться и сыграть другую стратегию при фиксированных стратегиях других игроков.

Рассмотрим алгоритм поиска равновесий по Нэшу:

Шаг 1. Для каждой стратегии второго игрока пометим точками наилучшие ответы первого игрока.

Шаг 2. Для каждой стратегии первого игрока пометим звездочками наилучшие ответы второго игрока.

Шаг 3. Пары стратегий, которые оказались помечены и точками, и звездочками возвращаем в качестве ответа (эти и только эти пары стратегий являются равновесиями по Нэшу).

Пример.

	t_1	t_2
s_1	1. / 1*	2. / 0
s_2	0 / 2 *	1 / 1

Смешанные стратегии

Допустим нам предложили сыграть в лотерею. В этой лотерее с вероятностью ½ мы выигрываем 5 руб. и с вероятностью ½ мы проигрываем 5 руб. Какую сумму мы будем выигрывать в среднем?

Для того, чтобы рассчитать ожидаемый выигрыш игрока в лотерею, необходимо каждый возможный выигрыш игрока умножить на вероятность, с которой этот выигрыш реализуется, а затем сложить полученные произведения. Ожидаемый выигрыш в нашей лотерее

$$\frac{1}{2}\cdot 5+\frac{1}{2}\cdot(-5)=0\,.$$

Рассмотрим другую лотерею, в которой мы получаем 10 руб. с вероятностью ½ и 30 руб. с вероятностью 1/3 и 1200 руб. с вероятностью 1/6. Чему равен ожидаемый выигрыш? Сложим произведения выигрышей на вероятности их реализаций

$$\frac{1}{2}\cdot 10+\frac{1}{3}\cdot 30+\frac{1}{6}\cdot 1200=5+10+200=215\,.$$

Выигрыши в лотереях – это пример дискретной случайной величины. Дадим определение понятию математического ожидания дискретной случайной величины. Пусть случайная величина X принимает значения x_1, x_2, … , x_n с вероятностями p_1, p_2, … , p_n, соответственно, при этом $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Тогда математическое ожидание случайной величины X – это число

$$E(X)=p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2+\ldots+p_n\cdot x_n\,.$$

Рассмотрим игру «Орлянка», в которую играют два игрока Вася и Петя. Каждый из игроков независимо друг от друга пишет на бумаге одно из двух слов: «*орел*» или «*решка*». Затем происходит сравнение выборов игроков. Если на бумажках написаны одинаковые слова, то побеждает Вася, а если разные, то побеждает Петя. Предположим, что они играют на один рубль. В этой игре у каждого игрока есть по две чистые стратегии: «О» – написать слово «*орел*» и «Р» – написать на бумажке «*решка*». Матрица выигрышей устроена так

Вася \ Петя	«О»	«Р»
«О»	1 / -1	-1 / 1
«Р»	-1 / 1	1 / -1

Рассмотрим отдельные профили в этой игре.

Если ребята написали разные слова, то по условию игры выигрывает Петя. Но в этом случае Васе выгодно отклонится и написать такое же слово, что и Петя и победить. Если ребята написали одинаковые слова, то Пете было бы выгодно отклониться и записать слово отличное от слова Васи. Стало быть, равновесия в чистых стратегиях в этой игре нет.

Рассмотрим следующую ситуацию. Предположим, что Вася и Петя договорились сыграть в эту игру сто раз подряд. Какую стратегию поведения выбрать, например, Васе? Если Вася все время будет играть стратегию «О», то рано или поздно Петя разгадает его план и найдет выигрышную для себя стратегию. Стало быть, сто раз писать слово «орел» не является оптимальной стратегией Васи. Поэтому, чтобы запутать соперника Вася взял шестигранный кубик и перед каждым раундом игры подкидывает его. Он решил, если на кубике выпадает число от 1 до 4, то он пишет слово «орел». Если же на кубике выпадает число 5 или 6, то он пишет слово «решка».

Как поступать второму игроку Пете? Пете также нельзя каждый раз писать одно и то же слово, поскольку Вася сможет разгадать план Пети. Поэтому Петя поступил следующим образом. Он взял сто бумажек и на пятидесяти из них написал слово «орел», а на других пятидесяти написал слово «решка». Перед каждым раундом игры он вытаскивает одну единственную бумажку с определенной стратегией и эту стратегию играет, после чего бумажку возвращает назад.

На какие ожидаемые выигрыши могут рассчитывать ребята? Петя с вероятностью ½ напишет слово «орел» и с вероятностью ½ напишет слово «решка». Вася в четырех случаях из шести напишет слово «орел» и в двух случаях из шести напишет слово «решка». Вообще говоря, раунды игры будут завершаться в разных исходах. Выигрыш Васи и выигрыш Пети являются дискретными случайными величинами. Мы будем ориентироваться на принятие решения Васи и Пети, исходя из предположения, что они максимизируют свой ожидаемый выигрыш. С какой вероятностью будет сыгран каждый из профилей стратегий?

Игра в одном раунде завершится в профиле (*орел*, *орел*) с вероятностью

$$\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

Матрица вероятностей имеет вид

		Петя	
		«О»	«Р»
Вася	«О»	$\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$	$\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$
	«Р»	$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

С какой вероятностью ребята напишут одинаковые слова, т.е. с какой вероятностью один раунд игры закончится в профиле (*орел, орел*) или (*решка, решка*)? Ответ

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

Вероятность того, что они напишут разные слова

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

Подсчитаем ожидаемый выигрыш Васи. С вероятностью ½ ребята напишут одинаковые слова, и Вася выиграет. С вероятностью ½ ребята напишут разные слова, и Вася проиграет. Значит ожидаемый выигрыш Васи равен

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot(-1)=0.$$

В среднем Вася будет получать выигрыш в нулевом размере.

Подсчитаем ожидаемый выигрыш Пети. С вероятностью ½ ребята напишут одинаковые слова, и Петя проиграет. С вероятностью ½ ребята напишут разные слова, и Петя выиграет. Значит ожидаемый выигрыш Пети равен

$$\frac{1}{2}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot 1=0.$$

В среднем выигрыш Пети составит 0 единиц.

Стратегии, выбранные Петей и Васей отличаются от чистых стратегий. Ранее мы запрещали игрокам использовать кубик при принятии решений. Теперь же Петя смешивает две свои стратегии с весами ½ и ½, а Вася смешивает две свои стратегии с весами 2/3 и 1/3. Тем самым мы расширили чистые стратегии каждого из двух игроков. Такие стратегии, которые использовали сейчас Вася и Петя, называются *смешанными*. Дадим формальное определение.

Определение. Пусть $S = \{s_1, s_2, \dots , s_n\}$ – множество чистых стратегий игрока. Для любых чисел $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ таких, что $0\le\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\le 1$ и $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=1$, стратегия вида

$$\begin{cases} s_1 \text{ играем с вероятностью } \alpha_1 \\ s_2 \text{ играем с вероятностью } \alpha_2 \\ \dots \\ s_n \text{ играем с вероятностью } \alpha_n \end{cases}$$

называется *смешанной стратегией игрока*. Обозначать смешанную стратегию игрока будем так

$$\alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2+...+\alpha_n s_n.$$

Интерпретировать смешанную стратегию можно так. Перед тем как выбрать чистую стратегию игрок берет генератор случайных чисел, который с вероятностью α_1 «говорит» играть стратегию s_1, с вероятностью α_2 – стратегию s_n, с вероятностью α_n – стратегию s_n.

Вернемся к примеру с «Орлянкой». Мы рассматривали смешанную стратегию Пети

$$\frac{1}{2}O+\frac{1}{2}P$$

и смешанную стратегию Васи

$$\frac{2}{3}O+\frac{1}{3}P.$$

Представим себе, что в общем случае Вася играет смешанную стратегию

$$\alpha O+(1-\alpha)P$$

(с вероятностью α игрок играет стратегию O и с вероятность $(1 - \alpha)$ играет стратегию P), а Петя играет смешанную стратегию

$$\beta O+(1-\beta)P.$$

Подсчитаем средний выигрыш Васи. Вероятность того, что игра закончится в профиле (*орел, орел*) равна $\alpha\beta$ и в профиле (*решка, решка*) – $(1-\alpha)(1-\beta)$. Вероятность того, что участники игры напишут одинаковые слова и Вася выиграет равно

$$\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta).$$

Вероятность того, что игра закончится в профиле (*орел, решка*) равна $\alpha(1-\beta)$. Вероятность того, что игра закончится в профиле (*решка, орел*) равна $(1-\alpha)\beta$. Вероятность того, что игроки напишут разные слова и Вася проиграет равна

$$\alpha(1-\beta)+(1-\alpha)\beta.$$

Математическое ожидание выигрыша Васи

$$EB(\alpha,\beta)=1(\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta))+(-1)(\alpha(1-\beta)+(1-\alpha)\beta).$$

Аналогично, можно найти математическое ожидание выигрыша Пети

$$EP(\alpha,\beta)=(-1)(\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta))+1(\alpha(1-\beta)+(1-\alpha)\beta).$$

Ранее мы рассмотрели смешанные стратегии для Васи и Пети, в которых $\alpha=2/3$ и $\beta=1/2$. Эти стратегии давали выигрыши, равные 0.

Зададимся вопросом: оптимальные ли эти смешанные стратегии Васи и Пети или же есть другие смешанные стратегии, которые дают бóльшие средние выигрыши? Пусть Вася играет другую смешанную стратегию

$$\frac{1}{3}O+\frac{2}{3}P\ \ (\alpha=1/3)$$

а Петя продолжает играет ту же стратегию

$$\frac{1}{2}O+\frac{1}{2}P\ \ (\beta=1/2)$$

Ожидаемый выигрыш Васи равен 0. Ожидаемый выигрыш Васи не изменился. Можно доказать, что если Петя играет стратегию ½ O + ½ P, то какую бы стратегию не выбрал Вася его средний выигрыш не больше 0. Может ли Петя улучшить свою стратегию? Да. Вася играет прежнюю свою стратегию, а Петя играет стратегию $1O + 0P$ ($\beta=1$). Ожидаемый выигрыш Пети составляет $1/3 > 0$.

Пусть Вася играет некоторую смешанную стратегию

$$\alpha O+(1-\alpha)P$$

Петя играет некоторую смешанную стратегию

$$\beta O+(1-\beta)P.$$

Пара смешанных стратегий $\alpha^*O+(1-\alpha^*)P$ и $\beta^*O+(1-\beta^*)P$ образуют *равновесие по Нэшу*, если ни одному из игроков не выгодно отклониться и сыграть другую смешанную стратегию при фиксированной стратегии другого игрока, т.е.

$$\begin{cases} EB(\alpha,\beta^*)\le EB(\alpha^*,\beta^*) \text{ для любого } \alpha\in[0,1] \\ EP(\alpha^*,\beta)\le EP(\alpha^*,\beta^*) \text{ для любого } \beta\in[0,1] \end{cases} \qquad (*)$$

«Орлянка» является матричной игрой с нулевой суммой, т.е. при любом исходе игры сумма выигрыша Васи и выигрыша Пети равна 0 и, в частности,

$$EB(\alpha^*,\beta^*)+EP(\alpha^*,\beta^*)=0\,.$$

Учитывая это, комплект неравенств (*) равносильным образом можно переписать так

$$EB(\alpha,\beta^*)\le EB(\alpha^*,\beta^*)=-EP(\alpha^*,\beta^*)\le -EP(\alpha^*,\beta)\,.$$

Обозначим $v=EB(\alpha^*,\beta^*)=-EP(\alpha^*,\beta^*)$. Нахождение равновесия по Нэшу сводится к задаче нахождения α^*,β^*,v таких, что

$$\begin{array}{l} v\to\min \\ EB(0,\beta^*)\le v \\ EB(1,\beta^*)\le v \\ 0\le\beta^*\le 1 \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{l} v\to\max \\ -EP(\alpha^*,0)\ge v \\ -EP(\alpha^*,1)\ge v \\ 0\le\alpha^*\le 1 \end{array}.$$