Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»
Кафедра информатики

Отчет по лабораторной работе №12
Решение краевых задач методом разностных аппроксимаций

Выполнил:
студент гр. 953501
Кореневский С. А.

Руководитель:
доцент
Анисимов В. Я

Минск 2021

Содержание

Цель работы:

• изучить метод разностных аппроксимаций, составить алгоритм метода

и программу их реализации, получить численное решение заданной краевой задачи;

• составить алгоритм решения краевых задач указанными методами, применимыми для организации вычислений на ПЭВМ;

• составить программу решения краевых задач по разработанному алгоритму;

• выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ.

Краткие теоретические сведения:

Разностный метод решения краевых задач

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \ x \in [a, b], \\ y(a) = A, \\ y(b) = B. \end{cases} \qquad (2.6)$$

Разобьем отрезок [*a, b*] на *n* одинаковых частей с шагом $h = \frac{b-a}{n}$ точками:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Заменим производные на разностные отношения

$$y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{2h},$$

$$y''(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}, \qquad k = \overline{1, n-1},$$

где $y_k = y(x_k)$.

Получим для любого внутреннего узла x_k, $k = \overline{1, n-1}$ уравнение

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = f\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}\right) \qquad 2.7)$$

и для граничных узлов

$$y_0 = A, \qquad y_n = B.$$

То есть, мы имеем систему из $(n+1)$ уравнений с $(n+1)$ неизвестными y_k. Ее решение дает нам приближенное решение краевой задачи. Рассмотрим частный случай линейной краевой задачи:

$$y'' - p(x)y = f(x), \qquad p(x) > 0, \qquad a \le x \le b, \tag{2.8}$$

$$y(a) = A \quad , \qquad y(b) = B.$$

В этом случае получаем

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} - p(x_k)y_k = f(x_k), \qquad k = \overline{1, n-1}, \tag{2.9}$$

$$y_0 = A, \qquad y_n = B.$$

Домножая (2.9) на h^2, получим трехдиагональную систему линейных уравнений

$$y_{k-1} - (2 + h^2 p(x_k))y_k + y_{k+1} = h^2 f(x_k), \qquad k = \overline{1, n-1},$$

в которой выполнено условие преобладания диагональных элементов

$$2 + p(x_k) > 1 + 1.$$

Такая система легко решается методом прогонки.

3. Программная реализация

Задача 1. Составить разностную схему и получить численное решение краевой задачи с точностью 10^{-3}

$$ay'' + (1 + bx^2)y = -1, \qquad -1 \le x \le 1,$$

Исходные данные:

$$a = \sin(k), b = \cos(k),$$

где *k*-номер варианта.

Граничные условия выбрать однородными:

$$y(-1) = 0,$$
$$y(1) = 0.$$

Задача 2. Найти приближенное решение краевой задачи методом конечных разностей:

$$\begin{cases} u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad x \in (a,b), \\ u(a) = UA, \quad u(b) = UB. \end{cases}$$

с заданной точностью ε и построить его график. Исходные данные указаны в таблице 2.1.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ

1. Составить разностную схему второго порядка точности и выписать коэффициенты матрицы системы уравнений и коэффициенты правой части.

2. Подготовить тестовый пример и провести расчет для него. Построить на одном чертеже графики приближенного и точного решений для тестового примера. После проверки правильности работы программы перейти к решению основной задачи.

3. Для отыскания решения задачи с заданной точностью произвести расчет с начальным шагом *h*, затем уменьшить шаг вдвое. Вывести на экран два соседних приближенных решения и сравнить результаты. Если заданная точность не достигнута, то продолжить уменьшение шага.

4. Построить график найденного решения и указать шаг, при котором заданная точность достигается.

Задача 3. Методом конечных разностей найти приближенное решение указанной в индивидуальном варианте краевой задачи смотри таблицу 2.4 с точностью ε и построить его график. Решение системы разностных уравнений найти, используя метод прогонки.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ

1. Использовать разностную схему второго порядка точности. Для аппроксимации производных в граничных условиях воспользоваться разностными отношениями:

$$y_0' = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} \quad \text{и} \quad y_n' = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h}.$$

2. Организовать компактное хранение ненулевых элементов трехдиагональной матрицы системы разностных уравнений.

3. Подготовить самостоятельно тестовый пример и провести расчет для него. Построить на одном чертеже графики приближенного и точного решений для тестового примера. После проверки правильности работы программы перейти к решению основной задачи.

Задача 4. Методом конечных разностей найти приближенное решение краевой задачи с тремя верными значащими цифрами. Решение системы разностных уравнений найти, используя метод прогонки. Исходные данные указаны в таблице 2.3.

$$\begin{cases} -(k(x)u')' + q(x)u = f(x), \quad x \in (a,b), \\ -k(a)u'(a) + 0.5u(a) = 0, \\ \ \ k(b)u'(b) + 0.5u(b) = 0. \end{cases}$$

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ

a. 1.Использовать разностную схему второго порядка точности.

b. 2.При аппроксимации производных в граничных условиях использовать метод баланса.

Исходные данные к задаче № 2

№ задания	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	a	b	U_A	U_B	ε
2.2.5	$\ln(1+x)$	$10/(1+x)$	$x+9/(1+x)$	0	2	5	0	0.01

Исходные данные к задаче № 3

№ задания	*Задача*	ε
2.3.3	$u''-0.5u'+0.5xu=2x$ $u'(1)=0.5$ $2u(3)-u'(3)=2$	0.05

Исходные данные к задаче № 4

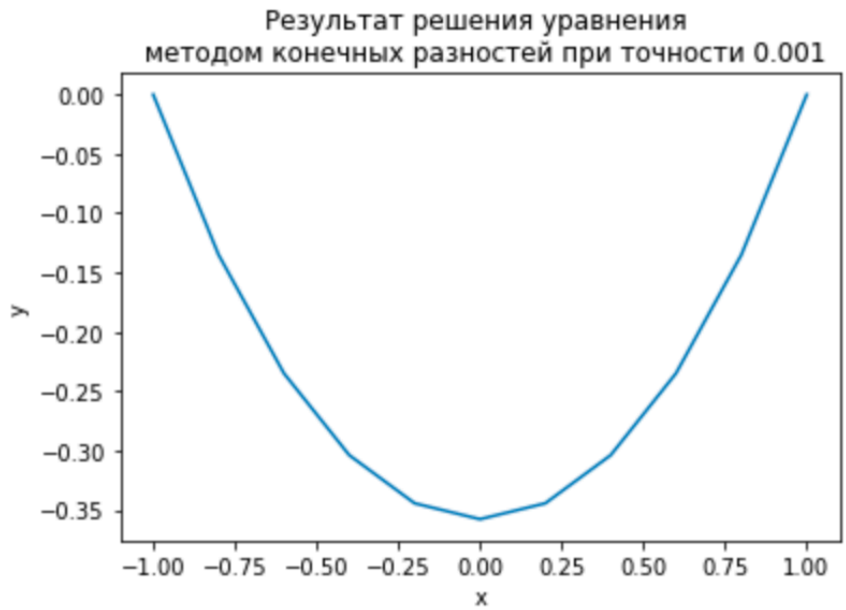
№ задания	a	b	c	$k(x)$		$q(x)$		$f(x)$
				$a<x<c$	$c<x<b$	$a<x<c$	$c<x<b$	
2.4.5	0	2.5	1.875	1.2	0.5	8.3	3.5	$9/(1+0.5x^2)$

Результат работы программы:

Решение задачи №1

Функции для инициализации решения примут вид

$p(x) = 0$, $q(x) = \dfrac{1 + b * x^2}{a} = \dfrac{1 + \cos 5 * x^2}{\sin 5}$, $f(x) = \dfrac{-1}{a} = \dfrac{-1}{\sin 5}$



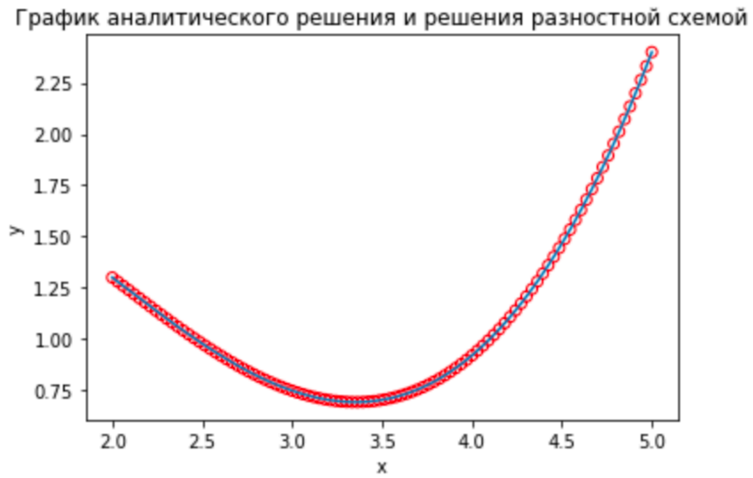
Точность ε = 0.001; Шаг h = 0.2; Ошибка err = 0.0007782670165997208

Решение задачи №2

Тестовый пример

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 1, x \in (2, 5)$$
$$y(2) = 1.3$$
$$y(5) = 2.4$$

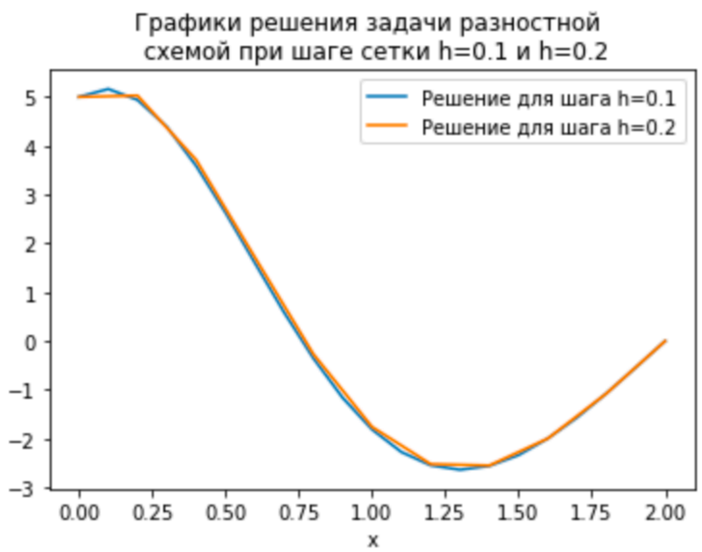
$$y(x) = -1.227x^2 + 3.468x + x^2(\ln x - 1) + \frac{1}{2}$$

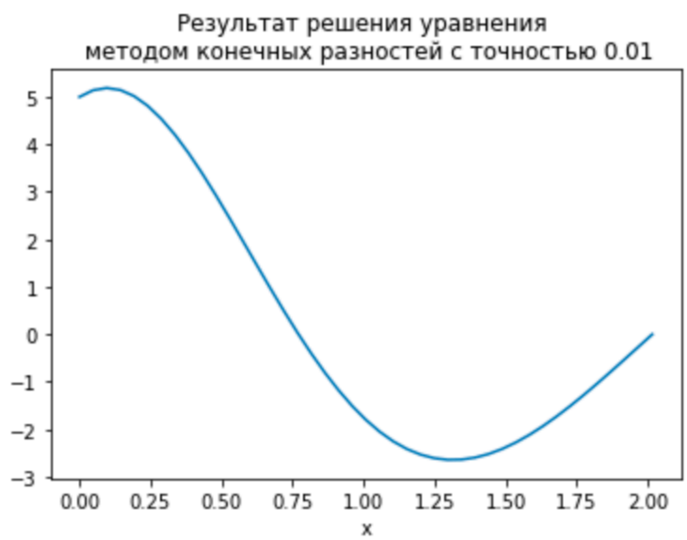



```
Ошибка для тестового примера 9.587405519007053e-05
```

Решение задания

$$p(x) = \ln(1+x)$$
$$q(x) = \frac{10}{1+x}$$
$$f(x) = \frac{9}{1+x} + x$$
$$a = 0, b = 2$$
$$U_a = 5, U_b = 0$$






```
Шаг, при котором достигается точность порядка 0.01, равен h=0.047999999999999376,
при этом ошибка равна error=0.00928656915896268
```

Решение задачи №3

$$y_0' = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}$$

$$y_n' = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h}$$

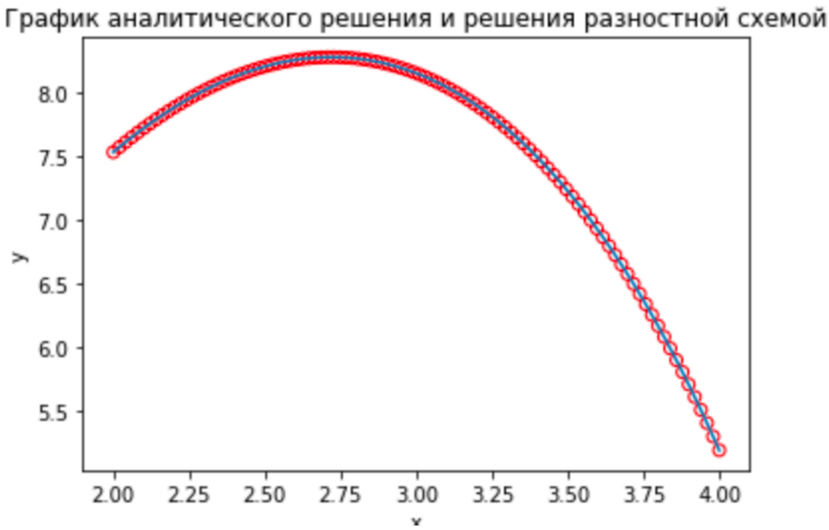
Тестовый пример

$$(x-1)\,y'' - xy' + y = (x-1)^2, 2 \le x \le 4$$

$$y'(2) = 2$$

$$y'(4) + 2y(4) = 5$$

$$y(x) = -0.072e^x + 7.532x - x^2 - x - 1$$



Ошибка для тестового примера 0.0010788749297834244

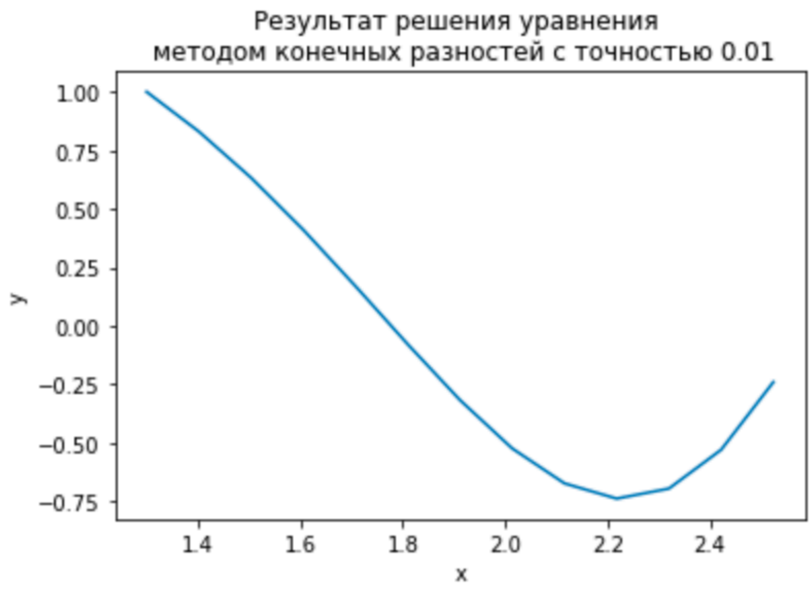
Теперь рассмотрим краевую задачу третьего рода указанного в задании.

$$u'' - u' + 2x^2 u = x + 1$$

$$u(1.3) = 1$$

$$u(2.4) + u'(2.4) = 3.2$$

Шаг, при котором достигается точность порядка 0.01, равен h=0.10199999999999954, при этом ошибка равна error=0.009969148690432306



Решение задачи №4

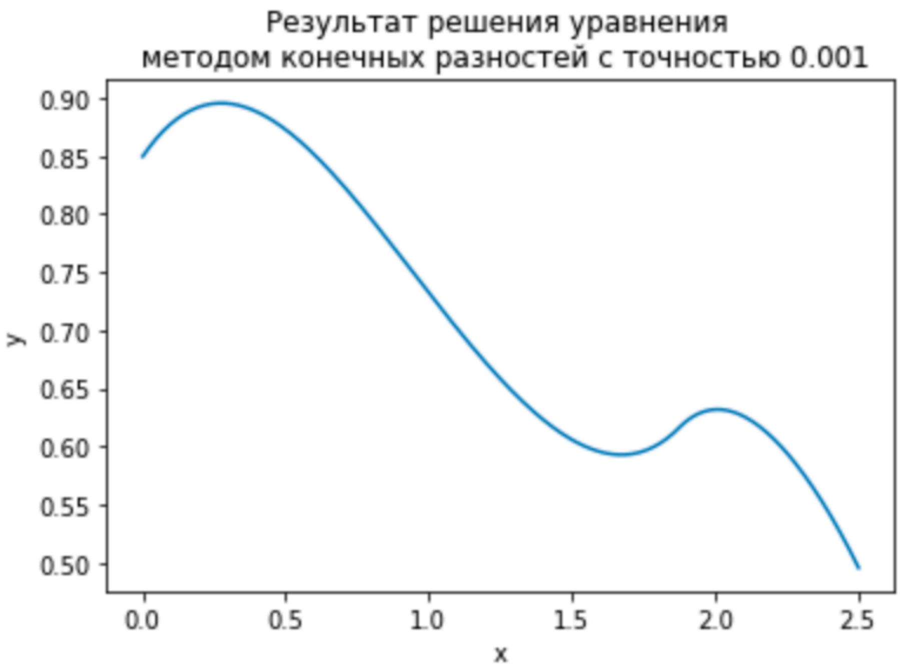
$a = 0, b = 2.5, c = 1.875$

$$k(x) = \begin{cases} 1.2, x \in (a, c) \\ 0.5, x \in (c, b) \end{cases}$$

$$q(x) = \begin{cases} 8.3, x \in (a, c) \\ 3.5, x \in (c, b) \end{cases}$$

$$f(x) = 9/(1 + 0.5x^2)$$

```
Шаг, при котором достигается точность порядка 0.001, равен h=0.007999999999999341,
 при этом ошибка равна error=0.0008735386495066036
```



4. Выводы

В ходе лабораторной работы мы изучили методы разностных аппроксимаций с вторым порядком точности для краевых задач первого и третьего рода. В результате чего получили численно решение заданных краевых задач с заданными точностями и посчитали ошибку. Рассмотрев решения с различным шагом h, удостоверились что порядок решения данных разностных схем $O(h^2)$.

Сравнив результат работы программы с аналитическим решением на тестовых примерах, можно сделать вывод, что программный продукт работает корректно.