Конспекти лекцій з математичного аналізу Анікушина А.В. Модуль 4.

Автор тексту @vic778
Якщо знайшли помилки, пишіть мені в телеграм

A special thanks to @bezkorstanislav without whom these lecture notes would never have been created

January - February 2020

Інтеграл Ньютона-Лейбніца

Означення. Нехай $I = (a, b)$ - деякий проміжок. Функція F називається первісною функції f на інтервалі I, якщо $\forall x \in I \ F'(x) = f(x)$.

Зауваження. Первісна F завжди неперервна. (Доведення цього факту виходить за рамки нашого курсу).

Теорема. (Зв'язок між первісною). Нехай F_1 та F_2 - первісні для f на I. Тоді $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in I : F_1(x) - F_2(x) = C$.

Доведення. $(F_1(x) - F_2(x))' = f_1(x) - f_2(x) = 0$.За наслідком з теореми Лагранжа $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Означення. Функція $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ називається інтегровною за Ньютоном-Лейбніцом, якщо у f існує хоча б одна первісна на (a, b).
Означення. Первісна від функції f з фіксованою нижньою межею a називається первісна, така, що $F(a) = 0$.

Позначається $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$.

Зауваження. $\int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_a^x f(s)ds = \int\limits_a^x f(x)dx$. (Можемо по-різному записати інтеграл).

Теорема. (Формула Ньютона-Лейбніца). Нехай $F =$ довільна первісна f на I. Тоді $\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Доведення. Нехай φ - первісна функції f з фіксованою нижньою межею a. Тоді $\int\limits_a^x f(t)dt = \varphi(x)$.Оскільки F та φ - первісні, то $\varphi(x) = F(x) = C$, $\forall x \in I$. Тоді $\int\limits_a^x f(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a) = (\varphi(b) - C) - (\varphi(a) - C) = F(b) - F(a)$.

Властивості ІНЛ.

1) $\int\limits_a^b f(t)dt = -\int\limits_b^a f(t)dt$

$\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), \int\limits_b^a f(t)dt = F(a) - F(b)$

2) $\int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^c f(t)dt + \int\limits_c^b f(t)dt$

$F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$

3) $\frac{d}{dx}(\int\limits_a^x f(t)dt) = f(x)$

Теорема. (Лінійність ІНЛ). Нехай f та g - інтегровні за ІНЛ на I. Тоді $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b f(x)dx$

Доведення. $\int\limits_a^x (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int\limits_a^x f(t)dt + \beta \int\limits_a^x g(t)dt$

1) $\frac{d}{dx}(\alpha \int\limits_a^x f(t)dt + \beta \int\limits_a^x g(t)dt) = \alpha \frac{d}{dx}(\int\limits_a^x f(t)dt) + \beta \frac{d}{dx}(\int\limits_a^x g(t)dt) =$

$= \alpha f(x) + \beta g(x)$

2) x = a:

$\alpha \int\limits_a^a + \beta \int\limits_a^a = 0.$

Теорема. (Заміна змінної). Нехай $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}, f$ - ?(умову додумайте самі) і f-інтегровна за Ньютоном-Лейбніцом на ... і ... . $f(\varphi(t)\varphi'(t)$ - інтегровна за Ньютоном-Лейбніцом на (a, b). Тоді $\int\limits_a^b f(\varphi(t)\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)ds.$

Доведення. Нехай F - первісна для f. Тоді $\int_(\varphi(a))^(\varphi(b))f(s)ds. = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$. Тепер розглянемо функцію $F(\varphi(t))$. $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))(\varphi(t))' = f(\varphi(t))(\varphi'(t))$. Тобто $F(\varphi(t))$ - первісна для $f(\varphi(t))(\varphi'(t))$. Тому, за формулою Ньютона-Лейбніца: $\int\limits_a^b f(\varphi(t)\varphi'(t)dt = F(\varphi(b) - F(\varphi(a))$.

Приклад 1. $\displaystyle\int \frac{cosx}{1+2sin^2x}dx = \begin{vmatrix} u = sinx \\ du = cosxdx \end{vmatrix} = \int \frac{du}{1+2u^2}dx = \begin{vmatrix} t = \sqrt{2}u \\ dt = \sqrt{2}u \\ du = \dfrac{dt}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} =$

$$= \int \frac{\frac{dt}{\sqrt{2}}}{1+t^2} = \int \frac{dt}{\sqrt{2}(1+t^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctgt + C = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\sqrt{2}u + C = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2}sinx) + C$$

Теорема. (Формула інтегрування частинами). Нехай $I = (a, b)$. Функції f та g диференційовні на (a, b) і функція $g' \circ f$ - інтегровна за Ньютоном- Лейбніцом на (a, b). Тоді функція $g' \circ f$ - також інтегровна за

Ньютоном- Лейбніцом на (a, b) і справедливе співвідношення:

$$\int\limits_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int\limits_a^b g'(x)f(x)$$

Доведення. $(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow f'g = (fg)' - fg'$

$$\int\limits_a^b f'(x)g(x) = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b fg'dx$$

Приклад. $\int x^2e^xdx = \begin{vmatrix} f' = e^x & g = x^2 \\ f = e^x & g' = 2x \end{vmatrix} = x^2e^x - \int e^x 2xdx = x^2e^x - -2\int e^x xdx$

$$I_1 = \int xe^xdx = \begin{vmatrix} f' = e^x & g = x \\ f = e^x & g' = 1 \end{vmatrix} = e^xx - \int e^xdx = e^xx - e^x + C$$

Зауваження. 1) $\int P(x) \begin{Bmatrix} sin\alpha x \\ cos\alpha x \\ e^{\alpha x} \end{Bmatrix} \mathrm{dx} \Rightarrow P(x) = g, \begin{Bmatrix} sin\alpha x \\ cos\alpha x \\ e^{\alpha x} \end{Bmatrix} = f'$

2) $\int P(x) \begin{Bmatrix} arctgx \\ arcctgx \\ \log_a x \\ arcsinx \\ arccosx \end{Bmatrix} \mathrm{dx} \Rightarrow P(x) = f', \begin{Bmatrix} arctgx \\ arcctgx \\ \log_a x \\ arcsinx \\ arccosx \end{Bmatrix} dx = g$

Приклад. $I = \int e^{\alpha x}cos\beta xdx = \begin{vmatrix} f' = e^{\alpha x} & g = cos\beta x \\ f = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} & g' = -\beta sin\beta x \end{vmatrix} = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}cos\beta xdx - -\int \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}cos(-\beta sin\beta x)dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}cos\beta x + \frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha x}sin\beta xdx = \begin{vmatrix} f' = e^{\alpha x} & g = sin\beta x \\ f = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} & g' = \beta cos\beta x \end{vmatrix} = = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}cos\beta x + \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}sin\beta x - \int \frac{\beta}{\alpha}e^{\alpha x}cos\beta xdx\right) = \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha x}(\alpha cos\beta x + sin\beta x) - -\frac{\beta^2}{\alpha^2} I \Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2}I = \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha x}(\alpha cos\beta x + \beta sin\beta x) \Rightarrow$

$\Rightarrow I = \frac{\alpha cos\beta x + \beta sin\beta x}{\alpha^2 + \beta^2} + C$

Приклад. а) $\int [x]dx, x \in (0,2) = \begin{cases} \int 0 \text{ dx}, & x \in (0,1) \\ \int \text{(1-x)dx} \ , & x \in [1,2) \end{cases} = \begin{cases} 0 + C_1, & x \in (0,1) \\ x + C_2, & x \in [1,2) \end{cases}$

Функція $y = [x]$ не має первісної на $(0, 2)$, але при цьому має первісну на $(0, 1)$ і (1,2). Якщо f має розрив першого роду, то в точці $x_0 \in I$ то f інтегровна на I. Якщо f - неперервна, то f - інтегровна за Ньютоном- Лейбніцом. В розриві другого роду невідомо що(це вже не такий тривіальний випадок).

$$\text{б) } \int |x-1|dx, x \in (0,2) = \begin{cases} \int (x-1)\text{dx}, & x \geq 1 \\ \int (1-x)\text{dx} \ , & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + C_1 & x \in [1,2) \\ x - \frac{x^2}{2} + C_2 & x \in (0,1) \end{cases}$$

Якщо первісна розривна,то вона не може бути диференційовна. Проте якщо ми підберемо C_1 і C_2, то тоді первісна стане неперервною, а значить і диференційовною.

$$\lim_{x \to 1-0} = x - \frac{x^2}{2} + C_2 = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2}{2} - x + C_1$$

$$\frac{1}{2} + C_2 = -\frac{1}{2} + C_1 \Rightarrow C_2 = C_1 - 1$$

$$\text{Отже, } \int |x-1|dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + C_1 & x \in [1,2) \\ x - \frac{x^2}{2} + C_1 - 1 & x \in (0,1) \end{cases}$$

Техніка Інтегрування

Раціональні, ірраціональні, тригонометричні функції

Раціональна функція - це функція вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x), Q(x)$ - деякі многочлени.

Теорема 1. Нехай $Q(x)$ (deg $Q(x)$>2) - поліном з дійсними коефіцієнтами. Тоді його можна подати вигляді

$$Q(x) = a \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i) \prod_{i=1}^{m} (x_i^2 - p_i x + q_i)$$

$Q(x)$ завжди можна розкласти на множники, кожен з яких є або лінійним, або квадратичним.

Теорема 2. Нехай deg $P(x) <$ deg $Q(x)$. Тоді

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{A_{ki}}{(x-\alpha_i)^k} + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{e_j}\frac{B_{kj}x + C_{kj}}{(x^2 - p_j x + q_j)^k}$$

Для того, щоб обчислити інтеграл $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, достатньо лише:

а) Поділити $P(x)$ на $Q(x)$ в стовпчик: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$,
deg $P(x) <$ deg $Q(x)$.
б) S(x) проінтегрувати.

в)$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ розкласти на прості дроби. Як це зробити? Використати *метод невизначених коефіцієнтів*.

Приклад. $\dfrac{x^6+2}{x^3(x-1)(x^2+1)} = 1 + \dfrac{x^5+x^4+x^3+2}{x^3(x-1)(x^2+1)} = 1 + \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} +$

$+\dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D}{x-1} + \dfrac{Ex+F}{x^2+1} =$
$\dfrac{Ax^2(x-1)(x^2+1) + Bx(x-1)(x^2+1) + C(x-1)(x^2+1) + Dx^3(x^2+1)}{x^3(x-1)(x^2+1)}$;
$x^5 - x^4 + x^3 + 2 = Ax^2(x^3 - x^2 + x - 1) + Bx(x^3 - x^2 + x - 1) + C(x^3 - x^2 + x -$

$1) + D(x^5 + x^3) + (Ex^2 - Ex + Fx - F)x^3 = Ax^5 - Ax^4 + Ax^3 - Ax^2 + Bx^4 -$
$Bx^3 + Bx^2 - Bx + Cx^3 - Cx^2 + Cx - C + Dx^5 + Dx^3 + Ex^5 - Ex^4 + Fx^4 - Fx^5$

$x^5 : 1 = A + D + E$
$x^4 : -1 = -A + B - E + F$
$x^3 : 1 = A - B + C + D - F$
$x^2 : 0 = -A + B - C$
$x^2 : 0 = -A + B - C$
$x^1 : 0 = -A + B - C$
$x^0 : 2 = -C$

Розв'язавши цю систему рівнянь, маємо: C = -2, B = -2, A = 0, D = 3/2, E = -1/2, F = 1/2

$$\frac{x^6+2}{x^3(x-1)(x^2+1)} = 1 - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{2(x-1)} + \frac{-1/2x+1/2}{x^2+1}$$

А далі вже інтегруємо кожен доданок як степенева функція , логарифмічна функція, або як арктангенс.

Як записати вираз з невизначеними коефіцієнтами?

В розкладі знаменника Q(x) можливі множники 4 типів: $(x-\alpha), (x-\alpha)^k, (x^2+px+q), (x^2+px+q)^k$

1) $(x-\alpha) \to \dfrac{A}{x-\alpha}$

2) $(x-\alpha)^k \to \dfrac{A_1}{x-\alpha} + \dfrac{A_2}{(x-\alpha)^2} + ... + \dfrac{A_k}{(x-\alpha)^k}$

3) $(x^2+px+q) \to \dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$

4) $(x^2+px+q)^k \to \dfrac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} + \dfrac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2} + ... + \dfrac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}$

Приклад. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^{10}} =$

$\displaystyle\int 1(x^2+2x+2)^{-10}dx = x(x^2+2x+2)^{-10} - \int x(-10)(x^2+2x+2)^{-11}(2x+$
$\displaystyle+2)dx = \frac{x}{(x^2+2x+2)^{10}} + 20\int \frac{x^2+x}{(x^2+2x+2)^{11}}dx =$

$\displaystyle * \frac{x^2+x}{(x^2+2x+2)^{11}} = \frac{(x^2+2x+2) - 1/2(2x+2) - 1}{(x^2+2x+2)^{10}}$

$\displaystyle = \frac{x}{(x^2+2x+2)^{10}} + 20\left(\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^{10}} - 1/2\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^11} - \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^{11}}\right) =$

$$I_{10} = \frac{dx}{(x^2+2x+2)^{10}} + 20(I_{10} - I_{11})$$

$$I_{11} = \frac{1}{20}(19I_{10} - I_{11})$$

...і так далі інтегрувати десять разів за рекуренним співвідношенням.

Приклад. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$

1) A $= 0 \Rightarrow \dfrac{B}{x^2+px+q}$

$$\int \frac{dx}{3x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{11}{12}} = \frac{11}{12}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{11}{12}} =$$

$$= \frac{12}{11}\int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{11}{12}}}\right)^2 + 1} = = \frac{12}{11}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{6x+1}{\sqrt{11}}\right)^2} = \frac{12}{11} arctg \left(\frac{6x+1}{\sqrt{11}}\right)\frac{\sqrt{11}}{6} + C$$

2) $\int \frac{5x+2}{3x^2+x+1}dx = \int \frac{5/6(6x+1)+7/6}{3x^2+x+1}dx = \frac{5}{6}\int \frac{6x+1}{3x^2+x+1} + \frac{7}{6}\int \frac{dx}{3x^2+x+1} = \ldots$

Інтегрування тригонометричних функцій. $\int \mathbb{R}(sin\varphi, cos\varphi)d\varphi$

($\mathbb{R}$ - деякий раціональний вираз)
1) $\mathbb{R}(-sin\varphi, cos\varphi) = -\mathbb{R}(sin\varphi, cos\varphi) \Rightarrow$заміна: $t = cos\varphi$
2) $\mathbb{R}(sin\varphi, -cos\varphi) = -\mathbb{R}(sin\varphi, cos\varphi) \Rightarrow$заміна: $t = sin\varphi$
3) $\mathbb{R}(-sin\varphi, -cos\varphi) = \mathbb{R}(sin\varphi, cos\varphi) \Rightarrow$заміна: $t = tg\varphi$

Приклад.

1)$\int \frac{1}{sin^2x}\mathrm{dx} = \left|\begin{matrix} cosx = t \\ -sinxdx = dt \end{matrix}\right| = \int \frac{-sinx}{sin^4x}dx = \int \frac{dt}{(1-t^2)^2}$

2) $\int \frac{sin^3x}{cos^5x}dx = \left|\begin{matrix} sinx = u \\ cosxdx = du \end{matrix}\right| = \int \frac{u^3}{(1-u^2)^3}du = \left|\begin{matrix} cosx = v \\ -sinxxdx = dv \end{matrix}\right|$
$= -\int \frac{1-v^2}{v^5}dv$

3)$\int \frac{sin^3x}{cos^5x}dx = \left|\begin{matrix} tgx = \varphi \\ \frac{dx}{cos^2x} = d\varphi \end{matrix}\right| = \int \varphi^3 d\varphi$

Якщо жоден із способів не працює, застосовуйте тригонометричні формули:

$$\int \frac{1}{1+cos\varphi}d\varphi = \int \frac{1}{2cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\frac{1}{tg^2\varphi}}d\varphi$$

...або універсальну тригонометричну підстановку:

$$\int \frac{1}{1+cos\varphi}d\varphi = \left| \begin{matrix} u = tg\dfrac{\varphi}{2} & sin\varphi = \dfrac{2u}{1+u^2} & \\ cos\varphi = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} & tg\varphi = \dfrac{2u}{1-u^2} & d\varphi = \dfrac{d}{1+u^2} \end{matrix} \right| ==$$

$$\int \frac{1}{1+\dfrac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{du}{1+u^2}$$

...ще один приклад: $\displaystyle\int \frac{1}{sin^6+cos^6} = \int \frac{dx}{sin^4 - sin^2xcos^2xcos^4}$

Інтегрування ірраціональних функцій

a)$\mathbb{R}(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, ..., x^{\frac{m_k}{n_k}})$ Заміна: $U = x^{\frac{1}{n}}$,де n - НСК$(n_1, n_2, ..., n_k)$

Приклад. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{6}{15}} + x} = \left| \begin{matrix} u = x^{\frac{1}{30}} \\ x = u^{30} \end{matrix} \right| = \int \frac{u^{15}30u^{29}}{u^{10}+u^{26}+u^{30}}du$

b) $\mathbb{R}\left(x, \dfrac{ax+b}{cx+d}^{\frac{m_1}{n_1}}, \dfrac{ax+b}{cx+d}^{\frac{m_2}{n_2}}, ..., \dfrac{ax+b}{cx+d}^{\frac{m_k}{n_k}}\right)$

Заміна: $U = \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}$, де n - НСК$(n_1, n_2, ..., n_k)$

Приклад. $\displaystyle\int \left(1 + \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}\right) \mathrm{dx} = \int (1+u^2)\frac{-6u^2}{(u^3-1)^2}\mathrm{du} = ...$

$\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}} \mathrm{dx} = \mathrm{u} \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-1} = u^3 \Rightarrow x = \dfrac{u^3+1}{u^3-1}; dx = \dfrac{3u^2(u^3-1)+3u^2(u^3+1)}{(u^3-1)^2}dx$

...to be continued

Підстановки Чебишева. $\int x^r(a+bx^q)^p\mathrm{dx}.\qquad r, q, p \in \mathbb{Z}$

Теорема Чебишева. Інтеграл I обчислюється в елементарних функціях тоді і тільки тоді, коли виконано хоча б одну з трьох умов:

a) $p \in \mathbb{Z}$

b) $\dfrac{r+1}{q} \in \mathbb{Z}$

c) $\dfrac{r+1}{q} + p \in \mathbb{Z}$

Зауваження. Інтеграл $\displaystyle\int f(x)dx$ обчислюється в елементарних функціях, якщо первісну F можна подати у скінченному вигляді за допомогою елементарних функцій $(x^n, a^x, \log_a x, sinx, cosx, tgx, arcsinx, arccosx)$,їхніх суперпозицій та знаків арифметичних дій.

a) $p \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ заміна $x^{\frac{1}{k}} = t, k-$спільний знаменник r, q

$$\int x^{\frac{1}{3}}\left(a+bx^{2/5}\right)\mathrm{dx} = \begin{vmatrix} t = x^{\frac{1}{15}} \\ x = u^{15} \\ dx = 15t^{14}dt \end{vmatrix} = \int t^5(a+bt^6)^4 15t^{14}dt$$

b) $\dfrac{r+1}{q} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ заміна $x^q = t$

$$\int x^r(a+bx^q)^p = \begin{vmatrix} x = t^{\frac{1}{q}} \\ dx = \frac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}dt \end{vmatrix} = \int t^{\frac{r}{q}}(a+bt)^p\frac{1}{q}t^{\frac{1}{q}} =$$

$$\frac{1}{4}\int t^{\frac{r+1}{q}-1}(a+bt)^p dt = \begin{vmatrix} (a+bt)^{\frac{1}{q}} = u \\ \text{k - знаменник числа p} \end{vmatrix} = \int x^3(a+bx^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}\mathrm{dx}=$$

$$= \left| \begin{matrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = 2\int t^7 (a+bt)^{3/2} dt = \left| \begin{matrix} (a+bt)^{1/2} = t^2 \\ t = \frac{1}{b}(u^2 - a) \\ dt = \frac{2u}{b} \end{matrix} \right| = 2\int \left(\frac{1}{b}(u^2-a)\right)^7 u^3 \frac{2u}{b} \mathrm{du}$$

c) $\dfrac{r+1}{q} + p \in \mathbb{Z}$

$$\int x^r (a+bx^q)^p dx = \frac{1}{q}\int t^{\frac{r+1}{q}-1}(a+bt)^p \mathrm{dt} = \frac{1}{q}\int t^{\frac{r+1}{q}+p-1}\left(b+\frac{a}{t}\right)^p \mathrm{dt} =$$

$$\left| \begin{matrix} (b+\frac{a}{t})^{1/k} = u \\ \text{k - знаменник числа p} \end{matrix} \right| = ...$$

Квадратична ірраціональність $\mathbb{R}(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

Підстановки Ейлера

1)$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t, a > 0$

2)$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}, c > 0$

3)$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x - x_1), x_1$ - корінь тричлена

Зауваження. Знак + або - обираємо залежно від ситуації.

Приклад 1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = ...$

1) $\sqrt{x^2+x+1} = x + t$
$x^2+x+1 = x^2+2tx+t^2$
$x - 2tx = t^2+1$
$x(1-2t) = t^2-1$
$x = \dfrac{t^2-1}{1-2t}$, $dx = \dfrac{2t(1-2t)^2}{1-2t}\mathrm{dt}$

$$...= \int \frac{\dfrac{2t(1-2t)+2(t^2-1)}{(1-2t)^2}}{2\dfrac{t^2-1}{1-2t}+t}\mathrm{dt}$$

2) $\sqrt{x^2+x+1} = -x+t$
$x^2+x+1 = x^2-2tx+t^2$
x = $/x = \dfrac{t^2-1}{1+2t}$, dx = $\dfrac{2t(1+2t)-2(t^2-1)}{1+2t}^2$ dt

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{\frac{2t(1+2t)-2(t^2-1)}{(1+2t)^2}}{t}\mathrm{dt} = \frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}\mathrm{dt}$$

Приклад 2.$\sqrt{x^2+x+1} = xt \pm 1$
$x^2+x+1 = x^2t^2 \pm 2xt + 1$
$x+1 = xt^2 \pm 2t$
$x = \dfrac{-1 \pm 2t}{1-t^2}$

Приклад 3$\sqrt{x^2+2x-3} = (x-1)t$
$(x-1)(x+3) = (x-1)^2t^2$
$x+3 = (x-1)t^2$
$x = ...$

Ще один спосіб:

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{2a}ln|\frac{a+x}{a-x}| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C, |x| < |a|$$

a.k.a Лямбда-формула

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

Приклад

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+x+1} + \int \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$$

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = A\sqrt{x^2+x+1} + (Ax+B)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}}$$
$2(x^2+1) = 2A(x^2+x+1) + (Ax+B)(2x+1) + 2\lambda$

Далі знаходимо A, B, λ
****

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{x^2-x^2-x-1}\mathrm{dx} = -\frac{x}{x+1} + \frac{x^2+x+1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$
(Ще один метод перетворення виразу для інтегрування)
***

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}} \Rightarrow \text{заміна}\frac{1}{x-\alpha} = t$$

Первісна в широкому розумінні

Функція $F \in I$ називається первісною в широкому розумінні від f на інтервалі I, якщо $F'(x) = f(x)\forall x \in I\S$, де S- не більш, ніж злічення.

Приклад

$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ - не є інтегровною за Ньютоном- Лейбніцом (бо розривна)

$$\int f(x)dx = \begin{cases} x + C_1, & x \geq 0 \\ -x + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

$f(x) = [x] = \begin{cases} x + C, & x \geq 0 \\ -x + C, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow = |x| + C$ - первісна в широкому розумінні від f.