Конспекти лекцій з математичного аналізу Анікушина А.В. Модуль 4.

Автор тексту @vic778
Якщо знайшли помилки, пишіть мені в телеграм

A special thanks to @bezkorstanislav without whom these lecture notes would never have been created

February 2020

Інтеграл Рімана

Нехай f: [a,b] $\to \mathbb{R}$. Розіб'ємо [a,b] на n частин точками

a=$x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Сукупність $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ = P назвемо *розбиттям* [a,b]. Розглянемо довжини $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, ..., n$. Число $diam(P)$ = maxΔx_i назвемо *діаметром* розбиття.

Тепер на кожному проміжку $[x_{i-1}, x_i]$ оберемо довільну точку

$\xi \in [x_{i-1}, x_i]$. Множину $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ назвемо *сукупністю* проміжних точок, що віповідає розбиттю P.

Тепер утворимо таку суму

$$S_p(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$S_p(f, \xi)$ називається інтегральною сумою Рімана для функції f на відрізку [a,b], що побудована за розбиттям P і сукупністю проміжних точок ξ.

$f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + f(\xi_4)(x_4 - x_3)$

(Інтегральна сума дорівнює сумі площ прямокутників).

Означення Число I називається *інтегралом Рімана* від функції f на [a,b], якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ diam(P) < \delta \Rightarrow \forall \xi\ |S_p(f\xi) - I| < \varepsilon$

Лема. (Необхідна умова інтегровності за Ріманом). Якщо функція f інтегровна за Ріманом, то f - обмежена на [a,b].

Якщо f - необмежена, то $\forall n\ \exists y_n : f(y_n) > n\ y_n k \to y$. Тоді при деякому $\xi\ S_p(f, \xi) \to \infty$.

Сукупність всіх функцій, інтегрованих за Ріманом, позначають $R([a, b])$.

Чи пов'язані між собою інтеграли Рімана та Ньютона-Лейбніца?

Теорема 1. Нехай f - інтегровна за Ньютоном-Лейбніцом. Тоді $\forall P$ $\exists \xi : \int\limits_a^b f(x)dx = S_p(f, \xi)$

Доведення $\int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} F'(\xi_{k+1})(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{k+1})(x_{k+1} - x_k)$$

Тобто, за кожним інтегралом Ньютона-Лейбніца стоїть інтеграл Рімана.

Теорема 2 Якщо існують інтеграли Рімана та Ньбтона-Лейбніца, то вони співпадають.

Доведення Нехай I - інтеграл Рімана. Тоді $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall P$: $diam(P) < \delta$, $\forall \xi |S_p(f, \xi) - I| < \varepsilon$. Тепер $\forall P\ \exists \xi_0 \int\limits_a^b f(x)dx - S_p(f, \xi) = 0$.

Якщо $diam(P) < \delta$, то $|\int\limits_a^b f(x)dx - I| < \varepsilon$.

Отже, $\int\limits_a^b f(x)dx = I$.

Зауваженняя Можна показати, що всі неперервн функції інтегровні за Ріманом.

$\overline{S}_p(f) = \sum M_i(x_{i+1} - x_i)$, де $M_i = sup f(x) x_i [x_i, x_{i+1}]$ називають *верхньою інтегральною сумою Дарбу.*

Аналогічно, $\underline{S}_p(f) = \sum M_i(x_{i+1} - x_i)$, де $M_i = inf f(x) x_i [x_i, x_{i+1}]$ називають *нижньою інтегральною сумою Дарбу.*

Зрозуміло, що $\forall \xi\ \underline{S}_p(f) \leq S_p(f, \xi) \leq \overline{S}_p(f)$

Нехай P — розбиття. $P_1 = P \cup \{x^*\}$.

$$\overline{S}_p(f) = \sum_{k=1}^{m} M_k \Delta x_k + M_{m+1} \Delta x_{m+1} + \sum_{k=m+2}^{n} M_k \Delta x_k$$

$$\overline{S}_{p_1}(f) = \sum_{k=1}^{m} M_k \Delta x_k + \sup_{x \in [x_m; x^*]} f(x)(x^* - x_m) + \sup_{x \in [x^*; x_{m+1}]} f(x)(x_{m+1} - x^*) + \sum_{k=m+2}^{n} M_k \Delta x_k$$

$$A \subset B \Longrightarrow \sup_A f \leq \sup_B f$$

$$\sup_{x\in[x_m;x^*]} f(x) \leq M_{m+1}$$

$$\sup_{x\in[x^*;x_{m+1}]} f(x) \leq M_{m+1}$$

$$\overline{S}_{p_1}(f) \leq \sum_{k=1}^{m} M_k \Delta x_k + M_{m+1}\Delta x_{m+1} + \sum_{k=m+2}^{n} M_k \Delta x_k$$

$$\overline{S}_p \geq \overline{S}_{p+1}$$

Додаючи точку до розбиття, верхня (з супремами) інтегральна сума може зменшитися або залишитис такою ж.

Тому зрозуміло, що

$$P_1 \subset P_2 \Longrightarrow \overline{S}_{p_1} \geq \overline{S}_{p_k}, \underline{S}_{p_1} \leq \underline{S}_{p_2}$$

Наслідок:

$$\forall P_1, P_2 \overline{S}_{P_1}(f) \geq \underline{S}_{P_2}(f)$$

Розглянемо розбиття $P = P_1 \cup P_2$.

$$\overline{S}_{P_1} \geq \overline{S}_p (\text{з попередньої теореми } P_1 \subset P_2 \Longrightarrow \overline{S}_{P_1} \geq \overline{S}_p)$$

$$\underline{S}_P \geq \underline{S}_{P_2}$$

$$\overline{S}_{P_1} \geq \overline{S}_P \geq \underline{S}_P \geq \underline{S}_{P_2}$$

$$\overline{S}_{P_1} \geq \underline{S}_{P_2}$$

Що й треба було довести.

Розглянемо всі можливі верхні суми. $\overline{S}_P(f)$. Ця множина є обмеженою знизу (Необхідна умова інтегрованості за Ріманом). Тому існує $\inf_P \overline{S}_P(f) = \overline{\int} f dx$. Назвемо це число верхнім інтегралом Дербу. Аналогічно нижній інтеграл Дербу $\underline{\int} f dx = \sup_P \underline{S}_p(f)$.

Розглянемо нерівність $\overline{S}_{P_1}(f) \geq S_{P_2}(f)$. Зафіксуємо P_2. Тоді

$$\forall P_1 \overline{S}_{P_1}(f) \geq \underline{S}_{P_2} \Longrightarrow \inf \overline{S}_{P_1}(f) \geq \underline{S}_{P_2}(f)$$

(Всі елементи множини $>$ за фіксоване число $\Longrightarrow$ $>$ за інфінум.)

Аналогічно для P_2 та супремума:

Зафіксуємо P_1. Тоді:

$$\forall P_2 \ \underline{S}_{P_2}(f) \leq \overline{S}_{P_1}(f) \Longrightarrow \sup \overline{S}_{P_1}(f) \leq \underline{S}_{P_1}(f)$$

Звідси $\overline{\int} f dx \geq \underline{\int} f dx$.

Означення. Функція f називається інтегровною за Дарбу, якщо $\overline{\int} f dx = \underline{\int} f dx$. (Найкраще наближення зверху = найкраще наближення знизу).

Теорема. (Критерій інтегрованості за Дарбу). Функція f є інтегровною за Дарбу тоді й тільки тоді, коли:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P : |\overline{S}_p(f) - \underline{S}_P(f)| < \varepsilon$$

(Можна підібрати число, для якого верхня і нижня інтегральні суми відрізняються на мале число)

Доведення

- $\Longleftarrow$.

$$\underline{S}_P(f) f dx \leq \overline{\int} f dx \leq \overline{S}_P(f)$$

$$\underline{S}_P(f) \leq \underline{\int} f dx \leq \overline{\int} f dx \leq \overline{S}_P(f)$$

$$\varepsilon \geq \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) \geq \overline{\int} f dx - \underline{\int} f dx \geq 0$$

  Отже, $\overline{\int} f dx - \underline{\int} f dx = 0$.

- $\Longrightarrow$.

  Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Тоді супремум $\inf \overline{S}_P(f) = \overline{\int} f dx$ є точкою дотику в будь-якому ε-околі множини.

$$\exists P_1 \ \overline{\int} f dx \leq \overline{S}_{P_1}(f) \leq \overline{\int} f dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists P_2 \ \underline{\int} f dx \leq \underline{S}_{P_2}(f) \leq \underline{\int} f dx$$

  Розглянемо $P = P_1 \cup P_2$. Збільшуємо розбиття, збільшуємо точність, верхня інтегральна сума збільнується (або залишається такою ж).

$$0 \leq \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) \leq \overline{S}_{P_1} - \underline{S}_{P_2}(f) < \varepsilon$$

Що і треба було довести.

Теорема. Функція f є інтегрованою за Дарбу тоді й тільки тоді, коли f інтегровна за Ріманом і їх інтеграли співпадають.

Приклад 1.

$$0 = x_0,\ x_k = \frac{1}{n},\ x_n = 1$$

$$\overline{S}_P(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} x = x_k = \frac{k}{n}$$

$$\underline{S}_P(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k + \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) = \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{n}$ може бути як завгодно мале, а тому $x \in R([0,1])$ (інтегрована за Ріманом).

Приклад 2.

$$D(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Функцію розглядаємо на проміжку $[0,1]$.

$$\overline{S}_P(D) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{x \in [\ldots]} D(x) = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1$$

$$\underline{S}_P(D) = \sum_{k=1}^{n} (\inf_{x \in [\ldots]} (D(x)) \cdot \Delta x_k) = 0$$

$$\forall p : \overline{S}_p(D) - \underline{S}_p(D) > \frac{1}{13} = \varepsilon$$

Отже, $D \notin R([0,1])$.

Множини Лебегової міри нуля

Означення Множина $A \subset \mathbb{R}$ має міру нуль, якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ не більш як злічення кількість $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots$ такі, що:

1. $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (\alpha_k, \beta_k)$ (Множину можна покрити інтервалами, що є завгодно малими)
2. $\sum(\beta_k - \alpha_k) < \varepsilon$

Приклад:

1. $A = \{x_0\}$
2. $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
3. $A = (0; \frac{1}{2})$ При $\varepsilon < \frac{1}{2}$ покритий не існує. (Якщо є неперервна множина, з більше, ніж однієї точки), A не має точки нуль).
4. $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$

Властивості:

1. Якщо A – злічення, або обмежена, то A має міру нуль.
2. Якщо $\exists \alpha, \beta : (\alpha, \beta) \subset A \Longrightarrow A$ не має міру нуль.
3. Незліченні (континуальні) множини теж мають міру нуль.
4. Якщо $A_1, A_2, \ldots$ мають міру нуль, то їх об'єднання теж має міру нуль.

Приклад:

- $Q \cap [0, 1]$ – злічення, тож має міру нуль.
- $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$. Якщо припустити, що $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ має міру нуль, то за властивістю 4:

  $(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] = [0, 1]$ теж має міру 0. Але це суперечить властивості 2.

Критерій Лебега інтегровності за Ріманом

Нехай f – обмежена на $[a, b]$. Тоді $f \in R([a, b])$ тоді й тільки тоді, коли множина точок розриву функції f на $[a, b]$ має міру 0. (Тобто коли точок розриву не більше, ніж зліченна кількість).

Приклади:

1. $\text{D(x)} = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ на проміжку $[0, 1]$.

   $E_D = [0, 1]$ – не має міру 0 за властивостю 2.

   Отже, за критерієм $D \notin R([0, 1])$.

2. $f(x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{|x - \frac{1}{2}|} = \begin{cases} 1 & , x > \frac{1}{2} \\ -1 & , x < \frac{1}{2} \end{cases}$

   $E_f = \{\frac{1}{2}\}$ – множина точок розриву має міру нуль. Отже, $f(x) \in R([0, 1])$.

3. Функція Рімана:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n} & , x = \frac{m}{n}, \text{НСД}(m,n) = 1 \end{cases}$$

   $E_f = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Отже, f інтегрована.

4. $f(x) = \ln x$

   $E_f = \{0\}$ – точки розриву. Але $f(x)$ необмежена, тому не є інтегрованою за Ріманом на $[0, 1]$.