Конспекти лекцій з математичного аналізу Анікушина А.В. Модуль 5.

Автор тексту @vic778
Якщо знайшли помилки, пишіть мені в телеграм

A special thanks to @bezkorstanislav without whom these lecture notes would never have been created

February 2020

Інтеграл Рімана

Нехай f: [a,b] $\to \mathbb{R}$. Розіб'ємо [a,b] на n частин точками

a=$x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Сукупність $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ = P назвемо *розбиттям* [a,b]. Розглянемо довжини $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, ..., n$. Число $diam(P) = \max\Delta x_i$ назвемо *діаметром* розбиття.

Тепер на кожному проміжку $[x_{i-1}, x_i]$ оберемо довільну точку

$\xi \in [x_{i-1}, x_i]$. Множину $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ назвемо *сукупністю* проміжних точок, що віповідає розбиттю P.

Тепер утворимо таку суму

$$S_p(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$S_p(f, \xi)$ називається інтегральною сумою Рімана для функції f на відрізку [a,b], що побудована за розбиттям P і сукупністю проміжних точок ξ.

$f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + f(\xi_4)(x_4 - x_3)$

(Інтегральна сума дорівнює сумі площ прямокутників).

Означення Число I називається *інтегралом Рімана* від функції f на [a,b], якщо $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ diam(P) < \delta \Rightarrow \forall\xi\ |S_p(f\xi) - I| < \varepsilon$

Лема. (Необхідна умова інтегровності за Ріманом). Якщо функція f інтегровна за Ріманом, то f - обмежена на [a,b].

Якщо f - необмежена, то $\forall n\ \exists y_n : f(y_n) > n\ y_n k \to y$. Тоді при деякому $\xi\ S_p(f, \xi) \to \infty$.

Сукупність всіх функцій, інтегрованих за Ріманом, позначають $R([a, b])$.

Чи пов'язані між собою інтеграли Рімана та Ньютона-Лейбніца?

Теорема 1. Нехай f - інтегровна за Ньютоном-Лейбніцом. Тоді $\forall P$ $\exists\xi : \int\limits_a^b f(x)dx = S_p(f, \xi)$

Доведення $\int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} F'(\xi_{k+1})(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{k+1})(x_{k+1} - x_k)$$

Тобто, за кожним інтегралом Ньютона-Лейбніца стоїть інтеграл Рімана.

Теорема 2 Якщо існують інтеграли Рімана та Ньбтона-Лейбніца, то вони співпадають.

Доведення Нехай I - інтеграл Рімана. Тоді $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall P$: $diam(P) < \delta$, $\forall\xi |S_p(f,\xi) - I| < \varepsilon$. Тепер $\forall P\ \exists\xi_0 \int\limits_a^b f(x)dx - S_p(f,\xi) = 0$.

Якщо $diam(P) < \delta$, то $|\int\limits_a^b f(x)dx - I| < \varepsilon$.

Отже, $\int\limits_a^b f(x)dx = I$.

Зауваженняя Можна показати, що всі неперервн функції інтегровні за Ріманом.

$\overline{S}_p(f) = \sum M_i(x_{i+1} - x_i)$, де $M_i = sup f(x) x_i [x_i, x_{i+1}]$ називають *верхньою інтегральною сумою Дарбу.*

Аналогічно, $\underline{S}_p(f) = \sum M_i(x_{i+1} - x_i)$, де $M_i = inf f(x) x_i [x_i, x_{i+1}]$ називають *нижньою інтегральною сумою Дарбу.*

Зрозуміло, що $\forall\xi\ \underline{S}_p(f) \leq S_p(f,\xi) \leq \overline{S}_p(f)$

Нехай P — розбиття. $P_1 = P \cup \{x^*\}$.

$$\overline{S}_p(f) = \sum_{k=1}^{m} M_k \Delta x_k + M_{m+1}\Delta x_{m+1} + \sum_{k=m+2}^{n} M_k \Delta x_k$$

$$\overline{S}_{p_1}(f) = \sum_{k=1}^{m} M_k \Delta x_k + \sup_{x\in[x_m;x^*]} f(x)(x^* - x_m) + \sup_{x\in[x^*;x_{m+1}]} f(x)(x_{m+1} - x^*) + \sum_{k=m+2}^{n} M_k \Delta x_k$$

$$A \subset B \Longrightarrow \sup_A f \leq \sup_B f$$

$$\sup_{x\in[x_m;x^*]} f(x) \leq M_{m+1}$$
$$\sup_{x\in[x^*;x_{m+1}]} f(x) \leq M_{m+1}$$
$$\overline{S}_{p_1}(f) \leq \sum_{k=1}^{m} M_k\Delta x_k + M_{m+1}\Delta x_{m+1} + \sum_{k=m+2}^{n} M_k\Delta x_k$$
$$\overline{S}_p \geq \overline{S}_{p+1}$$

Додаючи точку до розбиття, верхня (з супремами) інтегральна сума може зменшитися або залишитис такою ж.

Тому зрозуміло, що

$$P_1 \subset P_2 \Longrightarrow \overline{S}_{p_1} \geq \overline{S}_{p_k}, \underline{S}_{p_1} \leq \underline{S}_{p_2}$$

Наслідок:

$$\forall P_1, P_2 \overline{S}_{P_1}(f) \geq \underline{S}_{P_2}(f)$$

Розглянемо розбиття $P = P_1 \cup P_2$.

$$\overline{S}_{P_1} \geq \overline{S}_p(\text{з попередньої теореми } P_1 \subset P_2 \Longrightarrow \overline{S}_{P_1} \geq \overline{S}_p)$$
$$\underline{S}_P \geq \underline{S}_{P_2}$$
$$\overline{S}_{P_1} \geq \overline{S}_P \geq \underline{S}_P \geq \underline{S}_{P_2}$$
$$\overline{S}_{P_1} \geq \underline{S}_{P_2}$$

Що й треба було довести.

Розглянемо всі можливі верхні суми. $\overline{S}_P(f)$. Ця множина є обмеженою знизу (Необхідна умова інтегрованості за Ріманом). Тому існує $\inf_P \overline{S}_P(f) = \overline{\int} f dx$. Назвемо це число верхнім інтегралом Дербу. Аналогічно нижній інтеграл Дербу $\underline{\int} f dx = \sup_P \underline{S}_p(f)$.

Розглянемо нерівність $\overline{S}_{P_1}(f) \geq S_{P_2}(f)$. Зафіксуємо P_2. Тоді

$$\forall P_1 \overline{S}_{P_1}(f) \geq \underline{S}_{P_2} \Longrightarrow \inf \overline{S}_{P_1}(f) \geq \underline{S}_{P_2}(f)$$

(Всі елементи множини $>$ за фіксоване число $\Longrightarrow$ $>$ за інфінум.)

Аналогічно для P_2 та супремума:

Зафіксуємо P_1. Тоді:

$$\forall P_2 \ \underline{S}_{P_2}(f) \leq \overline{S}_{P_1}(f) \Longrightarrow \sup \overline{S}_{P_1}(f) \leq \underline{S}_{P_1}(f)$$

Звідси $\overline{\int} f dx \geq \underline{\int} f dx$.

Означення. Функція f називається інтегровною за Дарбу, якщо $\overline{\int} f dx = \underline{\int} f dx$. (Найкраще наближення зверху = найкраще наближення знизу).

Теорема. (Критерій інтегрованості за Дарбу). Функція f є інтегровною за Дарбу тоді й тільки тоді, коли:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P : |\overline{S}_p(f) - \underline{S}_P(f)| < \varepsilon$$

(Можна підібрати число, для якого верхня і нижня інтегральні суми відрізняються на мале число)

Доведення

- $\Longleftarrow$.

$$\underline{S}_P(f) f dx \leq \overline{\int} f dx \leq \overline{S}_P(f)$$

$$\underline{S}_P(f) \leq \underline{\int} f dx \leq \overline{\int} f dx \leq \overline{S}_P(f)$$

$$\varepsilon \geq \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) \geq \overline{\int} f dx - \underline{\int} f dx \geq 0$$

  Отже, $\overline{\int} f dx - \underline{\int} f dx = 0$.

- $\Longrightarrow$.

  Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Тоді супремум $\inf \overline{S}_P(f) = \overline{\int} f dx$ є точкою дотику в будь-якому ε-околі множини.

$$\exists P_1 \ \overline{\int} f dx \leq \overline{S}_{P_1}(f) \leq \overline{\int} f dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists P_2 \ \underline{\int} f dx \leq \underline{S}_{P_2}(f) \leq \underline{\int} f dx$$

  Розглянемо $P = P_1 \cup P_2$. Збільшуємо розбиття, збільшуємо точність, верхня інтегральна сума збільнується (або залишається такою ж).

$$0 \le \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) \le \overline{S}_{P_1} - \underline{S}_{P_2}(f) < \varepsilon$$

Що і треба було довести.

Теорема. Функція f є інтегрованою за Дарбу тоді й тільки тоді, коли f інтегровна за Ріманом і їх інтеграли співпадають.

Приклад 1.

$$0 = x_0,\ x_k = \frac{1}{n},\ x_n = 1$$

$$\overline{S}_P(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} x = x_k = \frac{k}{n}$$

$$\underline{S}_P(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k + \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) = \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{n}$ може бути як завгодно мале, а тому $x \in R([0,1])$ (інтегрована за Ріманом).

Приклад 2.

$$D(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Функцію розглядаємо на проміжку $[0, 1]$.

$$\overline{S}_P(D) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{x \in [\ldots]} D(x) = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1$$

$$\underline{S}_P(D) = \sum_{k=1}^{n} (\inf_{x \in [\ldots]} (D(x)) \cdot \Delta x_k) = 0$$

$$\forall p : \overline{S}_p(D) - \underline{S}_p(D) > \frac{1}{13} = \varepsilon$$

Отже, $D \notin R([0,1])$.

Множини Лебегової міри нуля

Означення Множина $A \subset \mathbb{R}$ має міру нуль, якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ не більш як скінчена кількість $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots$ такі, що:

1. $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (\alpha_k, \beta_k)$ (Множину можна покрити інтервалами, що є завгодно малими)
2. $\sum (\beta_k - \alpha_k) < \varepsilon$

Приклад:

1. $A = \{x_0\}$
2. $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
3. $A = (0; \frac{1}{2})$ При $\varepsilon < \frac{1}{2}$ покритий не існує. (Якщо є неперервна множина, з більше, ніж однієї точки), A не має точки нуль).
4. $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$

Властивості:

1. Якщо A – злічення, або обмежена, то A має міру нуль.
2. Якщо $\exists \alpha, \beta : (\alpha, \beta) \subset A \Longrightarrow A$ не має міру нуль.
3. Незліченні (континуальні) множини МОЖУТЬ МАТИ міру нуль (а можуть і не мати).
4. Якщо $A_1, A_2, \ldots$ мають міру нуль, то їх об'єднання теж має міру нуль.

Приклад:

- $Q \cap [0, 1]$ – зліченна, тож має міру нуль.
- $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$. Якщо припустити, що $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ має міру нуль, то за властивістю 4:

  $(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] = [0, 1]$ теж має міру 0. Але це суперечить властивості 2.

Критерій Лебега інтегровності за Ріманом

Нехай f – обмежена на $[a, b]$. Тоді $f \in R([a, b])$ тоді й тільки тоді, коли множина точок розриву функції f на $[a, b]$ має міру 0.

Приклади:

1. D(x) $= \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ на проміжку $[0, 1]$.

   $E_D = [0, 1]$ – не має міру 0 за властивостю 2.

   Отже, за критерієм $D \notin R([0, 1])$.

2. $f(x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{|x - \frac{1}{2}|} = \begin{cases} 1 & , x > \frac{1}{2} \\ -1 & , x < \frac{1}{2} \end{cases}$

   $E_f = \{\frac{1}{2}\}$ – множина точок розриву має міру нуль. Отже, $f(x) \in R([0, 1])$.

3. Функція Рімана:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n} & , x = \frac{m}{n}, \text{НСД}(m,n) = 1 \end{cases}$$

   $E_f = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Отже, f інтегрована.

4. $f(x) = \ln x$

   $E_f = \{0\}$ – точки розриву. Але $f(x)$ необмежена, тому не є інтегрованою за Ріманом на $[0, 1]$.

Приклади функцій, що є:

1. Обмеженими на [a, b]: D(x) $= \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ на проміжку $(0, 1)$.

2. Інтегровними за Рімана та обмеженими на [a, b]: $\begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ на проміжку $(-1, 1)$.

3. Неперервними, інтегровними за Ріманом, інтегровними за Ньютоном-Лейбніцом та обмеженими на [a, b]:

   $f(x) = x^2, x \in$ (0,1)

4. Інтегровними за Ньютоном-Лейбніцом: $f(x) = \dfrac{1}{x}, x \in (0,1)$

5. Інтегровними за Ньютоном-Лейбніцом та інтегровні за Ріманом розривні та необмежені: - ?

6. Інтегровними за Ріманом, інтегровними за Ньютоном-Лейбніцом, розривні та обмежені:

   $F(x) = \begin{cases} x^2 sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ на проміжку $(-1,1)$. $f = F'$(похідна F буде належати цьому класу, адже f$\in$ C $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ і має розрив 2-го роду в точці 0).

   Деякі властивості інтегралу Рімана:

   1) $f, g \in \mathbb{R}([a,b]) \Rightarrow fg \in \mathbb{R}([a,b])$

   2) $f \in \mathbb{R}([a,b]) \Rightarrow |f| \in \mathbb{R}([a,b])$

   3) $f, g \in \mathbb{R}([a,b]) \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha f + \beta g \in \mathbb{R}([a,b])$

   (Тобто функції, інтегровні за Ріманом, утворюють векторний простір).

   4) $f \in \mathbb{R}, g \in C(E_f)(E_f$ - образ f$) \Rightarrow g(f) \in \mathbb{R}([a,b])$

Доведення. Нехай C_f і C_g, C_{fg} - множини точок розриву функцій f та g відповідно. $\forall x \notin C_f \cup C_g \Rightarrow x \notin C_f \wedge x \notin C_g \Rightarrow f \in C(\{x\}) \wedge g \in C(\{x\}) \Rightarrow fg \in C(\{x\}) \Rightarrow x \notin C_{fg}$,

$\overline{C_f \cup C_g} \subseteq \overline{C_{fg}} \Rightarrow C_{fg} \subset C_f \cup C_g$

$M_L(C_f) = 0, M_L(C_g) = 0, \Rightarrow M_L(C_f \cup C_g) = 0 \Rightarrow M_L(C_{fg}) = 0$

f, g - обмежені на [a,b] $\Rightarrow$ fg - обмежена на [a,b]. Згідно критерієм Лебега $fg \in R([a,b])$.

Чи правильне зворотнє твердження? (Ні)

$$g = f = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$ на проміжку $[0,1]$.

fg= 1 - добуток двох функцій є інтегровним за Ріманом, але окремо дві функції не інтегровні, бо розривні.

Вправа:

1) $g \notin C(E_f) \rightarrow g \in R(E_f)$

2) чи виконується твердження 4, якщо $f \in C(E_f), g \in R([a,b])$

5) Лінійність Інтегралу Рімана Нехай f,g$\in$ R([a,b])

$\alpha S_p(f,\xi)+\beta S_p(g,\xi) = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i+\beta \sum\limits_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha f+\beta g)(\xi_i)\Delta x_i = S_p(\alpha f + \beta g, \xi)$,

$diam(P) \to 0$. Тоді $S_p(f,\xi) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx$,

$S_p(g,\xi) \to \int\limits_a^b f(x)dx, S_p(\alpha f + \beta g)xdx$

(Тобто, інтеграл є лінійною операцією).

$\int\limits_a^b \alpha f(x)dx + \beta g(x)dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)dx + \beta\int\limits_a^b g(x)dx$

6) Адитивність інтегралу Рімана за областю інтегрування:

$\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx, +\int\limits_b^c f(x)dx, b \in [a,c], f \in R([a,c])$

7) Інтеграли від нерівних функцій

Нехай $\forall x \in [a,b], f(x) \leq g(x), f, g \in R([a,b])$. Тоді $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$

$S_p(f,\xi) \leq S_p(g,\xi) diam(P) \to 0$ Тоді $S_p(f,\xi) \to \int\limits_a^b f dx, S_p(g,\xi) \to \int\limits_a^b g dx$

Наслідок $f \geqslant 0, \int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0$

Зауваження.

$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ Але $\int\limits_a^b f(x)dx = 0 f(x) \geqslant 0 \exists x_0 f(x_0) > 0 (i',)$

$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \to$ *Зміна значення в деякій точці не впливає ні на інтегровність, ні на інтегра*

8) Інтеграл від додатньої функції

Нехай $f(x) \geqslant 0, forall x \in [a,b] \exists x_0 \in [a,b] f(x_0) > 0, f \in C(x_0) \Rightarrow$

$\int\limits_a^b f(x)dx \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx > 0$

Доведення. Нехай $y_0 = f(x_0).\epsilon\frac{1}{2}y_0.i\exists\delta > 0\forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \qquad - \varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$. Зокрема,
$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int\limits_a^b f(x)dx \geqslant \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (y_0 - \varepsilon)dx =$
$= (y_0 - \varepsilon)2\delta > 0$

9) Інтеграл від модуля f$\in R([a, b])$

$-|f(x)| \leq f(x) \ \geqslant |f(x)|dx \quad \forall x \in [a, b]$

Тоді з 7) отримаємо:

$$-\int\limits_a^b |f(x)|dx \leq \int\limits_a^b f(x|dx \leq \int\limits_a^b |f(x)dx|$$

$$-a \leq b \leq a \Leftrightarrow |b| \leq a$$

$$|\int\limits_a^b f(x)dx| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$$

(Перша) теорема про середнє. Нехай$f, g \in R([a, b])$ і $|f| < M, f \in (-M, M) \quad \forall x \in [a, b]g \geqslant 0$ або $g \geq 0$ на [a,b]. Тоді $\exists \in (-M, M)$, що $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = C\int\limits_a^b g(x)dx$ Або C$\in$ $[inf f(x), x \in [a, b], sup f(x), x \in [a, b]], f$ - неперервна, то $\exists\xi \in [a, b], \mu = f(\xi)$

Доведення. Будемо вважати, що $\forall x \in [a, b], g(x) \geqslant 0$. Тоді: $-Mg(x) \leq$

$f(x)g(x) \leq Mg(x)$ Отже, $-M\int\limits_a^b g(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int\limits_a^b g(x)dx$

$$-M \leq \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \leq M, \quad C \in [-M;M]$$

Тобто, для прикладу можему записати: $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx = C\int\limits_0^1 x^2dx$. (Питання в тому, як знайти C).

Наслідок (Теорема про середнє для неперервної функцій)

Якщо $f \in C([a,b]), \exists\xi \in [a,b] \int\limits_a^b f(x)g(x) = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx (ii.)$

Приклад 1. $\int\limits_0^1 x^20sinxdx = sin(\xi)\int\limits_0^1 x^20dx = \frac{sin(\xi)}{21} \in [0, \frac{sin1}{21}], \xi \in [0,1] \rightarrow sin\xi \in [0, sin1]$

Приклад 2. $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{(1-x)}}dx = \int\limits_0^1 x^2 \circ \frac{1}{sqrt(1-x)} = \xi^2\int\limits_0^1 \frac{1}{sqrt(1-x)} = 2\xi^2 \in [0,2]$.

Інший спосіб: $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} \circ x^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\xi}}\int\limits_0^1 x^2 = \frac{1}{3} \circ \frac{1}{\sqrt{1-x}} \in [\frac{1}{3} : +\infty]$

Отже, $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} = \in [\frac{1}{3}; 2]$

Тобто, цей спосіб дозволяє оцінити інтеграл.

Розглянемо такий приклад:

$$\int\limits_0^1 00\pi e^- x sinx dx = e^{-\xi}\int\limits_0^{100\pi} sinx = 0.$$

Але якщо розглянемо графік функції $e^- x sinx dx$, то побачимо, що сума площ під графіком і над графіком не дорівнює нулю (вона буде точно більше 0). Чому так відбувається: $sinx$ змінює знак на проміжку $[0; 100\pi]$ Вихід: $\int\limits_0^1 00\pi e^- x sinx dx = sin\xi \int_0^{100\pi} e^- x = sin(\xi)(1 - e^{-100\pi}) \in [-1; 1]$.

Нас лише бентежить, що від'ємне значення. Тому застосеємо властивість адитивності інтегралу:

$$\int\limits_0^{-100\pi} e^{-x} sinx dx = \int\limits_0^{\pi} e^{-x} sinx dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-x} sinx dx + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} e^{-x} sinx dx + ... + $$
$$+ \int\limits_{99\pi}^{100\pi} e^{-x} sinx dx \text{ (На цих проміжках } sinx \text{ є знакосталим).}$$

Тепер для кожного інтегралу застосуємо теорему про середнє:

$$\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} sinx dx = e^{-x} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} sinx dx = e^{-\xi} 2(-1)^k, \xi_k \in [k\pi, (k+1)\pi]$$

$$= 2e^{\xi_0} - 2e^{-\xi_1} + 2e^{-\xi_2} - ... - 2e^{-\xi_9 9}$$

Оскільки $\xi_{k+1} > \xi_k$, то $e^{-\xi+1} > e^{\xi_k}$ і тепер видно, що ця сума вже точно більше 0.

Інтеграл як функція верхньої межі (ІВФМ)

Ми можемо розглядати $\int\limits_a^t f(x)dx$ як функцію $\phi(t)$ від змінної t. Тобто кожному значенню $t \in [a, b]$ відповідає різне значення інтеграла $\int\limits_a^t f(x)dx$.

Теорема 1. Функція $\phi \in C([a, b])$.

Доведення. Нехай $t_n \to t \in [a,b]$. Треба довести, що $\phi(t_n) \to \phi(t)$. Іншими словами, $\int\limits_a^{t_n} f(x)dx = \int\limits_a^{t} f(x)dx$. $\int\limits_a^{t_n} f(x)dx - \int\limits_a^{t} f(x)dx \int\limits_t^{t_n} f(x)dx$ (за властивістю адитивності.) Оскільки $f \in R([a,b]), |f(x)| < M, |\int\limits_a^t f(x)dx| \leq \int\limits_a^t |f(x)|dx \leq \int\limits_a^t Mdx = M\int\limits_a^t = M(t_n - t) \to 0$ при $n \to \infty$.

Тобто якщо похідна функції була розривною, то сама функція буде неперервною (при інтегруванні властивості функції покращуються).

Теорема 2. Нехай $f \in C(x_0).x_0 \in [a,b]$. Тоді $\phi \in D(x_0)$ і $\phi'(x_0) = f(x_0)$.

Доведення $\phi'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0}$ (Це треба довести, що існує). Доведемо, що $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = f(x_0). \dfrac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \dfrac{1}{x - x_0}(\int a_x f(t)dt - \int a_{x_0} f(t)dt) - f(x_0) = \dfrac{1}{x - x_0}\int x_{0x} f(t)dt - \dfrac{1}{x - x_0} mathlarger \int x_{0x} f(x_0)dt = mathlarger \int x_{0x} f()dt$

$f \in C(x_0) \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Зафіксуємо $\epsilon > 0$. Оберемо x так, що $|x - x_0| < \delta$ Тоді $\forall t \in [x_0; x] \to t \in (x_0, x_0 + \delta) \to |f(t) - f(x_0)| < \epsilon. \dfrac{1}{x - x_0}|\int x_{0x} f(t) - f(x_0)| \leq \dfrac{1}{x - x_0}\int x_{0x} |f(t) - f(x_0)|dt \leq \dfrac{1}{|x - x_0|}\int x_{0x} \xi dt \leq \xi$ За означенням, $\dfrac{1}{x - x_0}\int x_{0x} |f(t) - f(x_0)|dt \to 0$

Якщо $f \in C([a,b])$, то $\phi(t)$ - первісна для f. Якщо f має на [a,b] не більш ніж зліченну кількість точок розриву, то $\phi-$ первісна в широкому розумінні.

Приклад 1. $\int\limits_a^x e^{-s} ds = -e^{-s}\Big|_a^x = (e^{-a} - e - x)' = e^{-x}$

$\phi(\varphi(x))' = \phi'(\varphi(x))\phi'(x)$

Приклад 2. $\int\limits_a^{x^{10}} e^{-s^2}ds = e^{(-x^{10})^2} \circ (x^{10'})' = 10x^9e^{-x^{20}}$

$$\left(\int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt\right)'_x = \left(\int\limits_{\psi(x)}^{a} f(t)dt + \int\limits_{a}^{\varphi(x)} f(t)dt\right)'_x = -\int\limits_{a}^{\psi(x)} f(t)dt + \int\limits_{a}^{\varphi(x)} f(t) =$$
$$= -f(\psi(x)\psi'(x) + f(\varphi(x))(\varphi'(x)) = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x)$$

Теорема(Інтегрування частинами) Нехай $f, g \in C^1([a, b])$. Тоді $\int\limits_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_b^a - \int\limits_a^b f(x)g'(x)dx.$

Доведення Дз ;)

Теорема(Заміна змінної). Нехай $f : [a, b] \to \mathbb{R}, [\alpha, \beta] \overset{\varphi}{\Leftrightarrow} \phi \in D([a, b]), \phi' \in R([a, b]).f \in C([a.b]).\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b$. Тоді $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

$\boxed{\text{Заміна } x = \varphi(\text{t})}$

Приклад 1.

$$\int\limits_0^2 x^3dx = \begin{vmatrix} x = \sqrt{t} = \varphi(t) \\ \varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{vmatrix} = \int\limits_0^4 (\sqrt{t})^3\tfrac{1}{2\sqrt{t}}dt$$

При підстановці обов'язково змініть межі інтегрування!

Приклад 2.

$$\int\limits_{-1}^1 x^2dx = \begin{vmatrix} x^2 = t \\ ... \end{vmatrix} = \cancel{\int\limits_1^1 ...dt = 0}$$

Так робити неправильно, бо у нас немає бієкції між (-1,1) і 1.(При заміні змінної в межах інтегрування має бути взаємно однозначна відповідність.)

Тому у цьому випадку просто застосовуємо формулу Ньютона-Лейбніца:
$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_{1}^{-1} = \frac{2}{3}$

Приклад 3. $\int\limits_{-1}^{1} x^2dx = \int\limits_{0}^{1} x^2dx + \int\limits_{-1}^{0} x^2dx = \left| \begin{matrix} x = \sqrt{t} \\ ... \end{matrix} \right| = + \left| \begin{matrix} x = -\sqrt{t} - 1 \\ ... \end{matrix} \right| =$

Застосування інтегралу Рімана для обчислень площ, довжин, об'ємів.

Функція проміжку (на вхід подається проміжок напр.площа, вихід - число)
$\phi = \{[a,b] | a,b \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$

Адитивна функція проміжку $\forall a,b \forall C \in [a,b] \phi([a,b]) = \phi([a,c]) + \phi([c,b])$
«««< HEAD **Теорема** (Про адитивну функцію проміжку) Нехай за-

дано функцію $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ і АФПФ ϕ на [a,b]. Якщо $\forall \alpha < \beta, \alpha < \beta, \alpha, \beta \in [a,b]$.

$$\inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)(\beta-\alpha) \leq \phi([\alpha,\beta]) \leq \sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)(\beta-\alpha)$$

то

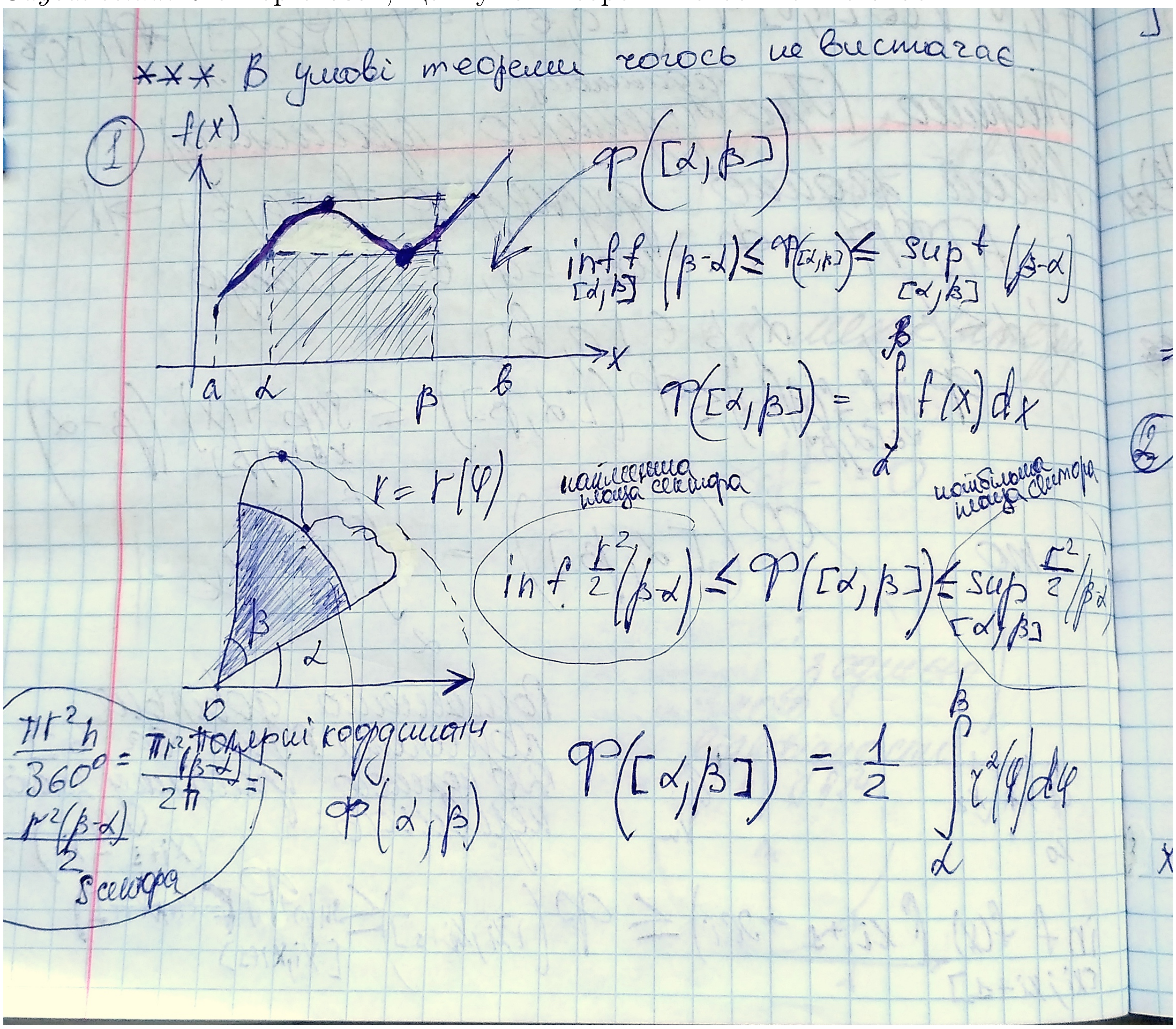
$$\phi([\alpha,\beta]) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Розглянемо довільне розбиття P на $[a,b]$. До кожного проміжку застосуємо нерівність:

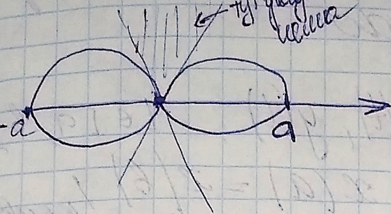
$$\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f(x)(x_{i+1}-x_i) \leq \phi([x_i,x_{i+1}]) \leq \sup_{[x_i,x_{i+1}]} f(x)(x_{i+1}-x_i)$$

$\forall i = 0...n-1$
$\forall P : \underline{S}_p(f) \leq \phi([a,b]) \leq \overline{S}_p(f)$
Якщо $diam\ P \to 0$, то $\underline{S}_p(f) \to I$ та $\overline{S}_p(f) \to I$
$\phi([a,b]) = I = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$

Зауваження. Лектор сказав, що в умові теореми чогось не вистачає.



② $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ $\qquad \varphi \in [0, 2\pi]$



$\varphi = \frac{\pi}{4}$
$a^2 \cos \pi$
$r = 0$
$\varphi = \frac{\pi}{2}$
$r = a^2 \cos \pi = -a^2$
$\varphi = \frac{3\pi}{4}$

Знайдемо площу усієї лемніскати:

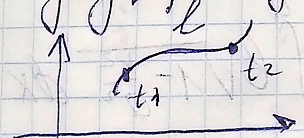
$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{4} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi} =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi = a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= a^2(1-0) = a^2$$

③ Визначимо довжину параметрично кривої:

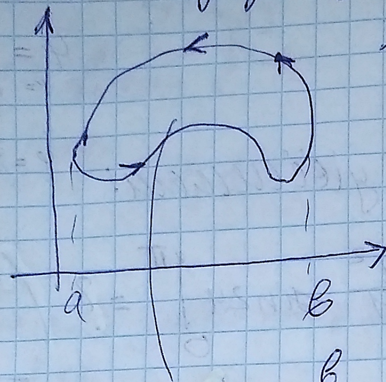
$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \text{залежність координат від часу} \qquad l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt$$



$x = t, \; y = y(t) = y = (x)$ (Довжина явно заданої кривої)

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2} \, dx$$

④ Площа фігури обмеженої парам. заданою формулою



$x(t),\ y(t)$. $t \in [a, b]$

$x(a) = x(b)$
$y(a) = y(b)$ (крива замкнена, $a = b$),

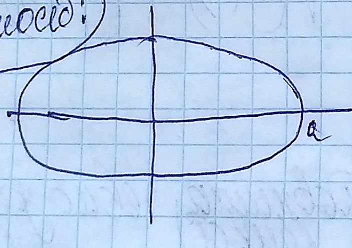
t відадов $(x(t), y(t))$

$$S = \int_a^b y'(t)x(t)\,dt = -\int_a^b y(t)x'(t)\,dt$$

! напрямок обходу проти годинникової стрілки

⑤ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - еліпс

1-й спосіб:



$$S = 4\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

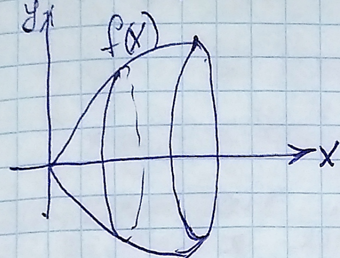
(шкільний варіант)

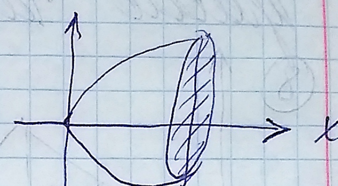
$x = a\cos\varphi$ $\qquad \varphi \in [0; 2\pi]$

$y = b\sin\varphi$

$$S = \int_0^{2\pi} ab\cos^2\varphi\, d\varphi = ab\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\varphi + 1}{2}\, d\varphi = \pi ab$$

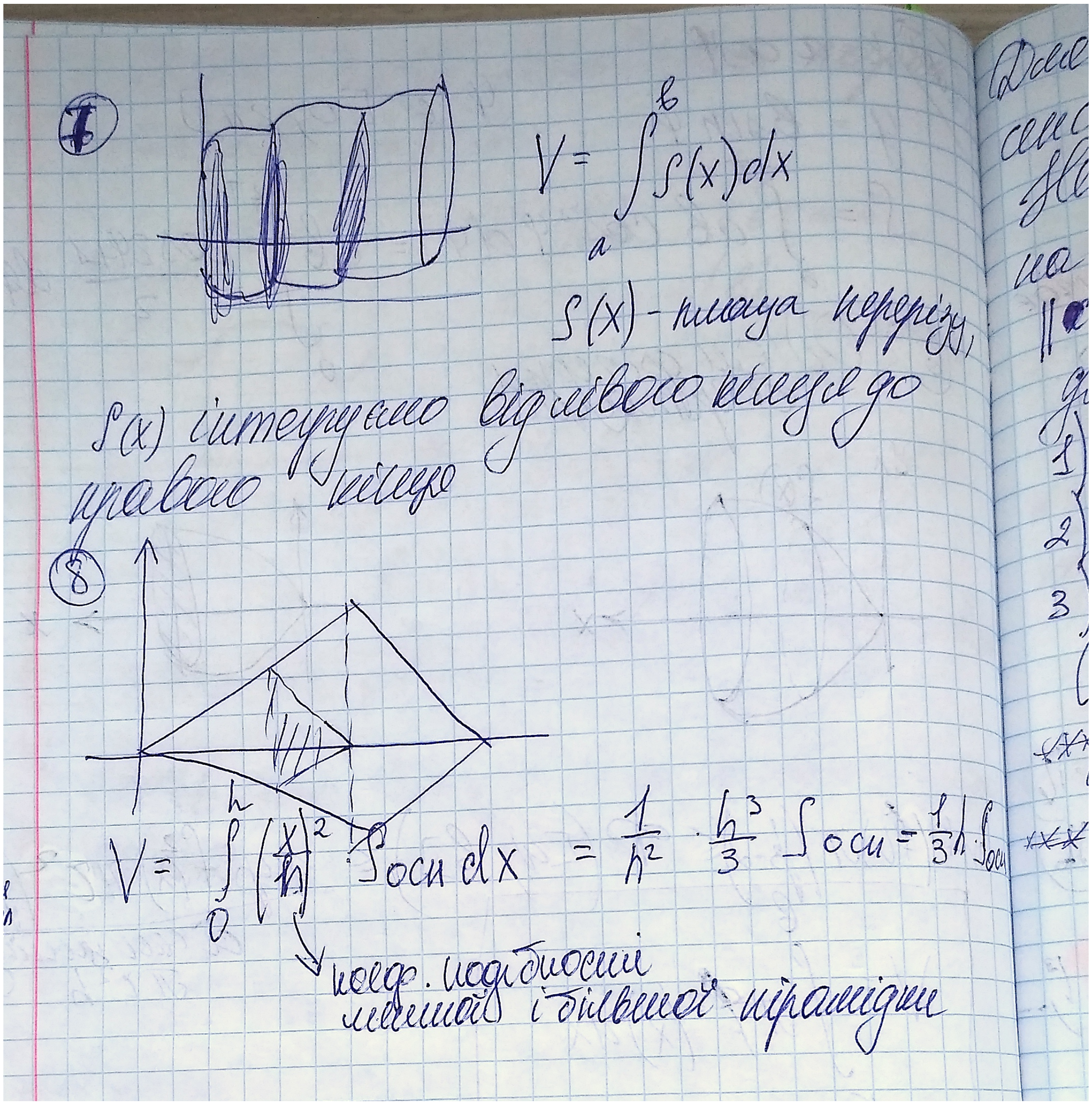
6) Об'єм фігури обертання





$$\inf f^2(x)\pi(\beta-\alpha) \le \Phi([a, b]) \le \underbrace{\sup f^2(x)\,\pi\,(\beta-\alpha)}_{\substack{\text{об'єм циліндра} \\ \pi r^2 h}}$$

$$\boxed{V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx}$$



=======

Нехай P — розбиття. $P_1 = P \cup \{x^*\}$.

$$\overline{S}_p(f) = \sum_{k=1}^{m} M_k \Delta x_k + M_{m+1}\Delta x_{m+1} + \sum_{k=m+2}^{n} M_k \Delta x_k$$

$$\overline{S}_{p_1}(f) = \sum_{k=1}^{m} M_k \Delta x_k + \sup_{x\in[x_m;x^*]} f(x)(x^* - x_m) + \sup_{x\in[x^*;x_{m+1}]} f(x)(x_{m+1} - x^*) + \sum_{k=m+2}^{n} M_k \Delta x_k$$

$$A \subset B \Longrightarrow \sup_A f \le \sup_B f$$

$$\sup_{x\in[x_m;x^*]} f(x) \le M_{m+1}$$

$$\sup_{x\in[x^*;x_{m+1}]} f(x) \le M_{m+1}$$

»»»> 5f31d61c42ed2880ed77edce41b66cab0eaf8166

$$\overline{S}_{p_1}(f) \le \sum_{k=1}^{m} M_k \Delta x_k + M_{m+1} \Delta x_{m+1} + \sum_{k=m+2}^{n} M_k \Delta x_k$$

$$\overline{S}_p \ge \overline{S}_{p+1}$$

Додаючи точку до розбиття, верхня (з супремами) інтегральна сума може зменшитися або залишитис такою ж.

««< HEAD