Конспекти лекцій з математичного аналізу Анікушина А.В. Модуль 4.

Автор тексту @vic778
Якщо знайшли помилки, пишіть мені в телеграм

A special thanks to @bezkorstanislav without whom these lecture notes would never have been created

February 2020

Інтеграл Рімана

Нехай f: [a,b] $\to \mathbb{R}$. Розіб'ємо [a,b] на n частин точками

a=$x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Сукупність $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ = P назвемо *розбиттям* [a,b]. Розглянемо довжини $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, ..., n$. Число $diam(P) = \max \Delta x_i$ назвемо *діаметром* розбиття.

Тепер на кожному проміжку $[x_{i-1}, x_i]$ оберемо довільну точку

$\xi \in [x_{i-1}, x_i]$. Множину $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ назвемо *сукупністю* проміжних точок, що віповідає розбиттю P.

Тепер утворимо таку суму

$$S_p(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

$S_p(f, \xi)$ називається інтегральною сумою Рімана для функції f на відрізку [a,b], що побудована за розбиттям P і сукупністю проміжних точок ξ.

$f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + f(\xi_4)(x_4 - x_3)$

(Інтегральна сума дорівнює сумі площ прямокутників).

Означення Число I називається *інтегралом Рімана* від функції f на [a,b], якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ diam(P) < \delta \Rightarrow \forall \xi \ |S_p(f \xi) - I| < \varepsilon$

Лема. (Необхідна умова інтегровності за Ріманом). Якщо функція f інтегровна за Ріманом, то f - обмежена на [a,b].

Якщо f - необмежена, то $\forall n \ \exists y_n : f(y_n) > n \ y_n k \to y$. Тоді при деякому $\xi \ S_p(f, \xi) \to \infty$.

Сукупність всіх функцій, інтегрованих за Ріманом, позначають $R([a, b])$.

Чи пов'язані між собою інтеграли Рімана та Ньютона-Лейбніца?

Теорема 1. Нехай f - інтегровна за Ньютоном-Лейбніцом. Тоді $\forall P$ $\exists \xi : \int\limits_a^b f(x)dx = S_p(f, \xi)$

Доведення $\int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} F'(\xi_{k+1})(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{k+1})(x_{k+1} - x_k)$$

Тобто, за кожним інтегралом Ньютона-Лейбніца стоїть інтеграл Рімана.

Теорема 2 Якщо існують інтеграли Рімана та Ньбтона-Лейбніца, то вони співпадають.

Доведення Нехай I - інтеграл Рімана. Тоді $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall P$: $diam(P) < \delta$, $\forall\xi|S_p(f,\xi) - I| < \varepsilon$. Тепер $\forall P\ \exists\xi_0\ \int\limits_a^b f(x)dx - S_p(f,\xi) = 0$.

Якщо $diam(P) < \delta$, то $|\int\limits_a^b f(x)dx - I| < \varepsilon$.

Отже, $\int\limits_a^b f(x)dx = I$.

Зауваженняя Можна показати, що всі неперервн функції інтегровні за Ріманом.

$\overline{S}_p(f) = \sum M_i(x_{i+1} - x_i)$, де $M_i = supf(x)x_i[x_i, x_{i+1}]$ називають *верхньою інтегральною сумою Дарбу.*

Аналогічно, $\underline{S}_p(f) = \sum M_i(x_{i+1} - x_i)$, де $M_i = inf(x)x_i[x_i, x_{i+1}]$ називають *нижньою інтегральною сумою Дарбу.*

Зрозуміло, що $\forall\xi\ \underline{S}_p(f) \leq S_p(f,\xi) \leq \overline{S}_p(f)$