

# Конспекти лекцій з математичного аналізу Анікушина А.В. Модуль 3.

Автор текста @bezkorstanislav

Если есть ошибки, пишите ему в телеграм

Афтар выражает благодарность @vic778 за многочисленные поправки

November 2019

# Диференціальне числення функції однієї змінної

## Означення похідної. Основні правила диференціювання

Нехай  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — деяка функція однієї змінної,  $x_0 \in D_f$ ,  $x_0 \in (D_f)'$ .

**Означення.** Якщо  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , то функція  $f$  називається **диференційованою** в точці  $x_0$ , а сама границя називається **похідною функції**  $f$  в точці  $x_0$ . І позначається  $f'(x_0)$  або  $\frac{df(x_0)}{dx}$ .

*Зауваження 1.* Для функції однієї змінної ми ототожнили диференційованість та існування похідної, що не завжди є правдою для функцій багатьох змінних.

*Зауваження 2.*

$$\begin{aligned}x - x_0 &= \Delta x \\f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= \Delta f(x_0)\end{aligned}$$

Отже, похідна дорівнює відношенню зміни приросту функції до приросту аргументу, що породжує цей приріст.

*Зауваження 3.* Із теорії границі функції, якщо функція  $f$  є диференційованою в точці  $x_0$ , то:

$$\begin{aligned}f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\iff \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(1) \iff \\&\iff f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\end{aligned}$$

Приріст функції є лінійним до приросту аргументу:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

Отже, якщо має місце рівність:

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0) \implies \exists f'(x_0) = A$$

**Теорема. (Необхідна умова диференційованості).** Функція  $f$  є диференційованою в  $x_0$  тільки тоді, коли  $f$  — неперервна в точці  $x_0$ . (Але не завжди неперервна функція є диференційованою)

**Доведення.** Щоб існувала похідна треба, щоб

$$f(x) - f(x_0) \rightarrow 0, x \rightarrow x_0$$

. З цього випливає, що  $f$  неперервна в точці  $x_0$ .

**Теорема. (Диференційованість композиції функцій).** Нехай дано функції  $f$  і  $g$ . Точка  $x_0 \in D_{f \circ g}$ ,  $x_0 \in (D_{f \circ g})'$ .

Якщо  $g$  диференційована в точці  $x_0$ , а  $f$  диференційована в точці  $y_0 = g(x_0)$ , то  $f \circ g$  диференційована в точці  $x_0$  і має місце рівність:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0)$$

**Доведення.**

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) &= f(g(x)) - f(g(x_0)) = f(y) - f(y_0) = \\ &= f'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0) = f'(y_0)(g(x) - g(x_0)) + o(y - y_0) = \\ &= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(y - y_0) = \\ &= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(g(x) - g(x_0)) = \\ &= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0)(1 + o(1))) + o(g(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f'(y_0)(g'(x_0)(1 + o(1))) + o(g(x_0) + o(1)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f'(y_0)g'(x_0)(1 + o(1)) + o(1) = f'(y_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

**Теорема. (Лінійність похідної).** Нехай  $f$  і  $g$  — диференційовані в точці  $x_0$ . Тоді  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

**Доведення.**

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(x_0)}{x - x_0} = \\
& \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha f(x) - \alpha f(x_0)}{x - x_0} + \frac{\beta g(x) - \beta g(x_0)}{x - x_0} = \\
& \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \beta \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)
\end{aligned}$$

**Теорема. Похідна добутку.** Нехай  $f$  і  $g$  диференційовані в точці  $x_0$ .

Тоді функція  $f \cdot g$  теж диференційована в точці  $x_0$ , причому справедливе наступне співвідношення:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

**Доведення.** За означенням:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\
& = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\
& = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \frac{g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} =
\end{aligned}$$

Оскільки  $f$  — диференційована в точці  $x_0$ , то  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ .

Абсолютно аналогічно  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$ .

Окрім того  $f$  — диференційована в точці  $x_0$ , а значить  $f$  — неперервна в точці  $x_0$ , а значить:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Отже:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \frac{g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} = \\
& = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)
\end{aligned}$$

**Теорема. Похідна частки.** Нехай  $f$  і  $g$  диференційовані в точці  $x_0$  і  $g(x_0) \neq 0$ .

Тоді,  $\frac{f}{g}$  теж диференційована в точці  $x_0$  і  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

**Доведення.** Аналогічно. Це доведення на дз :).

*Приклад.* Обчислити похідну від функції  $f$  в точці  $x_0$ .

1.  $f(x) = x^3$ .

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \dots = 3x_0^2$$

2.  $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 2 \\ 8, & x = 2 \end{cases}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(a)  $x_0 = 2$ .  $f'(x_0) = \frac{x^3 - 8}{x - 2} = 3 \cdot 4 = 12$ .

(b)  $x_0 \neq 2$ .  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = 3x_0^2$ .

3.  $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 2 \\ 7, & x = 2 \end{cases}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(a)  $x_0 \neq 2$ .  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = 3x_0^2$ .

(b)  $x_0 = 2$ .  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 7}{2 - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{0} = +\infty$ .

Похідна не може дорівнювати нескінченності, отже  $\nexists f'(2)$ .

4.  $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 2 \\ 12x - 16, & x < 2 \end{cases}$

Як **не треба** робити:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \geq 2 \\ 12, & x < 2 \end{cases}$$

Як **треба** робити:

Розглядаємо 3 випадки:

(a)  $x_0 > 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = 3x_0^2$$

(b)  $x_0 < 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 12$$

(c)  $x_0 = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 12$$

Отже, функція диференційована на всіх дійсній прямій.

**Теорема. (Про диференційованість оберненої функції).** Нехай функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — оборотна, то  $x_0 \in D_f$  і  $x_0 \in (D_f)'$ ,  $y_0 = f(x_0)$ . Якщо існує  $f'(x_0) \neq 0$  і обернена функція  $f^{-1}$  — неперервна в точці  $y_0$ , то вона диференційовна в цій точці. Якщо, крім того,  $y_0$  — гранична точка множини  $E_f = D_{f^{-1}}$ , то

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

**Доведення.** Лектор не дав:(

*Зауваження.* Функція  $f$  називається диференційованою на множині  $A$  якщо  $f$  має похідну в кожній точці  $x_0 \in A$ . Це позначається як  $f \in D(A)$ , де  $D(A)$  — множина диференційованих на  $A$  функцій.

### Односторонні похідні

Нехай  $x_0 \in (D_f \cap (-\infty, x_0))' \cap (D_f \cap (x_0, +\infty))' \cap D_f$ . Це рівносильно тому, що

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in D_f : x_n < x_0, x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty$$

Границя  $\lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  називається **лівосторонньою похідною**  $f$  в точці  $x_0$ . Позначаємо її як  $f'_{\text{л}}(x_0)$ .

$$\text{Аналогічно, } f'_{\text{п}}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*Приклади:*

$$1. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$f'_\text{л}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{0-0}{x-0} = 0$$

$$f'_\text{п}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{1-0}{x-0} = +\infty \implies \nexists f'_\text{п}(x_0)$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

$$f'_\text{л}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{0-0}{x-0} = 0$$

$$f'_\text{п}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{x-0}{x-0} = 1$$

**Теорема. (Критерій диференційованості.)**

Нехай  $x_0 \in (D_f \cap (-\infty, x_0))' \cap (D_f \cap (x_0, +\infty))' \cap D_f$ . Тоді:

$$\exists f'(x_0) \iff \exists f'_\text{л}(x_0), \exists f'_\text{п}(x_0), f'_\text{л}(x_0) = f'_\text{п}(x_0)$$

**Доведення.**

$$\begin{aligned} \exists f'(x_0) &\implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \iff \\ &\iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \exists \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\iff \exists f'_\text{п}(x_0), \exists f'_\text{л}(x_0), f'_\text{п}(x_0) = f'_\text{л}(x_0) \end{aligned}$$

*Зауваження.*

$$f'_\text{л}(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-} f'(x)$$

Розглянемо параметрично задану функцію  $y(x)$ :

$$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ x = \Psi(t) \end{cases}$$

$$y(x) = \varphi(\Psi^{-1}(x))$$

Часом виразити  $y$  через  $x$  може бути просто, як тут:

$$\begin{cases} y = t^3 \\ x = t^5 \end{cases} \implies y = x^{\frac{3}{5}}$$

Але буває, що не дуже просто:

$$\begin{cases} y = t^3 \\ x = t^5 + t \end{cases} \iff y = ???$$

Але ж **так** хочеться знайти похідну...

Припустимо, що  $\exists \varphi'$  і  $\exists (\Psi^{-1})'$  і  $\Psi' \neq 0$ .

$$\text{Тоді } y'_x = \varphi'(\Psi^{-1}(x)) \cdot (\Psi^{-1})'(x) = \varphi'(t) \frac{1}{\Psi'(t)} = \frac{\varphi'(t)}{\Psi'(t)}$$

*Приклад:*

1. Знайти похідну  $y_x$

$$\begin{cases} y = t^3 \\ x = t^5 \end{cases} \iff y = x^{\frac{3}{5}}$$

Ми уже знайшли, що  $y = x^{\frac{3}{5}}$ , отже:

$$y'_x = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} (t^5)^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} t^{-2}$$

Але давайте спробуємо *по-нормальному*, застосувавши нашу формулу:

$$y'_x = \frac{(t^3)'}{(t^5)'} = \frac{3t^2}{5t^4} = \frac{3}{5} t^{-2}$$

- 2.

$$\begin{cases} y = \cos^2 t \\ x = \sin^2 t \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{2 \cos t (-\sin t)}{2 \sin t \cos t} = -1$$

Як цікавий факт можна помітити, що  $y = 1 - x$ , де  $x \in [0; 1]$



## Похідні вищих порядків

Кажуть, що порядок похідної є вищим, якщо цей порядок більше за 1.

Нехай  $f \in D((a, b))$ . Припустимо, що  $f'$  є диференційованою в точці  $x_0 \in (a, b)$ . Тоді функція  $f$  є двічі диференційованою в точці  $x_0$ , а число  $(f')'(x_0)$  називається **другою похідною функції  $f$**  в точці  $x_0$ . Вона позначається як  $f''(x_0)$ .

*Наприклад:*

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 \\f'(x) &= 3x^2 \\f''(x) &= (f')'(x) = 6x\end{aligned}$$

Аналогічно у функції  $f$  існує  $n$ -та похідна  $f^{(n)}(x)$  на проміжку  $(a, b)$  і вона є диференційованою в точці  $x_0 \in (a, b)$ , того  $f$  має  $(n+1)$ -шу похідну в точці  $x_0$ .

$$f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'|_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{x - x_0}$$

*Приклад:*

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln x \\f'(x) &= \frac{1}{x} \\f''(x) &= \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \\f'''(x) &= \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = 2\frac{1}{x^3} \\f^{(4)}(x) &= -3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{x^4} = -6\frac{1}{x^4} \\f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{1}{x^n}\end{aligned}$$

Якщо  $f$  має  $n$ -ту похідну  $f^{(n)}(x)$  у кожній точці проміжку  $I$ , то кажуть, що  $f$  є  $n$  разів диференційованою і позначається це так:

$$f \in D^{(n)}(I)$$

Якщо при цьому  $f^{(n)} \in C(I)$ , то кажуть, що  $f \in C^{(n)}(I)$ .

$$C(I) \supset D(I) \supset C^{(1)}(I) \supset D^{(1)}(I) \supset C^{(2)}(I) \supset \dots$$

*Домашня робота.* Якщо у функції є похідна, чи обов'язково похідна неперервна?

Якщо  $\forall n \in \mathbb{N} \exists f^{(n)}$  на  $I$ , то кажуть, що  $f$  — нескінченно диференційована на  $I$ . Позначається так:

$$f \in D^\infty(I)$$

## Дві властивості $n$ -тої похідної

**Теорема. (Лінійність  $n$ -тої похідної).** Нехай  $f, g \in D^{(n)}(I)$ , тоді

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha f + \beta g \in D^{(n)}(I)$$

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$$

**Теорема. Формула Лейбніца.** Нехай  $f, g \in D^{(n)}(I)$ , тоді:

$$f \cdot g \in D^{(n)}(I)$$

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

**Доведення.** Це вам нам Д/З. (Підказка: воно доводиться так само, як формула бінома Ньютона).

*Приклад:*

1. Обчислити  $n$ -ту похідну від  $f(x) = x^2 \ln x$ .

$$\begin{aligned} (x^2 \ln x)^{(n)} &= C_n^0 (x^2)^{(n)} \ln x + C_n^1 (x^2)^{(n-1)} (\ln x)^{(1)} + C_n^2 (x^2)^{(n-2)} (\ln x)^{(2)} + \dots + \\ &+ \dots + C_n^{n-3} (x^2)^{(3)} (\ln x)^{(n-3)} + C_n^{n-2} (x^2)^{(2)} (\ln x)^{(n-2)} + C_n^{n-1} (x^2)^{(1)} (\ln x)^{(n-1)} + \\ &+ C_n^n (x^2)^{(0)} (\ln x)^{(n)} \end{aligned}$$

Тепер варто помітити, що:

$$\begin{aligned}
(x^2)^{(1)} &= 2x \\
(x^2)^{(2)} &= 2 \\
(x^2)^{(3)} &= 0 \\
(x^2)^{(n)} &= 0, \quad n > 3
\end{aligned}$$

Отже виходить, що наша сума дорівнює наступному:

$$C_n^{n-2} \frac{2(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}} + C_n^{n-1} \frac{2x(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}} + C_n^n \frac{x^2(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

2. Обчислити  $\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n)}$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(0)} &= \frac{1}{a-x} \\
\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(1)} &= \frac{1}{(a-x)^2} \\
\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(2)} &= \frac{2}{(a-x)^3} \\
\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n)} &= \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}
\end{aligned}$$

3. Обчислити  $n$ -ту похідну від  $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$ .

$$f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-x} \frac{1}{2-x} =$$

З формули Лейбніца:

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n-k)} \left(\frac{1}{2-x}\right)^{(k)}$$

А тепер використовуємо формулу з прикладу 2.

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \left( \frac{(n-k)!}{(1-x)^{n-k+1}} \right) \left( \frac{(k!)}{(2-x)^{k+1}} \right)$$

Цікавий факт: конкретно у цьому завданні можна було зробити набагато простіше:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} - \frac{n!}{(2-x)^{n+1}}$$

Як обчислити похідну вищого порядку від параметрично заданої функції?

Ось *приклад*:

$$\begin{cases} y = t^2 \\ x = t^3 + t \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{(t^2)'}{(t^3 + t)'} = \frac{2t}{3t^2 + 1}$$

Початкова система задавала залежність  $y$  від  $x$ . Тепер ми можемо побудувати систему залежності  $y'$  від  $x$ :

$$\begin{cases} y'_x(t) = \frac{2t}{3t^2+1} \\ x = t^3 + t \end{cases}$$

$$y''_x = (y'_x)' = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left( \frac{2t}{3t^2+1} \right)'}{(t^3 + t)'} = \frac{-6t^2 + 2}{(3t^2 + 1)^3}$$

Тепер ми можемо побудувати залежність  $y''_x$  від  $x$ :

$$\begin{cases} y''_x(t) = \frac{-6t^2+2}{(3t^2+1)^3} \\ x = t^3 + t \end{cases}$$

І так далі...

## Диференціал функції

Функція  $f$  називається диференційованою в точці  $x_0$ , якщо:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Нехай  $x - x_0 = \Delta x$ . Тоді:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x)$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + o(1)$$

Домножимо все на  $\Delta x$ :

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \cdot f'(x_0) + o(\Delta x)$$

Отже,  $\Delta x f'(x_0)$  — головна частина приросту функції.

**Означення.** Лінійне відображення

$$L(h) = f'(x_0) \cdot h$$

Називається **диференціалом функції**  $f$  в точці  $x_0$ . Це позначається так:

$$d_{x_0} f(h) = f'(x_0) \cdot h$$

*Приклад:*

$$f(x) = x^3, \quad x_0 = 1$$

$$f'(x_0) = 3$$

$$d_{x_0} f(h) = 3h$$

*Геометричний зміст диференціалу.* Диференціал задає рівняння прямої, яка паралельна дотичній до графіку функції у точці  $x_0$  і проходить через початок координат.

Розглянемо  $f(x) = x$ . Тоді:

$$f'(x_0) = 1, \quad \text{для } \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Тоді:

$$d_{x_0} x(h) = 1 \cdot h = h$$

А тепер нехай  $g$  — довільна диференційована в  $x_0$  функція:

$$(d_{x_0}g)(h) = g'(x_0) \cdot h = g'(x_0) \cdot d_{x_0}x(h)$$

Якщо ми приберемо  $h$ , отримуємо:

$$d_{x_0}g = g'(x_0) \cdot d_{x_0}x$$

Запис, який ще часто можна зустріти:

$$dg = g'(x_0)dx$$

*Зауваження.* Диференціал функції  $f$  у точці  $x_0$   $d_{x_0}f$  ще позначають  $df|_{x_0}$ ,  $df(x_0)$ .

Іноколи точку  $x_0$  взагалі не пишуть і пишуть просто  $df$ .

*Зауваження.* З теореми про лінійність похідної, похідної частки, добутку та суперпозиції випливають наступні правила дій з диференціалом:

$$d(f \pm g) = df \pm dg$$

$$d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$$

$$d(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot dg(x)$$

Ці властивості справедливі при виконанні умов відповідних теорем.

*Приклад:*

$$f = \ln(e^{u^2} + v)$$

$$\begin{aligned} df &= d\ln(e^{u^2} + v) = \frac{1}{e^{u^2} + v} \cdot d(e^{u^2} + v) = \frac{de^{u^2} + dv}{e^{u^2} + v} = \\ &= \frac{e^{u^2} \cdot du^2 + dv}{e^{u^2} + v} = \frac{e^{u^2} \cdot 2 \cdot u \cdot du + dv}{e^{u^2} + v} \end{aligned}$$

*Домашнє завдання.* Познайомитися з поняттям подвійної похідної та властивостями другого диференціалу.

(Лектор сказав, що такого на іспиті не буде і взагалі ця тема буде використана у другому семестрі, тож не зробиши цього багато не втратите.)

## Теорема про середні

*Означення.* Нехай  $x_0 \in D'_f \cap D_f$ .

Функція  $f$  має **локальний максимум** в точці  $x_0$ , якщо  $\exists$  деяких  $\varepsilon$ -окіл точки  $x_0$   $U_\varepsilon(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ :

$$\forall x \in (U_\varepsilon \cap D_f) \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Аналогічно означається локальний мінімум.

*Означення.* Якщо в точці  $x_0$   $f$  має локальний максимум і при цьому

$$\forall x \in (U_\varepsilon \cap D_f) \setminus \{x_0\} \quad f(x) < f(x_0)$$

Тоді кажуть, що в точці  $x_0$   $f$  має **строгий локальний максимум**.

**Теорема Ферма.** Нехай  $x_0 \in (D_f \cap (-\infty, x_0))' \cap (D_f \cap (x_0, +\infty))' \cap D_f$ .

Якщо  $f$  має локальний екстремум (тобто мінімум або максимум) в точці  $x_0$  і є диференційованою в точці  $x_0$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

**Доведення.** Згідно критерію диференційованості:

$$\exists f'(x_0) \iff \exists f'_\text{л}(x_0), f'_\text{п}(x_0), f'_\text{л}(x_0) = f'_\text{п}(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0 +} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Розглянемо випадок, коли  $f$  має локальний мінімум. Випадок з максимумом доводиться аналогічно.

Якщо  $f$  має локальний мінімум в точці  $x_0$ , то:

$$\forall x \in U_\varepsilon \cap D_f$$

$$f(x_0) \leq f(x) \implies f(x) - f(x_0) \geq 0$$

При  $x \rightarrow x_0 -$ :

$$x - x_0 < 0$$

$$f(x) - f(x_0) \geq 0, \text{ отже:}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \text{ для } \forall x \in (U_\varepsilon \cap D_f), \text{ отже:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Аналогічно

$$\lim_{x \rightarrow x_0 +} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$0 \geq \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Отже:

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \implies f'(x_0) = 0$$

*Зауваження.* Зворотнє твердження не є правдивим. Наприклад функція  $f = x^3$  не має екстремуму в  $x_0 = 0$ , але  $f'(0) = 0$ .

**Теорема Ролля.** Нехай  $f \in C([a, b]) \cap D((a, b))$ .

Якщо  $f(a) = f(b)$ , то  $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

**Доведення.** Використаємо теорему Вейерштрасса. Тоді  $f$  досягає на  $[a, b]$  свого максимального і мінімального значення. Нехай

$$f(x^*) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$f(x_*) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

Якщо хоча б одне з цих чисел  $x^*, x_*$  потрапляє на інтервал  $(a, b)$ , то виконано всі умови теореми Ферма, а отже  $f'$  в цій точці дорівнює нулю за теоремою Ферма.

Якщо обидві точки не належать інтервалу  $(a, b)$ , то  $\{x^*, x_*\} \subset \{a, b\}$ .

Зважаючи, що  $f(a) = f(b)$ , тоді

$$f(x^*) = f(x_*) \implies f \text{ є сталою на } [a, b]$$

Тоді  $\forall \xi \in (a, b) \ f'(\xi) = 0$

*Приклад:* Нехай  $f \in D([0, 1])$  і  $f(0) = f(1) = 0$ . Тоді  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  рівняння

$$f'(x) + \alpha f(x) = 0$$

Має розв'язок на  $[0, 1]$ . *Доведення.* Розглянемо функцію

$$F(x) = e^{\alpha x} f(x)$$

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 0$$



Тоді за теоремою Ролля  $\exists \xi \in [a, b]$ :

$$F'(\xi) = 0$$

$$F'(x) = e^{\alpha x} \cdot f'(x) + \alpha e^{\alpha x} \cdot f(x)$$

$$e^{\alpha \xi} \cdot f'(\xi) + \alpha e^{\alpha \xi} \cdot f(\xi) = 0$$

Поділимо вираз на  $e^{\alpha \xi}$ .

$$f'(\xi) + \alpha f(\xi) = 0$$

**Теорема Дарбу.** Нехай  $f \in C([a, b]) \cap D((a, b))$  і  $f'_\Pi(a) \cdot f'_\Pi(b) < 0$ . Тоді  $\exists \xi : f'(\xi) = 0$ .

**Доведення.** Використаємо теорему Вейерштрасса. Тоді  $f$  досягає на  $[a, b]$  свого максимального і мінімального значення. Нехай

$$f(x^*) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$f(x_*) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

Якщо хоча б одне з цих чисел  $x^*, x_*$  потрапляє на інтервал  $(a, b)$ , то виконано всі умови теореми Ферма, а отже  $f'$  в цій точці дорівнює нулю за теоремою Ферма.

Якщо обидві точки не належать інтервалу  $(a, b)$ , то  $\{x^*, x_*\} \subset \{a, b\}$ . Тепер у нас можливі два випадки:

- Якщо  $x^* = x_*$ , то за теоремою Ролля все працює.
- Якщо  $x^* \neq x_*$ .

Нехай  $x^* = a$ ,  $x_* = b$ , тоді:

$$f'_\Pi(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$x - a > 0, \quad f(x) - f(a) \leq 0 \implies$$

$$f'_\Pi(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

Аналогічно

$$f'_\Pi(b) = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq 0$$

Виходить, що:

$$f'_{\Pi}(a) \cdot f'_{\Lambda}(b) \geq 0$$

Що суперечить умові.

**Теорема про проміжні значення похідної.** Нехай  $f \in D([a, b])$ .  
Тоді  $f'$  приймає всі значення між  $f'_{\Pi}(a)$  та  $f'_{\Lambda}(b)$ .

**Доведення.** Нехай  $\alpha$  — дійсне число між  $f'_{\Pi}(a)$  та  $f'_{\Lambda}(b)$ . Розглянемо

$$F(x) = f(x) - \alpha \cdot x$$

$$F \in D([a, b])$$

$$F'_{\Pi}(a) = f'_{\Pi}(a) - \alpha < 0$$

$$F'_{\Lambda}(b) = f'_{\Lambda}(b) - \alpha > 0$$

Отже, ми точно знаємо, що

$$F'_{\Pi}(a) \cdot F'_{\Lambda}(b) < 0$$

Отже, всі умови теореми Дарбу виконано, отже:

$$\exists \xi : F'(\xi) = 0 \implies f'(\xi) - \alpha = 0 \implies f'(\xi) = \alpha$$

**Теорема Лагранжа.** Нехай  $f \in C([a, b]) \cap D((a, b))$ .

Тоді  $\exists \xi \in (a, b) :$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Доведення.** Розглянемо функцію

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$$

$$F \in C([a, b]) \cap D((a, b))$$

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a =$$

$$\frac{bf(a) - af(a) - af(b) + f(a)a}{b - a} =$$

$$\frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

Аналогічними перетвореннями отримуємо

$$F(b) = \frac{-f(b)a + f(a)b}{b - a}$$

Виходить, що  $F(a) = F(b)$

Отже, за теоремою Ролля  $\exists \xi \in (a, b) : F'(\xi) = 0$

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \implies$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

*Наслідок.* Нехай  $f \in D([a, b])$  і  $\forall x \in (a, b) \ f'(x) = 0$ , тоді

$$f = \text{const на } (a, b)$$

*Доведення.*  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ .

Використаємо теорему Лагранжа для  $[x_1, x_2]$

Тоді  $\exists \xi \in (x_1, x_2) :$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi)$$

$$f'(\xi) = 0 \implies f(x_1) - f(x_2) = 0 \implies f(x_1) = f(x_2)$$

*Приклад.* Довести, що для  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$|\arctg x - \arctg y| \leq |x - y|$$

$f(x) = \arctg x$  задовольняє усі умови теореми Лагранжа на  $[x, y]$ . Тоді:

$\exists \xi \in (x, y) :$

$$\frac{\arctg x - \arctg y}{x - y} = (\arctg x)'|_{x=\xi} = \frac{1}{1 + \xi^2}$$

$$\left| \frac{\arctg x - \arctg y}{x - y} \right| = \frac{1}{1 + \xi^2} \leq 1$$

Домноживши обидві частини на  $|x - y|$  отримаємо:

$$|\arctg x - \arctg y| \leq |x - y|$$

*Геометрична інтерпретація теореми Лагранжа.* Якщо  $f \in C([a, b]) \cap D((a, b))$ , то завжди можна провести дотичну до функції  $f$ , паралельну до відрізка, що сполучає точки  $(a, f(a))$  та  $(b, f(b))$ .

**Теорема Коші.** Нехай  $f, g \in C([a, b]) \cap D((a, b))$ . Тоді  $\exists \xi \in (a, b)$  :

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

**Доведення.** Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

1.  $F \in C([a, b]) \cap D((a, b))$
2.  $F(a) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - g(b)f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$

$$F(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = f(b)g(b) - f(a)g(b) + f(b)g(a) - g(b)f(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a) \text{ Отже, } F(a) = F(b).$$

Тоді за теоремою Ролля

$$\exists \xi : F'(\xi) = 0$$

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0 \iff$$

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

*Наслідок.* Якщо в умовах теореми Коші  $\forall x \in (a, b) \ g'(x) \neq 0$ , то

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Чому у нас не буде раптом ділення на нуль?

Очевидно, що з  $\forall x \in (a, b) \ g'(x) \neq 0$  слідує те, що  $g'(\xi) \neq 0$ .

Подивимось на  $g(b) - g(a)$ . Якби  $g(b) - g(a) = 0$ , то за теоремою Ролля  $\exists c \in (a, b) : g'(c) = 0$ , що суперечить умові.

**Теорема про неперервність похідної.** Нехай  $f \in (D((a, b)) \setminus \{x_0\})$ ,  $f \in C((a, b))$ ,  $x_0 \in (a, b)$ .

$$\text{Якщо } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \lambda \implies \exists f'(x_0) = \lambda$$

**Доведення.** Розглянемо проміжки  $[x_0, x]$ ,  $[x, x_0]$ .

- Розглянемо  $[x_0, x]$ . За теоремою Лагранжа:

$$\exists \xi \in [x_0, x] : f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$x_0 < \xi < x$$

Тож при  $x \rightarrow x_0$ ,  $\xi \rightarrow x_0$ . Отже:

$$\begin{aligned} f'(\xi) \rightarrow \lambda &\implies \\ \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lambda \end{aligned}$$

- Аналогічно, розглядаючи проміжок  $[x, x_0]$  доводимо, що

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda$$

**Теорема. Типи розривів похідної.**

Нехай  $f \in D((a, b))$  тоді  $\forall x \in (a, b)$ .

$f'$  або є неперервною в точці  $x$  або має розрив другого роду.

**Доведення.** Розглянемо

$$f'(x_0 + 0), f'(x_0 - 0)$$

1. Якщо  $f'(x - 0)$  або  $f'(x + 0)$  не існує або дорівнює нескінченності, то  $f'$  має розрив другого роду.
2. Якщо  $\exists f'(x - 0)$  і  $\exists f'(x + 0)$ .

Тоді за попередньою теоремою

$$\exists f'_\text{л}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f'(x), \exists f'_\text{п}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f'(x)$$

- Якщо  $f'_\text{л}(x) \neq f'_\text{п}(x)$ . Тоді  $\nexists f'(x_0)$ . Протиріччя.
- Якщо  $f'_\text{л}(x) = f'_\text{п}(x) \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ . Тоді за попередньою теоремою  $\exists f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ . Отже,  $f'$  — неперервна в точці  $x_0$ .

Приклад.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

При  $x \neq 0$ :

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

Інакше:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

Чи буде  $f'$  неперервна в точці  $x_0$ ?

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) = - \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} = \\ &= - \lim_{y \rightarrow \infty} \cos y = \text{не існує} \end{aligned}$$

Отже  $f'(x)$  має розрив другого роду у точці 0.

**Правило Лопіталя.** Нехай  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Теорема.** Нехай  $f, g \in D((a, b))$  і при цьому:

1.

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$$

2.

$$\exists \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$$

3.

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\text{Тоді } \exists \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

**Доведення.** Доозначимо функції  $f$  і  $g$  у точці  $a$ . Розглянемо

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ f(x), & x \in (a, b) \end{cases}$$

Аналогічно

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ g(x), & x \in (a, b) \end{cases}$$

$F$  та  $G$  задовольняють умови наслідку з теореми Коші на проміжку  $[a, x]$ ,  $x \in (a, b)$ . Тоді  $\exists \xi$ :

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \implies \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$x \rightarrow a+, \quad a < \xi < x, \implies \xi \rightarrow a+ \implies$$

$$\implies \exists \lim_{\xi \rightarrow a+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \implies \exists \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Зауважте, що слідування йде тільки в одну сторону.

Аналогічна теорема при  $x \rightarrow +\infty$ : **Теорема.**  $f, g : [a, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g \in D((a, +\infty))$ .

1.

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

2.

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$$

3.

$$\forall x \in (a, +\infty) \quad g'(x) \neq 0$$

$$\text{Тоді } \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

*Зауваження.* Умову  $\lim f = \lim g = 0$  можна замінити на  $\lim f = \lim g = \infty$  і правило Лопітала теж буде виконуватись. Головне, щоб функції прямували до 0 або  $\infty$  одночасно.

*Приклад:*

•

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{e^x} = 1$$

•

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

•

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

### Формула Тейлора

Нехай  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f = (a, b)$ .

Многочлен

$$\begin{aligned} P_{n,x}(x_0) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

називається **многочленом Тейлора**  $n$ -того порядку для функції  $f$  в точці  $x_0$ .

$$r(x) = f(x) - P(x)$$

Називається **залишковим членом**.

$$f(x) = P(x) + r(x)$$

**Теорема. Формула Тейлора із залишкоим членом у формі Пеано.**

Нехай  $f \in D^{(n-1)}((a, b)) \cap D^{(n)}(\{x_0\})$ ,  $x_0, x \in (a, b)$ . Тоді при  $x \rightarrow x_0$ :

$$r(x) = o((x - x_0)^n)$$

Тобто:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

**Доведення.**

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k)'}{((x - x_0)^n)'} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \left( \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)' = \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} (x - x_0)^{k-1}, \text{ отже:} \\
& \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k)' }{((x - x_0)^n)'} = \\
& = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - \frac{f''(x_0)}{1!} (x - x_0) - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1}}{n(x - x_0)^{n-1}} = \\
& = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f'(x) - f'(x_0) - \frac{f''(x_0)}{1!} (x - x_0) - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1})'}{(n(x - x_0)^{n-1})'} = \\
& = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{n-1}(x) - f^{n-1}(x_0) - \frac{f^n(x_0)}{1} (x - x_0)}{n!(x - x_0)} = \\
& = \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0) \right)
\end{aligned}$$

Оскільки  $f \in D^{(n+1)}(\{x_0\})$ , то:

$$\exists f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

Отже:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0) \right) = \\
& \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} (f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)) = 0
\end{aligned}$$

Доведено.

**Теорема. Формула Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа.** Нехай  $f \in D^{(n+1)}((a, b))$ ,  $x, x_0 \in (a, b)$ , тоді:

$$\exists \xi \in (x_0, x) :$$

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Тобто

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

**Теорема. Формула Тейлора із залишковим членом у формі Коші.**

$$\exists \xi \in (x, x_0) : \\ r(x) = \frac{\theta^n}{n!} (x - x_0)^n f^{(n+1)}(\xi)$$

Що таке  $\theta$ ? Це деяке число, яке належить проміжку  $[0, 1]$ . Завдяки цьому виходить, що:

$$\theta x_0 + (1 - \theta)x \in [x, x_0]$$

Оскільки  $\xi \in (x, x_0)$ , то:

$$\xi = \theta x_0 + (1 - \theta)x, \quad \theta \in (0, 1)$$

*Домашнє завдання:*

1. Виразити  $\theta$  через  $\xi$  і позбавити форму Коші від неї.
2. Прочитати доведення цих двох теорем.
3. Послабити умову теореми.

*Приклад:* При  $x_0 = 0$ :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + r(x), \quad x \in [0, 1]$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin^{(4)}(\xi)}{4!} x^4 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin \xi}{4!} x^4$$

$$\left| \sin x - \left( x - \frac{x^3}{3!} \right) \right| = \left| \frac{\sin \xi}{4!} x^4 \right| \leq \frac{1}{24}$$

### Дослідження функцій за допомогою похідних

Нехай  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f = (a, b)$ .

**Теорема.** Нехай  $f \in D((a, b))$ . Тоді:

1.  $f \nearrow$  (нестрого зростає) на  $(a, b) \iff \forall x \in (a, b) \ f'(x) \geq 0$ .
2.  $f \searrow$  (нестрого спадає) на  $(a, b) \iff \forall x \in (a, b) \ f'(x) \leq 0$ .
3.  $f \uparrow$  (строго зростає) на  $(a, b) \iff \forall x \in (a, b) \ f'(x) > 0$ .

4.  $f \downarrow$  (строго спадає) на  $(a, b) \iff \forall x \in (a, b) \ f'(x) < 0$ .

**Доведення.**

1.  $\implies$ .  $\forall x_0 \in (a, b)$ :

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Оскільки функція нестрого зростає, то при  $x > x_0$ :

$$f(x) - f(x_0) \geq 0, \ x - x_0 > 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Аналогічно:

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Отже й  $f'(x) \geq 0$ .

$\Leftarrow$ .  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ : Нехай  $x_1 < x_2$ . За теоремою Лагранжа можна записати наступне:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Оскільки  $f'(\xi) \geq 0$ ,  $x_2 - x_1 > 0 \implies f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$

Отже, при  $x_1 < x_2$   $f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \iff f(x_2) \geq f(x_1)$ , що й треба було довести.

2. Доводиться абсолютно аналогічно з попереднім.
3.  $\Leftarrow$ . Доводиться аналогічно з 1. Але, обернена твердження ( $\implies$ ) тепер не є правдою, бо, наприклад:

$f(x) = x^3$  — строго зростає на  $\mathbb{R}$ , але:

$$f'(x) = 2x^2 \implies f'(0) = 0$$

Отже, навіть якщо функція строго зростає,  $f'$  все одно може набувати нульові значення.

4. Абсолютно аналогічно з попереднім.

**Означення.** Функція  $f$  називається зростаючою в точці  $x_0$ , якщо:

$$\exists \varepsilon > 0$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \quad f(x) > f(x_0)$$

$$\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \quad f(x) < f(x_0)$$

Аналогічно означається спадна, неспадна та зростаюча функції у точці

**Теорема.** Якщо  $f'(x_0) > 0$ , то функція зростає в точці  $x_0$ .

**Доведення.**

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \implies$$

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Отже:

$$x < x_0 \implies f(x) - f(x_0) < 0 \iff f(x) < f(x_0)$$

$$x > x_0 \implies f(x) - f(x_0) > 0 \iff f(x) > f(x_0)$$

### Доведення рівностей та нерівностей

1. Довести, що  $\forall a, b \quad a^2 + b^2 = (a - b)(a + b)$ .

Розглянемо функцію  $f(x) = x^2 - b^2 - (x - b)(x + b)$ . Тепер нам треба довести, що  $\forall x \quad f(x) = 0$ .

$$f'(x) = 2x - (x + b + x - b) = 2x - 2x = 0 \implies f(x) = \text{const} \in \mathbb{R}$$

Тепер нам достатньо перевірити значення функції в будь-якій точці. Нехай це буде точка  $b$ :

$$f(b) = b^2 - b^2 - (b - b)(b + b) = 0 - 0 = 0$$

2. Довести, що

- $\sin x \leq x, \quad x > 0$
- $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad x > 0$

- $f(x) = x - \sin x$ . Треба довести, що  $f(x) \geq 0$  для всіх  $x > 0$ .

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \implies f(x) \text{ — неспадна. Отже:}$$

$$\min f(x) = f(0)$$

$$\forall x \geq 0 \quad f(x) \geq f(0) = 0$$

- Треба довести, що  $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} > 0$ ,  $x > 0$ .

$$f'(x) = e^x - 1 - x$$

Позначимо нову функцію  $g(x)$  наступним чином:

$$g(x) = e^x - 1 - x$$

$$g'(x) = e^x - 1 > 0 \quad \forall x > 0$$

Це означає, що  $g'(x) > 0 \implies g(x)$  — строго монотонно зростаюча на проміжку  $(0, +\infty)$ .

$$g(x) \in C(\mathbb{R})$$

$$g(x) > g(0) = 0$$

$$\text{Отже } g(x) > 0 \quad \forall x > 0 \implies f'(x) > 0 \quad \forall x > 0.$$

$$f(x) \in C(\mathbb{R}), \text{ а отже:}$$

$$f(x) > f(0) = 1 - 1 - 0 - 0 = 0 \quad \forall x > 0$$

3. Довести, що

$$\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), \quad x > 0$$

Є два способи:

•

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2}{2x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Отже, лишилося лише довести, що  $f'(x) < 0$  при  $x > 0$ . Це ми можемо зробити аналогічно з минулими прикладами.

- Замінімо  $x$  на іншу змінну  $y$  наступним чином:

$$y = \frac{1}{x} \in (0, +\infty)$$

$$\frac{2}{\frac{2}{y} + 1} < \ln(1 + y) \iff \ln(1 + y) > \frac{2y}{2 + y}$$

$$f(y) = \ln(1 + y) - \frac{2y}{2 + y}$$

$$f(0) = 0$$

Отже, нам варто довести, що  $f'(y) > 0$  при  $y > 0$ .

**Означення.** Кажуть, що  $f$  змінює знак з  $+$  на  $-$  в точці  $x_0$ , якщо:

$$\exists \varepsilon > 0 :$$

$$\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \quad f(x) > 0$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \quad f(x) < 0$$

Аналогічно означається зміна знаку з  $-$  на  $+$ .

*Наприклад,*

- $x^3$  змінює знак з мінуса на плюс у точці  $0$ .
- $\sin x$  змінює знак з плюса на мінус у точці  $\frac{\pi}{2}$ .
- Функція  $x^2 \sin(\frac{1}{x})$  в точці  $x_0 = 0$  не змінює знак, бо ми не можемо визначити точне  $\varepsilon$  з означення зміни знаку. Хоча, звичайно, ця функція не є знакосталою.

**Означення.** Точка  $x_0$  називається стаціонарною, якщо  $f'(x_0) = 0$ .

**Теорема. (Перша достатня умова екстремуму).** Нехай  $f \in D(I_\varepsilon(x_0)) \setminus \{x_0\}$  і  $f \in C(\{x_0\})$ .

Якщо  $f'$  в точці  $x_0$  змінює знак з мінуса на плюс, то  $f$  має в точці  $x_0$  локальний мінімум, а якщо  $f$  змінює знак з плюса на мінус, то в точці  $x_0$   $f$  має локальний максимум.

**Доведення.**  $\forall x \in I_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$  розглянемо проміжок  $[x_0, x]$ . За теоремою Лагранжа:

$$\exists \xi \in (x_0, x) :$$

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$$

Якщо  $x < x_0 \implies x - x_0 < 0$ , при цьому на проміжку  $(x, x_0)$   $f'$  приймає значення менше 0, отже  $f'(\xi) < 0$ .

$$f'(\xi) < 0, x - x_0 < 0 \implies f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) > 0$$

. Отже,  $f(x) > f(x_0)$ .

Аналогічно доводиться, що на проміжку  $(x_0, x_0 + \varepsilon)$   $f(x) > f(x_0)$ .

Отже,  $\forall x \in I_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$   $f(x) - f(x_0) > 0$ , тобто  $x_0$  — точка локального максимуму.

*Цікавий випадок:* До функції

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Дану теорему при  $x_0 = 0$  застосувати не можемо, бо не можемо сказати, як вона змінює знак у точці 0.

*До речі* лектор сказав, що ця функція це якийсь **жарт**, тож її на модулі **не буде**.

**Теорема. (Друга достатня умова екстремуму).** Нехай в стаціонарній точці  $x_0$   $\exists f''(x_0)$ .

- Якщо  $f''(x_0) > 0$ , то в точці  $x_0$  функція  $f$  має локальний мінімум.
- Якщо  $f''(x_0) < 0$ , то в точці  $x_0$  функція  $f$  має локальний максимум.

**Доведення.** Доведемо для випадку  $f''(x_0) > 0$ . Випадок  $f''(x_0) < 0$  доводиться аналогічно.

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Якщо для деякої функції  $\Phi \lim_{x \rightarrow x_0} \Phi(x) > 0$ , то

$$\exists \varepsilon : \forall x \in I_\varepsilon(x_0) \quad \Phi(x) > 0$$

У нашому випадку виходить, що:

$$\exists \varepsilon : \forall x \in I_\varepsilon(x_0) \quad \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

- Якщо  $x > x_0$ , то  $f'(x) - f'(x_0) > 0$
- Якщо  $x < x_0$ , то  $f'(x) - f'(x_0) < 0$

Оскільки  $x_0$  — стаціонарна точка, то  $f'(x_0) = 0$ , отже:

- Якщо  $x > x_0$ , то  $f'(x) > 0$
- Якщо  $x < x_0$ , то  $f'(x) < 0$

Отже,  $f'$  змінює знак з  $-$  на  $+$  у точці  $x_0$ . З попередньої теореми отримуємо, що в  $f$  має у точці  $x_0$  локальний мінімум.

*Домашня робота.* Лектор сказав, щоб ми самі розібрали Третю достатню умову екстремуму, та усе що пов'язане з крайовими екстремумами.