

Конспекти лекцій з математичного аналізу
Анікушина А.В. Модуль 5.

Автор тексту @vic778

Якщо знайшли помилки, пишіть мені в телеграм

A special thanks to @bezkorstanislav without whom these lecture notes would never have been created

February 2020

Інтеграл Рімана

Нехай $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. Розб'ємо $[a,b]$ на n частин точками $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Сукупність $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} = P$ назовемо *розділением* $[a,b]$. Розглянемо довжини $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, n$. Число $diam(P) = \max \Delta x_i$ назовемо *діаметром* розділення.

Тепер на кожному проміжку $[x_{i-1}, x_i]$ оберемо довільну точку $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$. Множину $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ назовемо *сукупністю* проміжних точок, що віповідає розділенню P .

Тепер утворимо таку суму

$$S_p(f, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

$S_p(f, \xi)$ називається інтегральною сумою Рімана для функції f на відрізку $[a,b]$, що побудована за розділенням P і сукупністю проміжних точок ξ .

$f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + f(\xi_4)(x_4 - x_3)$
(Інтегральна сума дорівнює сумі площ прямокутників).

Означення Число I називається *інтегралом Рімана* від функції f на $[a,b]$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ diam(P) < \delta \Rightarrow \forall \xi |S_p(f, \xi) - I| < \varepsilon$

Лема. (Необхідна умова інтегровності за Ріманом). Якщо функція f інтегровна за Ріманом, то f - обмежена на $[a,b]$.

Якщо f - необмежена, то $\forall n \exists y_n : f(y_n) > n y_n k \rightarrow y$. Тоді при деякому $\xi S_p(f, \xi) \rightarrow \infty$.

Сукупність всіх функцій, інтегрованих за Ріманом, позначають $R([a, b])$.

Чи пов'язані між собою інтеграли Рімана та Ньютона-Лейбніца?

Теорема 1. Нехай f - інтегровна за Ньютоном-Лейбніцом. Тоді $\forall P \exists \xi : \int_a^b f(x) dx = S_p(f, \xi)$

Доведення $\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} F'(\xi_{k+1})(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{k+1})(x_{k+1} - x_k)$$

Тобто, за кожним інтегралом Ньютона-Лейбніца стоїть інтеграл Рімана.

Теорема 2 Якщо існують інтеграли Рімана та Ньютона-Лейбніца, то вони співпадають.

Доведення Нехай I - інтеграл Рімана. Тоді $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall P : diam(P) < \delta, \forall \xi |S_p(f, \xi) - I| < \varepsilon$. Тепер $\forall P \exists \xi_0 \int_a^b f(x)dx - S_p(f, \xi) = 0$.

Якщо $diam(P) < \delta$, то $|\int_a^b f(x)dx - I| < \varepsilon$.

Отже, $\int_a^b f(x)dx = I$.

Заваження Можна показати, що всі неперервні функції інтегровні за Ріманом.

$\bar{S}_p(f) = \sum M_i(x_{i+1} - x_i)$, де $M_i = \sup f(x)x_i[x_i, x_{i+1}]$ називають верхньою інтегральною сумою Дарбу.

Аналогічно, $\underline{S}_p(f) = \sum M_i(x_{i+1} - x_i)$, де $M_i = \inf f(x)x_i[x_i, x_{i+1}]$ називають нижньою інтегральною сумою Дарбу.

Зрозуміло, що $\forall \xi \underline{S}_p(f) \leq S_p(f, \xi) \leq \bar{S}_p(f)$

Нехай P - розбиття. $P_1 = P \cup \{x^*\}$.

$$\bar{S}_p(f) = \sum_{k=1}^m M_k \Delta x_k + M_{m+1} \Delta x_{m+1} + \sum_{k=m+2}^n M_k \Delta x_k$$

$$\bar{S}_{p1}(f) = \sum_{k=1}^m M_k \Delta x_k + \sup_{x \in [x_m; x^*]} f(x)(x^* - x_m) + \sup_{x \in [x^*; x_{m+1}]} f(x)(x_{m+1} - x^*) + \sum_{k=m+2}^n M_k \Delta x_k$$

$$A \subset B \implies \sup_A f \leq \sup_B f$$

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in [x_m; x^*]} f(x) &\leq M_{m+1} \\
\sup_{x \in [x^*; x_{m+1}]} f(x) &\leq M_{m+1} \\
\overline{S}_{p_1}(f) &\leq \sum_{k=1}^m M_k \Delta x_k + M_{m+1} \Delta x_{m+1} + \sum_{k=m+2}^n M_k \Delta x_k \\
\overline{S}_p &\geq \overline{S}_{p+1}
\end{aligned}$$

Додаючи точку до розбиття, верхня (з супремами) інтегральна сума може зменшитися або залишитися такою ж.

Тому зрозуміло, що

$$P_1 \subset P_2 \implies \overline{S}_{p_1} \geq \overline{S}_{p_2}, \underline{S}_{p_1} \leq \underline{S}_{p_2}$$

Наслідок:

$$\forall P_1, P_2 \overline{S}_{P_1}(f) \geq \underline{S}_{P_2}(f)$$

Розглянемо розбиття $P = P_1 \cup P_2$.

$$\overline{S}_{P_1} \geq \overline{S}_p \text{ (з попередньої теореми } P_1 \subset P_2 \implies \overline{S}_{P_1} \geq \overline{S}_p)$$

$$\underline{S}_P \geq \underline{S}_{P_2}$$

$$\overline{S}_{P_1} \geq \overline{S}_P \geq \underline{S}_P \geq \underline{S}_{P_2}$$

$$\overline{S}_{P_1} \geq \underline{S}_{P_2}$$

Що й треба було довести.

Розглянемо всі можливі верхні суми. $\overline{S}_P(f)$. Ця множина є обмеженою знизу (Необхідна умова інтегрованості за Ріманом). Тому існує $\inf_P \overline{S}_P(f) = \underline{\int} f dx$. Назовемо це число верхнім інтегралом Дербу. Аналогічно нижній інтеграл Дербу $\underline{\int} f dx = \sup_P \underline{S}_P(f)$.

Розглянемо нерівність $\overline{S}_{P_1}(f) \geq \underline{S}_{P_2}(f)$. Зафіксуємо P_2 . Тоді

$$\forall P_1 \overline{S}_{P_1}(f) \geq \underline{S}_{P_2} \implies \inf \overline{S}_{P_1}(f) \geq \underline{S}_{P_2}(f)$$

(Всі елементи множини $\overline{S}_{P_1}(f)$ за фіксоване число $\geq \inf \overline{S}_{P_1}(f)$ за інфінум.)

Аналогічно для P_2 та супремума:

Зафіксуємо P_1 . Тоді:

$$\forall P_2 \underline{S}_{P_2}(f) \leq \overline{S}_{P_1}(f) \implies \sup \overline{S}_{P_1}(f) \leq \underline{S}_{P_1}(f)$$

Звідси $\overline{\int} f dx \geq \underline{\int} f dx$.

Означення. Функція f називається інтегровною за Дарбу, якщо $\overline{\int} f dx = \underline{\int} f dx$. (Найкраще наближення зверху = найкраще наближення знизу).

Теорема. (Критерій інтегрованості за Дарбу). Функція f є інтегровною за Дарбу тоді й тільки тоді, коли:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists P : |\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f)| < \varepsilon$$

(Можна підібрати число, для якого верхня і нижня інтегральні суми відрізняються на мале число)

Доведення

• \Leftarrow .

$$\begin{aligned} \underline{S}_P(f) dx &\leq \overline{\int} f dx \leq \overline{S}_P(f) \\ \underline{S}_P(f) &\leq \underline{\int} f dx \leq \overline{\int} f dx \leq \overline{S}_P(f) \\ \varepsilon &\geq \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) \geq \overline{\int} f dx - \underline{\int} f dx \geq 0 \end{aligned}$$

Отже, $\overline{\int} f dx - \underline{\int} f dx = 0$.

• \Rightarrow .

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Тоді супремум $\inf \overline{S}_P(f) = \overline{\int} f dx$ є точкою дотику в будь-якому ε -околі множини.

$$\begin{aligned} \exists P_1 \overline{\int} f dx &\leq \overline{S}_{P_1}(f) \leq \overline{\int} f dx + \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists P_2 \underline{\int} f dx &\leq \underline{S}_{P_2}(f) \leq \underline{\int} f dx \end{aligned}$$

Розглянемо $P = P_1 \cup P_2$. Збільшуємо розбиття, збільшуємо точність, верхня інтегральна сума збільшується (або залишається такою ж).

$$0 \leq \bar{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) \leq \bar{S}_{P_1} - \underline{S}_{P_2}(f) < \varepsilon$$

Що і треба було довести.

Теорема. Функція f є інтегрованою за Дарбу тоді й тільки тоді, коли f інтегровна за Ріманом і їх інтеграли співпадають.

Приклад 1.

$$\begin{aligned} 0 = x_0, \quad x_k = \frac{1}{n}, \quad x_n = 1 \\ \bar{S}_P(f) = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} \\ M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} x = x_k = \frac{k}{n} \\ \underline{S}_P(f) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n x_k + \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n} \cdot \frac{1}{n} \\ \bar{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$\frac{1}{n}$ може бути як завгодно мале, а тому $x \in R([0, 1])$ (інтегрована за Ріманом).

Приклад 2.

$$D(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Функцію розглядаємо на проміжку $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} \bar{S}_P(D) &= \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [...] } D(x) = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = 1 \\ \underline{S}_P(D) &= \sum_{k=1}^n (\inf_{x \in [...] } (D(x)) \cdot \Delta x_k) = 0 \\ \forall p : \bar{S}_p(D) - \underline{S}_p(D) &> \frac{1}{13} = \varepsilon \end{aligned}$$

Отже, $D \notin R([0, 1])$.

Множини Лебегової міри нуля

Означення Множина $A \subset \mathbb{R}$ має міру нуль, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists$ не більше скінчено кількість $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots$ такі, що:

1. $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (\alpha_k, \beta_k)$ (Множину можна покрити інтервалами, що є завгодно малими)
2. $\sum(\beta_k - \alpha_k) < \varepsilon$

Приклад:

1. $A = \{x_0\}$
2. $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
3. $A = (0; \frac{1}{2})$ При $\varepsilon < \frac{1}{2}$ покритий не існує. (Якщо є неперервна множина, з більше, ніж однієї точки), A не має точки нуль.
4. $A = \{x_1, x_2, \dots\}$

Властивості:

1. Якщо A – зліченна, або скінчена, то A має міру нуль.
2. Якщо $\exists \alpha, \beta : (\alpha, \beta) \subset A \implies A$ не має міру нуль.
3. Незліченні (континуальні) множини МОЖУТЬ МАТИ міру нуль (а можуть і не мати).
4. Якщо A_1, A_2, \dots мають міру нуль, то їх об'єднання теж має міру нуль.

Приклад:

- $Q \cap [0, 1]$ – зліченна, тож має міру нуль.
- $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$. Якщо припустити, що $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ має міру нуль, то за властивістю 4:
 $(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] = [0, 1]$ теж має міру 0. Але це суперечить властивості 2.

Критерій Лебега інтегровності за Ріманом

Нехай f – обмежена на $[a, b]$. Тоді $f \in R([a, b])$ тоді й тільки тоді, коли множина точок розриву функції f на $[a, b]$ має міру 0.

Приклади:

$$1. D(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \text{ на проміжку } [0, 1].$$

$E_D = [0, 1]$ – не має міру 0 за властивостю 2.

Отже, за критерієм $D \notin R([0, 1])$.

$$2. f(x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{|x - \frac{1}{2}|} = \begin{cases} 1 & , x > \frac{1}{2} \\ -1 & , x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$E_f = \{\frac{1}{2}\}$ – множина точок розриву має міру нуль. Отже, $f(x) \in R([0, 1])$.

3. Функція Рімана:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n} & , x = \frac{m}{n}, \text{НСД}(m, n) = 1 \end{cases}$$

$E_f = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Отже, f інтегрована.

$$4. f(x) = \ln x$$

$E_f = \{0\}$ – точки розриву. Але $f(x)$ необмежена, тому не є інтегрованою за Ріманом на $[0, 1]$.

Приклади функцій, що є:

$$1. \text{ Обмеженими на } [a, b]: D(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \text{ на проміжку } (0, 1).$$

$$2. \text{ Інтегровними за Рімана та обмеженими на } [a, b]: \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \text{ на проміжку } (-1, 1).$$

3. Неперервними, інтегровними за Ріманом, інтегровними за Ньютоном-Лейбніцом та обмеженими на $[a, b]$:

$$f(x) = x^2, x \in (0, 1)$$

4. Інтегровними за Ньютоном-Лейбніцом: $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, 1)$
5. Інтегровними за Ньютоном-Лейбніцом та інтегровні за Ріманом розривні та необмежені: - ?
6. Інтегровними за Ріманом, інтегровними за Ньютоном-Лейбніцом, розривні та обмежені:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ на проміжку } (-1, 1). f = F'(\text{похідна } F$$

буде належати цьому класу, адже $f \in C \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і має розрив 2-го роду в точці 0).

Деякі властивості інтегралу Рімана:

- 1) $f, g \in \mathbb{R}([a, b]) \Rightarrow fg \in \mathbb{R}([a, b])$
- 2) $f \in \mathbb{R}([a, b]) \Rightarrow |f| \in \mathbb{R}([a, b])$
- 3) $f, g \in \mathbb{R}([a, b]) \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha f + \beta g \in \mathbb{R}([a, b])$
(Тобто функції, інтегровні за Ріманом, утворюють векторний простір).
- 4) $f \in \mathbb{R}, g \in C(E_f) (E_f - образ f) \Rightarrow g(f) \in \mathbb{R}([a, b])$

Доведення. Нехай C_f і C_g , C_{fg} - множини точок розриву функцій f та g відповідно. $\forall x \notin C_f \cup C_g \Rightarrow x \notin C_f \wedge x \notin C_g \Rightarrow f \in C(\{x\}) \wedge g \in C(\{x\}) \Rightarrow fg \in C(\{x\}) \Rightarrow x \notin C_{fg}$,

$$\overline{C_f \cup C_g} \subseteq \overline{C_{fg}} \Rightarrow C_{fg} \subset C_f \cup C_g$$

$$M_L(C_f) = 0, M_L(C_g) = 0, \Rightarrow M_L(C_f \cup C_g) = 0 \Rightarrow M_L(C_{fg}) = 0$$

f, g - обмежені на $[a, b] \Rightarrow fg$ - обмежена на $[a, b]$. Згідно критерієм Лебега $fg \in R([a, b])$.

Чи правильне зворотне твердження? (Him)

$$g = f = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \text{ на проміжку } [0, 1].$$

$fg = 1$ - добуток двох функцій є інтегровним за Ріманом, але окремо дві функції не інтегровні, бо розривні.

Вправа:

- 1) $g \notin C(E_f) \rightarrow g \in R(E_f)$
- 2) чи виконується твердження 4, якщо $f \in C(E_f), g \in R([a, b])$
- 5) Лінійність Інтегралу Рімана Нехай $f, g \in R([a, b])$

$$\alpha S_p(f, \xi) + \beta S_p(g, \xi) = \alpha \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i + \beta \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (\alpha f + \beta g)(\xi_i) \Delta x_i = S_p(\alpha f + \beta g, \xi),$$

$$diam(P) \rightarrow 0. \text{ Тоді } S_p(f, \xi) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx,$$

$$S_p(g, \xi) \rightarrow \int_a^b f(x) dx, S_p(\alpha f + \beta g) \rightarrow \int_a^b (\alpha f + \beta g) dx$$

(Тобто, інтеграл є лінійною операцією).

$$\int_a^b \alpha f(x) dx + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

6) Адитивність інтегралу Рімана за областью інтегрування:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx, b \in [a, c], f \in R([a, c])$$

7) Інтеграли від нерівних функцій

$$\text{Нехай } \forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x), f, g \in R([a, b]). \text{ Тоді } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$S_p(f, \xi) \leq S_p(g, \xi) \text{ diam}(P) \rightarrow 0 \text{ Тоді } S_p(f, \xi) \rightarrow \int_a^b f dx, S_p(g, \xi) \rightarrow \int_a^b g dx$$

$$\text{Наслідок } f \geq 0, \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Зауваження.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} \text{ Але } \int_a^b f(x) dx = 0 \text{ if } x \neq 1, \int_a^b f(x) dx = 1 \text{ if } x = 1$$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \rightarrow \text{Зміна значення в деякій точці не впливає ні на інтегровність, ні на інтеграцію}$$

8) Інтеграл від додатної функції

$$\text{Нехай } f(x) \geq 0, \text{ for all } x \in [a, b] \exists x_0 \in [a, b] f(x_0) > 0, f \in C(x_0) \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx > 0$$

Доведення. Нехай $y_0 = f(x_0)$. $\epsilon \frac{1}{2}y_0 \cdot i \exists \delta > 0 \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. $-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$. Зокрема,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (y_0 - \varepsilon)dx =$$

$$= (y_0 - \varepsilon)2\delta > 0$$

9) Інтеграл від модуля $f \in R([a, b])$
 $-|f(x)| \leq f(x) \geq |f(x)|dx \quad \forall x \in [a, b]$
 Тоді з 7) отримаємо:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$-a \leq b \leq a \Leftrightarrow |b| \leq a$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

(Перша) теорема про середнє. Нехай $f, g \in R([a, b])$ і $|f| < M, f \in (-M, M)$. $\forall x \in [a, b] g \geq 0$ або $g \geq 0$ на $[a, b]$. Тоді $\exists \mu \in (-M, M)$, що $\int_a^b f(x)g(x)dx = C \int_a^b g(x)dx$. Або $C \in [inf f(x), x \in [a, b], sup f(x), x \in [a, b]]$, f - неперервна, то $\exists \xi \in [a, b], \mu = f(\xi)$

Доведення. Будемо вважати, що $\forall x \in [a, b], g(x) \geq 0$. Тоді: $-Mg(x) \leq$

$$f(x)g(x) \leq Mg(x) \text{ Отже, } -M \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

$$-M \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M, \quad C \in [-M; M]$$

Тобто, для прикладу можему записати: $\int_0^1 e^{-x^2} dx = C \int_0^1 x^2 dx$. (Питання в тому, як знайти С).

Наслідок (Теорема про середнє для неперервної функції)

$$\text{Якщо } f \in C([a, b]), \exists \xi \in [a, b] \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx (ii.)$$

Приклад 1. $\int_0^1 x^2 \sin x dx = \sin(\xi) \int_0^1 x^2 dx = \frac{\sin(\xi)}{21} \in [0, \frac{\sin 1}{21}], \xi \in [0, 1] \rightarrow \sin \xi \in [0, \sin 1]$

Приклад 2. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} dx = \int_0^1 x^2 \circ \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \xi^2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = 2\xi^2 \in [0, 2].$

Інший спосіб: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} \circ x^2 dx = \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \circ \frac{1}{\sqrt{1-x}} \in [\frac{1}{3}, +\infty]$

Отже, $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} dx = \in [\frac{1}{3}, 2]$

Тобто, цей спосіб дозволяє оцінити інтеграл.

Розглянемо такий приклад:

$$\int_0^1 00\pi e^{-x} x \sin x dx = e^{-\xi} \int_0^{100\pi} \sin x = 0.$$

Але якщо розглянемо графік функції $e^{-x} x \sin x dx$, то побачимо, що сума площ під графіком і над графіком не дорівнює нулю (вона буде точно більше 0). Чому так відбувається: $\sin x$ змінює знак на проміжку

$$[0; 100\pi] \text{ Вихід: } \int_0^1 00\pi e^{-x} x \sin x dx = \sin \xi \int_0^{100\pi} e^{-x} x = \sin(\xi)(1 - e^{-100\pi}) \in [-1; 1].$$

Нас лише бентежить, що від'ємне значення. Тому застосуємо властивість адитивності інтегралу:

$$\begin{aligned} & \int_0^{-100\pi} e^{-x} \sin x dx = \int_0^\pi e^{-x} \sin x dx + \int_\pi^{2\pi} e^{-x} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{-x} \sin x dx + \dots + \\ & + \int_{99\pi}^{100\pi} e^{-x} \sin x dx \quad (\text{На цих проміжках } \sin x \text{ є знакосталим}). \end{aligned}$$

Тепер для кожного інтегралу застосуємо теорему про середнє:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx = e^{-\xi_k} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin x dx = e^{-\xi_k} 2(-1)^k, \xi_k \in [k\pi, (k+1)\pi]$$

$$= 2e^{\xi_0} - 2e^{-\xi_1} + 2e^{-\xi_2} - \dots - 2e^{-\xi_{99}}$$

Оскільки $\xi_{k+1} > \xi_k$, то $e^{-\xi_{k+1}} > e^{\xi_k}$ і тепер видно, що ця сума вже точно більше 0.

Інтеграл як функція верхньої межі (ІВФМ)

Ми можемо розглядати $\int_a^t f(x) dx$ як функцію $\phi(t)$ від змінної t . Тобто кожному значенню $t \in [a, b]$ відповідає різне значення інтеграла $\int_a^t f(x) dx$.

Теорема 1. Функція $\phi \in C([a, b])$.

Доведення. Нехай $t_n \rightarrow t \in [a, b]$. Треба довести, що $\phi(t_n) \rightarrow \phi(t)$. Іншими словами, $\int_a^{t_n} f(x)dx = \int_a^t f(x)dx + \int_a^{t_n} f(x)dx - \int_a^t f(x)dx$ (за властивістю адитивності.) Оскільки $f \in R([a, b])$, $|f(x)| < M$, $|\int_a^t f(x)dx| \leq \int_a^t |f(x)|dx \leq \int_a^t Mdx = M \int_a^t = M(t_n - t) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Тобто якщо похідна функції була розривною, то сама функція буде неперервною (при інтегруванні властивості функції покращуються).

Теорема 2. Нехай $f \in C(x_0)$. $x_0 \in [a, b]$. Тоді $\phi \in D(x_0)$ і $\phi'(x_0) = f(x_0)$.

Доведення $\phi'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0}$ (Це треба довести, що існує). Доведемо, що $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$. $\phi(x) - \phi(x_0) = \frac{1}{x - x_0} (\int_a_x f(t)dt - \int_a_{x_0} f(t)dt) - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0)dt = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt$. $f \in C(x_0) \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Зафіксуємо $\epsilon > 0$. Оберемо x так, що $|x - x_0| < \delta$. Тоді $\forall t \in [x_0; x] \rightarrow t \in (x_0, x_0 + \delta) \rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \epsilon$. $\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt \leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \epsilon dt = \epsilon$. За означенням, $\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt \rightarrow 0$.

Якщо $f \in C([a, b])$, то $\phi(t)$ - первісна для f . Якщо f має на $[a, b]$ не більш ніж зліченну кількість точок розриву, то ϕ - первісна в широкому розумінні.

Приклад 1. $\int_a^x e^{-s}ds = -e^{-s} \Big|_a^x = (e^{-a} - e^{-x})' = e^{-x}$
 $\phi(\varphi(x))' = \phi'(\varphi(x))\phi'(x)$

Приклад 2. $\int_a^{x^{10}} e^{-s^2} ds = e^{(-x^{10})^2} \circ (x^{10'})' = 10x^9 e^{-x^{20}}$

$$\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt \right)'_x = \left(\int_{\psi(x)}^a f(t) dt + \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right)' = - \int_a^{\psi(x)} f(t) dt + \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt =$$

$$= -f(\psi(x))\psi'(x) + f(\varphi(x))(\varphi'(x)) = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x)$$

Теорема(Інтегрування частинами) Нехай $f, g \in C^1([a, b])$. Тоді $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$.

Доведення Дз ;)

Теорема(Заміна змінної). Нехай $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[\alpha, \beta] \xrightarrow{\varphi} \phi \in D([a, b])$, $\phi' \in R([a, b])$. $f \in C([a, b])$. $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$. Тоді $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Заміна $x = \varphi(t)$

Приклад 1.

$$\int_0^2 x^3 dx = \left| x = \sqrt{t} = \varphi(t) \atop \varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \right| = \int_0^4 (\sqrt{t})^3 \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$$

При підстановці обов'язково змініть межі інтегрування!

Приклад 2.

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \left| x^2 = t \atop \dots \right| = \cancel{\int_1^1 \dots dt} = 0$$

Так робити неправильно, бо у нас немає біекції між $(-1, 1)$ і 1 . (При заміні змінної в межах інтегрування має бути взаємно однозначна відповідність.)

Тому у цьому випадку просто застосовуємо формулу Ньютона-Лейбніца:
 $= \frac{x^3}{3} \Big|_1^{-1} = \frac{2}{3}$

Приклад 3. $\int_{-1}^1 x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_{-1}^0 x^2 dx = \left| x = \sqrt{t} \right| = + \left| x = -\sqrt{t} - 1 \right| =$

Застосування інтегралу Рімана для обчислень площ, довжин, об'ємів.

Функція проміжку (на вхід подається проміжок напр. площа, вихід - число)
 $\phi = \{[a, b] | a, b \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$

Адитивна функція проміжку $\forall a, b \forall C \in [a, b] \phi([a, b]) = \phi([a, c]) + \phi([c, b])$
 «««< **ГЕАД Теорема** (Про адитивну функцію проміжку) Нехай за-

дано функцію $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ і АФПФ ϕ на $[a, b]$. Якщо $\forall \alpha < \beta, \alpha < \beta, \alpha, \beta \in [a, b]$.

$$\inf_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)(\beta - \alpha) \leq \phi([\alpha, \beta]) \leq \sup_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)(\beta - \alpha)$$

то

$$\phi([\alpha, \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Розглянемо довільне розбиття P на $[a, b]$. До кожного проміжку застосуємо нерівність:

$$\inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)(x_{i+1} - x_i) \leq \phi([x_i, x_{i+1}]) \leq \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)(x_{i+1} - x_i)$$

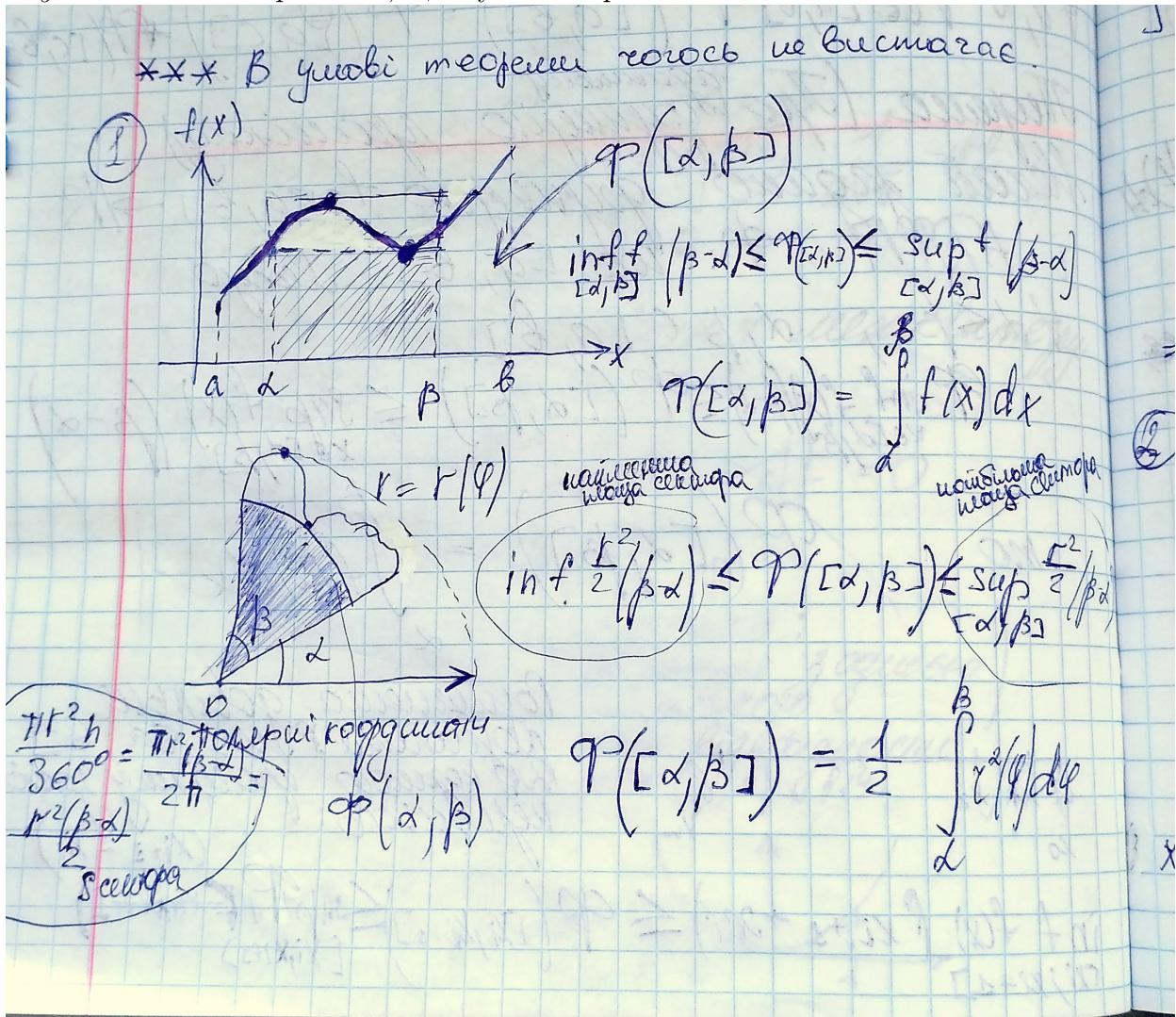
$$\forall i = 0 \dots n - 1$$

$$\forall P : \underline{S}_p(f) \leq \phi([a, b]) \leq \overline{S}_p(f)$$

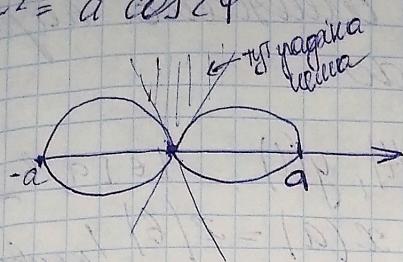
Якщо $diam P \rightarrow 0$, то $\underline{S}_p(f) \rightarrow I$ та $\overline{S}_p(f) \rightarrow I$

$$\phi([a, b]) = I = \int_a^b f(x) dx$$

Зauważenня. Лектор сказав, що в умові теореми чогось не вистачає.



$$② r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$



$$\varphi \in [0, \pi]$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\pi}{4} \\ a^2 \cos 2\varphi &= 0 \\ 2\varphi &= \frac{\pi}{2} \\ \varphi &= \frac{\pi}{4} \\ r &= a^2 \cos \frac{\pi}{4} = \\ &= -a^2 \end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{4}$$

Задача 2. Найдите длину кривой:

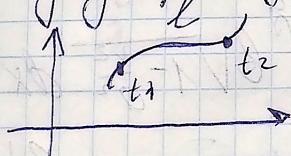
$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= a^2(1-0) = a^2$$

Задача 3. Вычислите длину кривой ^{направление} ^{задано}:

$$x = x(t), \quad y = y(t). \quad l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

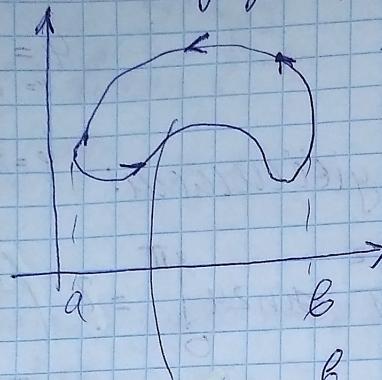


$$x = t, \quad y = y(t) = y(x)$$

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

(Рассматривается ^{направление} ^{движения})

④ Точка придет симметрично пару загадок прошу угадать



$$x(t), y(t) \quad t \in [a, b]$$

$$\begin{aligned} x(a) &= x(b) \\ y(a) &= y(b) \end{aligned}$$

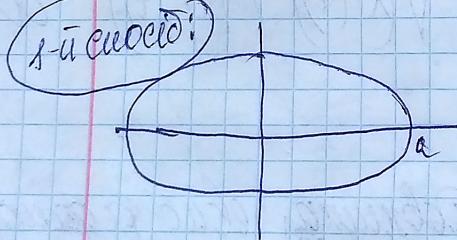
(кривая замкнутая, $a = b$),

t лягут в $\alpha(t), y(t)$

$$S = \int_a^b y'(t)x(t)dt = - \int_a^b y(t)x'(t)dt$$

! Нахождение отрезка промежутка симметрии

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - эллипс



$$S = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

(использовано
вспомогательное
изложение)

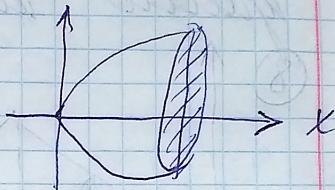
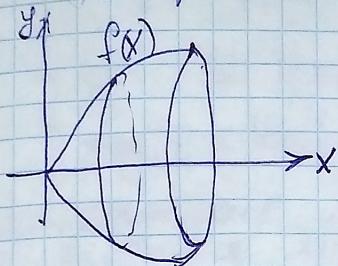
$$x = a \cos \varphi$$

$$y = b \sin \varphi$$

$$\varphi \in [0; 2\pi]$$

$$S = \int_0^{2\pi} ab \cos^2 \varphi d\varphi = ab \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\varphi + 1}{2} d\varphi = \pi ab$$

⑥ Odčlenite površine

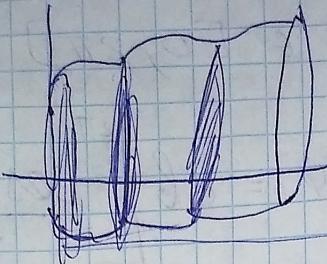


$$\inf_{[a,b]} f(x) \pi(b-a) \leq V([a, b]) \leq \sup_{[a,b]} f^2(x) \pi \cdot (f(b-a))$$

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

Odčlenite površine

7

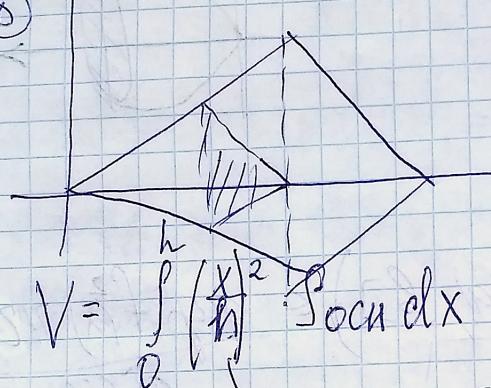


$$V = \int_a^b s(x)^2 dx$$

$s(x)$ - крива перерив,

$s(x)$ із нечіткою виглядовою кривою

8



$$V = \int_0^h s(x)^2 dx$$

Зосил $dx = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} \int_0^h s(x)^2 dx = \frac{1}{3} h^3 \int_0^h s(x)^2 dx$

$$V = \frac{1}{3} h^3 \int_0^h s(x)^2 dx$$

квад. числовий
множник із залежності
підставити

=====

Нехай P — розбиття. $P_1 = P \cup \{x^*\}$.

$$\bar{S}_p(f) = \sum_{k=1}^m M_k \Delta x_k + M_{m+1} \Delta x_{m+1} + \sum_{k=m+2}^n M_k \Delta x_k$$

$$\overline{S}_{p_1}(f) = \sum_{k=1}^m M_k \Delta x_k + \sup_{x \in [x_m; x^*]} f(x)(x^* - x_m) + \sup_{x \in [x^*; x_{m+1}]} f(x)(x_{m+1} - x^*) + \sum_{k=m+2}^n M_k \Delta x_k$$

$$A \subset B \implies \sup_A f \leq \sup_B f$$

$$\sup_{x \in [x_m; x^*]} f(x) \leq M_{m+1}$$

$$\sup_{x \in [x^*; x_{m+1}]} f(x) \leq M_{m+1}$$

»»»> 5f31d61c42ed2880ed77edce41b66cab0eaf8166

$$\overline{S}_{p_1}(f) \leq \sum_{k=1}^m M_k \Delta x_k + M_{m+1} \Delta x_{m+1} + \sum_{k=m+2}^n M_k \Delta x_k$$

$$\overline{S}_p \geq \overline{S}_{p+1}$$

Додаючи точку до розбиття, верхня (з супремами) інтегральна сума може зменшитися або залишитис такою ж.

<<<< HEAD