БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра теории функций

А.Г. Алехно, И.Л. Васильев

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебно-методическое пособие
для студентов заочного отделения
механико-математического факультета

Минск, 2008

Предисловие

Теория функций комплексной переменной (ТФКП) называется также теорией аналитических функций или комплексным анализом. В учебной литературе, рекомендованной для изучения ТФКП, имеется много содержательных учебников [2-5, 7, 8]. Однако, они недостаточно приспособлены как по объему, так и по выбору материала к учебной программе по ТФКП для математических факультетов университетов Беларуси, в особенности для студентов заочных отделений.

Для комплексного анализа характерна относительная простота теоретических построений, однако овладение его конкретными методами вызывает обычно значительные трудности. Поэтому во время самостоятельного изучения комплексного анализа студентам рекомендуется большое внимание уделять решению задач. Указанные обстоятельства приняты во внимание авторами при написании данного пособия.

Пособие состоит из трех частей. В первой части приведена программа дисциплины «Теория функций комплексной переменной» и даны краткие теоретические сведения по всем ее разделам. Во второй части даны решения основных типичных задач указанного курса. В третьей части содержатся условия 10 вариантов контрольных работ №1, №2 по ТФКП для студентов-заочников.

Пособие предназначено для студентов заочного отделения механико-математического факультета Белорусского госуниверситета. Оно может быть использовано при проведении лабораторных и контрольных работ для студентов очной формы обучения отделений «математическая электроника», «компьютерная математика», «математическая экономика», «механика», а так же для студентов других факультетов.

I.МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Теория функций комплексной переменной (ТФКП) называется также теорией аналитических функций или комплексным анализом. Программа этого курса приводится в настоящем пособии. Объем теоретического материала, охватываемый этой программой, примерно соответствует содержанию учебников [1]-[4].

Для комплексного анализа характерна относительная простота теоретических построений, однако, овладение конкретными методами комплексного анализа вызывает обычно значительные трудности. В связи с этим во время самостоятельного изучения комплексного анализа студентам рекомендуется больше внимания уделять решению задач.

Программа дисциплины «ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

1.*Введение*. Предмет ТФКП. Краткий обзор развития ТФКП и ее роль в математике и приложениях.

2.*Комплексные числа*. Комплексное число, его изображение на плоскости, модуль и аргумент комплексного числа. Последовательности и пределы, ряды. Расширенная комплексная плоскость, сфера Римана.

3.*Функции комплексной переменной*. Функция, ее действительная и мнимая части. Предел функции, непрерывность.

4.*Дифференцируемые функции*. Производная. Дифференцируемость по комплексной переменной; условия Коши-Римана. Аналитические (голоморфные) функции. Геометрический смысл аргумента и модуля производной. Понятие о конформных отображениях.

5.*Элементарные функции и конформные отображения*. Линейная и дробно-линейная функции, показательная функция и логарифм, степень с произвольным показателем, функция Жуковского. Понятие об однолистности, о многозначных аналитических функциях и римановых поверхностях. Применение элементарных функций к конформным отображениям.

6.*Интеграл*. Интеграл по комплексной переменной. Первообразная, формула Ньютона-Лейбница. Интегральная теорема Коши для простого и составного контуров.

7.*Интегральная формула Коши*. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций, формулы Коши для производных аналитических функций. Теорема Морера.

8.*Последовательности и ряды аналитических функций*. Функциональные последовательности и ряды. Теорема Вейерштрасса о последовательностях и рядах аналитических функций.

9.*Степенной ряд*. Степенной ряд. Радиус сходимости. Формула Коши-Адамара. Аналитичность суммы степенного ряда. Разложение аналитической функции в степенной ряд, единственность разложения, ряд Тейлора. Действия над степенными рядами.

10.*Ряд Лорана*. Ряд Лорана, область его сходимости. Разложение аналитической функции в ряд Лорана, единственность разложения. Формулы для коэффициентов разложения, неравенства Коши. Теорема об устранимой особой точке и теорема Лиувилля.

11.*Теорема единственности и принцип максимума*. Нули аналитических функций, порядок нуля. Теорема единственности для аналитических функций. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца.

12.*Изолированные особые точки однозначного характера*. Классификация изолированных особых точек однозначного характера. Полюс и существенно особая точка, различные их определения. Случай бесконечно удаленной точки. Теорема Сохоцкого. Понятие о теореме Пикара.

13.*Вычеты*. Принцип аргумента. Определение вычета. Теорема о вычетах. Формулы для вычисления вычетов. Применение к вычислению интегралов. Логарифмический вычет; принцип аргумента. Теорема Руше.

14.Аналитическое продолжение. Аналитический элемент и его продолжение. Аналитическое продолжение через границу области. Принцип симметрии.

15.*Отображения посредством аналитических функций*. Принцип сохранения области. Достаточное условие однолистности. Конформные отображения. Понятие о теореме Римана и о соответствии границ при конформном отображении.

16.*Целые и мероморфные функции*. Порядок и тип целой функции. Понятие о теореме Вейерштрасса. Мероморфные функции.

17.*Гармонические функции*. Гармонические функции, их связь с аналитическими. Принцип максимума, теорема единственности. Теорема о среднем. Интегралы Пуассона и Шварца.

18.*Гидромеханическое истолкование аналитических функций*. Плоскопараллельный поток идеальной несжимаемой жидкости без источников, стоков и вихрей. Потенциал скоростей, функция тока, характеристическая функция потока.

Дадим *методические указания* по изучению основных вопросов программы ТФКП.

1.*Введение*. Этот материал приведен в предисловии к учебнику [2] и во введении к [3].

2.*Комплексные числа*. Этот материал имеется во всех учебниках. Комплексные числа можно определить, например, как числа вида $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$. Множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел является полем, содержащим множество $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел в качестве подполя.

Каждое комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой (x,y) плоскости или радиус-вектором этой точки. Длина радиус-вектора точки z называется *модулем*, а угол его наклона к оси Ox – аргументом комплексного числа z. Обозначения: $|z|$ и $\operatorname{Arg} z$ соответственно.

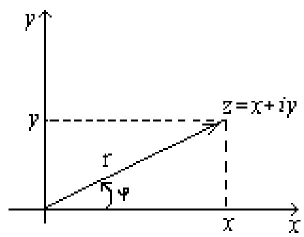

Рис.1

Из рис.1видно, что $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $\varphi = \operatorname{Arg} z$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{r}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{r}. \end{cases} \tag{1}$$

В связи с этим комплексное число представляется в различных формах: алгебраической $z = x + iy$ и тригонометрической $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, каждая из которых обладает своими преимуществами.

Понятие последовательности комплексных чисел, ее предела, ряда с комплексными членами, его суммы в принципе не отличаются от соответствующих понятий в вещественном случае.

Добавляя к $\mathbb{C}$ элемент ∞ (бесконечно удаленную точку), получим расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

3.*Функции комплексной переменной*. Согласно [1,§4] - это отображения вида $f: A \to \overline{\mathbb{C}}$, где *A*- некоторое подмножество $\overline{\mathbb{C}}$. Обычно в качестве *A* берется область, т.е. открытое и связное подмножество $\overline{\mathbb{C}}$.

Для наглядного изображения функции комплексной переменной берутся две комплексные плоскости. На плоскости переменной *z* рисуют некоторые геометрические объекты (например, сетки координатных линий), а на плоскости *w* – образы этих геометрических объектов. Понятия предела и непрерывности функций комплексной переменной определяются так же, как и для функций вещественной переменной. Остаются справедливыми и основные факты теории пределов и непрерывности, кроме тех, которые связывают эти понятия с отношением >.

Полагая $z = x + iy$, где $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ перепишем уравнение $u + iv = f(x + iy)$ в виде равносильной системы

$$\begin{cases} u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \\ v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy). \end{cases} \tag{2}$$

Таким образом, функцию комплексной переменной $w = f(z)$ можно задать в равносильном виде (2), т.е. как отображение из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Понятия предела и непрерывности отображения (2) равносильны соответствующим понятиям для функции $w = f(z)$.

4.*Дифференцируемые функции. Производная*.[1,§7]. Для целей дифференциального исчисления удобно предполагать, что рассматриваемая функция $w = f(z)$ определена *в области*.

Функция $w = f(z)$ называется $\mathbb{C}$*-дифференцируемой* в точке *z*, если существует такая постоянная $A \in \mathbb{C}$, что

$$f(z + h) - f(z) = Ah + \circ(|h|), \; h \to 0. \tag{3}$$

Производная в точке *z* от функции $w = f(z)$ определяется тем же соотношением, что и для функции вещественной переменной:

$$f'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}. \tag{4}$$

Отсюда и из того, что операции над комплексными числами подчиняются тем же законам, что и операции над вещественными числами, следует, что вся техника вычисления производных от функций комплексной переменной такая же, как и для функций вещественной переменной.

Различие между понятиями производной для функций вещественной и комплексной переменной заключается в том, что стремление к нулю приращения h происходит по-разному. В вещественном случае $h \to 0$ по одномерному множеству, а в комплексном – по двумерному. Это различие ведет к следующему факту.

Существование конечной производной (4) в точке z равносильно $\mathbb{C}$-дифференцируемости функции f в этой точке. Полагая *f=u+iv*, запишем условия $\mathbb{C}$-дифференцируемости функции *f* в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{5}$$

где $u(x,y), v(x,y)$ дифференцируемы как функции двух действительных переменных. Напомним, что для дифференцируемости $u(x,y), v(x,y)$ достаточно существования и непрерывности частных производных первого порядка этих функций.

Соотношения (5) называются *условиями Коши-Римана*. С понятием $\mathbb{C}$-дифференцируемости связано важнейшее в ТФКП понятие *аналитической функции*. Функция $w = f(z)$ называется аналитической в точке *z*, если она $\mathbb{C}$-дифференцируема в некоторой окрестности точки *z*. Если функция $w = f(z)$ - аналитическая в точке z_0, то в окрестности точки z_0 имеет место приближенное равенство

$$f(z+h) - f(z) \approx f'(z_0)(z - z_0), \tag{6}$$

которое тем точнее, чем меньше $|z - z_0|$.

Рассматривая функцию $w = f(z)$ как преобразование (отображение в себя) плоскости *z*, из (6) при $f'(z_0) \neq 0$ заключаем, что в малой окрестности точки z_0 отображение *f* ведет себя как преобразование *подобия*. Вытекающие из (6) равенства

$$|f'(z_0)| \approx \frac{|f(z+h) - f(z)|}{|z - z_0|},\ \arg f'(z_0) \approx \arg(f(z) - f(z_0)) - \arg(z - z_0)$$

выражают геометрический смысл модуля и аргумента производной (модуль производной – коэффициент растяжения, аргумент производной – угол поворота окрестности точки z_0).

Отображение $w = f(z)$ называется *конформным в точке* z_0, если его дифференциал $Df(z_0)(h)$ как функция от *h* отличен от тождественного нуля и сводится к композиции растяжения и поворота. Устанавливается, что конформность отображения $w = f(z)$ в точке z_0 равносильна условию $f'(z_0) \neq 0$. Конформные отображения в области определяются как конформные в каждой точке области. Тем самым устанавливается, что конформные в области отображения могут реализоваться только аналитическими функциями.

5.*Элементарные функции и конформные отображения*. [2,§3,4]. Аналитические функции $w = Az + B$ и $w = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, где $A, B, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$; $A \neq 0; \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ называются соответственно линейной и дробно-линейной. Линейная функция, очевидно, является частным случаем дробно-линейной при $\gamma = 0$.

Отметим важнейшие свойства дробно-линейных функций.

1.Любая дробно-линейная функция реализует конформный гомеоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$.

2.Дробно-линейная функция отображает любую $\overline{\mathbb{C}}$-окружность на некоторую $\overline{\mathbb{C}}$-окружность. (Под $\overline{\mathbb{C}}$-окружностью понимается либо обычная окружность, либо прямая линия, к которой присоединена точка ∞.)

3.Дробно-линейная функция любую пару точек, симметричных относительно $\overline{\mathbb{C}}$-окружности отображает на пару точек, симметричных относительно образа этой $\overline{\mathbb{C}}$-окружности.

Экспонента комплексной переменной $z = x + iy$ определяется равенством

$$w = e^z = e^{x+iy} := e^x(\cos y + i \sin y). \tag{7}$$

Эта функция аналитична на $\mathbb{C}$, что устанавливается непосредственно проверкой условий Коши-Римана (5).

Кроме очевидных свойств $e^z \neq 0$ и $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ экспонента обладает свойством периодичности с чисто мнимым периодом, целократным числу $2\pi i$.

Областью однолистности экспоненты является горизонтальная полоса шириной не большей 2π. Образом полосы $\{h_1 < \operatorname{Im} z < h_2\}$ при отображении (7) будет угол $\{h_1 < \arg w < h_2\}$.

В частности, образом полосы $\{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ является плоскость w с разрезом по положительному лучу действительной оси.

Логарифмическая функция комплексной переменной определяется как функция, обратная к экспоненте (7), откуда вытекает ее аналитичность. Полагая $z = re^{i(\varphi + 2\kappa\pi)}$, где $r > 0, \kappa \in \mathbb{Z}$, имеем:

$$Lnz = \ln r + i \arg z + 2\kappa\pi i\,,$$

т.е. функция Lnz бесконечнозначная. При $\kappa = 0$ она реализует конформное отображение угла $\{0 < h_1 < \arg z < h_2 < 2\pi\}$ на полосу $\{h_1 < \operatorname{Im} w < h_2\}$.

Функцией Жуковского называется рациональная функция $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Она аналитична всюду на $\mathbb{C}$, кроме точки z=0, реализует конформное отображение круга $\{|z| < 1\}$ и его внешности $\{|z| > 1\}$ на плоскость с разрезом по прямолинейному отрезку [-1,1].

Тригонометрические и гиперболические функции определяются соотношениями:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ shz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},\ chz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}.$$

Эти функции представимы в виде композиций уже известных функций (линейной, экспоненты, функции Жуковского). Отсюда следует их аналитичность, а также характер реализуемых ими конформных отображений.

Общая степенная функция вводится соотношением $w = z^{\alpha} := \exp(\alpha Lnz), \alpha \in \mathbb{C}$ и является бесконечнозначной функцией при $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

6.*Интеграл*. [1, §9]. Криволинейный интеграл по комплексной переменной – это по существу хорошо известный из вещественного анализа криволинейный интеграл второго рода.

Полагая $f(z) = u + iv$, определяем:

$$\int_{\gamma} f(z)dz := \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) = \int_{\gamma} (udx - vdy) + i\int_{\gamma} (vdx + udy)\,. \tag{8}$$

При дополнительном предположении непрерывности частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ условия Коши-Римана (5) выражают известные из анализа условия независимости интеграла (8) от пути. Это и есть одна из форм центральной теоремы курса – *интегральной теоремы Коши*.

Если контур интегрирования замкнут и лежит в односвязной области *D*, где функция *f* аналитична, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0 .$$

7.*Интегральная формула Коши.* [1, §10]. Пусть D - область с кусочно-гладким краем ∂D. Стандартная ориентация края выбирается так, что при движении точки вдоль края в положительном направлении область D остается слева. Если $\infty \notin \bar{D} = D \cup \partial D$, функция f аналитична в D и непрерывна на $\bar{D}$, то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(t)}{t - z} dt, z \in D. \tag{9}$$

Это и есть *интегральная формула Коши* или интеграл Коши. Если $\varphi(t)$ - произвольная непрерывная функция, то функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt$$

называется *интегралом типа Коши*. При $z \notin \partial D$ интеграл типа Коши является аналитической функцией переменной *z*. Формулы для производных от аналитической функции *f(z)* получаются путем дифференцирования под знаком интеграла Коши (9). Теорему Мореры можно рассматривать как теорему, обратную к интегральной теореме Коши.

8.*Последовательности и ряды аналитических функций*. Виды сходимости функциональных последовательностей и рядов (поточечная, равномерная, в среднем) изучаются в курсе вещественного анализа. Характерной для комплексного анализа является *сходимость равномерная внутри области D*, т.е. сходимость равномерная на любом компакте *K*, содержащемся в области *D*. Теорема Вейерштрасса об аналитичности суммы равномерно сходящегося на компакте *K* ряда аналитических функций, изложены в [1, п.2,3].

9.*Степенной ряд*. [1, §11]. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{10}$$

где $\{c_n\}$- числовая последовательность. Для любого степенного ряда существует *радиус сходимости* $R \subset [0, +\infty]$, вычисляемый по *формуле Коши- Адамара*

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Открытый круг $\{|z-z_0|<R\}$ называется *кругом сходимости* степенного ряда (10). Степенной ряд сходится абсолютно в круге сходимости, сходится равномерно на любом компакте, лежащем в круге сходимости, расходится во всех точках, внешних по отношению к кругу сходимости. Для ответа на вопрос о сходимости ряда (10) на окружности $|z-z_0|=R$ требуются дополнительные исследования.

10.*Ряд Лорана*. [1, §17]. Если функция *f(z)* аналитична в кольцевой области $\{r<|z-z_0|<R\}$, то она представима в ней в виде суммы ряда

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n, \tag{11}$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}. \tag{12}$$

Ряд (11) называется *рядом Лорана с центром* z_0 функции *f(z)*. Если $\forall n<0\ c_n=0$, то ряд Лорана переходит в ряд Тейлора.

11.*Теорема единственности и принцип максимума*. [1, §14]. *Нулем* аналитической функции *f(z)* называется любая точка z_0, в которой $f(z_0)=0$. В окрестности точки z_0 функция f представима в виде $f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z)$, где $n\in\mathbb{N},\varphi(z_0)\neq 0$. Число n называется *порядком* нуля z_0. Теорема единственности утверждает, что если множество нулей функции f имеет предельную точку, лежащую внутри области аналитичности, то $f(z)\equiv 0$. Из теоремы единственности вытекает свойство *изолированности* нулей аналитической функции, состоящее в том, что в некоторой окрестности нуля аналитической функции нет других нулей.

Принцип максимума заключается в том, что модуль функции $f(z)$, отличный от тождественной постоянной, не может иметь точек максимума внутри области аналитичности $f(z)$.

12.*Изолированные особые точки однозначного характера*. [1, §18]. Точка z_0 называется *особой* для аналитической функции *f*, если в точке z_0 функция *f* не является аналитической. Особая точка z_0 называется изолированной, если существует окрестность $U(z_0)$ точки z_0 такая, что f аналитична всюду в $U(z_0)\setminus z_0$. Изолированные особые точки могут быть классифицированы в зависимости от поведения функции f при $z\to z_0$.

Если существует конечный предел

$$\lim_{z\to z_0} f(z), \tag{13}$$

то точка z_0 называется *устранимой особой точкой*. Если предел (13) равен ∞, то особая точка z_0 называется *полюсом*. Полюс z_0 имеет порядок (кратность) *n*, если $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)=A\neq 0$.

Если предел (13) не существует, то точка z_0 называется *существенно особой точкой* функции *f*.

В этом случае справедлива *теорема Сохоцкого*: для любого $A\in\overline{\mathbb{C}}$ существует последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0,\ \lim_{n\to\infty} f(z_n)=A.$$

13.*Вычеты. Принцип аргумента*.[1, §28]. Пусть $z_0\in\mathbb{C}$- изолированная особая точка функции *f*. Ее ряд Лорана (11) сходится в некотором множестве вида $0<|z-z_0|<r$. *Вычетом функции f в точке* z_0 называется коэффициент c_{-1} разложения (11). Все способы вычисления вычетов основаны на умении разлагать функцию в ряд Лорана.

Основная теорема о вычетах. Если функция f аналитична в области *D*, кроме конечного числа изолированных особых точек $z_1,z_2,...,z_N\in D$, непрерывно продолжима на край ∂D области *D*, то

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz=\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z), \tag{14}$$

где ориентация края ∂D стандартная.

Теорема о логарифмическом вычете. Пусть функция φ аналитична в области D и непрерывна в $\overline{D}$, а функция f аналитична в *D*, кроме полюсов в точках $a_1,...,a_P$, непрерывно продолжима на ∂D и имеет нули в точках $b_1,...,b_N$.

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\varphi(z)d\ln f(z)=\sum_{k=1}^{N}\varphi(b_k)-\sum_{k=1}^{P}\varphi(a_k),$$

причем нули и полюсы берутся с учетом их кратности.

Из этой теоремы при $\varphi(z)\equiv 1$ получается *принцип аргумента*:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}d\ln f(z)=N-P. \qquad (15)$$

Название «принцип аргумента» связано с тем, что интеграл левой части (15) равен приращению непрерывной ветви функции Arg*f(z)*, когда *z* пробегает в положительном направлении край ∂D.

14.*Аналитическое продолжение*.[1, §15]. *Аналитическим продолжением* функции $f: M\to\mathbb{C}$ называется ее доопределение в область $D\supset M$ до аналитической в D функции $f: D\to\mathbb{C}$. На основании теоремы единственности можно заключить, что если существует аналитическое продолжение функции $f: M\to\mathbb{C}$ в данную область *D*, то оно определяется однозначно.

Отметим два факта, важные с точки зрения приложений. Пусть гладкая кривая *l* является частью края областей D_1 и D_2 (рис.2).

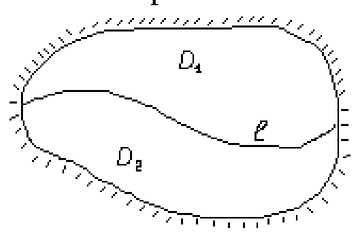

Рис.2

Пусть заданы аналитические функции $f_1: D_1\to\mathbb{C}$ и $f_2: D_2\to\mathbb{C}$, непрерывно продолжимые на *l* и такие, что $f_1(t)=f_2(t)$ для всех $t\in l$.

Тогда функция $F(z)=\begin{cases} f_1(z), z\in D_1\\ f_1(t), t\in l\\ f_2(z), z\in D_2\end{cases}$ *аналитична в области* $D:=D_1\cup l\cup D_2$.

Частным случаем этой теоремы является *принцип симметрии Римана-Шварца*. Пусть дуга *l* $\overline{\mathbb{C}}$-окружности является частью края области D. Пусть функция *f* аналитична в *D*, а ее предельные значения на *l* лежат на $\overline{\mathbb{C}}$-окружности *L*. Тогда функция *f* допускает аналитическое продолжение в область D^*, симметричную к *D* относительно *l* по формуле

$$f(z) = \widetilde{f(z^*)}, z \in D^*,$$

где через * и ~ обозначены отображения симметрии относительно l и L соответственно.

15.*Отображения посредством аналитических функций*.[1, §33]. Аналитическая функция $w = f(z)$ является *однолистной* в окрестности точки z_0 тогда и только тогда, когда $f'(z_0) \neq 0$. Обратная функция $z = \varphi(w)$ является аналитической в окрестности точки $w_0 = f(z_0)$.

Принцип сохранения области. Если D - область, а функция f аналитична в D и отлична от тождественной постоянной, то множество *f(D)* – область.

Конформным отображением области D на область G называется биективное отображение $f: D \to G$, конформное в каждой точке области D. Конформные отображения реализуются аналитическими функциями. При конформном отображении сохраняется *порядок связности* области. Основной теоремой теории конформных отображений считается *теорема Римана*. Если область D односвязна, а ее граница содержит не менее двух точек, то существует функция *f*, реализующая конформное отображение области D на внутренность единичного круга $\{|z| < 1\}$. Из теоремы Римана вытекает существование конформного отображения друг на друга любых двух односвязных областей, границы которых содержат не менее двух точек. Функция $f: D_1 \to D_2$, реализующая конформное отображение области D_1 на область D_2, при некоторых ограничениях допускает непрерывное продолжение на границу области D_1. Например, если граница односвязной области D – простая замкнутая кривая, то функция *f*, реализующая конформное отображение $f: D \to \{|z| < 1\}$ допускает непрерывное продолжение на ∂D до гомеоморфизма замкнутых областей.

16.*Целые и мероморфные функции*. [2, §14, §15]. *Целой функцией* называется функция, аналитическая всюду на $\mathbb{C}$. *Мероморфной функцией* называется любая функция, аналитическая всюду на $\mathbb{C}$, кроме конечного или счетного множества точек, в которых она имеет полюсы. Простыми примерами целых и мероморфных функций являются целые и дробные рациональные функции соответственно. Теорема Вейерштрасса дает разложение целой функции в бесконечное произведение, аналогичное разложению многочлена на линейные множители.

17.*Гармонические функции*. [2, добавление]. Функция двух переменных *u=u(x,y)* называется гармонической в области *D*, если она удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Вещественная и мнимая части любой аналитической функции – гармонические функции. Обратно, если $u=u(x,y)$ – гармоническая функция, заданная в односвязной области D, то существует аналитическая функция $f : D \to \mathbb{R}$ такая, что $u(x,y)=\mathrm{Re} f(x+iy)$. Многие факты теории гармонических функций являются следствиями соответствующих фактов теории аналитических функций.

18.*Гидромеханическое истолкование аналитических функций*. [2, §2]. Установившееся плоскопараллельное течение идеальной несжимаемой жидкости без источников и стоков может быть полностью описано с помощью комплексного потенциала, т.е. некоторой аналитической функцией $f(z)$. Например, для вектора скорости течения справедлива формула $v(z) = \overline{f'(z)}$.

В заключение укажем номера задач из сборника [7], которые следует решить для усвоения теории и приобретения вычислительных навыков.

Раздел 2 – задачи №№1-4, 23-32; раздел 3: 109-114,116,117,121,126; раздел 4: 131-139,165,166,187; раздел 5: 193,194,203-207,209-212,220-223,229-239, 285-293,299,305-310,338,348-352; раздел 6: 388-391; раздел 7: 412,413,418; раздел 9: 425-434,440-442,452-455,458-460; раздел 10: 543-548; раздел 11: 505-520; раздел 12: 565-600; раздел 13: 621-635,657-665,673-680,682-686.

II. РЕШЕНИЕ ТИПИЧНЫХ ЗАДАЧ

*Пример 0**. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = -\sqrt{3} + i$ и запишите z в тригонометрической форме.

Решение. Модуль комплексного числа определяется по формуле $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Значит, $\left|-\sqrt{3} + i\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$.

Так как $x = -\sqrt{3}, y = 1$, то точка $z = -\sqrt{3} + i$ лежит во II квадранте. Поэтому главное значение аргумента дается формулой [4, с.14] $\arg z = \operatorname{arg}tg \frac{y}{x} + \pi$. Следовательно, $\arg(-\sqrt{3} + i) = \operatorname{arg}tg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi =$

$= -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5}{6}\pi.$ Все значения аргумента находятся по формуле $Arg(-\sqrt{3}+i) = \arg\left(-\sqrt{3}+i\right) + 2k\pi = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Тригонометрическая форма комплексного числа z имеет вид $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Значит, $-\sqrt{3}+i = = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right).$

*Пример 1**. Вычислите все значения степенной функции $z^{(2-4i)}$ в точке $z_0 = -1-i$.

Решение. Степенная функция z^{α} определяется соотношением [2, с.182] $z^{\alpha} = e^{\alpha \ln z}$. Все значения логарифмической функции даются формулой [2, с.178] $Lnz = \ln r + iArgz$. В нашем случае $|-1-i| = \sqrt{2}$. Так как точка $z_0 = -1-i$ лежит в третьем квадранте, то $\arg(-1-i) = \arg tg 1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi.$ Значит, $Ln(-1-i) =$
$= \ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}.$

Теперь получаем $\left(-1-i\right)^{(2-3i)} = e^{(2-3i)Ln(-1-i)} =$

$$= e^{(2-4i)\left(\ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right)\right)} = e^{(ln2 - 3\pi + 8k\pi) + i(-2\ln 2 + 4k\pi - \frac{3}{2}\pi)}, k \in \mathbb{Z}.$$

*Пример 2**. Найдите аналитическую функцию *f(z)* по заданной действительной части $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2y.$

Решение. Заданная функция *u(x,y)* является гармонической во всей плоскости, т.к. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

Для того, чтобы найти аналитическую функцию *f(z)*, необходимо определить гармоническую функцию *v(x,y)*=Im*f(z)*, сопряженную с заданной функцией *u(x,y)*. Функции *u(x,y)* и *v(x,y)* связаны между собой условиями Коши-Римана (5). Т.к. $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy + 2,$ то искомая функция $v(x,y)$ является решением системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 6xy - 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int (3x^2 - 3y^2) dy =$

$= 3x^2 y - y^3 + c(x),$

где $c(x)$ – некоторая функция переменной x. Подставляя значение $v(x,y)$ во второе уравнение системы, получим соотношение для определения $c(x)$: $6xy + c'(x) = 6xy - 2 \Rightarrow c'(x) = -2 \Rightarrow c(x) = -2x + c, \quad c = const.$ Значит, $v(x,y) = 3x^2 y - y^3 - 2x + c$ и $f(x,y) = (x^3 y - 3xy^2 + 2y) +$
$+ i(3x^2 y - y^3 - 2x + c)$. Подставляя в это равенство значения $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ и $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, где $\bar{z} = x - iy$ - число, комплексно сопряженное числу $\bar{z} = x + iy$, окончательно найдем $f(z) = z^3 - 2iz + ic.$

*Пример 3**. Найдите образ области $E = \{|z| < 2\}$ при отображении функцией $w = \frac{z}{z+1}$.

Решение. Заданная область E есть круг радиуса 2 с центром в начале координат. Его границей является окружность $\{|z| = 2\}$. Так как дробно-линейная функция конформно отображает расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$, то по принципу соответствия границ [2, с.128] граница ∂E области E отображается в границу ∂E^* образа $E^* = w(E)$ с сохранением ориентации.

Найдем образ окружности $\{|z| = 2\}$ при отображении $w = \frac{z}{z+1}$. Так как окружность $\{|z| = 2\}$ не проходит через точку $z = -1$, то ее образом будет окружность. Поскольку $w(2) = \frac{2}{3}, w(-2) = 2$, то окружность ∂E^* проходит через точки $\frac{2}{3}$ и 2. Коэффициенты заданной дробно-линейной функции действительные числа, поэтому при отображении $w=\frac{z}{z+1}$ действительная ось переходит в действительную ось. Окружность $\{|z|=2\}$ ортогональна действительной оси на плоскости *z*. Следовательно, в силу конформности дробно-линейных отображений окружность ∂E^* также будет ортогональна действительной оси на плоскости *w*. Значит отрезок $\left[\frac{2}{3},2\right]$ будет диаметром окружности ∂E^*, т.е. $\partial E^*=\left\{\left|w-\frac{4}{3}\right|=\frac{2}{3}\right\}$. Так как точка *z*=0, принадлежащая *E*, переходит в точку *w*(0)=0, лежащую внутри окружности ∂E^*, то образом *E* при отображении $w=\frac{z}{z+1}$ будет круг $\left\{\left|w-\frac{4}{3}\right|<\frac{2}{3}\right\}$.

*Пример 4**. Найти дробно-линейное отображение, переводящее точки $z_1=2, z_2=-i, z_3=\infty$ соответственно в точки $w_1=3, w_2=2i, w_3=-1$.

Решение. Используем общий вид дробно-линейного преобразования, переводящего три заданные точки в три другие заданные точки [2, с.53]:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

Подставляя в эту формулу заданные значения и заменяя множители, содержащие ∞, единицами, получим

$$\frac{w-3}{w-2i}\cdot\frac{-1-2i}{-1-3}=\frac{z-2}{z+i}\cdot\frac{1}{1}.$$

Выражая *w* через *z*, имеем

$$w=\frac{(-3+2i)z+6-19i}{(3-2i)z-6-i}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что эта функция удовлетворяет заданным условиям.

*Пример 5**. Отобразить круг $\{|z-2|\le 4\}$ на верхнюю полуплоскость так, чтобы центр круга $z_0=2$ перешел в точку $w_0=-2+i$ и $\arg w'(z_0)=\frac{\pi}{2}$.

Решение. Для решения удобно воспользоваться общим видом отображения, переводящего верхнюю полуплоскость на круг

$\{|z-z_0|\le R\}$. Так как искомое отображение является дробно-линейным, то точки, симметричные относительно действительной оси, должны перейти в точки, симметричные относительно окружности $\{|z-z_0|=R\}$. Таким образом, должны выполняться условия $z(w_0)=z_0, z(\overline{w_0})=\infty$. Общий вид такого отображения дает формула

$$z-z_0=\mathrm{R}e^{i\varphi}\frac{w-w_0}{w-\overline{w_0}},$$

из которой имеем

$$z-2=4e^{i\varphi}\frac{w+2-i}{w+2+i}.$$

Выражая *w* через *z*, получим

$$w=\frac{(-2-i)(z-2)-4e^{i\varphi}(-2+i)}{z-2-4e^{i\varphi}}.$$

Вычислим значение $\arg w'(2)$. Так как

$$w'(z)=\frac{8ie^{i\varphi}}{(z-2-4e^{i\varphi})^2},$$

то

$$w'(2)=\frac{2i}{4e^{i\varphi}}=\frac{1}{2}ie^{-i\varphi}=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}e^{-i\varphi}=\frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}.$$

По условию $\arg w'(2)=\frac{\pi}{2}$, следовательно, $\frac{\pi}{2}-\varphi=\frac{\pi}{2}$ или $\varphi=0$. Таким образом, искомое отображение имеет вид

$$w=\frac{(-2-i)(z-2)+8-4i)}{z-2-4}=\frac{(-2-i)z+12-2i}{z-6}.$$

*Пример 6**. Отобразить круг $\{|z+1|\le 1\}$ на круг $\{|w+i|\le 1\}$ так, чтобы $w\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{2i}{3}$ и $w(-2)=0$.

Решение. Так как искомое отображение дробно-линейное, то точка z_2, симметричная точке $z_1=-\frac{1}{2}$ относительно окружности $\{|z+1|=1\}$, должна перейти в точку w_2, симметричную точке $w_1 = -\frac{2i}{3}$ относительно окружности $\{|w+i|=1\}$. Поскольку точка z_2, симметричная точке z_1 относительно окружности $\{|z-a|=R\}$ дается формулой [2, с.51]:

$z_2 = a + \frac{R^2}{\overline{z_1 - a}}$, то $z_2 = 1, w_2 = -4i$.

Строя по заданным точкам дробно-линейное отображение, получаем

$$\frac{w+\frac{2i}{3}}{w+4i} \cdot \frac{0+4i}{0+\frac{2i}{3}} = \frac{z+\frac{1}{2}}{z-1} \cdot \frac{-2-1}{-2+\frac{1}{2}}.$$

Выражая w через z, находим искомое отображение

$$w = \frac{4i(z+2)}{4z+7}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что оно удовлетворяет заданным условиям.

*Пример 7**. Отобразить внутренность круга $\{|z| \le 1\}$ с разрезом по отрезку $\left[\frac{i}{2}, i\right]$ на верхнюю полуплоскость.

Решение. Решим задачу поэтапно. Вначале повернем круг на угол $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$: $w_1 = ze^{-\frac{\pi}{2}i} = -iz$. Отрезок $\left[\frac{i}{2}, i\right]$ перейдет в отрезок $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. К полученной области применим функцию Жуковского:

$$w_2 = \frac{1}{2}\left(w_1 + \frac{1}{w_1}\right).$$

Единичная окружность перейдет в разрез по отрезку [-1,1], разрез по отрезку $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ - в разрез по отрезку $\left[1, \frac{5}{4}\right]$. Таким образом, круг с разрезом по отрезку $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ отобразится на плоскость с разрезом по отрезку $\left[-1, \frac{5}{4}\right]$.

На следующем этапе дробно-линейной функцией отобразим полученную область на плоскость с разрезом по положительной полуоси. Это отображение построим по трем парам точек, переводя $w_2{}' = -1$ в $w_3{}' = 0, w_2{}'' = \frac{5}{4}$ в $w_3{}'' = \infty, w_2{}''' = 0$ в $w_3{}''' = 1$:

$$\frac{w_3 - 0}{w_3 - \infty} \cdot \frac{1 - \infty}{1} = \frac{w_2 + 1}{w_2 - \frac{5}{4}} \cdot \frac{-\frac{5}{4}}{1}.$$

Отсюда $w_3 = \frac{5w_2 + 5}{-4w_2 + 5}$. Остается применить отображение $w = \sqrt{w_3}$, $0 \le \arg w_3 \le 2\pi$, переводящее плоскость с разрезом по положительной полуоси на верхнюю полуплоскость.

Выражая последовательно все отображения через z, получим

$$w_1 = -iz; w_2 = \frac{i - iz^2}{2z}; w_3 = \frac{5}{2} \cdot \frac{i + 2z - iz^2}{-2i + 5z + 2iz^2}.$$

Таким образом, искомое отображение определяется формулой

$$w = \sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{i + 2z - iz^2}{-2i + 5z + 2iz^2}}, 0 \le \arg \frac{i + 2z - iz^2}{-2i + 5z + 2iz^2} \le 2\pi.$$

*Пример 8**. Отобразить внешность касающихся кругов $\{|z-1| \le 1\}$ и $\{|z+1| \le 1\}$ на верхнюю полуплоскость.

Решение. Решим задачу поэтапно. Заметим, что точка $z=0$ одновременно принадлежит окружностям $\{|z-1| = 1\}, \{|z+1| = 1\}$ и действительной оси. Поэтому, если построить дробно-линейное отображение, переводящее $z=0$ в $w_1 = \infty$, то в силу кругового свойства образами указанных окружностей и действительной оси будут прямые (как обобщенные окружности, проходящие через точку $w_1 = \infty$). Это отображение конформно, поэтому образы касающихся окружностей – параллельные прямые, а образ действительной оси – прямая, им перпендикулярная. При этом рассматриваемая область отобразится на полосу.

Зададим соответствие точек $z' = -2 \to w_1{}' = 0, z'' = 0 \to w_1{}'' = \infty$, $z''' = 2 \to w_1{}''' = \pi i$ и построим по этим точкам дробно-линейную функцию

$$\frac{w_1 - 0}{w_1 - \infty} \cdot \frac{1}{\pi i} = \frac{z+2}{z-0} \cdot \frac{2-0}{2+2}.$$

Выражая *w* через *z*, получим $w_1 = \pi i \dfrac{z+2}{2z}$. Так как по этой формуле действительным значениям *z* соответствуют чисто мнимые значения w_1, то эта функция переводит действительную ось в мнимую ось. Тогда окружность $\{|z+1|=1\}$ переходит в прямую $\{\operatorname{Im} z = 0\}$, а окружность $\{|z-1|=1\}$ - в прямую $\{\operatorname{Im} z = \pi\}$, которые перпендикулярны мнимой оси. При этом внешность окружности отобразится на полосу шириной π, заключенную между указанными прямыми. Остается применить функцию $w = e^{w_1}$, переводящую данную горизонтальную полосу на верхнюю полуплоскость. Выражая последовательно все примененные функции через *z*, получим искомое отображение в виде

$$w = \exp\left\{\pi i \frac{z+2}{2z}\right\}.$$

*Пример 9**. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)dz$, если $f(z) = z \operatorname{Im} z^2$, а L - парабола $y = x^2$, соединяющая точки *a=0, b=1+i*.

Решение. Так как $f(z) = 2x^2 y + i2xy^2$, то по формуле (8) получаем

$$\mathrm{I} = \int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L 2x^2 ydx - 2xy^2 dy + i\int\limits_L 2xy^2 dx + 2x^2 ydy\ .$$

Вычисляя криволинейные интегралы второго рода, получим

$$\mathrm{I} = \int\limits_0^1 (2x^2x^2 - 2xx^4 2x)dx + i\int\limits_0^1 (2xx^4 + 2x^2x^2 2x)dx = -\frac{6}{35} + i.$$

*Пример 10**. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sin in) z^n$.

Решение. Чтобы воспользоваться формулой Коши-Адамара вычислим предел

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\sin in|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{2}\left(e^n - e^{-n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} e\left(1 - e^{-2n}\right)^{\frac{1}{n}} = e\,.$$

Значит $R=\rho^{-1}=e^{-1}$.

*Пример 11**. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки z=0 функцию $f(z)=\sin^4 z+\cos^4 z$.

Решение. Понижая степень, преобразуем заданную функцию к виду

$$f(z)=\sin^4 z+\cos^4 z=\left(\frac{1-\cos 2z}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2z}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2 2z=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 4z)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4z\,.$$

Отсюда, используя ряд Тейлора функции $\cos z$, имеем

$$\sin^4 z+\cos^4 z=1+\sum_{n=1}^{n}(-1)^n\frac{2^{4n-2}}{(2n)!}z^{2n}, z\in\mathbb{C}\,.$$

*Пример 12**. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z)=\frac{z+6-6i}{(z-2i)(z+3-4i)}$$

в областях $a)\,D_1=\{|z|<2\};b)D_2=\{2<|z|<5\};c)D_3=\{|z|>5\}$.

Решение. Представим функцию *f(z)* в виде суммы простых дробей

$$f(z)=\frac{2}{z-2i}-\frac{1}{z+3-4i}, \tag{16}$$

что можно сделать, пользуясь методом неопределенных коэффициентов.

Если $|z|<2$, то, используя формулу суммы геометрической прогрессии, получим

$$\frac{2}{z-2i}=-\frac{1}{i\left(1-\frac{z}{2i}\right)}=-\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n i^{n+1}},\left|\frac{z}{2i}\right|<1. \tag{17}$$

Если $|z|>2$, то, преобразуя исходное выражение к виду, где можно применить формулу суммы геометрической прогрессии, имеем

$$\frac{2}{z-2i}=\frac{2}{z\left(1-\frac{2i}{z}\right)}=\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2i}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}i^n}{z^{n+1}},\left|\frac{2i}{z}\right|<1. \tag{18}$$

Аналогично при $|z|<5$ имеем разложение

$$\frac{1}{z+3-4i}=\frac{1}{(3-4i)\left(1+\dfrac{z}{3-4i}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{(3-4i)^{n+1}},\left|\frac{z}{3-4i}\right|<1, \qquad (19)$$

а если $|z|>5$, то

$$\frac{1}{z+3-4i}=\frac{1}{z\left(1+\dfrac{3-4i}{z}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (3-4i)^n}{z^{n+1}},\left|\frac{3-4i}{z}\right|<1. \qquad (20)$$

a) В области $D_1:\{|z|<2\}$ в силу формул (16), (17), (19) функция *f(z)* разлагается в ряд Лорана

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n i^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(3-4i)^{n+1}}\right]z^n.$$

Этот ряд есть ряд Тейлора.

b) В области $D_2=\{2<|z|<5\}$ разложение функции *f(z)* в ряд Лорана в силу формул (16), (18), (19) имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}i^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{(3-4i)^{n+1}}.$$

Этот ряд содержит как положительные, так и отрицательные степени *z*.

с) В области $D_3=\{|z|>5\}$ в силу формул (16), (18), (20) функция *f(z)* представляется рядом Лорана, содержащим только отрицательные степени *z*.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[2^{n+1}i^n-(-1)^n(3-4i)^n\right]}{z^{n+1}}.$$

*Пример 13**. Найдите изолированные особые точки функции $f(z)=\dfrac{\left(z^{10}+1\right)\sin\dfrac{1}{z-1}}{z(z+i)^3(z-2i)^2}$, выясните их характер и исследуйте поведение функции на бесконечности.

Решение. Для функции $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{z(z+i)^3(z-2i)^2}{\left(z^{10}+1\right)\sin\dfrac{1}{z-1}}$ точки $z_1=0, z_2=2i, z_3=-i$ являются нулями соответственно первого, второго и третьего порядков. Следовательно, для функции *f(z)* точки

$z_1=0, z_2=2i, z_3=-i$ являются полюсами соответственно первого, второго и третьего порядков.

Точка $z_4=1$является существенно особой для функции $\sin\frac{1}{z-1}$, так как главная часть $f_1(z)$ ряда Лорана этой функции в окрестности точки $z_4=1$ содержит бесконечное число членов: $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}$. Отсюда вытекает, что $z_4=1$ является существенно особой точкой и для функции *f(z)*. Действительно, предполагаем противное: $z_4=1$ - устранимая особая точка или полюс. Тогда существует предел $\lim\limits_{z\to 1} f(z)=b$, где $b\in\mathbb{C}$, если $z_4=1$ устранимая особая точка, и $b=\infty$, если $z_4=1$ - полюс. Отсюда следует, что

$$\lim_{z\to 1}\sin\frac{1}{z-1}=\lim_{z\to 1} f(z)\cdot\frac{z(z+i)^3(z-2i)^2}{z^{10}+1}=\lim_{z\to 1}\frac{z(z+i)^3(z-2i)^2}{z^{10}+1}\lim_{z\to 1} f(z)=$$
$$=\frac{(1+i)^3(1-2i)^2}{2}\lim_{z\to 1} f(z)=(7+i)\lim_{z\to 1} f(z)=(7+i)b,$$

т.е. $z_4=1$ является устранимой особой точкой или полюсом для функции $\sin\frac{1}{z-1}$, что приводит к противоречию. Поэтому $z_4=1$ - существенно особая точка для функции *f(z)*.

При $z_4\to\infty$ имеем $\sin\frac{1}{z-1}\sim\frac{1}{z-1}\sim\frac{1}{z}, z^{10}+1\sim z^{10}$, $z(z+i)^3(z-2i)^2\sim z^6$.

Поэтому получаем $f(z)\sim z^3, z\to\infty$. Следовательно, $z=\infty$ - полюс третьего порядка для функции *f(z)*.

*Пример 14**. Вычислить вычеты функции $f(z)=\frac{1}{z(e^z-1)}$ во всех изолированных особых точках.

Решение. Приравнивая нулю знаменатель, находим особые точки заданной функции

$$z\left(e^z-1\right)=0\Rightarrow z=i2k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

При этом $z_0 = 0$- полюс второго порядка, а $z_k, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ - полюсы первого порядка. Поэтому [2, с.226,227]

$$\underset{z=0}{res} \frac{1}{z\left(e^z - 1\right)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(2-1)!} \left(\frac{z^2}{z(e^z - 1)} \right)' = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1 - ze^z}{(e^z - 1)^2} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1 + z + \frac{z^2}{2} + \circ\left(z^2\right) - 1 - z - z^2}{z^2(1 + \circ(1))} = -\frac{1}{2}$$

$$\underset{z=i2k\pi}{res} \frac{1}{z\left(e^z - 1\right)} = \left. \frac{\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(e^z - 1\right)'} \right|_{z = i2k\pi} = -\frac{i}{2k\pi}.$$

*Пример 15**. Вычислить интеграл $\mathrm{I} = \int\limits_C \frac{z^3 dz}{(z^2 + 1)^2}$, где C – положительно ориентированная окружность $|z| = 2$.

Решение. **Способ I**. Функция $f(z) = \dfrac{z^3}{(z^2 + 1)^2}$ имеет в круге $|z| < 2$ две особые точки: $z_1 = i, z_2 = -i,$ являющиеся полюсами второго порядка. Следовательно, по основной теореме о вычетах [2, с.145]

$$\mathrm{I} = 2\pi i(\underset{z=i}{res} f(z) + \underset{z=-i}{res} f(z)).$$

Вычисляя вычеты *f(z)* в указанных точках по формуле [2,с.147], имеем

$$\underset{z=i}{res} f(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to i} \left[(z - i)^2 \frac{z^3}{\left(z^2 + 1\right)^2} \right]' = \lim_{z\to i} \left[\frac{z^3}{(z + i)^2} \right]' = \frac{1}{2},$$

$$\underset{z=-i}{res} f(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to -i} \left[(z + i)^2 \frac{z^3}{\left(z^2 + 1\right)^2} \right]' = \lim_{z\to -i} \left[\frac{z^3}{(z - i)^2} \right]' = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\mathrm{I} = 2\pi i \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2\pi i.$

Способ II. Так как [2, с.148]

$\underset{z=i}{res}\, f(z) + \underset{z=-i}{res}\, f(z) + \underset{z=\infty}{res}\, f(z) = 0,$ то $\mathrm{I} = -2\pi i \underset{z=\infty}{res}\, f(z).$

Поскольку $f(z) \sim \frac{1}{z}$ при $z \to \infty,$ то точка $z = \infty$ является нулем первого порядка функции *f(z)* и $\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = -1.$

Следовательно, $\mathrm{I} = 2\pi i.$

*Пример 16**. Вычислить интеграл $\mathrm{I} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ от рациональной функции.

Решение. Функция $R(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$ имеет в верхней полуплоскости два полюса первого порядка в точках $z_1 = i$ и $z_2 = 2i.$ Так как $R(z) \sim \frac{1}{z^4}$ при $z \to \infty,$ то применяя формулу [3, с. 274] $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{\operatorname{Im} z_k > 0} \underset{z=z_k}{res}\, f(z),$ имеем $\mathrm{I} = 2\pi i(\underset{z=i}{res}\, R(z) + \underset{z=2i}{res}\, R(z)).$

Поскольку $\underset{z=i}{res}\, R(z) = \lim\limits_{z \to i}\left[(z-i)\frac{1}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)}\right] = \frac{1}{6i},$

$\underset{z=2i}{res}\, R(z) = \lim\limits_{z \to 2i}\left[(z-2i)\frac{1}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)}\right] = -\frac{1}{12i},$ то $\mathrm{I} = \frac{\pi}{6}.$

*Пример 17**. Используя лемму Жордана вычислить интеграл $\mathrm{I} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x dx}{x^2+9}.$

Решение. Так как $F(z) = \frac{z}{z^2+9} \to 0$ при $0 \le \arg z \le \pi$, то функция *F(z)* удовлетворяет условиям леммы Жордана. Поэтому [1,с.241]

$$\mathrm{I} = \operatorname{Im}\left(2\pi i \underset{z=3i}{res} \frac{ze^{i2z}}{z^2+9}\right) = \operatorname{Im}\left(2\pi i \left.\frac{ze^{i2z}}{\left(z^2+9\right)'}\right|_{z=3i}\right) = \operatorname{Im}\left(2\pi i \frac{e^{-6}}{2}\right) = \pi e^{-6}.$$

III.КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Ниже приведены задания двух контрольных работ по ТФКП. Каждый из десяти вариантов (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) контрольной работы составляется из тех примеров, номера которых оканчиваются на соответствующую цифру. Студент выполняет тот вариант, номер которого совпадает с последней цифрой номера его зачетной книжки.

Контрольная работа №1

00-09. Найдите модуль, аргумент комплексного числа *z* и запишите его в тригонометричекой форме.

00.	$-\sqrt{3}+i3,$	**05.**	$\sqrt{15}-i\sqrt{5},$
01.	$-\sqrt{5}-i\sqrt{5},$	**06.**	$-\sqrt{7}+i\sqrt{7},$
02.	$-\sqrt{6}+i\sqrt{6},$	**07.**	$-\sqrt{6}-i\sqrt{2},$
03.	$-3-i\sqrt{3},$	**08.**	$\sqrt{3}-i\sqrt{3},$
04.	$-\sqrt{6}-i3\sqrt{2},$	**09.**	$\sqrt{2}-i\sqrt{6}.$

10-19. Вычислите все значения степенной функции z^{α} в точке z_0.

10.	$z_0=-\sqrt{6}+i2\sqrt{3}, \alpha=3-2i,$	**15.**	$z_0=\sqrt{30}-i\sqrt{10}, \alpha=2+i,$
11.	$z_0=2-i2\sqrt{3}, \alpha=-1+3i,$	**16.**	$z_0=-\sqrt{3}-i3, \alpha=1-2i,$
12.	$z_0=\sqrt{2}-i\sqrt{2}, \alpha=-3+i,$	**17.**	$z_0=-3\sqrt{2}-i\sqrt{6}, \alpha=2+3i,$
13.	$z_0=-2\sqrt{3}-i2, \alpha=1+2i,$	**18.**	$z_0=-\sqrt{5}+i\sqrt{5}, \alpha=3+2i,$
14.	$z_0=-\sqrt{5}+i\sqrt{5}, \alpha=2-i,$	**19.**	$z_0=-\sqrt{6}-i\sqrt{6}, \alpha=2-3i.$

20-29. Найдите аналитическую функцию *f(z)* по заданной действительной части Re*f(z)=u(x,y)*.

20.	$u=12x^2y^2-2x^4-2y^4-2xy,$	**25.**	$u=2x^3y-2xy^3-xy,$
21.	$u=4xy^3-4x^3y-4x^2+4y^2,$	**26.**	$u=3x^4+3y^4-18x^2y^2+18x$
22.	$u=x^4+y^4-6x^2y^2+6xy,$	**27.**	$u=3x^3y-3xy^3-3y,$

23.	$u = x^3y - xy^3 + x^2 - y^2,$	**28.**	$u = 6x^2y^2 - x^4 - y^4 - 4x,$
24.	$u = 2x^4 + 2y^4 - 12x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2,$	**29.**	$u = 3xy^3 - 3x^3y + 4y.$

30-39. Найдите образ области E при отображении *w=f(z)*:

30.	$\mathrm{E} = \{\lvert z\rvert > 1\},\ f = \dfrac{z-2i}{z+1},$	**35.**	$\mathrm{E} = \{\operatorname{Re} z < -1\},\ f = \dfrac{z}{2z-1},$
31.	$\mathrm{E} = \{\operatorname{Re} z > 2\},\ f = \dfrac{2z}{z+4},$	**36.**	$\mathrm{E} = \{\lvert z\rvert > 2\},\ f = \dfrac{z+2i}{z-2i},$
32.	$\mathrm{E} = \{\lvert z\rvert < 3\},\ f = \dfrac{z+i}{z+3i},$	**37.**	$\mathrm{E} = \{\operatorname{Im} z > 1\},\ f = \dfrac{z-2i}{z+i},$
33.	$\mathrm{E} = \{\operatorname{Re} z > 1\},\ f = \dfrac{z}{z+2},$	**38.**	$\mathrm{E} = \{\lvert z\rvert < 3\},\ f = \dfrac{z+2i}{z-3i},$
34.	$\mathrm{E} = \{\lvert z\rvert < 1\},\ f = \dfrac{z+2i}{z-i},$	**39.**	$\mathrm{E} = \{\operatorname{Im} z < -1\},\ f = \dfrac{z-2i}{z+2i}.$

40-49. Найти дробно-линейное отображение, переводящее точки z_1, z_2, z_3 соответственно в точки w_1, w_2, w_3.

№№	z_1	z_2	z_3	w_1	w_2	w_3
40.	-3	i	∞	$-i$	$-2i$	-3
41.	1	$2i$	∞	$3i$	-1	$-2i$
42.	-1	$-2i$	∞	-1	i	-2
43.	1	$-2i$	∞	$-2i$	-2	$3i$
44.	-2	i	∞	$-2i$	-3	1
45.	2	i	∞	$2i$	-1	3
46.	-2	$-i$	∞	i	2	$-3i$
47.	3	i	∞	$-3i$	$-i$	2

48.	-3	-i	∞	3i	-2	i
49.	3	-i	∞	2i	3	-i

50-59. Отобразить круг $\{|z-z_0|<R\}$ на верхнюю полуплоскость так, чтобы центр круга z_0 перешел в точку w_0 и $\arg w'(z_0)=\alpha$.

№№	**R**	z_0	w_0	α
50.	3	2i	1+i	$-\pi$
51.	2	-2	-3+i	$\frac{3\pi}{2}$
52.	3	-2i	-1+i	$\frac{\pi}{2}$
53.	2	3	4+i	$-\frac{3\pi}{2}$
54.	3	3i	-4+i	$\frac{\pi}{2}$
55.	2	1	1+i	$-\frac{\pi}{2}$
56.	3	i	2+i	$-\frac{3\pi}{2}$
57.	2	-1	-1+i	π
58.	3	-i	-2+i	$\frac{3\pi}{2}$
59.	2	2	3+i	$\frac{\pi}{2}$

60-69. Отобразить круг $\{|z-z_0|\le 2\}$ на круг $\{|w-w_0|\le 2\}$ так, чтобы $w(z_1)=w_1$, $w(t_1)=\tau_1$, где z_1, w_1 - внутренние и t_1, τ_1 - граничные точки указанных кругов.

№№	z_0	w_0	z_1	w_1	t_1	τ_1
60.	2i	-3	$\frac{i}{2}$	-4	4i	-5
61.	-2	-3i	$-\frac{5}{2}$	-4i	-4	-i
62.	-2i	3	$-\frac{3i}{2}$	4	0	1
63.	3	i	$\frac{5}{2}$	2i	1	3i

64.	$3i$	-1	$\frac{3i}{2}$	-2	$5i$	-3
65.	-3	$-i$	$-\frac{5}{2}$	$-2i$	-5	i
66.	i	-2	$\frac{i}{2}$	-3	$3i$	-4
67.	-1	$-2i$	$-\frac{3}{2}$	$-i$	-3	0
68.	$-i$	2	$-\frac{i}{2}$	1	i	0
69.	2	$2i$	$\frac{3}{2}$	i	0	$4i$

70-79. Отобразить на верхнюю полуплоскость заданную область.

70.	$\{\lvert z\rvert>1\}\setminus\{(1,2]\}$,	**75.**	$\{\lvert z\rvert<1\}\setminus\left\{\left(-1,-\frac{1}{3}\right]\right\}$,
71.	$\{\lvert z\rvert<1\}\setminus\left\{\left(-1,-\frac{1}{2}\right]\right\}$,	**76.**	$\{\lvert z\rvert>1\}\setminus\{[-3i,-i)\}$,
72.	$\{\lvert z\rvert>1\}\setminus\{[-2i,-i)\}$,	**77.**	$\{\lvert z\rvert<1\}\setminus\left\{\left[\frac{i}{3},i\right)\right\}$,
73.	$\{\lvert z\rvert<1\}\setminus\left\{\left[\frac{1}{2},1\right)\right\}$,	**78.**	$\{\lvert z\rvert>1\}\setminus\{(i,2i]\}$,
74.	$\{\lvert z\rvert>1\}\setminus\{[-2,-1)\}$,	**79.**	$\{\lvert z\rvert<1\}\setminus\left\{\left[-\frac{i}{2},-i\right)\right\}$.

80-89. Отобразить на верхнюю полуплоскость внешность двух касающихся кругов $\{\lvert z-z_1\rvert\le R\},\{\lvert z-z_2\rvert\le R\}$**.**

80.	$z_1=4, z_2=6, R=1$,	**85.**	$z_1=0, z_2=6i, R=3$,
81.	$z_1=-3, z_2=-5, R=1$,	**86.**	$z_1=0, z_2=4, R=2$,
82.	$z_1=i, z_2=5i, R=2$,	**87.**	$z_1=-2, z_2=-4, R=1$,
83.	$z_1=1, z_2=7, R=3$,	**88.**	$z_1=2i, z_2=6i, R=2$,
84.	$z_1=-1, z_2=-5, R=2$,	**89.**	$z_1=-i, z_2=-3i, R=1$.

Контрольная работа №2

90-99. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)dz$ **от заданной функции *f(z)* по гиперболе** $L = \left\{ y = x^3 \right\}$**, соединяющей точки *a*=0 и *b*= -1-*i*.**

90.	$f = z \operatorname{Re} z^2$,	**95.**	$f = \bar{z} \operatorname{Re} z$,
91.	$f = z^2 \operatorname{Re} z$,	**96.**	$f = \bar{z} \operatorname{Im} z$,
92.	$f = z^2 \operatorname{Im} z$,	**97.**	$f = \operatorname{Im} z^3$,

93.	$f = z^2 \cdot \bar{z}$,	**98.**	$f = \operatorname{Re} z^3$,
94.	$f = \overline{z^2} \cdot z$,	**99.**	$f = \left(z + \bar{z}\right) z$.

100-109. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

100.	$a_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \cdot n$,	**105.**	$a_n = \left(2n + i\right) \cdot 2^n$,
101.	$a_n = \left(2 - i\right)^n \cdot n$,	**106.**	$a_n = \left(n + 2i\right) \cdot 3^n$,
102.	$a_n = \left(1 - 2i\right)^n \cdot n$,	**107.**	$a_n = \left(i - 2n\right) \cdot 2^n$,
103.	$a_n = \frac{\left(2+i\right)^n}{n}$,	**108.**	$a_n = \left(2i - n\right) \cdot 3^n$,
104.	$a_n = \frac{\left(1+2i\right)^n}{n}$,	**109.**	$a_n = \left(ni + 1\right) \cdot 4^n$.

110-119. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ **заданную функцию** $f(z)$**.**

110.	$f(z) = \cos^3 z$,	**115.**	$f(z) = \ln\left(z^2 - z - 2\right)$,
111.	$f(z) = \sin^3 z$,	**116.**	$f(z) = \ln\left(z^2 + z - 2\right)$,
112.	$f(z) = e^z \sin 2z$,	**117.**	$f(z) = \ln\left(z^2 + 2z - 3\right)$,
113.	$f(z) = e^z \cos 2z$,	**118.**	$f(z) = \ln\left(z^2 \cdot 2z - 3\right)$,
114.	$f(z) = e^{2z} shz$,	**119.**	$f(z) = \ln\left(z^2 + 3z - 4\right)$.

120-129.Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в областях D_1, D_2, D_3.

№№	$f(z)$	D_1	D_2	D_3
120.	$\dfrac{3z+5}{(z-1)(z+3)}$	$\lvert z\rvert<1$	$1<\lvert z\rvert<3$	$\lvert z\rvert>3$
121.	$\dfrac{z-8i}{(z+2i)(z-3i)}$	$\lvert z\rvert<2$	$2<\lvert z\rvert<3$	$\lvert z\rvert>3$
122.	$\dfrac{3z-4+2i}{(z+i)(z-4)}$	$\lvert z\rvert<1$	$1<\lvert z\rvert<4$	$\lvert z\rvert>4$
123.	$\dfrac{z+10+2i}{(z-2i)(z+5)}$	$\lvert z\rvert<2$	$2<\lvert z\rvert<5$	$\lvert z\rvert>5$
124.	$\dfrac{z-6i+1}{(z-1)(z+3)}$	$\lvert z\rvert<1$	$1<\lvert z\rvert<3$	$\lvert z\rvert>3$
125.	$\dfrac{z+12+6i}{(z-3i)(z+4)}$	$\lvert z\rvert<3$	$3<\lvert z\rvert<4$	$\lvert z\rvert>4$
126.	$\dfrac{2z-14i}{(z-i)(z+5i)}$	$\lvert z\rvert<1$	$1<\lvert z\rvert<5$	$\lvert z\rvert>5$
127.	$\dfrac{2z+2i-1}{(z-1)(z+2i)}$	$\lvert z\rvert<1$	$1<\lvert z\rvert<2$	$\lvert z\rvert>2$
128.	$\dfrac{z-12-8i}{(z-2i)(z+4)}$	$\lvert z\rvert<2$	$2<\lvert z\rvert<4$	$\lvert z\rvert>4$
129.	$\dfrac{3z+3+8i}{(z+3)(z+4i)}$	$\lvert z\rvert<3$	$3<\lvert z\rvert<4$	$\lvert z\rvert>4$

130-139. Найдите изолированные особые точки заданной функции $f(z)$, выясните их характер и исследуйте поведение функции на бесконечности.

130	$f(z)=\dfrac{\left(z^{12}+10z^4+2\right)\sin\dfrac{1}{z-3}}{z^2(z+5)^3\left(z^2+9\right)}$	**135**	$f(z)=\dfrac{\left(z^{11}+z+5\right)e^{\frac{1}{z+2}}}{z(z-2i)^3\left(z+3i\right)^4}$

131	$f(z)=\dfrac{\left(z^8-5z+1\right)\cos\dfrac{1}{z+i}}{(z-1)(z+3)^2(z+6)^4}$	**136**	$f(z)=\dfrac{\left(z^{14}-2z^7+4\right)\sin\dfrac{1}{z-2}}{(z+2)^2(z-3)^3(z+4)^4}$
132	$f(z)=\dfrac{\left(z^9-6z^4+5\right)e^{\frac{1}{z-i}}}{(z-3i)^2(z+2i)^2(z+4)^3}$	**137**	$f(z)=\dfrac{\left(z^{11}-6z^3+2\right)\cos\dfrac{1}{z+2i}}{z^5(z+i)^2(z-2i)}$
133	$f(z)=\dfrac{\left(z^{12}+6z^6+1\right)\sin\dfrac{1}{z+1}}{z^4(z+5)^2(z-4i)}$	**138**	$f(z)=\dfrac{\left(z^8+5z^2+1\right)e^{\frac{1}{z-2i}}}{\left(z^3+z^2\right)^2(z+2i)}$
134	$f(z)=\dfrac{\left(z^{10}-2z^5+1\right)\cos\dfrac{1}{z-2}}{z^3(z-6)^2(z+i)^4}$	**139**	$f(z)=\dfrac{\left(z^{13}-5z^6+4\right)\sin\dfrac{1}{z+3}}{(z^2+4)^3\left(z^2+1\right)^2}$

140-149. Вычислить вычеты заданной функции $f(z)$ во всех изолированных особых точках.

140.	$f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-2i)^2(z-1)}$,	**145.**	$f(z)=\dfrac{\cos z}{(z+i)^2(z-2)}$,
141.	$f(z)=\dfrac{\cos z}{(z+2i)^2(z+1)}$,	**146.**	$f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z+3i)(z+1)^2}$,
142.	$f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-2i)(z-1)^2}$,	**147.**	$f(z)=\dfrac{e^{i2z}}{(z-3i)^2(z-1)}$,

143.	$f(z)=\dfrac{\cos z}{(z+2i)(z+1)^2}$,	**148.**	$f(z)=\dfrac{e^z}{(z+3i)^2(z-2)}$,
144.	$f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+i)(z-2)^2}$,	**149.**	$f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z+3i)(z-2)^2}$,

150-159. Вычислить интеграл $\int\limits_C f(z)dz$, где C – положительно ориентированная окружность.

150.	$\int\limits_{\lvert z\rvert=2}\dfrac{dz}{(z^2-3)^2(z+4)^2}$,	**155.**	$\int\limits_{\lvert z\rvert=4}\dfrac{2z^4dz}{(z^2+9)^2(z-5)}$,
151.	$\int\limits_{\lvert z\rvert=3}\dfrac{dz}{(z^2+3)^2(z-5)^2}$,	**156.**	$\int\limits_{\lvert z\rvert=3}\dfrac{dz}{(z+5)^2(z^2-4)^2}$,
152.	$\int\limits_{\lvert z\rvert=3}\dfrac{z^4dz}{(z^2-1)^2(z+4)}$,	**157.**	$\int\limits_{\lvert z\rvert=4}\dfrac{3z^4dz}{(z^2-9)^2(z+5)}$,
153.	$\int\limits_{\lvert z\rvert=2}\dfrac{2z^4dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$,	**158.**	$\int\limits_{\lvert z\rvert=2}\dfrac{dz}{(z^2-2)^2(z+3)^2}$,
154.	$\int\limits_{\lvert z\rvert=3}\dfrac{dz}{(z^2+4)(z-4)^2}$,	**159.**	$\int\limits_{\lvert z\rvert=4}\dfrac{2z^4dz}{(z^2+9)^2(z-6)^2}$.

160-169. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$ от заданной рациональной функции.

160.	$R(x)=\dfrac{x+3}{(x^2-4x+5)(x^2+4x+29)}$,
161.	$R(x)=\dfrac{4x-7}{(x^2-2x+17)(x^2+2x+10)}$,

162.	$R(x)=\dfrac{8x-27}{\left(x^2-10x+29\right)\left(x^2-2x+2\right)}$,
163.	$R(x)=\dfrac{2x-9}{\left(x^2-4x+29\right)\left(x^2+2x+2\right)}$,
164.	$R(x)=\dfrac{3x+4}{\left(x^2-2x+5\right)\left(x^2+4x+13\right)}$,
165.	$R(x)=\dfrac{6x-5}{\left(x^2+4x+5\right)\left(x^2-2x+10\right)}$,
166.	$R(x)=\dfrac{-2x+4}{\left(x^2+4x+13\right)\left(x^2+2x+17\right)}$,
167.	$R(x)=\dfrac{2x-27}{\left(x^2-4x+29\right)\left(x^2-2x+2\right)}$,
168.	$R(x)=\dfrac{3x-4}{\left(x^2+2x+5\right)\left(x^2-4x+13\right)}$,
169.	$R(x)=\dfrac{8x+15}{\left(x^2-2x+10\right)\left(x^2+6x+25\right)}$.

170-179. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$**.**

170.	$f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+2x+4}$,	**175.**	$f(x)=\dfrac{\cos 3x}{x^2-2x+4}$,
171.	$f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2-4x+6}$,	**176.**	$f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x^2+4x+6}$,
172.	$f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x^2+2x+6}$,	**177.**	$f(x)=\dfrac{\cos 2x}{x^2-2x+8}$,

173.	$f(x)=\dfrac{\cos 2x}{x^2-4x+8}$,	**178.**	$f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2-2x+6}$,
174.	$f(x)=\dfrac{\sin 3x}{x^2+2x+8}$,	**179.**	$f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2-2x+8}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М., 1982.
2. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 1. М., 1985.
3. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М., 1984.
4. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. М., 1978.
5. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. М., 1991.
6. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., 1988.
7. *Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М., 1975.
8. Сборник задач по теории аналитических функций / Под ред. Евграфова М. А., М., 1972.