Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный университет   
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра информатики

Дисциплина: Прикладные задачи математического анализа

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к курсовой работе

на тему

ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

БГУИР КП 1-40 04 01

Студент: гр.253505 Бекарев С.С.

Руководитель: канд. ф.-м. н., доцент Калугина М.А.

Минск 2023

Содержание

[Введение 3](#_Toc154455899)

[§1 Комплексные числа 4](#_Toc154455900)

[1.1 Определение комплексного числа 4](#_Toc154455901)

[1.2 Геометрическое изображение комплексных чисел 6](#_Toc154455902)

[§2 Функции комплексного переменного 8](#_Toc154455903)

[2.1 Определение функции комплексного переменного 8](#_Toc154455904)

[2.2 Элементарные функции комплексного переменного 8](#_Toc154455905)

[2.3 Дифференцирование функций комплексного переменного. Условие Коши-Римана. 11](#_Toc154455906)

[2.4 Интегрирование функций комплексного переменного. 12](#_Toc154455907)

[2.5 Интегральная формула Коши. Формула высших порядков. 14](#_Toc154455908)

[2.6 Разложение аналитических функций в ряд Лорана. Правильная и главная части ряда Лорана. 15](#_Toc154455909)

[§3 Особые точки однозначной функции комплексного переменного 17](#_Toc154455910)

[3.1 Классификация особых точек 17](#_Toc154455911)

[3.1.1 Устранимая особая точка 17](#_Toc154455912)

[3.1.2 Изолированный полюс 18](#_Toc154455913)

[3.1.3 Существенно особая точка 19](#_Toc154455914)

[3.2 Поведение аналитических функций в бесконечности 21](#_Toc154455915)

[§4 Теория вычетов 25](#_Toc154455916)

[4.1 Вычет функции относительно изолированной особой точки 25](#_Toc154455917)

[4.2 Вычисление вычетов относительно полюсов 26](#_Toc154455918)

[4.3 Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки 28](#_Toc154455919)

[§5 Решение практических задач с использованием СКА Maple 30](#_Toc154455920)

[5.1 Поиск оригинала функции по ее изображению с помощью вычетов 30](#_Toc154455921)

[5.2 Разложение функции в ряд Лорана с помощью СКА Maple 32](#_Toc154455922)

[5.3 Вычисление интеграла комплексной функции с помощью СКА Maple 34](#_Toc154455923)

[Заключение 36](#_Toc154455924)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 37](#_Toc154455925)

# Введение

Комплексный анализ или же теория функций комплексного переменного (сокращенно – ТФКП) — раздел математического анализа, в котором рассматриваются и изучаются функции комплексного аргумента.

В области комплексного анализа одной из ключевых тем является исследование функций комплексного переменного. Изучение комплексных функций ведет нас к интересному явлению — изолированным особым точкам.

В курсовой работе мы погрузимся в глубокий анализ этой проблемы, начиная с формализации основных понятий и определений. Приступим к анализу изолированных особых точек, изучая их классификацию. Рассмотрим примеры изолированных точек.

Курсовая работа состоит из 5 глав. В первой главе затрагивается общее понятие комплексного числа и основные его свойства. Во второй главе вводится определение функции комплексного переменного, а также понятие о дифференцировании и интегрировании однозначной функции комплексного переменного. В третьей главе мы непосредственно приступим к главной теме курсовой работе, а именно к особым точкам однозначной функции комплексного переменного, их классификациям и поведению функций в окрестности этих точек. В четвертой главе расположена дополнительная информация, связанная с особыми точками, – теория вычетов. В последней пятой главе рассматривается решение прикладных задач на темы третьей и четвертой глав. Также представлены решения задач в Системе Компьютерной Алгебры Maple (далее СКА Maple).

Курсовая работа не лишена примеров, подкрепляющих полученные теоретические знания.

Цель работы — изучение особых изолированных точек однозначных функций комплексного переменного и их классификации.

Задача работы — ознакомится с функциями СКА Maple для визуализации функций комплексного переменного и окрестностей их особых точек, а также для решения базовых задач таких как: определение особых точек функции и поиск вычета функции комплексного переменного.

# §1 Комплексные числа

## 1.1 Определение комплексного числа

Комплексными числами называются пары действительных чисел и , если для них определены понятие равенства, операции сложения и умножения следующим образом:

1. Два комплексных числа и считаются *равными* тогда и только тогда, когда и .
2. *Суммой* двух комплексных чисел и называется комплексное число .
3. *Произведением* двух комплексных чисел и называется комплексное число .

Для обозначения равенства, суммы, произведения и других операций над комплексными числами применяются те же знаки, что и для действительных чисел. Из формул суммы и произведения вытекают, в частности, соотношения:

, ,

Данные соотношения показывают, что операции над комплексными числами вида совпадают с операциями над действительными числами . Поэтому комплексные числа вида отождествляются с действительными числами: .

Комплексное число называется *мнимой единицей* и обозначается буквой , т. е. . Вычислим произведение .

Из формул сложения и умножения вытекают также равенства:

, .

Таким образом, каждое комплексное число можно представить в виде . Запись комплексного числа в виде называется *алгебраической формой* комплексного числа. Комплексные числа вида называются *чисто мнимыми*. В частности, число 0, т. е. комплексное число (0, 0), является единственным числом, которое одновременно и действительное, и чисто мнимое.

Комплексное число принято обозначать одной буквой , т. е. . Число называется действительной частью, а число — мнимой частью комплексного числа . Для этих чисел приняты следующие обозначения:

, .

Комплексное число называется *сопряженным* с комплексным числом и обозначается :

Число называется *модулем* комплексного числа и обозначается :

Отметим две формулы:

, ,

которые вытекают из равенства:

Рассмотрим теперь операции обратные к сложению (*вычитание*) и умножению (*деление*).

1. *Вычитание.* Для любых двух комплексных чисел и существует, и притом только одно, число , удовлетворяющее уравнению:

Это число называется *разностью* чисел и и обозначается , т.е.:

1. *Деление.* Для любых двух комплексных чисел и существует, и притом только одно, число , удовлетворяющее уравнению:

Это число называется *частным* чисел и и обозначается , т.е.:

Суть деления состоит в том, что результат получается умножением числителя и знаменателя на число, сопряженное со знаменателем.

Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают следующими свойствами:

1. Коммутативность:

,

1. Ассоциативность:

,

1. Дистрибутивность:

## 1.2 Геометрическое изображение комплексных чисел

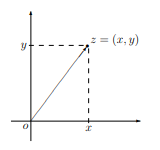


Рисунок 1.2.1 – Геометрическое изображение комплексного числа

Любое комплексное число изображается точкой плоскости с координатами , и эта точка обозначается той же буквой . Действительная часть изображаются точками оси абсцисс, а мнимая - точками оси ординат. Поэтому ось абсцисс называется действительной осью, а ось ординат - мнимой осью. Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называется *комплексной числовой плоскостью* (обозначение: ℂ). Комплексное число изображается также вектором с началом в точке и концом в точке (рис. 1.2.1).

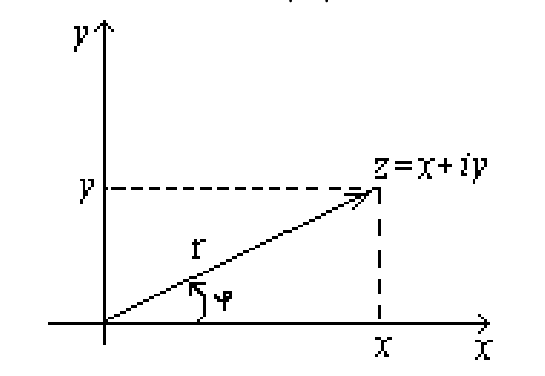


Рисунок 1.2.2 – Геометрическое изображение комплексного числа

Длина радиус-вектора точки является *модулем* комплексного числа *,* а угол его наклона к оси называется *аргументом* комплексного числа . Обозначения: соответственно. Из рисунка 1.2.2 видно, что , а удовлетворяет системе уравнений

Также удобно определять по следующей таблице:

В связи с этим комплексное число может представляться и в *тригонометрической* форме записи .

# §2 Функции комплексного переменного

## 2.1 Определение функции комплексного переменного

Говорят, что на множестве задана функция ), если задано правило (закон), по которому каждой точке ставится в соответствие определенная точка (в таком случае функция называется *однозначной*) либо совокупность точек (в этом случае функция называется *многозначной).*

Примеры:

1. Функции , , определены на всей ℂ и являются *однозначными* функциями комплексного переменного.
2. Функция , определена на всей ℂ и является *многозначной* функцией комплексного переменного.

Замечание. Если , , то задание функции   
 эквивалентно заданию двух действительных функций , , так как , т.е.:

Таким образом, функцию комплексного переменного можно задать как отображение ℝ­­2 → ℝ­­2.

Если отображение (функция) , является взаимно однозначным, то называется *однолистной*. Если область определения функции можно разбить на несколько областей однолистности, то называется *многолистной.*

## 2.2 Элементарные функции комплексного переменного

Рассмотрим примеры элементарных функций комплексного переменного:

1. *Линейная функция:* , , ∈ ℂ. Очевидно, что линейная функция является однозначной. Функция обратная линейной:  
    , очевидно, также является однозначной. Таким образом, линейная функция , является однолистной.

Рассмотрим функцию . Очевидно, что:

.

Таким образом, геометрический смысл отображения следующий: ℂ растягивается в раз и поворачивается вокруг точки на угол . В свою очередь, есть сдвиг плоскости , характеризуемый вектором . Таким образом, линейная функция *растягивает*, *поворачивает* и *сдвигает* комплексную плоскость ℂ.

Рассмотрим конкретную линейную функцию (отображение)   
. Для начала изобразим комплексную плоскость ℂ (рис. 2.2.1). Исходя из (1) комплексная плоскость растянется в   
 раз, повернется на угол, который будет равен  
 и совершит сдвиг, характеризуемый вектором , т.е. точки на комплексной области сдвинуться по следующему правилу: . Данное преобразование плоскости изображено на рисунке 2.2.2.

Рисунок 2.2.1 – Изображение комплексной плоскости ℂ

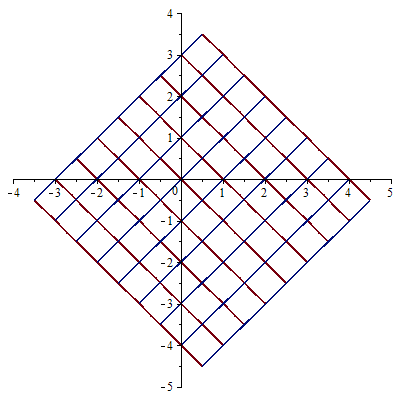


Рисунок 2.2.2 – Отображение комплексной плоскости ℂ

1. *Степенная функция*. Если , то , . Очевидно, что , , и что функция однозначна.

Рассмотрим степенную функцию и то, как она действует на плоскость ℂ (рис. 2.2.3). Исходя из определения степенной функции, модуль каждого комплексного числа будет возведен в квадрат, а аргумент увеличится в два раза. Данное преобразование плоскости изображено на рисунке 2.2.4.

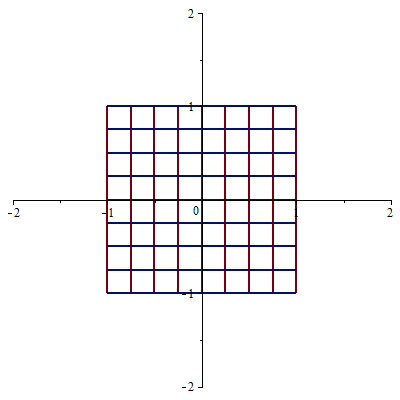


Рисунок 2.2.3 – Изображение комплексной плоскости ℂ.

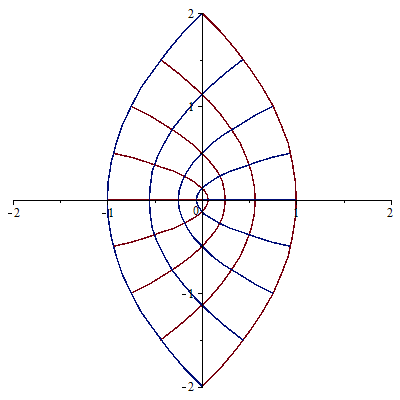


Рисунок 2.2.4 – Отображение комплексной плоскости ℂ

## 2.3 Дифференцирование функций комплексного переменного. Условие Коши-Римана.

Пусть однозначная функция определена в некоторой области . Пусть точки и принадлежать области . Обозначим , где .

Функция называется *дифференцируемой* в точке , если стремится к определенному пределу, когда любым образом. Этот предел называется производной функции в точке и обозначается , так что по определению:

Функция , называется *аналитической* в области , если она дифференцируема в любой точке .

Пример 1: Функция нигде не дифференцируема на :

, где .

Если , то , при ;

Если , то , при ;

Таким образом, функция не дифференцируема на .

Теорема (Условия Коши-Римана). Пусть определена в некоторой окрестности точки , причем функции дифференцируемы в точке , что соответствует точке . Тогда для дифференцируемости в точке необходимо и достаточно, чтобы в этой точке имели место соотношения:

называемые условиями Коши-Римана.

Доказательства теоремы приведены в [1, стр. 22].

Из определения производной и свойств пределов вытекает, что на функции комплексного переменного распространяются все известные из курса математического анализа правила дифференцирования.

## 2.4 Интегрирование функций комплексного переменного.

Рассмотрим однозначную функцию , определенную в области . Пусть - кусочно-гладкая ориентированная кривая, с началом в точке , и концом в точке , лежащая в области . Разобьём на частичных дуг с помощью точек , расположенных последовательно в положительном направлении линии . На каждой дуге выберем произвольные точки . Пусть далее .

Если при существует:

не зависящий от способа разбиения и от выбора точек , то этот предел называется интегралом от функции вдоль кривой и обозначается:

Если – кусочно-гладкая кривая, а – кусочно-непрерывная функция, то всегда существует, при этом

т.е. вычисление интеграла от функции вдоль сводится к вычислению криволинейных интегралов второго рода .

Основные свойства интеграла по комплексному переменному аналогичны соответствующим свойствам обыкновенных интегралов.

Если аналитична в области и точки , то , где - линия, лежащая в , соединяющая и , не зависит от формы линии , а зависит лишь от и [1, стр. 33].

Пример 1: Г – дуга параболы

Пример 2: Г – отрезок прямой

Пример 3:

Таким образом было подтверждено на примере, что интеграл аналитической функции не зависит от формы линии , а зависит лишь от и .

## 2.5 Интегральная формула Коши. Формула высших порядков.

Теорема (Формула Коши). Пусть - -связная область, ограниченная кусочно-гладкой границей и пусть функция аналитична в области и на границе . Тогда справедлива интегральная формула Коши:

где и интегрирование по происходит в положительном направлении, т.е. при обходе область остается всё время слева ([4] стр. 87).

Пример:

не лежит в области ограниченной , в то время как () лежит в заданной области, пользуясь методом неопределенных коэффициентов, получаем:

Теорема (Формула Коши высших производных). Если аналитична в области и на её границе , то для любого натурального имеет место формула:

Доказательство теоремы приведено в [2, стр. 51]

## 2.6 Разложение аналитических функций в ряд Лорана. Правильная и главная части ряда Лорана.

Теорема(П. Лоран). В любом кольце , в котором функция аналитична, эта функция может быть представлена сходящимся рядом вида:

который называется рядом Лорана. Причем ряд Лорана сходится равномерно в любой замкнутой области, принадлежащей кольцу K ([1], стр. 58).

Рассмотрим отдельно два ряда, из которых состоит ряд Лорана. Ряд является обыкновенным степенным рядом, который сходится во всех точках круга . Данный ряд называется *правильной* частью ряда Лорана. Второй ряд рассмотрим как обыкновенный степенной ряд, полагая . В новых обозначениях ряд примет вид и будет являться обычным степенным рядом, который будет сходиться при . Следовательно ряд сходится при всех , для которых имеет место неравенство . Данный ряд называется *главной* частью ряда Лорана.

Пример 1: Разложить в ряд Лорана функцию

в окрестности точек .

Разложение в окрестности , т.е. в кольце .

Разложение в окрестности , т.е. в кольце .

Пример 2: Разложить в ряд Лорана в кольце функцию

Разобьем функцию на две простейшие дроби:

Вторая дробь разложима в кольце , что выполняется по условию (). Первая дробь разложима в кольце , что не соответствует условию, поэтому вынесем из первой дроби множитель , получим:

Теперь для первой дроби должно быть выполнено условие , что соответствует условию.

Вспомним разложение в ряд Лорана одной из простейших дробей:

Раскладывая аналогичным образом первую и вторую дроби, получим:

# §3 Особые точки однозначной функции комплексного переменного

## 3.1 Классификация особых точек

Точка называется изолированной особой точкой функции , если существует окрестность , в которой однозначная функция аналитична.

Различают три типа особых точек в зависимости от поведения в их окрестности:

1. - устранимая особая точка, если существует конечный ;
2. - полюс, если ;
3. - существенная особая точка, если не существует.

Заметим, что если - изолированная особая точка, то в кольце её аналитичности функция разлагается в ряд Лорана. Это разложение имеет различный вид в зависимости от характера особой точки.

### 3.1.1 Устранимая особая точка

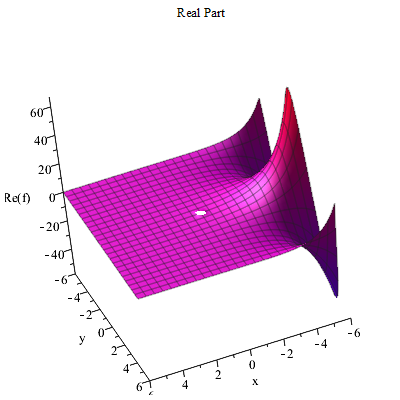
*Теорема* (об устранимой особой точке). Для того чтобы была устранимой особой точкой функции , необходимо и достаточно, чтобы лорановское разложение в окрестности точки не содержало главной части [1 стр. 67].

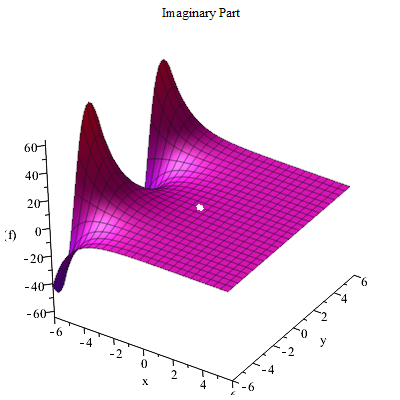
Пример: Установить характер особой точки функции:

Воспользуемся разложением функции :

Это разложение не содержит главной части. Поэтому точка является устранимой особой точкой. И если функцию доопределить единицей, то получим функцию аналитичную и в точке .

Визуальное представление функции показано на рисунке 3.1.1.1, где А) представление вещественной части (), а Б) – мнимой части ().





1. **Б)**

Рисунок 3.1.1.1 – Представление функции в виде двух графиков:  
А – Вещественная часть ;  
Б – Мнимая часть ;

### 3.1.2 Изолированный полюс

Рассмотрим случай, когда - изолированный полюс функции . Из определения полюса следует, что в некоторой окрестности точки , в которой, кроме того, она аналитична (за исключением самой т. ). Тогда для нулем функции . Обратно, если имеет изолированный нуль в точке , то имеет в точке полюс. Будем называть порядком полюса функции порядок нуля функции .

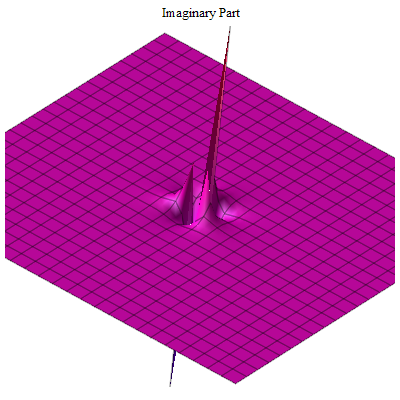
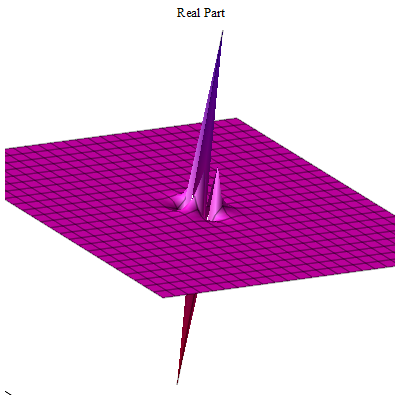
*Теорема* (о представлении в окрестности полюса). Для того чтобы точка была полюсом функции порядка , необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения в окрестности точки содержала только конечное число членов [1 стр. 68].

Пример: Установить характер особой точки функции:

Воспользуемся разложением функции :

Полученное разложение имеет конечное кол-во членов в главной части. Поэтому точка является полюсом третьего порядка.

Визуальное представление функции показано на рисунке 3.1.2.1, где А) представление вещественной части (), а Б) – мнимой части ().



1. **Б)**

Рисунок 3.1.2.1 – Представление функции в виде двух графиков:  
А – Вещественная часть ;  
Б – Мнимая часть ;

### 3.1.3 Существенно особая точка

Из двух предыдущих теорем непосредственно следует:

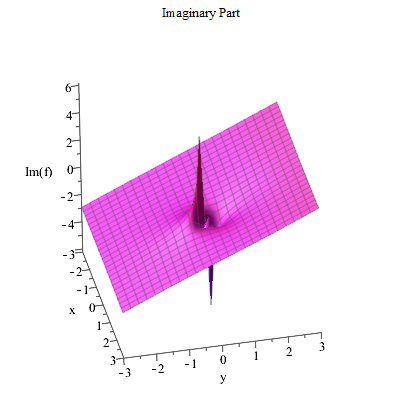
*Теорема* (о представлении в окрестности существенной особой точки). Точка тогда и только тогда - существенная особая точка, когда главная часть лорановского разложения функции в окрестности содержит бесконечное число членов.

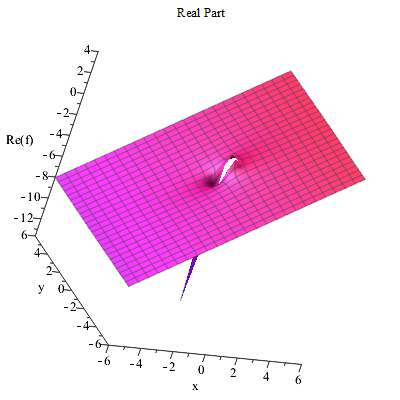
Пример: Установить характер особой точки функции:

Воспользуемся разложением функции :

Полученное разложение имеет бесконечное кол-во членов в главной части. Поэтому точка является полюсом третьего порядка.

Визуальное представление функции показано на рисунке 3.1.3.1, где А) представление вещественной части (), а Б) – мнимой части ().





1. **Б)**

Рисунок 3.1.3.1 – Представление функции в виде двух графиков:  
А – Вещественная часть ;  
Б – Мнимая часть ;

## 3.2 Поведение аналитических функций в бесконечности

Пусть - окрестность бесконечно удаленной точки . *Бесконечно удаленная точка* называется изолированной особой точкой функции , если существует , в которой нет особых точек функции .

Пусть бесконечно удаленная точка - изолированная особая точка функции . Рассмотрим функцию . Очевидно, что аналитична в окрестности нуля плоскости и нуль будет изолированной особой точкой функции .

Бесконечно удаленная точка для называется устранимой особой точкой, полюсом (порядка ), существенной особой точкой, если точка является устранимой особой точкой, полюсом (порядка ), существенной особой точкой для функции , соответственно.

Запишем разложение в ряд Лорана для функции :

Пологая и :

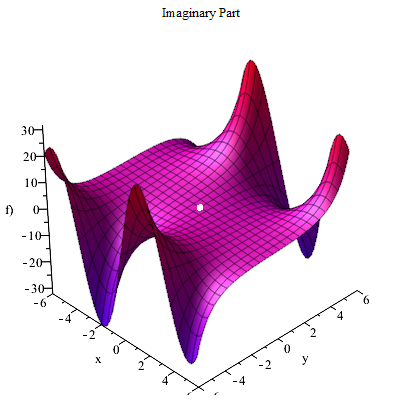
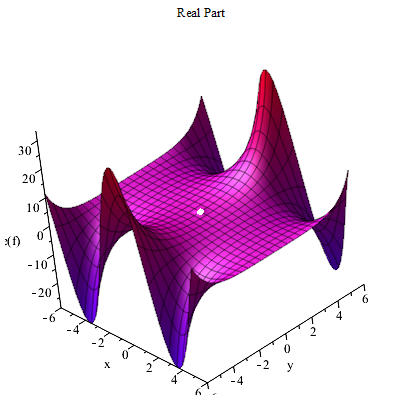
1. Точка является для *устранимой* особой точкой, если в её разложении в ряд Лорана отсутствуют положительные степени z.
2. Точка является для *полюсом* порядка , если в её разложение в ряд Лорана входит конечное число положительных степеней .
3. Точка является для функции *существенной* особой точкой, если её разложение в ряд Лорана содержит бесконечно много положительных степеней.

Пример 1: Определить характер бесконечно удаленной точки для функции:

Раскладывая в ряд Лорана получаем:

В разложении в ряд Лорана отсутствуют положительные степени . Поэтому - устранимая особая точка функции .

Введем замену , с помощью которой можно визуализировать функцию в окрестности нуля (рис.3.2.1).



1. **Б)**

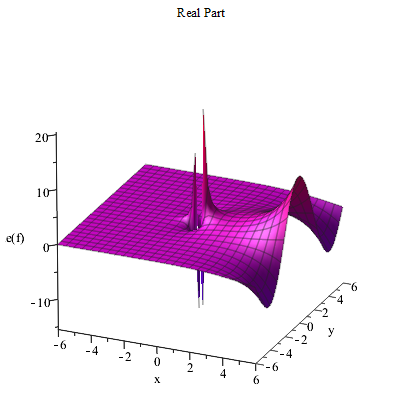
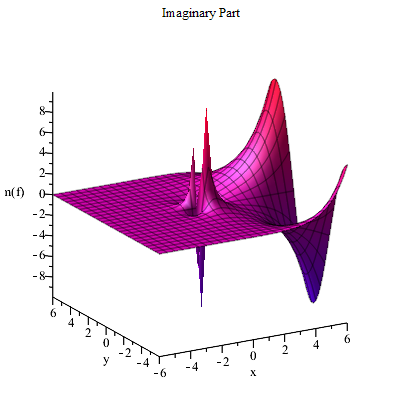
Рисунок 3.2.1 – Представление функции в виде двух графиков:  
А – Вещественная часть ;  
Б – Мнимая часть ;

Пример 2: Определить характер бесконечно удаленной точки для функции:

Раскладывая в ряд Лорана получаем:

В разложение в ряд Лорана входит конечное число положительных степеней . Поэтому - полюс второго порядка функции .

С помощью замены визуализируем функцию в окрестности нуля (рис.3.2.2).

1. **Б)**

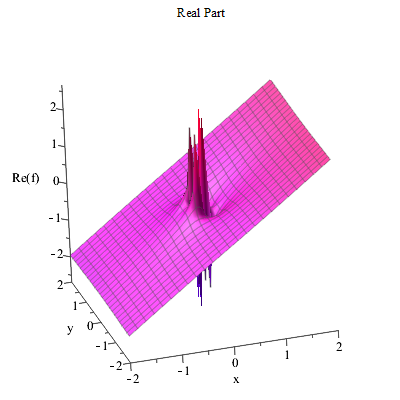
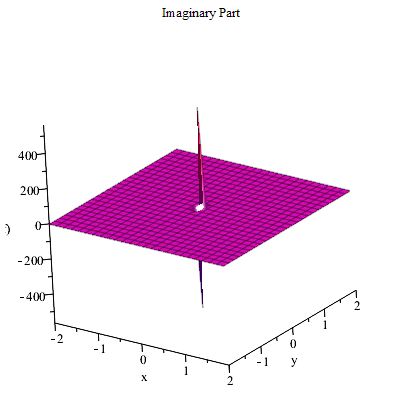
Рисунок 3.2.1 – Представление функции в виде двух графиков:  
А – Вещественная часть ;  
Б – Мнимая часть ;

Пример 3: Определить характер бесконечно удаленной точки для функции:

Раскладывая в ряд Лорана получаем:

Разложение в ряд Лорана содержит бесконечное число положительных степеней . Поэтому - существенно особая точка функции .

Введем замену , с помощью которой можно визуализировать функцию в окрестности нуля (рис.3.2.1).

1. **Б)**

Рисунок 3.2.1 – Представление функции в виде двух графиков:  
А – Вещественная часть ;  
Б – Мнимая часть ;

# §4 Теория вычетов

## 4.1 Вычет функции относительно изолированной особой точки

Пусть - изолированная особая точка функции . Значение интеграла называется вычетом функции относительно особой точки . Здесь - замкнутый контур, целиком лежащий в окрестности точки , где аналитична всюду, кроме точки . Обозначение:

Разложим функцию в ряд Лорана:

На контуре данный ряд сходится равномерно, следовательно, мы можем

почленно интегрировать ряд вдоль . . Так как , то .

Таким образом, . Очевидно, что , если – устранимая особая точка функции (.

Теорема (основная теорема о вычетах). Пусть аналитична в любой точке области , кроме конечного числа особых точек . Пусть - произвольная замкнутая кусочно-гладкая линия, лежащая в области и содержащая внутри себя точки . Тогда, если обходится в положительном направлении, то

Доказательство данной теоремы приводится в [2, стр. 238].

## 4.2 Вычисление вычетов относительно полюсов

Пусть - простой полюс функции . В этом случае:

Обобщим эту формулу на случай полюса порядка :

Продифференцируем это равенство раз. Получим степенной ряд со свободным членом . Далее, переходя к пределу при , получим:

Пример 1: Найти вычеты функции

в ее особых точках.

Особая точка функции есть - полюс -го порядка. Поэтому:

Если функция в окрестности точки представима как частное двух аналитических функций , причем

т.е. – полюс (простой) функции , то: .

Справедливость данного замечания следует из формулы для вычисления вычета в случае простого полюса:

Пример 2: Найти вычет в точке функции

Точка является нулем как числителя, так и знаменателя. Определим порядок нуля для этих функций, для это разложим их в ряд Лорана.

Учитывая данные разложения, получаем:

Пример 3: Вычислить интеграл

Функции , имеет две особые точки: – простой полюс и – устранимая особая точка.

Найдем вычет в точке

Точка является устранимой особой точкой поэтому вычет в этой точке равен нулю. Далее получаем:

## 4.3 Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки

Пусть бесконечно удаленная точка является изолированной особой точкой функции . Пусть – окрестность бесконечно удаленной точки и пусть аналитична в . Обозначим через замкнутый контур, целиком лежащий в .

Вычетом функции относительно бесконечно удаленной точки называется значение интеграла , где интегрирование вдоль контура происходит в отрицательном направлении.

Разложение в ряд Лорана в для функции имеет вид:

Так как этот ряд сходится равномерно на контуре , то мы можем его почленно интегрировать. Замечая, что

получим после интегрирования:

Таким образом, вычет функции относительно бесконечно удаленной точки .

В случае устранимой особой точки, лежащей на конечном расстоянии, вычет всегда равен нулю. Этого может не быть в случае бесконечно удаленной точки. Например, функция в бесконечности имеет устранимую особенность, а соответствующий вычет равен .

*Теорема*. Если аналитична в любой точке расширенной комплекс ной плоскости кроме конечного числа особых точек, то сумма вычетов относительно всех её особых точек (включая и бесконечно удаленную точку) всегда равна нулю.

*Доказательство*. Опишем окружность конечного радиуса такую, что все особые точки попадают в эту окружность. По основной теореме о вычетах, величина равна сумме вычетов относительно всех особых точек, лежащих внутри .

С другой стороны, величина равна вычету функции относительно бесконечно удаленной точки. Следовательно, сумма всех вычетов равна: .

Пример: Вычислить интеграл

Функция , в кольце имеет пять особых точек.

Найдем вычет функции в бесконечно удаленной точке.

Отсюда видно, что правильная часть лорановского разложения функции в окрестности бесконечно удаленной точки начинается с члена . Следовательно, . Учитывая:

Получаем:

# §5 Решение практических задач с использованием СКА Maple

## 5.1 Поиск оригинала функции по ее изображению с помощью вычетов

Формула для решения задач:

Для решения примеров п.5.1 была написана процедура представленная в листинге 1.

Листинг 1:



Пример 1: Найти оригинал изображения

Изображение имеет три особых точки: , каждая из которых является простым полюсом. Поэтому:

Таким образом:

Проверим полученное решение с помощью СКА Maple. Для этого воспользуемся функцией , которая находится в пакете , а также функцией simplify() для упрощения результата, которая находится в стандартной библиотеке СКА Maple.









Пример 2: Найти оригинал изображения

Изображение имеет четыре особые точки: , каждая из которых является простым полюсом. Особые точки являются комплексно сопряженными поэтому:

Далее:

Проверим полученное решение с помощью СКА Maple:









Пример 3: Найти оригинал изображения

Изображение имеет две особые точки: – полюс третьего порядка, и – простой полюс. Далее:

В итоге:

Проверим полученное решение с помощью СКА Maple:









## 5.2 Разложение функции в ряд Лорана с помощью СКА Maple

Задача: Написать процедуру в СКА Maple, которая разлаживает функцию в ряд Лорана в окрестности особых точек.

Для написания процедуры были использованы функции СКА Maple: – для поиска особых точек функции и - для разложения функции в ряд Лорана. Код процедуры представлен в листинге 1.

Листинг 1:



Проверим работу процедуры при решении практических задач.

Пример 1: Разложить в ряд Лорана функцию

в окрестности особых точек.

Решение процедуры СКА Maple:











Убедиться в правильности разложения можно рассмотрев пример 1 п. 2.6

Пример 2: Разложить в ряд Лорана функцию

в окрестности особых точек.

Решение процедуры СКА Maple:









Убедиться в правильности разложения можно рассмотрев пример п. 3.1.2

## 5.3 Вычисление интеграла комплексной функции с помощью СКА Maple

Задача: Написать процедуру в СКА Maple, которая вычисляет значение интеграла функции комплексного переменного.

Для написания процедуры была использована функция СКА Maple: – значение вычета в точке , которая является встроенной функцией стандартной библиотеки СКА Maple. Код процедуры представлен в листинге 1.

Листинг 1:



Пример 1: Найти значение интеграла

с помощью теории вычетов.

Решение полученное с помощью процедуры СКА Maple:









Убедиться в правильности разложения можно рассмотрев пример п. 2.5

Пример 2: Найти значение интеграла

Решение полученное с помощью процедуры СКА Maple:









Убедиться в правильности разложения можно рассмотрев пример 2 п. 4.2

Пример 3: Найти значение интеграла

Решение полученное с помощью процедуры СКА Maple:









Убедиться в правильности разложения можно рассмотрев пример 3 п. 4.2

# Заключение

В ходе выполнении курсовой работы были описаны основные определения и понятия связанные с функциями комплексного переменного.

Была выполнена основная цель курсовой работы — исследование особых изолированных точек однозначной функции комплексного переменного, рассмотрена их классификация, а также приведены примеры каждого типа изолированных особых точек. Примеры графиков функций комплексного переменного были визуализированы в СКА Maple.

В заключительной пятой главе было приведено ряд задач на три основные темы: решение задач поиска оригинала функции по ее изображению, используя теорию вычетов, особые точки функции комплексного переменного и разложение функций в ряд Лорана, вычеты функции комплексного переменного и вычисление интегралов с помощью вычетов. Решение задач было написано в СКА Maple и предоставлено в листингах пятой главы.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Дубровин В.Т. - Теория функций комплексного переменного

[2] Привалов И.И. - Введение в теорию функций комплексного перемен-

ного

[3] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В - Методы теории функций комплекс-

ного переменного

[4] Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И - Лекции по теории

функций комплексного переменного

[5] Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И - Функции комплексно-

го переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости

[6] Алехно А.Г., Васильев И.Л. – Теория функций комплексного переменного

[7] Inttrans package documentation [Электронный ресурс]. – Режим доступа :  
https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=inttrans

[8] Maple Documentation [Электронный ресурс]. – Режим доступа : https://www.maplesoft.com/support/help/maple