Unit-Linked Tontine: Utility-Based Design, Pricing and Performance

Maîtrise en Actuariat

Réalisé par :
Stanislas MBOUNGOU MANGOUBI

Sous la supervision de :
Thai Nguyen, professeur à l'Université Laval

Date : 4 septembre 2024

Table des matières

1 INTRODUCTION **3**
- 1.1 Pourquoi Unit-linked ? . . . 3
- 1.2 Why are tontines considered as an alternative retirement product ? . . . 4
- 1.3 Pourquoi la fonction d'utilité ? . . . 5
- 1.4 Quelles sont les approches de tarification utilisées ? . . . 5
- 1.5 Les différentes variantes de tontines . . . 5

2 MÉTHODOLOGIE **5**
- 2.1 Modèle de Milevsky et Salisbury (2015) . . . 6
  - 2.1.1 Hypothèses . . . 6
- 2.2 Marché financier et risque de mortalité . . . 7
  - 2.2.1 Hypothèse . . . 7
  - 2.2.2 Hypothèse . . . 8

3 TARIFICATION **8**
- 3.1 Hypothèse . . . 9
- 3.2 Détermination de la mesure $\mathbb{Q}$ . . . 9
- 3.3 Définitions des filtrations . . . 10
- 3.4 Hypothèses . . . 10
- 3.5 Structure générale de paiement . . . 10
- 3.6 Structures de paiement spécifiques . . . 10

4 OPTIMISATION DE L'UTILITE **12**

5 Observation et question **12**
- 5.1 Observation . . . 12
- 5.2 Questions . . . 13

6 Numerical Analysis **13**

7 CONCLUSION **14**

8 Bibliographie **14**

1 INTRODUCTION

Le travail porte sur la conception, la tarification et la performance des tontines liées à des unités en tant que produits de retraite alternatifs. L'objectif principal de l'article est de proposer et d'analyser des dproduits de tontine en unités de compte qui combinent le concept de tontine avec des paiements liés aux évolutions du marché financier. Il vise à examiner les structures de paiement, à réaliser des études numériques, à explorer la conception, la tarification et la performance des tontines en unités de compte, à les comparer avec les tontines traditionnelles et à analyser le problème d'optimisation pour les tontines traditionnelles.

1.1 Pourquoi Unit-linked ?

Les contrats d'assurance en unités de compte sont attrayants en raison de leur lien avec le marché financier, de leur potentiel d'utilité plus élevé, de la variété des produits, des éléments de garantie supplémentaires et de leur potentiel de rendements plus élevés par rapport aux produits d'assurance traditionnels.

Le terme **unit-linked** est utilisé pour décrire un type de contrat d'assurance-vie qui lie les prestations de la police à la valeur d'un portefeuille d'investissement spécifique, généralement un fonds commun de placement ou une sélection d'actions. Cela signifie que la valeur de la police est directement liée à la performance des investissements sous-jacents.

Le terme **unit-linked** vient du fait que la valeur de la police est divisée en unités, qui sont ensuite liées à la valeur des investissements sous-jacents. Cela permet aux souscripteurs de bénéficier de la croissance potentielle du marché, mais les expose également aux risques du marché.

L'assurance en unités de compte, également connue sous le nom d'assurance-vie variable ou d'assurance liée à des investissements, est un type de police d'assurance qui combine une couverture d'assurance-vie avec des opportunités d'investissement. Dans un contrat d'assurance en unités de compte, une partie de la prime payée par le souscripteur est allouée à la fourniture d'une couverture d'assurance-vie , tandis que le reste est investi dans divers fonds ou portefeuilles d'investissement. Le souscripteur a la flexibilité de choisir les fonds d'investissement en fonction de sa tolérance au risque et de ses objectifs d'investissement. La valeur de la police est directement liée à la performance des fonds d'investissement choisis. L'assurance en unités de compte offre un potentiel de rendements plus élevés par rapport aux produits d'assurance traditionnels, car le souscripteur peut bénéficier de la croissance des investissements sous-jacents. Cependant, elle comporte également des risques d'investissement, car la valeur de la police peut fluctuer en fonction des conditions du marché. Les polices d'assurance en unités de compte offrent transparence, flexibilité et options de personnalisation pour les souscripteurs. Elles peuvent également être utilisées à des fins de planification successorale.

Une tontine en unités de compte est un type de produit financier qui combine des éléments d'une tontine et d'une police d'assurance en unités de compte. Elle implique la mise en commun des fonds des souscripteurs, qui sont ensuite investis dans un portefeuille d'actifs financiers. Les rendements de ces investissements, ainsi que l'expérience de mortalité des souscripteurs, déterminent les paiements aux souscripteurs. Les caractéristiques clés d'une tontine en unités de compte incluent la mise en commun des fonds, la composante d'investissement, le partage du risque de mortalité, les valeurs de compte individuelles et diverses structures de paiement. Elle offre un potentiel de croissance des investissements, la possibilité de bénéficier de l'expérience de mortalité du groupe, et combine les caractéristiques des produits liés à l'investissement avec l'aspect de mise en commun du risque de longévité d'une tontine. La valeur de l'investissement d'un individu dans une tontine en unités de compte est déterminée par la performance des fonds d'investissement, et les individus peuvent avoir la flexibilité de passer d'une option d'investissement à une autre au sein du produit. Les paiements d'une tontine en unités de compte peuvent être structurés de différentes manières, telles que des paiements de revenu réguliers, des paiements forfaitaires ou une combinaison des deux. La structure de paiement spécifique dépend de la conception du produit de tontine. Globalement, les tontines en unités de compte offrent une combinaison d'opportunités d'investissement et de protection contre la longévité, permettant aux individus de potentiellement faire croître leurs économies tout en fournissant une source de revenu à la retraite.

1.2 Why are tontines considered as an alternative retirement product ?

Les tontines sont considérées comme une alternative aux produits de retraite pour plusieurs raisons :

1. Faible demande pour les rentes conventionnelles : Les rentes conventionnelles, qui garantissent un revenu à vie, connaissent une faible demande ces dernières années. Cela peut s'expliquer par des facteurs tels que les taux d'intérêt bas, les préoccupations liées au risque de longévité et les préférences changeantes des individus.
2. Partage du risque de longévité : Les tontines offrent un moyen de partager le risque de longévité entre un groupe d'individus. Dans une tontine, les paiements aux participants survivants augmentent à mesure que les autres participants décèdent. Cette mutualisation du risque de longévité peut permettre une gestion plus efficace et rentable du risque de dépasser ses économies. **(Discute avec Thaï et creuse ce point)**
3. Potentiel de rendements plus élevés : Les tontines sont souvent structurées pour inclure des composantes d'investissement, permettant aux participants de bénéficier de la performance des actifs financiers sous-jacents. Ce potentiel de rendements plus élevés peut rendre les tontines plus attractives pour les personnes cherchant à faire croître leurs économies de retraite.
4. Coûts réduits : Les tontines sont généralement structurées avec des coûts plus bas par rapport aux rentes traditionnelles. Cela s'explique par le fait que les tontines n'incluent pas de garanties ou de fonctionnalités d'assurance coûteuses, ce qui les rend potentiellement plus abordables pour les individus.
5. Flexibilité et personnalisation : Les tontines peuvent être conçues avec différentes structures de paiement et options, offrant aux individus une flexibilité dans la façon dont ils reçoivent leurs revenus de retraite. Cette personnalisation permet aux individus d'adapter le produit de tontine à leurs besoins et préférences spécifiques.
6. Dans l'ensemble, les tontines offrent une alternative aux produits de retraite qui répondent à certaines des limites et préoccupations associées aux rentes conventionnelles. Elles offrent la possibilité aux individus de réaliser potentiellement des rendements plus

élevés, de partager le risque de longévité et d'avoir plus de flexibilité dans la planification de leurs revenus de retraite.

Assurance Vie Variable : Couverture d'assurance-vie avec une prestation de décès

Rente variable : Revenu de retraite ou accumulation de richesse

1.3 Pourquoi la fonction d'utilité ?

La fonction d'utilité est utilisée dans ce travail pour comparer et analyser différentes variantes du produit de tontine et des stratégies de revenu de retraite. Elle permet une analyse quantitative des préférences des souscripteurs, de leur aversion au risque et des compromis entre risque et rendement. La valeur de l'utilisation d'une fonction d'utilité réside dans sa capacité à offrir un cadre systématique et quantitatif pour évaluer la désirabilité et l'attractivité des différentes options, aidant ainsi à la prise de décision et aux recommandations concernant la conception et la tarification des produits de tontine.

1.4 Quelles sont les approches de tarification utilisées ?

L'article s'appuie sur l'approche de tarification risque neutre pour déterminer les primes nécessaires à l'achat des tontines liées à des unités correspondantes.

Afin de mettre en évidence le potentiel de la nouvelle variante de tontine liée à des unités, il est réalisé une analyse de l'utilité espérée couramment utilisée dans un tel contexte (Mitchell 2002 ; Yaari 1965). Plus précisément, **on recherche d'abord la stratégie d'investissement optimale qui maximise l'utilité espérée du souscripteur pour une variante de tontine liée à des unités donnée**. Ensuite **on compare numériquement les utilités espérées maximales des deux variantes**. Cette comparaison prend également en compte deux alternatives traditionnelles de tontine sans paiements liés à des unités, à savoir la tontine traditionnelle optimale et la tontine traditionnelle naturelle.

1.5 Les différentes variantes de tontines

The paper discusses four variants of tontine :

1. Unit-linked tontine from Case A : tontine payout process is equal to the portfolio value
2. Unit-linked tontine from Case B : tontine payout process is equal to the portfolio value plus guaranteed payments
3. Optimal traditional tontine
4. Natural traditional tontine

2 MÉTHODOLOGIE

Cette section traite de la modélisation d'un produit de tontine lié à des unités, en intégrant la dynamique du marché financier et les risques de mortalité.

Le concept traditionnel de tontine implique des participants homogènes recevant des paiements basés sur une fonction de paiement de tontine déterministe.

Dans une tontine liée à des unités, les paiements sont liés au marché financier par un processus de paiement de tontine stochastique.

Le modèle de marché financier inclut un actif risqué suivant un mouvement brownien géométrique et un actif sans risque avec des paramètres constants.

La valeur du portefeuille de l'assureur est déterminée par une stratégie autofinancée impliquant des investissements dans les actifs risqués et sans risque.

Le risque de mortalité dans les tontines liées à des unités comprend des composantes non systématiques et systématiques, avec des chocs de mortalité représentés par une variable aléatoire.

Les réglementations de solvabilité des assurances exigent des tests de résistance sur les taux de mortalité, avec des scénarios impliquant des diminutions de 10 à 40

La distribution du nombre stochastique de participants vivants à un moment donné est modélisée comme une distribution binomiale.

L'hypothèse d'indépendance des risques actuariels et financiers permet l'analyse de la tarification et du bien-être individuel de manière semi-explicite.

2.1 Modèle de Milevsky et Salisbury (2015)

On considère un échantillon de $n-$assurés tous âgés de $x-$ans et de même sexe et $t \in \mathbf{T}$, où $\mathbf{T}$ est l'espace des temps.
On désigne : d_t : la fonction de paiement de tontine. N_t : nombre de survivants à l'instant t.

Supposons qu'il y a des décès au temps $t > 0$, alors le surplus a redistribué parmi les survivants est donné par : $\frac{(n-N_t)d_t}{N_t}$. De ce fait, le paiement total versé au titulaire de la tontine traditionnelle considérée à l'instant t, étant donné qu'elle est en vie, est donné par :

$$\left(\frac{(n-N_t)d_t}{N_t} + d_t\right)\mathbb{1}_{\{\zeta_x > t\}} = \frac{nd_t}{N_t}\mathbb{1}_{\{\zeta_x > t\}}, \tag{1}$$

Où ζ_x est la v.a. représentant la durée de vie stochastique restante de l'individu âgé de x années au temps 0.

Remarque 1. *La principale différence entre le modèle traditionnel de tontine et celui développé dans cet article est que la fonction déterministe de paiement de la tontine traditionnelle* d_t *est remplacée par le processus stochastique de paiement* Ψ_t*. D'où, le paiement total reçu par le détenteur de la tontine est donné par le processus stochastique* $(D_t)_{t\in\mathcal{T}}$ *tel que :*

$$D_t = \frac{n\Psi_t}{N_t}\mathbb{1}_{\{\zeta_x > t\}}. \tag{2}$$

2.1.1 Hypothèses

1. Homogénéité des participants.
2. Les paiements de l'assureur au détenteur de la tontine sont continus. n'y a pas de prestation de décès.

2.2 Marché financier et risque de mortalité

Ici, on considère le marché de Black-Scholes, i.e. un marché dans lequel on ne dispose que de deux actifs : un actif risqué et un actif sans risque.
Soit S_t le rendement de l'actif risqué (le sous-jacent) à l'instant t. On a l'EDS suivant :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{3}$$

$$S_0 > 0 \text{ et } S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t};$$

Avec μ : la tendance et σ la volatilité. Notons que $W_t \sim \mathcal{N}(0, 1$, i.e. un Mouvement Brownien (MBS) standard.
Soit B_t l'actif sans risque, on a :

$$dB_t = rB_t dt, B_0 = 1, B_t = B_0 e^{rt} \text{ et, } B_0 = 1;$$

où r désigne le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque et constant.

2.2.1 Hypothèse

Soit V_t la valeur du portefeuille à l'instant t.

On assume que la fraction du portefeuille investie dans l'actif risqué à l'instant t est décrite par la stratégie de trading déterministe $\pi_t \in [0, 1]$. Cela signifie que ni la vente à découvert du portefeuille risqué, ni l'effet de levier ne sont autorisés. La fraction restante $(1 - \pi_t)$ est investie dans l'actif sans risque.

$\mu > r$.

Le paiement des dividendes est négligeable.

En considérant la stratégie d'auto-financement la dynamique de V_t sous la mesure $\mathbb{P}$ est donnée par :

$$dV_t = \pi_t \frac{V_t}{S_t} dS_t + (1 - \pi_t) \frac{V_t}{B_t} dB_t = (r + \pi_t(\mu - r))V_t dt + \sigma \pi_t V_t dW_t, V_0 > 0. \tag{4}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} dV_t &= (r + \pi_t(\mu - r))V_t dt + \sigma \pi_t V_t dW_t, \\ \frac{dV_t}{V_t} &= (r + \pi_t(\mu - r))dt + \sigma \pi_t dW_t, \\ \frac{d(lnV_t)}{d_t} &= (r + \pi_t(\mu - r))dt + \sigma \pi_t dW_t. \end{aligned}$$

On pose : $f(t, v) = ln(v)$. Alors : $\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{v}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = -\frac{1}{v^2}$.

Par le Lemme d'Itô, on a :

$$\begin{aligned}
df(V_t, t) &= d(lnV_t), \\
d(lnV_t) &= \frac{dV_t}{V_t} - \frac{1}{2}\frac{(dV_t)^2}{V_t^2} \text{ et } (dV_t)^2 = (\sigma\pi_t V_t)^2, \\
d(lnV_t) &= (r + \pi_t(\mu - r))dt + \sigma\pi_t dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2\pi_t^2 dt, \\
&= \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\pi_t^2 + \pi_t(\mu - r)\right) dt + \sigma\pi_t dW_t.
\end{aligned}$$

En passant à l'intégrale, on obtient la diffusion suivante :

$$V_t = V_0 e^{rt+(\mu-r)\int_0^t \pi_s ds - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \pi_s^2 ds + \sigma \int 0^t \pi_s dW_s}, V_0 > 0. \tag{5}$$

□

Dans la conception du produit unit-linked tontine, trois types de risque sont pris en compte :

1. le risque financier,
2. le risque de mortalité systématique,
3. et le risque de mortalité non systématique.

Soit ${}_tp_x \in (0, 1]$, la probabilité de survie de l'assuré âgé de x-ans de survivre t-années de plus. de tenir compte du risque de mortalité systématique dans le modèle, on admet un choc de mortalité représenté par la v.a. ε. On suppose que la fonction de densité et la fonction génératrice des moments de la v.a. ε existent. La v.a. ε est définie sur $(-\infty, 1)$.
Ainsi, la courbe de survie choquée sera donnée par : ${}_tp_x^{1-\varepsilon} \in (0, 1]$.
Quant à la v.a. N_t, elle est affectée par le risque de mortalité et sa distribution sous la mesure $\mathbb{P}$ est donnée par :

$$(N_t - 1 \mid \zeta_x > t, \varepsilon) \sim^{\mathbb{P}} \text{Bin}(n - 1, {}_tp_x^{1-\varepsilon}) \tag{6}$$

2.2.2 Hypothèse

Les durées de vie restantes des assurées sont indépendantes sous la mesure $\mathbb{P}$.

3 TARIFICATION

Cette section traite de la tarification des produits de tontine liés à des unités, du choix d'une mesure de probabilité neutre au risque et de la détermination des primes initiales uniques. Elle explore également différents processus de paiement de la tontine et leur impact sur la tarification.

- L'assureur considère séparément les risques financiers et de mortalité lors de la détermination de la mesure de probabilité neutre au risque $\mathbb{Q}$.
- Le choix de $\mathbb{Q}$ dépend de l'ensemble des activités d'assurance de l'assureur et de la nature des produits offerts.

- La formule de tarification des tontines liées à des unités implique le calcul de la prime initiale unique P_0.
- Deux variantes spécifiées pour le processus de paiement de la tontine sont examinées : la valeur du portefeuille et les paiements garantis avec un taux de participation.
- La Proposition 1 fournit la formule de tarification pour le Cas A où le processus de paiement de la tontine est la valeur du portefeuille.
- La Proposition 2 offre la formule de tarification pour le Cas B où le processus de paiement de la tontine inclut des paiements garantis et un taux de participation.
- La gestion des produits liés à des unités implique des coûts de transaction liés aux activités de couverture contre les fluctuations du marché et l'évolution de la mortalité.
- Dans la mise en œuvre réelle, les coûts de transaction impactent la conception du produit et nécessitent des stratégies comme la méthode d'augmentation de la volatilité de Leland pour la compensation.

Sous la mesure $\mathbb{P}$ on note une dépendance de D_t à l'égard de la survie de l'assuré et des autres participants du pool. Cette dépendance cause l'incomplétude du marché et par conséquent la probabilité risque neutre n'est pas unique. De ce fait, il advient que la prime initiale unique P_0 n'est pas unique. D'où la nécessité de construire une nouvelle mesure de probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$. Nous disposons pour cela le théorème de Girsanov et la condition de Novikov.

3.1 Hypothèse

On suppose que l'assureur considère le risque financier et le risque de mortalité séparément lors de la détermination de $\mathbb{Q}$.

3.2 Détermination de la mesure $\mathbb{Q}$

D'après la relation 5 on a :

$$V_t = V_0 e^{rt+(\mu-r)\int_0^t \pi_s ds - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \pi_s^2 ds + \sigma \int 0^t \pi_s dW_s^{\mathbb{P}}}.$$

Démonstration. Par le théorème de Girsanov, on peut écrire : $W_t^{\mathbb{Q}} = W_t^{\mathbb{P}} - \int_0^t \gamma_s ds$.

On pause : $A_t = (\mu - r)\int_0^t \pi_s ds - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \pi_s^2 ds + \sigma \int 0^t \pi_s dW_s^{\mathbb{P}}$.
Alors,

$$\begin{aligned} dA_t &= (\mu - r)\pi_t dt - \frac{\sigma^2}{2}\pi_t^2 dt + \sigma \pi_t dW_t^{\mathbb{P}}, \\ &= \sigma\pi_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma}dt + dW_t^{\mathbb{P}}\right) - \frac{\sigma^2}{2}\pi_t^2 dt, \\ &= \sigma\pi_t dW_t^{\mathbb{Q}} - \frac{\sigma^2}{2}\pi_t^2 dt \,; \text{ avec } \gamma_t = \frac{\mu - r}{\sigma}t \text{ et } W^{\mathbb{Q}} \sim^{\mathbb{P}} \mathcal{N}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}t, t\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Notons que $W^{\mathbb{Q}}$ est un Mouvement Brownien standard sous $\mathbb{Q}$.
Au vu de la nouvelle mesure, A_t peut s'écrire comme suit : $A_t = \sigma \int_0^t \pi_s dW_s^{\mathbb{Q}} - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \pi_s^2 ds$.

En remplaçant cette dernière expression dans la relation 5, on obtient :

$$V_t = V_0 e^{rt - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \pi_s^2 ds + \sigma \int_0^t \pi_s dW_s^{\mathbb{Q}}}.(8)$$

$\square$

3.3 Définitions des filtrations

On désigne $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par le Mouvement Brownien, $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}_t\}_{t\geq 0}$, la filtration naturelle engendrée par $(\zeta_x, N, \varepsilon) et \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, tel que $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t$, la filtration contenant toutes les informations disponibles.

3.4 Hypothèses

1. L'assureur ne commercialise que des produits de tontine et qu'en raison de l'exposition au risque de mortalité élevée qui en résulte, l'assureur inclut les charges de sécurité. On a : ${}_t\tilde{p}_x$ la probabilité de survie sous $\mathbb{Q}$. Pour refléter la prudence de l'assureur dans la tarification, il faut que :
$$ {}_t\tilde{p}_x \geq {}_t p_x. \tag{9}$$
2. La distribution de ε demeure la même que ce soit sous $\mathbb{P}$ ou sou $\mathbb{Q}$.
3. Le choix de l'ampleur de ${}_t\tilde{p}_x$ dépend de la taille du pool. Car, le risque de mortalité non systématique devient moins pertinent avec l'augmentation de la taille du pool n. Par conséquent, si n est grand, ${}_t\tilde{p}_x$ atteint des valeurs faibles.
4. Le changement de mesure de $\mathbb{P}$ à $\mathbb{Q}$ n'a pas d'impact sur la distribution de N_t. D'où l'on peut écrire sous $\mathbb{Q}$:
$$(N_t - 1 \mid \zeta_x > t, \varepsilon) \sim^{\mathbb{Q}} \text{Bin}(n-1, {}_t\tilde{p}_x^{1-\varepsilon}). \tag{10}$$
Par conséquent, l'indépendance des durées de vie restantes des participants est préservée sous $\mathbb{Q}$.

3.5 Structure générale de paiement

Sous $\mathbb{Q}$ on peut avoir :

$$P_0 = \int_0^\infty e^{-rt} I_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Psi_t] dt. \tag{11}$$

Avec, $I_t = \int_{-\infty}^1 \left[1 - (1 - {}_t\tilde{p}_x^{1-z})^n\right] f_\varepsilon(z) dz$.

3.6 Structures de paiement spécifiques

Dans cette section, sont analysées, deux variantes spécifiques pour le processus de paiement de la tontine Ψ_t, qui peuvent être intéressantes à examiner et qui pourraient avoir un potentiel pour la conception de produits de tontine. La prime unique qui doit être versée par le particulier s'il souhaite acheter la tontine en unités de compte est déterminée pour chacune des variantes.

(A) : Le cas où le processus de paiement de la tontine est égal à la valeur du portefeuille V, i.e.

$$\Psi_t = V_t. \tag{12}$$

(B) : Cette variante est inspirée des polices d'assurance-vie avec participation à paiements garantis. On a :

$$\Psi_t = G_t + \alpha(V_t - G_t)^+, G_t > 0\,; \tag{13}$$

où $G_t > 0$ désigne le paiement garanti au temps t, $\alpha \in (0, 1]$ est le taux de participation et $(V_t - G_t)^+ = max\{V_t - G_t, 0\}$ constant.

Dans la variante (B), on a les scénarios suivants :

1. Si $V_t < G_t,$ alors $\Psi_t = V_t$. Ce cas est le même que celui où le processus de paiement de la tontine est égal à la valeur du portefeuille.
2. Si $V_t < G_t,$ alors $\Psi_t = G_t + \alpha(V_t - G_t)$ et $D_t = \frac{n(G_t+\alpha(V_t-G_t)^+)}{N_t}\mathbb{1}_{\{\zeta_x>t\}}$.

Démonstration. Proposition 1 de l'article : variante (A)
On a : $P_0 = \int_0^\infty e^{-rt} I_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Psi_t]dt$.

D'après la relation 11, on a : $\Psi_t = V_t$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Psi_t] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_t],\\
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_t] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[V_0 e^{rt-\frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \pi_s^2 ds+\sigma\int_0^t \pi_s dW_s^{\mathbb{Q}}}\right].
\end{aligned}$$

Remarque 2. *Notons que V_t est une $(\mathcal{G}_t, \mathbb{Q})-$martingale et à 7 on montre que $W_t^{\mathbb{Q}}$ est un Mouvement Brownien Standard sous $\mathbb{Q}$.*

Alors, il devient clair que $\int_0^t \pi_s dW_s^{\mathbb{Q}}$ est un processus stochastique tel que :

$$\int_0^t \pi_s dW_s^{\mathbb{Q}} \sim \mathcal{N}\left(0, \sqrt{\int_0^t \pi_s^2 d_s}\right);$$

$$\text{De même } \left(\sqrt{\int_0^t \pi_s^2 d_s}\right) \times Z \sim \mathcal{N}\left(0, \sqrt{\int_0^t \pi_s^2 d_s}\right), \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

On désigne par $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2}}$ la fonction de densité de la loi normale standard et $\Phi(z) = Pr(Z \leq z)$ sa fonction de répartition.
Alors, on peut réécrire $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_t]$ comme :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_t] &= V_0 e^{rt}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \pi_s^2 ds+\sigma\sqrt{\int_0^t \pi_s^2 d_s}\times z}\phi(z)dz,\\
&= V_0 e^{rt}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \pi_s^2 ds+\sigma\sqrt{\int_0^t \pi_s^2 d_s}\times z-\frac{z^2}{2}}dz,\\
&= V_0 e^{rt}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}\left[z-\sigma\sqrt{\int_0^t \pi_s^2 ds}\right]^2}dz,
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}\left[z-\sigma\sqrt{\int_0^t \pi_s^2 ds}\right]^2}dz = 1,$ c'est la densité d'une loi gaussienne réduite sur $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_t] = V_0 e^{rt} \Leftrightarrow \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Phi_t] = V_0 e^{rt}.$$

En remplaçant cette dernière expression dans la relation 11 on obtient :

$$P_0 = V_0 \int_0^{\infty} I_t dt. \tag{14}$$

□

4 OPTIMISATION DE L'UTILITE

Cette section réalise une analyse de maximisation de l'utilité pour comparer les variantes de tontines liées à des unités et les alternatives traditionnelles.

- La fonction d'utilité utilisée est $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, où $c > 0$ et $\gamma > 0$.

- Le problème d'optimisation vise à maximiser l'utilité espérée actualisé pour les souscripteurs.

- Deux variantes de tontines liées à des unités sont comparées numériquement avec des alternatives de tontines traditionnelles.

- La contrainte budgétaire est basée sur la formule de tarification de la Section 3.

- Le Cas A se concentre sur le processus de paiement de la tontine $\Psi_t = V_t$, avec des valeurs optimales pour π et V_0.

- Le Cas B implique un problème d'optimisation plus complexe avec π et V_0 comme variables de décision.

- La fonction de Lagrange est utilisée pour dériver les conditions du premier ordre pour π et V_0 dans le Cas B.

- En raison de la complexité, le Cas B est résolu numériquement pour trouver les valeurs optimales de π et V_0.

La fonction d'utilité utilisée dans l'article est une fonction d'utilité à aversion constante au risque, spécifiquement de la famille des fonctions d'utilité de puissance. Elle est employée pour quantifier les préférences individuelles en matière de risque et de richesse, aidant à comparer différentes variantes de tontines liées à des unités de compte et des tontines traditionnelles. Cette fonction est cruciale pour l'analyse d'optimisation, la maximisation de l'utilité des souscripteurs et l'évaluation de la désirabilité des produits financiers. Elle aide à évaluer les préférences en matière de risque, à optimiser les stratégies d'investissement et à comparer différents scénarios et produits dans le contexte des produits de tontine liés à des unités discutés dans l'article.

5 Observation et question

5.1 Observation

Cette section explique certaines spécificités des unit-linked tontine.

Les tontines ont une caractéristique principale où le risque lié à la longévité est partagé entre les titulaires de police regroupés, ce qui contraste avec les rentes où l'assureur supporte seul le risque lié à la longévité. Ce mécanisme de partage des risques rend les tontines généralement moins chères que les rentes, car la responsabilité partagée du risque de longévité entraîne des coûts réduits pour les participants. La rentabilité des tontines, associée à l'aspect de partage des risques, les rend potentiellement plus attrayantes pour les personnes recherchant des produits de retraite offrant un équilibre entre la gestion des risques et l'accessibilité.

We further observe that, if the pure portfolio value stipulates its payout process, the unit-linked tontine may yield a higher utility level than in the case where it includes guaranteed payments.(page 3/27, par 1)

Constat :
Dans un produit de tontine en unités de compte, exclure les paiements garantis et se fier uniquement à la valeur du portefeuille pour les paiements peut entraîner un niveau d'utilité plus élevé pour le souscripteur. Cela s'explique par le fait qu'une telle approche permet une plus grande flexibilité en matière d'investissement, un profil risque-rendement plus élevé, des stratégies d'investissement personnalisées, une efficacité des coûts et un potentiel de croissance à long terme. Le lien direct entre la performance du marché et les paiements sans paiements garantis peut conduire à des rendements et une utilité accrus pour les participants.

5.2 Questions

Explication de l'équation 5 : L'équation 5 du document décrit la dynamique de la valeur d'un portefeuille au fil du temps, en tenant compte des investissements dans des actifs risqués et sans risque. Elle implique des composants tels que la variation de la valeur du portefeuille, la fraction investie dans l'actif risqué, les valeurs des actifs, le taux d'intérêt sans risque, le rendement attendu, la volatilité et le mouvement brownien. L'équation capture comment ces investissements contribuent à la valeur globale du portefeuille en se basant sur la propriété d'auto-financement.

Why don't we have at the place of equation (5) this relation : $V_t = \pi_t dS_t + (1 - \pi_t) * dB_t$?

L'équation $V_t = \pi_t dS_t + (1 - \pi_t) * dB_t$ n'est pas présente dans l'équation (5) car l'équation (5) implique probablement une représentation plus détaillée qui prend en compte des facteurs supplémentaires au-delà des simples composants d'actifs risqués et sans risque. L'équation (5) du document est adaptée au produit financier spécifique et au scénario considéré, en incorporant des facteurs tels que le taux de dérive de l'actif risqué, la volatilité, l'aversion au risque et d'autres paramètres spécifiques au contexte du produit de tontine en unités de compte analysé.

6 Numerical Analysis

Cette section traite des études numériques sur les produits de tontine liés à des unités, en comparant les variantes et en intégrant les tontines traditionnelles.

— La section se concentre sur la comparaison des variantes de tontines liées à des unités en termes d'utilité pour les souscripteurs.
— Des hypothèses sont faites pour les courbes de survie, les chocs de mortalité et les valeurs des paramètres.
— Des analyses de sensibilité sont menées sur des paramètres tels que la taille du pool, le taux de dérive et l'aversion au risque.
— Les équivalents certains sont calculés pour différents produits de tontine.
— La tontine liée à des unités du Cas A surpasse le Cas B et les tontines traditionnelles.
— La taille du pool impacte l'attractivité des produits de tontine liés à des unités.
— Le taux de dérive et la volatilité de l'actif risqué affectent l'utilité des souscripteurs.
— Le taux de croissance garanti et la fraction de prime garantie influencent la performance des tontines.

7 CONCLUSION

Cet article propose des produits de tontine liés à des unités combinant les évolutions du marché financier avec l'analyse du risque de mortalité. Il examine les structures de paiement, les types de risques, la détermination des primes et l'utilité optimale pour les souscripteurs.
— Une comparaison numérique montre les avantages potentiels des tontines liées à des unités par rapport aux tontines traditionnelles.
— Les produits de tontine liés à des unités combinent le concept de tontine avec des polices d'assurance liées à des unités.
— La prime pour une tontine liée à des unités est déterminée dans un cadre de tarification neutre au risque.
— Les tontines liées à des unités peuvent être préférables dans des scénarios de rendement attendu élevé ou de faible volatilité.
— Des recherches supplémentaires sont nécessaires pour analyser les aspects pratiques tels que la couverture des risques de mortalité et des risques de marché financier.

8 Bibliographie

Chen, An, Thai Nguyen et Thorsten Sehner (2022). "Unit-Linked Tontine : Utility-Based Design, Pricing and Performance.