Distribution multivariée définie avec la copule Farlie – Gumbel – Morgenstern et marginaux Erlang mixtes : Agrégation et l'allocation du capital

Travail présenté à Hélène Cossette
ACT 7102: Modèles avancés de la théorie du risque

réalisé par
Anne-Cécile N'Guessan et Stanislas MBOUNGOU MANGOUBI ;

15 février 2024

Table des matières

Introduction

L'émergence du marché des assurances prend davantage d'ampleur en ce début de 21 siècle. Les acteurs concernés et les consommateurs des produits d'assurances sont de plus en plus informés et conscients de leurs risques ; d'où la nécessité d'une réglementation qui permettra de protéger l'ensemble des parties prenantes, mais surtout les consommateurs. C'est dans cette perspective que les autorités des marchés financiers imposent aux compagnies d'assurance d'avoir un capital économique nécessaire et suffisant afin de couvrir tous les portefeuilles de risques qu'elles détiennent.
En effet, les compagnies d'assurances sont constamment exposées à des risques tant exogènes qu'endogène. Une mauvaise tarification ou une erreur d'évaluation de risque qui sous-estime ou surestime la mesure de risque peut entraîner une compagnie en faillite ou causer le non-respect des engagements de l'assureur à l'endroit de ses souscripteurs. Le cas échéant, le risque de gestion découle du risque d'agrégation et du capital alloué, il est donc indéniable de pouvoir quantifier les éventuelles dépendances entre les différents portefeuilles détenues par l'assureur.
Cet article traite des problèmes d'agrégation des risques et d'allocation du capital pour un portefeuille de risques éventuellement dépendants dont la distribution multivariée est définie avec la copule de Farlie – Gumbel – Morgenstern et les marginaux de distribution mixte d'Erlang. Il est montré dans un premier temps que le montant global des sinistres présente une distribution Erlang mixte. Ensuite, sur la base d'une approche descendante, des expressions fermées pour la contribution de chaque risque sont dérivées à l'aide des règles TVaR et de covariance.

1 Définitions de la copule Farlie – Gumbel – Morgenstern et mesures de risques et de la distribution mélange Erlang

Notre étude se basera sur deux principaux outils mathématiques : la copule Farlie – Gumbel – Morgenstern et distribution mélange Erlang. Nous essayerons en premier lieu de définir la copule FGM, les mesures de risques ,les mesures d'allocation et par la suite la distribution mélange d'Erlang.

1.1 Copule Farlie – Gumbel – Morgenstern

Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur de n variables aléatoires continues avec une fonction de distribution cumulative jointe notée F_X et des marginales univariées F_{X_i}, $i = 1, \ldots, n.$, F_X peut être écrit comme une fonction des marginales univariées F_{X_i}, $i = 1, \ldots, n$, et la copule C décrivant la structure de dépendance comme suit :

$$F_X(x_1, \ldots, x_n) = C\left(F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n)\right).$$

La fonction de densité de probabilité jointe de X est donnée par :

$$f_X(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \ldots f_{X_n}(x_n) c\left(F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n)\right), \quad (1)$$

où c est la fonction de densité de probabilité correspondante de la copule C définie par

$$c(u_1, \ldots, u_n) = \frac{\partial C(u_1, \ldots, u_n)}{\partial u_1 \ldots \partial u_n}.$$

La copule bivariée FGM est définie par la fonction de répartition jointe

$$C(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2),$$

où le scalaire θ est le paramètre de dépendance avec $\theta \in [-1, 1]$. La structure d'indépendance est atteinte lorsque $\theta = 0$, c'est-à-dire $C^I(u_1, u_2) = u_1 u_2$. La fonction de densité de probabilité de la copule bivariée FGM est donnée par

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2},$$

$$= \frac{\partial(u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2))}{\partial u_1 \partial u_2},$$

$$c(u_1, u_2) = (1 + \theta) - \theta 2\bar{u_1} - \theta 2\bar{u_2} + \theta 2\bar{u}_1 2\bar{u}_2,$$

où $\bar{u_i} = 1 - u_i$. La copule FGM est une approximation de premier ordre des copules Ali Mikhail Haq ,Frank et les copules Placket. θ doit être compris dans l'intervalle $[-1, 1]$ et les mesures d'association tels que le tau de Kendall et le rho de Spearman donné sont définis comme suit pour la copule FGM :

1. **le tau de Kendall** : $= \frac{2\theta}{9}$
2. **le rho de Spearman** : $\rho = \frac{\theta}{3}$

Nous allons essayer par la suite définir la cas multivarié. En effet, pour n ≥ 3, qui a $2nn1$ paramètres, est défini comme suit :

1.2 Distribution Mélange d'Erlang

Dans la littérature, et principalement en Actuariat, la distribution mélange Erlang , [5]a un avantage significatif puisque toute distribution continue positive peut être approché par un membre de cette classe. Il semble nécessaire de la définir afin de pouvoir mieux connaitre son usage et l'utiliser au cours de notre travail. En tout premier lieu nous définirons la fonction de répartition ainsi que la fonction de densité de cette distribution.
Soit $h(x; k, \beta)$ et $H(x; k, \beta)$ respectivement la fonction de densité de probabilité (pdf) et la fonction de distribution cumulative (cdf) d'une distribution d'Erlang d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ et d'un facteur d'échelle $\beta \in \mathbb{R}^+$, définies comme suit :

$$h(x; k, \beta) = \frac{\beta^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0,$$

et

$$H(x; k, \beta) = 1 - e^{-\beta x} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\beta x)^j}{j!}, \quad x > 0.$$

Soit Y une variable aléatoire de mélange d'Erlang avec un paramètre d'échelle β. La fonction de densité et la fonction de répartition de Y sont respectivement données par

$$f_Y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k h(x; k, \beta),$$

et

$$F_Y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k H(x; k, \beta),$$

où p_k est la probabilité d'occurrence du k-ème terme dans la distribution mixte.
Nous disposons aussi des formes explicites de la **Tail Value at Risk** ($TVaR_\kappa(Y)$) et la fonction stop-loss définies comme suit :

$$\mathrm{TVaR}_\kappa(Y) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{k}{\beta} \bar{H}(\mathrm{VaR}_\kappa(Y); k+1, \beta), \tag{2}$$

où $H(x; k, \beta) = 1 - H(x; k, \beta)$ est la fonction de survie d'une distribution d'Erlang.

$$\pi_Y(d) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{-\beta d} \frac{(\beta d)^k}{k!}. \tag{3}$$

En disposant de ces informations, nous pourrons mieux comprendre et essayer de détailler les propriétés de cette distribution. La densité d'équilibre de Y est une base de cette distribution. Elle est définie par $f_Y^{\varepsilon}(x) = \frac{\bar{F}_Y(x)}{E[Y]}$. $\bar{F}_Y(x)$ la fonction de survie de Y qui suit une distribution de mélange d'Erlang.
Pour définir la probabilité d'occurence du k-ème terme nous pouvons procéder comme suit :

$$f_Y^{\varepsilon}(x) = \frac{\bar{F}_Y(x)}{E[Y]}. = \frac{\bar{F}_Y(x)}{\int_0^{\infty} \bar{F}_Y(x)\, dx}$$

Selon[6],on a $\bar{F}_Y(x) = 1 - F_Y(\mathrm{x}) = e^{-\beta y} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{Q}_k \frac{(\beta y)^k}{k!}$, avec $y > 0$. La probabilité d'occurence du k-ème terme est définie comme suit $\bar{Q}_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} q_j \quad$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$f_Y^{\varepsilon}(x) = \frac{e^{-\beta y} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{Q}_k \frac{(\beta y)^k}{k!}}{\int_0^{\infty} e^{-\beta y} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{Q}_k \frac{(\beta y)^k}{k!}\, dy} \tag{4}$$

Nous allons chercher à déterminer la valeur de $\int_0^{\infty} e^{-\beta y} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{Q}_k \frac{(\beta y)^k}{k!} dy$

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta y} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{Q}_k \frac{(\beta y)^k}{k!} dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{Q}_k}{k!} \int_0^{\infty} e^{-\beta y} (\beta y)^k dy$$

En usant de l'intégrale par parties on a que $u = (\beta y)^k$ et $u' = k\beta(\beta y)^{k-1}$, $v' = e^{-\beta y}$ et $v = -\frac{1}{\beta} e^{-\beta y}$

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta y} (\beta y)^k dy = -\frac{1}{\beta} (\beta y)^k e^{-\beta y} \bigg|_0^{\infty} + \frac{k}{\beta} \int_0^{\infty} e^{-\beta y} (\beta y)^{k-1}\, dy$$

Le premier terme est égale à 0, on se retrouve ainsi au résultat qui suit,

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta y} (\beta y)^k dy = \frac{k}{\beta} \beta \int_0^{\infty} e^{-\beta y} (\beta y)^{k-1}\, dy$$

On va encore utiliser l'intégrale par parties,$u = (\beta y)^{k-1}$ et $u' = (k-1)\beta(\beta y)^{k-1}$, $v' = e^{-\beta y}$ et $v = -\frac{1}{\beta} e^{-\beta y}$ Et par récurrence, nous avons le résultat suivant :

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta y} (\beta y)^{k-1}\, dy = -\frac{1}{\beta} (\beta y)^{k-1} e^{-\beta y} \bigg|_0^{\infty} + \frac{k-1}{\beta} \beta \int_0^{\infty} e^{-\beta y} (\beta y)^{k-2}\, dy$$

On obtient ainsi,

$$f_Y^{\varepsilon}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon(k, \underline{p}) h(x; k, \beta),$$

De ce qui suit nous pouvons aisément dire que $\epsilon(k,\underline{p}) = \frac{\sum_{j=k}^{\infty} p_j}{\sum_{j=1}^{\infty} jp_j}$.
Dans [2], la distribution d'une somme de deux variables aléatoires suivant une distribution de mélange d'Erlang était investiguée sous le lemme 2.2. Il est défini comme suit :
Sous la condition que $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, la variable aléatoire $T_2 = Y_1 + Y_2$ a une distribution d'Erlang mixte avec les paramètres $(\underline{\sigma}^{(2)}(\underline{p}_1, \underline{p}_2) = \{\underline{\sigma}^{(2)}(k, \underline{p}_1, \underline{p}_2), k \in \mathbb{N}^*\}, \beta)$ et une fonction de densité de probabilité donnée par :

$$f_{T_2}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{(2)}(k, p_1, p_2) h(s; k, \beta),$$

où

$$\sigma^{(2)}(k, p_1, p_2) = \begin{cases} 0, & \text{pour } k = 1, \\ \sum_{j=1}^{k-1} p_{1,j} p_{2,k-j}, & \text{pour } k = 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Nous userons de la fonction génératrice des moments pour pouvoir déterminer ce résultat. En usant de la proposition 5 issue de [4] nous pouvons le déterminer comme suit :

$$\begin{aligned} M_{T_2} &= E(e^{T_2}) \\ &= E(e^{Y_1+Y_2}) \end{aligned}$$

Cette proposition stipule que Y_1 et Y_2 sont indépendantes. On a ainsi par la suite :

$$\begin{aligned} M_{T_2}(t) &= E(e^{T_2}) \\ &= E(e^{Y_1+Y_2}) \\ &= E(e^{Y_1})E(e^{Y_2}) \\ &= M_{Y_1}(t) M_{Y_2}(t) \end{aligned}$$

Tout en sachant également que la proposition 3 [4], Y_1 et Y_2 peuvent s'écrire sous la forme suivante,

$$Y_1 = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M^*} C_k, & M^* > 1 \\ 0, & M^* = 0 \end{cases}$$

La variable aléatoire quant à elle est définie comme suit :

$$M^* = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} K_j, & M > 1 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

La fonction génératrice des moments de Y_1 et Y_2 sera de la forme $M_{Y_1}(t) = P_{M_1}(M_C(t))$(cette forme est la même pour Y_2). Nous les remplacerons dans la définition de la fonction génératrice des moments de T_2. On note que M_1 et M_2 sont indépendantes.

$$\begin{aligned} M_{T_2}(t) &= P_{M_1}(M_C(t))P_{M_2}(M_C(t)) \\ &= E((M_C(t))^{M_1}(M_C(t))^{M_2}) \\ &= E(M_C(t)^{(M_1+M_2)}) \\ &= P_{M_1+M_2}(M_C(t)) \end{aligned}$$

On peut noter que

$$P_{M_1+M_2}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{\sigma}^{(2)} s^k$$

où $\underline{\sigma}_k^{(2)} = P(M_1 + M_2 = k)$. On sait que M$\sim$ Exp(β) d'où $M_C(t) = \frac{\beta}{\beta - t}$. Ainsi, on a $T_2 = M_1 + M_2 \sim MixErl(\underline{\sigma}^{(2)}(k, \underline{p}_1, \underline{p}_2), \beta)$.
Nous pourrons également étudier le cas où la variable aléatoire positive Y telle que $Y \sim$ MixErl(p, β) et la fonction de densité de probabilité d'une distribution mélange d'Erlang est définie comme suit $2f_Y(x)\bar{F}_Y(x)$. En nous fiant au lemme 2.3 [2], nous pourrons montrer de manière détailler le résultat précédent. Ce lemme est défini comme suit :
Soit $f_Y^{\pi}(x) = 2f_Y(x)\bar{F}_Y(x)$ où $Y \sim$ MixErl(p, β). Alors, $f_Y^{\pi}(x)$ est la fonction de densité de probabilité d'une distribution mélange d'Erlang avec les paramètres $(\underline{\pi}(\underline{p}) = \{\pi(j, \underline{p}), j \in \mathbb{N}^*\}, 2\beta)$, c'est-à-dire

$$f_Y^{\pi}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi(j, p) h(x; j, 2\beta),$$

où

$$\pi(j, p) = \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{k=1}^{j} \binom{j-1}{k-1} p_k \sum_{l=j-k+1}^{\infty} p_l,$$

Pour se faire nous avons usé du lemme 2.1 de [2],évoquant de l'équilibre de la densité et $f_Y^{\varepsilon}(x) = \frac{\bar{F}_Y(x)}{E[Y]}$. On a de cette égalité que :

$$\bar{F}_Y = E[Y] f_Y^{\varepsilon}(x) \tag{5}$$

Disposant de l'expression de $\bar{F}_Y(x)$, on peut réécrire $f_Y^{\pi}(x) = 2f_Y(x)\bar{F}_Y(x)$ qui sera de la forme :

$$f_Y^{\pi}(x) = 2f_Y(x)E[Y]f_Y^{\varepsilon}(x) \tag{6}$$

Pour ensuite déterminer la forme de cette densité, nous procéderons comme suit :

$$
\begin{aligned}
f_Y^{\varepsilon}(x)f_Y(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k h(x;k,\beta)\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon(k,\underline{p})h(x;k,\beta)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_k\varepsilon(k,\underline{p})h(x;k,\beta)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_k\varepsilon(j-k+1,p)\frac{\beta^k}{\Gamma(k)}x^{k-1}e^{-\beta x}\frac{\beta^j-k-1}{\Gamma(j-k+1)}x^{j-k}e^{-\beta x}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_k\varepsilon(j-k+1,\underline{p})\beta^{j+1}e^{-2\beta x}\frac{x^{j-1}}{(k-1)!(j-k)!}\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\beta}{2^j}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{(j-1)!}{(k-1)!(j-k)!}\frac{(2\beta)^j x^{j-1}e^{-2\beta x}}{(j-1)!}p_k\varepsilon(j-k+1,\underline{p})\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\beta}{2^j}\sum_{k=j}^{\infty}\binom{j-1}{k-1}p_k\varepsilon(j-k+1,\underline{p})h(x;j,2\beta)
\end{aligned}
$$

En multipliant ce résultat par $2E[Y]$, où $E[Y]=\sum_{k=1}^{\infty}p_k\frac{k}{\beta}$ on a ce qui suit,

$$
\begin{aligned}
2E[Y]f_Y^{\varepsilon}(x)f_Y(x) &= \sum_{j=1}^{\infty}E(X)\frac{\beta}{2^j}\sum_{k=j}^{\infty}\binom{j-1}{k-1}p_k\varepsilon(j-k+1,\underline{p})h(x;j,2\beta)\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}p_l\frac{l}{\beta}\frac{\beta}{2^j}\sum_{k=j}^{\infty}\binom{j-1}{k-1}p_k\varepsilon(j-k+1,\underline{p})h(x;j,2\beta)\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}p_l l\frac{1}{2^j}\sum_{k=j}^{\infty}\binom{j-1}{k-1}p_k\varepsilon(j-k+1,\underline{p})h(x;j,2\beta)\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\sum_{k=j}^{\infty}\binom{j-1}{k-1}p_k\frac{\sum_{l=j-k+1}^{\infty}p_l}{\sum_{l=j-k+1}^{\infty}lp_l}\sum_{l=1}^{\infty}p_l l h(x;j,2\beta)\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\sum_{k=j}^{\infty}\binom{j-1}{k-1}p_k\sum_{l=j-k+1}^{\infty}p_l h(x;j,2\beta)\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\pi(j,\underline{p})h(x;j,2\beta)
\end{aligned}
$$

La fonction de densité $f_Y^{\pi}(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\pi(j,\underline{p})h(x;j,2\beta)$ où $\pi(j,\underline{p})=\frac{1}{2^j}\sum_{k=j}^{\infty}\binom{j-1}{k-1}p_k\sum_{l=j-k+1}^{\infty}p_l$. Afin d'affirmer qu'il s'agit bel et bien d'une fonction de densité, nous devons prendre en compte les conditions suivantes :

1. $\pi(j,\underline{p})\geq 0$ pour tout j $\in\mathbb{N}*$
2. $\int_0^{\infty}f_Y^{\pi}(x)=1$

3. $\sum_{j=1}^{\infty} \pi(j, \underline{p}) = 1$

Nous pouvons exprimer la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire d'Erlang mixte avec le paramètre d'échelle β_1 en termes de la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire d'Erlang mixte avec le paramètre d'échelle β_2. Nous userons des propositions 1 et 2 de [4]. La proposition 1 stipule :

Soit X une variable aléatoire mixte d'Erlang avec $LT\tilde{p}(s) \equiv \int_0^{\infty} e^{-sx} p(x)dx = Q\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)$ où $\beta > 0$, $Q(z) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i z^i$ et $\{q_i\}_{i\geq 1}$ est une fonction de masse de probabilité. Sa densité est donnée par

$$p(x) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \tau_{\beta,i}(x),$$

où $\tau_{\beta,i}(x) = \frac{\beta^i x^{i-1} e^{-\beta x}}{(i-1)!}$ pour $x \geq 0$. Pour la proposition 2 de [4], elle est énoncée comme suit : Pour $0 < \beta_1 \leq \beta_2$,

$$\tau_{\beta_1,k}(t) = \sum_{i=k}^{\infty} q_{k,i}(\frac{\beta_1}{\beta_2})\tau_{\beta_2,i}(t),$$

où

$$q_{k,j}(a) = \binom{j-1}{k-1} a^k (1-a)^{j-k}.$$

Le lemme 2.4 de [2] donne le résultat découlant de ces différentes propositions. Il est énoncé comme suit :

Lemme 2.4. Soit $Y \sim \text{MixErl}(p, \beta_1)$ et $\beta_1 \leq \beta_2$. Alors, la fonction de densité de probabilité de Y peut être exprimée comme la fonction de densité de probabilité d'une distribution d'Erlang mixte avec les paramètres $(\omega(p, \beta_1, \beta_2) = \{\omega(k, \underline{p}, \beta_1, \beta_2), k \in \mathbb{N}^*\}, \beta_2)$, c'est-à-dire

$$f_Y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k, \underline{p}, \beta_1, \beta_2) h(x; k, \beta_2),$$

avec

$$\omega(k, p, \beta_1, \beta_2) = \sum_{j=1}^{k} p_j \binom{k-1}{k-j} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^j \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{k-j},$$

pour $k = 1, 2, \ldots$. Ce lemme est obtenue de manière plus détaillée en utilisant une variable aléatoire $Y \sim \text{MixErl}(p, \beta_1)$ et $\beta_1 \leq \beta_2$. Cette information nous permet d'écrire la fonction de densité et d'appliquer la proposition 2 de [4].

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k \tau_{\beta_1,k}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k \sum_{j=k}^{\infty} q_{k,i}(\frac{\beta_1}{\beta_2})\tau_{\beta_2,j}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j-1}{k-1} (\frac{\beta_1}{\beta_2})^k (1 - (\frac{\beta_1}{\beta_2}))^{j-k} \tau_{\beta_2,j}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k, \underline{p}, \beta_1, \beta_2) \tau_{\beta_2,k}(x) \end{aligned}$$

En se référant à la proposition 1 de [3] , on a que $\tau_{\beta_2,k}(x) = \frac{\beta_2^i x^{k-1} e^{-\beta_2 x}}{(k-1)!} = h(x;k,\beta_2)$. On se retrouve ainsi au résultat du lemme 2.4.
Pour le cas, où nous disposons d'une variable aléatoire donnée $Y \sim \text{MixErl}(p,\beta)$, définit sous la forme$f_Y^{\alpha}(x) = \frac{xf_Y(x)}{E[Y]}$. Le lemme 2.5 de [2] suivant nous montre que f_Y^{α} est la fonction de densité de probabilité d'une distribution d'Erlang mixte.Pour le démontrer nous utiliserons la démarche suivante :

$$\begin{aligned}
xf_Y(x) &= x\sum_{k=1}^{\infty} p_k h(x;k,\beta) \\
&= x\sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{\beta^k x^{k-1} e^{-\beta x}}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{\beta^k x^k e^{-\beta x}}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} p_{k-1} e^{-\beta x} \beta^{k-1} \frac{x^{k-1}}{(k-2)!} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{k-1} p_{k-1} e^{-\beta x} \beta^{k-1} \frac{x^{k-1}}{(k-2)!} \\
xf_Y(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{\beta} p_{k-1} h(x;k,\beta)
\end{aligned}$$

En faisant le rapport $xf_Y(x)$ avec $E(Y)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{xf_Y(x)}{E[Y]} &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\frac{k-1}{\beta} p_{k-1}}{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{\beta} p_j} h(x;k,\beta) \\
\frac{xf_Y(x)}{E[Y]} &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1 p_{k-1}}{\sum_{j=1}^{\infty} j p_j} h(x;k,\beta)
\end{aligned}$$

Ainsi,la fonction de densité qui en découle est définie sous cette forme

$$f_Y^{\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k,\underline{p}) h(x;k,\beta) \tag{7}$$

Cette dernière égalité met un terme à l'‘étude de cette distribution. Ces formules seront essentielles pour la suite de notre étude.

2 Distribution bivariée définie avec la copule FGM et marginales Erlang mixtes

Cette section sera axée sur la distribution bivariée avec la copule FGM et des marginales suivant une distribution de mélange d'Erlang.
Soit le couple (X_1, X_2) a une distribution bivariée définie avec la copule FGM définit plus haut et $X_i \sim \text{MixErl}(\underline{p_i}, \beta_i)$, $i = 1, 2$.Nous posons également que $\beta_1 \leq \beta_2$. Les propositions émises dans cette section nous permettrons de. La Proposition 1 de [4], stipule :
Soit (X_1, X_2) une distribution bivariée définie avec la copule FGM et $X_i \sim \text{MixErl}(p_i, \beta_i)$, $i = 1, 2$ avec $\beta_1 \leq \beta_2$. Nous avons l'expression suivante pour la covariance entre X_1 et X_2 :

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{\theta}{\beta_1\beta_2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} ij \left(\pi(i, \underline{p}_1) - p_{1,i}\right) \left(\pi(j, \underline{p}_2) - p_{2,j}\right). \tag{8}$$

En assumant que la structure de dépendance bivariée est définie par la fonction génératrice des moemnts avec θ le paramètre de dépendance. En usant de [1], on a que $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U_1)$ et $X_2 = F_{X_2}^{-1}(U_2)$, avec $U_i \sim Unif(0, 1)$
De cette définition, on peut tirer la formule de l'espérance d'une variable aléatoire.

$$E(X_i) = E(F_{X_i}^{-1}(U_i)), i \in (1, 2)$$
$$E(X_i) = \int_0^{\infty} F_{X_i}^{-1}(U_i) d_{U_i}$$

Par définition,on a que $Cov(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$. Cherchons à déterminer $E(X_1X_2)$.

$$\begin{aligned} E(X_1X_2) &= E(F_{X_1}^{-1}(U_1)F_{X_2}^{-1}(U_2)) \\ &= \int\int F_{X_1}^{-1}(U_1)F_{X_2}^{-1}(U_2)c(u_1, u_2)du_1du_2 \end{aligned}$$

D'une définition antérieure, on a que $c(u_1, u_2) = (1 + \theta(1 - 2\bar{u}_1)(1 - 2\bar{u}_1))$.

$$\begin{aligned} E(X_1X_2) &= \int\int F_{X_1}^{-1}(U_1)F_{X_2}^{-1}(U_2)c(u_1, u_2)du_1du_2 \\ &= \int\int F_{X_1}^{-1}(U_1)F_{X_2}^{-1}(U_2)(1 + \theta(1 - 2\bar{u}_1)(1 - 2\bar{u}_2))du_1du_2 \\ &= \int\int F_{X_1}^{-1}(U_1)F_{X_2}^{-1}(U_2)du_1du_2 + \int\int \theta(1 - 2\bar{u}_1)(1 - 2\bar{u}_2)F_{X_1}^{-1}(U_1)F_{X_2}^{-1}du_1du_2 \\ &= \int F_{X_1}^{-1}(U_1)du_1 \int F_{X_2}^{-1}(U_2)du_2 + \theta \int(1 - 2\bar{u}_1)F_{X_1}^{-1}du_1 \int(1 - 2\bar{u}_2)F_{X_2}^{-1}du_2 \\ E(X_1X_2) &= E(X_1)E(X_2) + \theta\gamma_1\gamma_2, \text{où}\gamma_i = \int(1 - 2\bar{u}_i)F_{X_i}^{-1}du_i \end{aligned}$$

Nous obtenons la covariance,

$$\begin{aligned}Cov(X_1, X_2) &= E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)\\ &= E(X_1)E(X_2) + \theta\gamma_1\gamma_2 - E(X_1)E(X_2)\\ Cov(X_1, X_2) &= \theta(-\gamma_1)(-\gamma_2)\end{aligned}$$

Pour déterminer (8), il nous faudra maintenant trouver l'expression γ_i.

$$\begin{aligned}-\gamma_i &= -\int(1-2\bar{u}_i)F_{X_i}^{-1-1}du_i\\ -\gamma_i &= \int(2\bar{u}_i-1)F_{X_i}^{-1}du_i\\ &= E((2\bar{u}_i-1)F_{X_i}^{-1}(x)\\ &= E(X_i(2\bar{F}_{X_i}(x_i)-1)\\ &= E(2X_i\bar{F}_{X_i}(x_i)-X_i)\\ &= 2E(X_i\bar{F}_{X_i}(x)) - E(X_i)\end{aligned}$$

Déterminons par la suite $2E(X_i\bar{F}_{X_i}(x_i))$

$$2E(X_i\bar{F}_{X_i}(X_i)) = \int 2x\bar{F}_{X_i}(x)f_{X_i}(x)dx \tag{9}$$

D'après le lemme 2.3 de [2], $f^{\pi}_{X_i}(x) = 2x\bar{F}_{X_i}(x)f_{X_i}(x)$

$$2E(X_i\bar{F}_{X_i}(X_i)) = \int xf^{\pi}_{X_i}(x)dx \tag{10}$$

Si on pose $W_i = X_i\bar{F}_{X_i}(X_i)$ et d'après le lemme 2.3 $W_i \sim MixErl(\pi(j,p_i), 2\beta_i)$, nous pouvons déduire que :

$$2E(W_i) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{\beta_i}\pi(j,p_i), i \in (1,2) \tag{11}$$

Et donc,

$$-\gamma_i = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{\beta_i}\pi(j,p_i) - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{\beta_i}P_{i,j}, i \in (1,2) \tag{12}$$

Si nous reprenons l'expression de la covariance,il en découle

$$\begin{aligned}Cov(X_1, X_2) &= \theta(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{\beta_1}\pi(i,p_1) - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{i}{\beta_1}P_{1,i})(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{\beta_2}\pi(j,p_2) - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{\beta_2}P_{2,j})\\ &= \frac{\theta}{\beta_1\beta_2}(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}ij(\pi(i,p_1)\pi(j,p_2) - P_{2,j}\pi(i,p_1) - P_{1,i}\pi(j,p_2) + P_{1,i}P_{2,j}))\\ &= \frac{\theta}{\beta_1\beta_2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}ij(\pi(i,P_1) - P_{1,i})(\pi(j,P_2) - P_{2,j})\end{aligned}$$

On peut enfin conclure que :

$$Cov(X_1, X_2) = \frac{\theta}{\beta_1\beta_2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} ij(\pi(i, P_1) - P_{1,i})(\pi(j, P_2) - P_{2,j})$$

Nous attaquerons dans le paragraphe suivant à la somme de deux variables aléatoires suivant toutes deux une distribution mélange d'Erlang. Le but est de montrer que cette somme suit également une distribution mélange d'Erlang. La proposition 3.2 de [2], s'énonce comme ci dessous :
Soient (X_1, X_2) une distribution bivariée définie avec la copule FGM et $X_i \sim \text{MixErl}(\underline{p}_i, \beta_i)$, $i = 1, 2$ avec $\beta_1 \leq \beta_2$. Alors, $S_2 = X_1 + X_2 \sim \text{MixErl}(\underline{p}^{(2)}, 2\beta_2)$, où $\underline{p}^{(2)} = \{p_j^{(2)}, j \in \mathbb{N}^*\}$ avec

$$\begin{aligned} p_j^{(2)} = (1+\theta)\sigma^{(2)}(j, \underline{\omega}(\underline{p}_1, \beta_1, 2\beta_2), \underline{\omega}(\underline{p}_2, \beta_2, 2\beta_2)) \\ -\theta\sigma^{(2)}(j, \underline{\omega}(\underline{\pi}(\underline{p}_1), 2\beta_1, 2\beta_2), \underline{\omega}(\underline{p}_2, \beta_2, 2\beta_2)) \\ -\theta\sigma^{(2)}(j, \underline{\omega}(\underline{p}_1, \beta_1, 2\beta_2), \underline{\pi}(\underline{p}_2)) \\ +\theta\sigma^{(2)}(j, \underline{\omega}(\underline{\pi}(p_1), 2\beta_1, 2\beta_2), \underline{\pi}(\underline{p}_2))), \end{aligned}$$

pour $j = 2, 3, \ldots$, et $p_1^{(2)} = 0$. Il nous semblait primordial de faire une étude plus détaillée de ce résultat. Pour se faire nous avons utilisé de la définition de copule$C(u_1, u_2)$.
On sait que $c(u_1, u_2) = (1+\theta) - \theta 2\bar{u}_1 - \theta 2\bar{u}_2 + \theta 2\bar{u}_1 2\bar{u}_2$ et que la fonction de densité conjointe S_2 est définie comme suit :

$$f_{S_2}(s) = \int_0^s f_{\underline{X}}(x, s-x)\, dx \tag{13}$$

En utilisant (1), on a le résultat suivant :

$$f_X(x, s-x) = ((1+\theta) - 2\theta F_{X_1}(x) - 2\theta F_{X_2}(s-x) + 4\theta F_{X_1}(x) F_{X_2}(s-x))\, f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x) \tag{14}$$

En substituant (14) dans (13), on a :

$$\begin{aligned} f_{S_2}(s) &= \int_0^s ((1+\theta) - 2\theta F_{X_1}(x) - 2\theta F_{X_2}(s-x) + 4\theta F_{X_1}(x) F_{X_2}(s-x))\, f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x) dx \\ &= \int_0^s (1+\theta) f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x) dx - 2\theta \int_0^s F_{X_1}(x) f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x) dx \\ &-2\theta \int_0^s F_{X_2}(s-x) f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x) dx + 4\theta \int_0^s F_{X_1}(x) F_{X_2}(s-x) f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x) dx \end{aligned}$$

Si on pose les inégalités suivantes, on a :

$$\begin{aligned}
I_1(s) &= (1+\theta)\int_0^s f_{X_1}(x)f_{X_2}(s-x)\,dx,\\
I_2(s) &= -2\theta\int_0^s \bar{F}_{X_1}(x)f_{X_1}(x)f_{X_2}(s-x)\,dx,\\
I_3(s) &= -2\theta\int_0^s f_{X_1}(x)\bar{F}_{X_2}(s-x)f_{X_2}(s-x)\,dx,\\
I_4(s) &= 4\theta\int_0^s \bar{F}_{X_1}(x)f_{X_1}(x)\bar{F}_{X_2}(s-x)f_{X_2}(s-x)\,dx.
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc réécrire (13) sous la forme suivante :

$$f_{S_2}(s) = I_1(s) + I_2(s) + I_3(s) + I_4(s) \tag{15}$$

Pour déterminer $I_1(s)$ nous avons procéder comme suit :

$$I_1(s) = (1+\theta)\int_0^s f_{X_1}(x)f_{X_2}(s-x)\,dx, \tag{16}$$

On a utilisé le lemme 2.4 de [2] qui permet de changer le paramètre d'échelle $(\beta_1 \leq \beta_2)$,pour avoir la définition des fonctions de densité suivantes :

$$f_{X_1}(s) = \sum_{j=1}^{\infty}\omega(j, p_1, \beta_1, 2\beta_2)h(s; j, 2\beta_2),$$

et

$$f_{X_2}(s) = \sum_{j=1}^{\infty}\omega(j, p_2, \beta_2, 2\beta_2)h(s; j, 2\beta_2).$$

Avec le Lemme 2.2, on peut écrire

$$I_1(s) = (1+\theta)\int_0^s f_{X_1}(x)f_{X_2}(s-x)\,dx = (1+\theta)\sum_{j=2}^{\infty}\sigma^{(2)}(j, \omega(p_1, \beta_1, 2\beta_2), \omega(p_2, \beta_2, 2\beta_2))h(s; j, 2\beta_2).$$

Pour déterminer $I_2(s)$, on va d'abord utiliser le lemme 2.3 ainsi que le lemme 2.4 de [2] pour obtenir

$$2\bar{F}_{X_1}(x)f_{X_1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\omega(k, \pi(p_1), 2\beta_1, 2\beta_2)h(x; k, 2\beta_2).$$

Nous avons chercher à déterminer $f_{X_2}(x)$ comme une fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire mixte d'Erlang avec un paramètre d'échelle de $2\beta_2$ en utilisant le Lemme 2.4

$$f_{X_2}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\omega(k, p_2, \beta_2, 2\beta_2)h(x; k, 2\beta_2).$$

En faisant le produit , on a

$$I_2(s) = -\theta\sum_{j=2}^{\infty}\sigma^{(2)}(j, \omega(\pi(p_1), 2\beta_1, 2\beta_2), \omega(p_2, \beta_2, 2\beta_2))h(s; j, 2\beta_2).$$

Les formes de $I_3(s)$ et $I_4(s)$ sont assez similaires, en usant du lemme 2.3 et du lemme 2.4 on trouve

$$I_3(s) = -\theta \sum_{j=2}^{\infty} \sigma^{(2)}(j, \omega(p_1, \beta_1, 2\beta_2), \pi(p_2)) h(s; j, 2\beta_2),$$

et

$$I_4(s) = \theta \sum_{j=2}^{\infty} \sigma^{(2)}(j, \omega(\pi(p_1), 2\beta_1, 2\beta_2), \pi(p_2)) h(s; j, 2\beta_2).$$

En faisant la somme en (15) on a ,

$$\begin{aligned}
f_{S_2}(s) = (1+\theta) \sum_{j=2}^{\infty} \sigma^{(2)}(j, \omega(p_1, \beta_1, 2\beta_2), \omega(p_2, \beta_2, 2\beta_2)) h(s; j, 2\beta_2) \\
-\theta \sum_{j=2}^{\infty} \sigma^{(2)}(j, \omega(\pi(p_1), 2\beta_1, 2\beta_2), \omega(p_2, \beta_2, 2\beta_2)) h(s; j, 2\beta_2) \\
-\theta \sum_{j=2}^{\infty} \sigma^{(2)}(j, \omega(p_1, \beta_1, 2\beta_2), \pi(p_2)) h(s; j, 2\beta_2) \\
+\theta \sum_{j=2}^{\infty} \sigma^{(2)}(j, \omega(\pi(p_1), 2\beta_1, 2\beta_2), \pi(p_2)) h(s; j, 2\beta_2). \\
= \sum_{j=2}^{\infty} (1+\theta)\sigma^{(2)}(j, \underline{\omega}(\underline{p}_1, \beta_1, 2\beta_2), \underline{\omega}(\underline{p}_2, \beta_2, 2\beta_2)) \\
-\theta\sigma^{(2)}(j, \underline{\omega}(\underline{\pi}(\underline{p}_1), 2\beta_1, 2\beta_2), \underline{\omega}(\underline{p}_2, \beta_2, 2\beta_2)) \\
-\theta\sigma^{(2)}(j, \underline{\omega}(\underline{p}_1, \beta_1, 2\beta_2), \underline{\pi}(\underline{p}_2)) \\
+\theta\sigma^{(2)}(j, \underline{\omega}(\underline{\pi}(p_1), 2\beta_1, 2\beta_2), \underline{\pi}(\underline{p}_2))), h(s; j, 2\beta_2) \\
= \sum_{j=2}^{\infty} p_j^{(2)} h(s; j, 2\beta_2)
\end{aligned}$$

On a ainsi que ,

$$\begin{aligned}
p_j^{(2)} = (1+\theta)\sigma^{(2)}(j, \underline{\omega}(\underline{p}_1, \beta_1, 2\beta_2), \underline{\omega}(\underline{p}_2, \beta_2, 2\beta_2)) \\
-\theta\sigma^{(2)}(j, \underline{\omega}(\underline{\pi}(\underline{p}_1), 2\beta_1, 2\beta_2), \underline{\omega}(\underline{p}_2, \beta_2, 2\beta_2)) \\
-\theta\sigma^{(2)}(j, \underline{\omega}(\underline{p}_1, \beta_1, 2\beta_2), \underline{\pi}(\underline{p}_2)) \\
+\theta\sigma^{(2)}(j, \underline{\omega}(\underline{\pi}(p_1), 2\beta_1, 2\beta_2), \underline{\pi}(\underline{p}_2))),
\end{aligned}$$

On conclut donc que la somme de deux variables aléatoires suivant une distribution de mélange d'Erlang suit égalemnet une distribution de mélange d'Erlang. Il semble ainsi nécessaire de déterminer les mesures de risque tel que la TVaR et la stop-loss.
Selon le corollaire 3.1 de [2], on a que :
Soit (X_1, X_2) une distribution bivariée définie avec la copule FGM et X_i suivant une distribution MixErl p_i, β_i pour $i = 1, 2$ avec $\beta_1 \leq \beta_2$. À un niveau donné $\kappa \in [0, 1]$, l'expression en

forme fermée pour la mesure de risque TVaR est donnée par

$$TVaR_\kappa(S_2) = \frac{1}{1-\kappa}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_j^{(2)}}{j}\frac{1}{2\beta_2}H(VaR_\kappa(S_2); j+1, 2\beta_2),$$

et pour une rétention donnée $d \in \mathbb{R}^+$, la prime de stop-loss est

$$\pi_{S_2}(d) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_j^{(2)}}{j!}e^{-2\beta_2 d}(2\beta_2 d)^j,$$

où les probabilités $p^{(2)}$ sont celles déterminées dans le résultat précédent. Nous avons essayer d'obtenir la formule de TVaR et de la prime stop-loss données par le corollaire 3.1. Pour la TVaR,

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(S_2) &= \frac{1}{1-\kappa}E(S_2\mathbb{1}_{S_2>VaR_k(S_2)}) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_{VaR_{(S_2)}}^{\infty} s f_{S_2}(s)ds \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_{VaR_{(S_2)}}^{\infty} s\sum_{j=2}^{\infty}p_j^{(2)}h(s;j,2\beta_2)ds \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\sum_{j=2}^{\infty}\int_{VaR_{(S_2)}}^{\infty} s p_j^{(2)}h(s;j,2\beta_2)ds \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\sum_{j=2}^{\infty}p_j^{(2)}\int_{VaR_{(S_2)}}^{\infty} s\frac{(2\beta_2)^j}{\Gamma(j)}s^{j-1}e^{-2\beta_2 s}ds \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\sum_{j=2}^{\infty}p_j^{(2)}\frac{1}{2\beta_2}\frac{j!}{(j-1)!}\int_{VaR_{(S_2)}}^{\infty} s\frac{(2\beta_2)^{j+1}}{\Gamma(j+1)}s^{j}e^{-2\beta_2 s}ds \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\sum_{j=2}^{\infty}p_j^{(2)}\frac{j}{2\beta_2}\int_{VaR_{(S_2)}}^{\infty} h(s;j+1,2\beta_2)ds \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\sum_{j=2}^{\infty}p_j^{(2)}\frac{j}{2\beta_2}\bar{H}(VaR_\kappa(S_2);j+1,2\beta_2)
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi vérifier le corollaire 3.1. Pour la prime stop-loss nous avons procédé comme suit :

$$\begin{aligned}
\pi_{S_2}(d) &= E(max(S_2-d;0)) \\
&= \int_d^{\infty}\bar{F}_{S_2}(s)ds
\end{aligned}$$

Il semble nécessaire de trouver la forme de $\bar{F}_{S_2}(s)$. On a que $\bar{F}_{S_2}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j^{(2)} \bar{H}(s; j, 2\beta_2)$. Ainsi, on peut déterminer la prime stop-loss.

$$\begin{aligned}
\pi_{S_2}(d) &= \int_d^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_j^{(2)} \bar{H}(s; j, 2\beta_2) ds \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} p_j^{(2)} \int_d^{\infty} e^{-2\beta_2 s} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(2\beta_2)^i}{i!} ds \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} p_j^{(2)} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{i!} \int_d^{\infty} e^{-2\beta_2 s} (2\beta_2)^i ds \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} p_j^{(2)} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(2\beta_2)^i}{i!} \int_d^{\infty} e^{-2\beta_2 s} ds \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} p_j^{(2)} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(2\beta_2)^i}{i!} \frac{e^{-2\beta_2 d}}{2\beta_2} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_j^{(2)}}{j!} e^{-2\beta_2 d} (2\beta_2 d)^j,
\end{aligned}$$

Nous verrons au cours de la section suivante la forme de l'allocation du capital basée sur la TVaR et la covariance.

3 Allocation baséee sur la TVaR et la Covariance

Au cours de cette section, nous explorerons l'expression de la mesure de risque TVaR et de la covariance pour le montant alloué aux risques X_1 et X_2. Nous débuterons avec la TVaR et ensuite la covariance.

3.1 Allocation basée sur la TVaR

Pour la TVaR, la proposition 3.3 de [2] est donné :
Soit (X_1, X_2) une distribution bivariée définie avec la copule FGM et X_i suivant une distribution MixErl p_i, β_i pour $i = 1, 2$ avec $\beta_1 \leq \beta_2$. Alors, l'expression pour $TVaR_\kappa(X_i, S_2)$ au niveau κ, $0 < \kappa < 1$, est donnée par

$$TVaR_\kappa(X_i, S_2) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} q_{i,k}^{(2)} \bar{H}(VaR_\kappa(S_2); k, 2\beta_2),$$

où

$$\begin{aligned}
q_{1,k}^{(2)} = (1+\theta)E[X_1]\sigma^{(2)}(k, \underline{\omega}(\underline{\alpha}(p_1), \beta_1, 2\beta_2), \underline{\omega}(\underline{p}_2, \beta_2, 2\beta_2)) \\
-\theta\Pi_1\sigma^{(2)}(k, \underline{\omega}(\underline{\alpha}(\underline{\pi}(\underline{p}_1)), 2\beta_1, 2\beta_2), \underline{\omega}(\underline{p}_2, \beta_2, 2\beta_2)) \\
-\theta E[X_1]\sigma^{(2)}(k, \underline{\omega}(\underline{\alpha}(\underline{p}_1), \beta_1, 2\beta_2), \pi(\underline{p}_2)) \\
+\theta\Pi_1\sigma^{(2)}(k, \underline{\omega}(\underline{\alpha}(\underline{\pi}(\underline{p}_1)), 2\beta_1, 2\beta_2), \pi(p_2)),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
q_{2,k}^{(2)} = (1+\theta)E[X_2]\sigma^{(2)}(k, \underline{\omega}(\underline{\alpha}(p_2), \beta_2, 2\beta_2), \underline{\omega}(\underline{p}_1, \beta_1, 2\beta_2)) \\
-\theta\Pi_2\sigma^{(2)}(k, \underline{\alpha}(\underline{\pi}(p_2)), \underline{\omega}(\underline{p}_1, \beta_1, 2\beta_2)) \\
-\theta E[X_2]\sigma^{(2)}(k, \underline{\omega}(\underline{\alpha}(\underline{p}_2), \beta_2, 2\beta_2), \underline{\omega}(\underline{\pi}(\underline{p}_1), 2\beta_1, 2\beta_2)) \\
+\theta\Pi_2\sigma^{(2)}(k, \underline{\alpha}(\underline{\Pi}(\underline{p}_2)), \underline{\omega}(\underline{\pi}(\underline{p}_1), 2\beta_1, 2\beta_2))
\end{aligned}$$

pour $k = 3, 4, \ldots$ et $q_{i,k}^{(2)} = 0$ pour $i = 1, 2, k = 1, 2$ et $\Pi_i = E[X_i]\bar{F}_{X_i}(X_i) = \sum_{j=1}^{\infty} j^2\beta_i\pi(j, p_i)$. Pour trouver ce résultat on a procédé comme suit :

$$TVaR_\kappa(X_1, S_2) = \frac{E\left[X_1 \cdot \mathbb{1}_{\{S_n > VaR_\kappa(S_n)\}}\right]}{1-\kappa} \tag{17}$$

$$TVaR_\kappa(X_1, S_2) = \frac{1}{1-\kappa}\int_{VaR_\kappa(S_2)}^{\infty} E\left[X_1 \cdot \mathbb{1}_{\{S_2 = s\}}\right] ds \tag{18}$$

On sait que ,

$$\begin{aligned}
E\left[X_1 \cdot \mathbb{1}_{\{S_2=s\}}\right] = \int_0^s x f_{\underline{X}}(x, s-x)\, dx \\
= \int_0^s x\left((1+\theta) - 2\theta F_{X_1}(x) - 2\theta F_{X_2}(s-x) + 4\theta F_{X_1}(x)F_{X_2}(s-x)\right) f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x)\, dx \\
= \int_0^s x(1+\theta) f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x) dx - 2\theta\int_0^s x F_{X_1}(x) f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x) dx \\
-2\theta\int_0^s x F_{X_2}(s-x) f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x) dx + 4\theta\int_0^s x F_{X_1}(x) F_{X_2}(s-x) f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x) dx
\end{aligned}$$

On peut rééecrire $E\left[X_1 \cdot \mathbb{1}_{\{S_2=s\}}\right]$ comme suit :

$$E\left[X_1 \cdot \mathbb{1}_{\{S_2=s\}}\right] = J_1(s) + J_2(s) + J_3(s) + J_4(s) \tag{19}$$

et ,

$$\begin{aligned}
J_1(s) &= (1+\theta)\int_0^s xf_{X_1}(x)f_{X_2}(s-x)\,dx,\\
J_2(s) &= -2\theta\int_0^s \bar{F}_{X_1}(x)xf_{X_1}(x)f_{X_2}(s-x)\,dx,\\
J_3(s) &= -2\theta\int_0^s xf_{X_1}(x)\bar{F}_{X_2}(s-x)f_{X_2}(s-x)\,dx,\\
J_4(s) &= 4\theta\int_0^s \bar{F}_{X_1}(x)xf_{X_1}(x)\bar{F}_{X_2}(s-x)f_{X_2}(s-x)\,dx.
\end{aligned}$$

Essayant de déterminer les différents J. Pour $J_1(s)$, on a que

$$\begin{aligned}
J_1(s) &= (1+\theta)\frac{E(X_1)}{E(X_1)}\int_0^s xf_{X_1}(x)f_{X_2}(s-x)\,dx,\\
&= (1+\theta)E(X_1)\int_0^s \frac{xf_{X_1}(x)}{E(X_1)}f_{X_2}(s-x)\,dx,
\end{aligned}$$

En usant le lemme 2.5 de [2],$\frac{xf_{X_1}(x)}{E(X_1)} = f_Y^{\alpha}(x)$

$$f_Y^{\alpha}(x) = \sum_{k=2}^{\infty}\alpha(k,\underline{p}_1)h(x;k,\beta_1).$$

En utilisant lemme 2.4, on a

$$J_1(s) = (1+\theta)E[X_1]\sum_{k=3}^{\infty}\sigma^{(2)}(k,\underline{\omega}(\underline{\alpha}(\underline{p}_1),\beta_1,2\beta_2),\underline{\omega}(\underline{p}_2,\beta_2,2\beta_2))h(s;k,2\beta_2).$$

On détermibe $J_2(s) = -\theta\Pi_1\int_0^s \frac{2xf_{X1}(x)f_{X1}(x)}{\Pi_1}f_{X_2}(s-x)dx$, où

$$\Pi_1 = E[X_1F_{X_1}(x)] = \sum_{j=1}^{\infty} j\frac{2\beta_1}{\pi(j,\underline{p}_1)}.$$

Avec les lemmes 2.3 et 2.5 on a ,

$$\frac{2xF_{X_1}(x)f_{X1(x)}}{\Pi_1} = \sum_{j=2}^{\infty}\alpha(j,\underline{\pi}(\underline{p}_1))h(x;j,2\beta_1)$$

Ensuite, on peut écrire $J2(s)$ comme suit :

$$J_2(s) = -\theta\Pi_1\sum_{k=3}^{\infty}\sigma^{(2)}(k,\underline{\omega}(\underline{\alpha}(\underline{\pi}(p_1)),2\beta_1,2\beta_2),$$

On peut déterminer $J_3(s)$ en utilisant encore les lemmes 2.3 et 2.5.

$$\begin{aligned}
J_3(s) &= -2\theta \int_0^s x f_{X_1}(x) \bar{F}_{X_2}(s-x) f_{X_2}(s-x)\, dx, \\
&= -\theta \int_0^s 2x \bar{F}_{X_2}(s-x) f_{X_2}(s-x) f_{X_1}(x)\, dx, \\
J_3(s) &= -\theta E[X_1] \sum_{k=3}^{\infty} \sigma^{(2)}(k, \underline{\omega}(\underline{\alpha}(p_1), \beta_1, 2\beta_2), \underline{\pi}(\underline{p}_2)) h(s; k, 2\beta_2),
\end{aligned}$$

et on obtient aussi $J_4(s) = \theta \Pi_1 \sum_{k=3}^{\infty} \sigma^{(2)}(k, \underline{\omega}(\underline{\alpha}(\underline{\pi}(p_1)), 2\beta_1, 2\beta_2), \pi(p_2)) h(s; k, 2\beta_2)$ en usant des mêmes lemmes.
En les substituant dans (17), on a :

$$\begin{aligned}
E\left[X_1 \cdot \mathbb{1}_{\{S_2 = s\}}\right] = (1+\theta) E[X_1] \sum_{k=3}^{\infty} \sigma^{(2)}(k, \underline{\omega}(\underline{\alpha}(\underline{p}_1), \beta_1, 2\beta_2), \underline{\omega}(\underline{p}_2, \beta_2, 2\beta_2)) h(s; k, 2\beta_2) \\
-\theta \Pi_1 \sum_{k=3}^{\infty} \sigma^{(2)}(k, \underline{\omega}(\underline{\alpha}(\underline{\pi}(p_1)), 2\beta_1, 2\beta_2) h(s; k, 2\beta_2) \\
-\theta E[X_1] \sum_{k=3}^{\infty} \sigma^{(2)}(k, \underline{\omega}(\underline{\alpha}(p_1), \beta_1, 2\beta_2), \underline{\pi}(\underline{p}_2)) h(s; k, 2\beta_2) \\
+\theta \Pi_1 \sum_{k=3}^{\infty} \sigma^{(2)}(k, \underline{\omega}(\underline{\alpha}(\underline{\pi}(p_1)), \\
2\beta_1, 2\beta_2), \pi(p_2)) h(s; k, 2\beta_2) \\
= \sum_{k=3}^{\infty} \Big((1+\theta) E[X_1] \sigma^{(2)}(k, \underline{\omega}(\underline{\alpha}(\underline{p}_1), \\
\beta_1, 2\beta_2), \underline{\omega}(\underline{p}_2, \beta_2, 2\beta_2)) \\
-\theta \Pi_1 \sigma^{(2)}(k, \underline{\omega}(\underline{\alpha}(\underline{\pi}(p_1)), 2\beta_1, 2\beta_2) \\
-\theta E[X_1] \sigma^{(2)}(k, \underline{\omega}(\underline{\alpha}(p_1), \beta_1, 2\beta_2), \underline{\pi}(\underline{p}_2)) \\
+\theta \Pi_1 \sigma^{(2)}(k, \underline{\omega}(\underline{\alpha}(\underline{\pi}(p_1)), 2\beta_1, 2\beta_2), \pi(p_2)) h(s; k, 2\beta_2) \qquad [
\end{aligned}$$

En le remplaçant dans (18) , on a :

$$
\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X_1,S_2) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{VaR_\kappa(S_2)}^{\infty} E\left[X_1\cdot \mathbb{1}_{\{S_2=s\}}\right]\,ds\\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_{VaR_\kappa(S_2)}^{\infty}\sum_{k=3}^{\infty}\Big((1+\theta)E[X_1]\sigma^{(2)}(k,\underline{\omega}(\underline{\alpha}(\underline{p}_1),\\
&\qquad \beta_1,2\beta_2),\underline{\omega}(\underline{p}_2,\beta_2,2\beta_2))\\
&\qquad -\theta\Pi_1\sigma^{(2)}(k,\underline{\omega}(\underline{\alpha}(\underline{\pi}(p_1)),2\beta_1,2\beta_2)\\
&\qquad -\theta E[X_1]\sigma^{(2)}(k,\underline{\omega}(\underline{\alpha}(p_1),\beta_1,2\beta_2),\underline{\pi}(\underline{p}_2))\\
&\qquad +\theta\Pi_1\sigma^{(2)}(k,\underline{\omega}(\underline{\alpha}(\underline{\pi}(p_1)),2\beta_1,2\beta_2),\pi(p_2))h(s;k,2\beta_2)ds\\
&= \frac{1}{1-\kappa}\sum_{k=1}^{\infty} q_{1,k}^{(2)}\bar{H}(VaR_\kappa(S_2);k,2\beta_2)
\end{aligned}
$$

[

Le procédé est le même pour le calcul de $TVaR_k(X_2,S_2)$.

3.2 Allocation basée sur la covariance

Dans ce paragraphe , nous nous attelerons à mieux assimiler la notion d'allocation basée sur la covariance pour n=2. En effet, dans [2], l'expression pour le montant de capital attribué au risque i = 1, 2 selon la règle d'allocation de covariance est donnée dans la proposition 3.4. Elle est définie comme suit :

Proposition 3.4. Soit (X_1,X_2) une distribution bivariée définie avec la copule FGM et $X_i \sim \text{MixErl}\,(p_i,\beta_i)$, i = 1, 2 avec $\beta_1 \le \beta_2$. Alors, la contribution $C_\kappa(X_i,S_2)$ au niveau $\kappa, 0<\kappa<1$, est donnée par :

$$
C_\kappa(X_i,S_2) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}\frac{k}{\beta_2} \tag{20}
$$

où

$$
c_{i,k} = \omega(k,\underline{p}_i,\beta_i,\beta_2) + 2\rho_{i,k}p_k^{(2)}\left(\frac{\bar{H}(\mathrm{VaR}_\kappa(S_2);k+1,2\beta_2)}{1-\kappa}-1\right)
$$

avec

$$
\rho_{i,k} = \frac{\sum_{l=1}^{\infty} l\omega(l,p_i,\beta_i,\beta_2) - \left(\sum_{l=1}^{\infty} l\omega(l,p_i,\beta_i,\beta_2)\right)^2}{\sum_{l=1}^{\infty} lp_l^{(2)} - \left(\sum_{l=1}^{\infty} lp_l^{(2)}\right)^2} \tag{21}
$$

$$
+\frac{\theta\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} lm\left(\pi(l,\omega(p_1,\beta_1,\beta_2)) - \omega(l,p_1,\beta_1,\beta_2)\right)\left(\pi(m,p_2)-p_{2,m}\right)}{\sum_{l=1}^{\infty} lp_l^{(2)} - \left(\sum_{l=1}^{\infty} lp_l^{(2)}\right)^2} \tag{22}
$$

pour $i = 1, 2$. Nous avons essayer de détailler la preuve fournit. Des expressions données précédemment, on a celle de la covariance selon la règle d'allocation. Elle est définit ci-dessous pour $n = 2$.

$$C_\kappa(X_i, S_2) = E[X_i] + \frac{\text{Cov}(X_i, S_2)}{\text{Var}(S_2)} \times (\text{TVaR}_\kappa(S_2) - E[S_2]), \tag{23}$$

On dispose des informations suivantes :

$$E[S_2] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^{(2)}}{k} 2\beta 2 \tag{24}$$

$$E[X_i] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\omega(k, \underline{p}_i, \beta_i, \beta_2)}{\beta_2}. \tag{25}$$

$$Var(S_2) = \frac{1}{4\beta_2} \sum_{l=1}^{\infty} l p_l^{(2)} - \left(\sum_{l=1}^{\infty} l p_l^{(2)} \right)^2. \tag{26}$$

En remplaçant 25,26 et 24 dans 23 ,on a

$$C_\kappa(X_i, S_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\omega(k, \underline{p}_i, \beta_i, \beta_2) + \frac{\text{Cov}(X_i, S_2)}{2\text{Var}(S_2)} p_k^{(2)} \times \frac{\bar{H}(\text{VaR}_\kappa(S_2); k+1, 2\beta_2)}{1-\kappa} - 1 \right) \frac{k}{\beta_2} \tag{27}$$

4 Exemple numérique 3.4

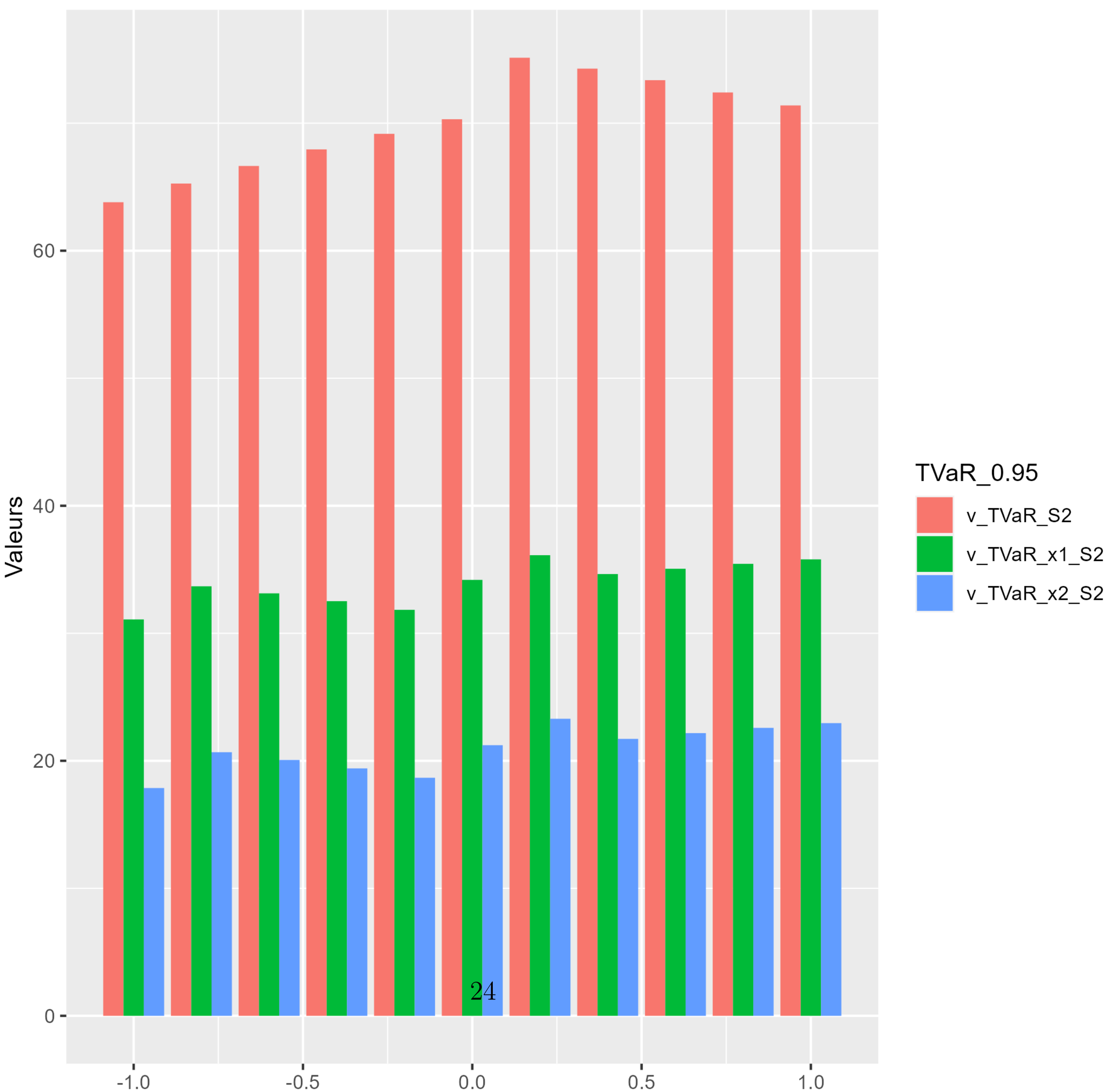
Soit (X_1, X_2) une distribution bivariée définie par la copule FGM avec $\theta = 0.5$ et des marginales mixtes Erlang. Les fonctions de densité de probabilité de X_1 et X_2 sont données par

$$f_{X_1}(x) = 0.6h(x; 1, 0.1) + 0.4h(x; 2, 0.1),$$
$$f_{X_2}(x) = 0.3h(x; 1, 0.15) + 0.5h(x; 2, 0.15) + 0.2h(x; 3, 0.15).$$

Nous avions comme tâche de reproduire au cours de cette section l'exemple [2] afin de mieux entrevoir l'efficacité des différentes mesures de risques, c'est à dire la TVaR et la covariance. On peut mieux l'assimiler à l'aide du graphique suivant :

Theta	VaR_0,95	TVaR_S2	TVaR_x1_S2	TVaR_x2_S2
-1,00	53,08	63,80	31,09	17,86
-0,80	57,01	65,27	33,68	20,67
-0,60	56,04	66,65	33,13	20,07
-0,40	55,06	67,94	32,52	19,40
-0,20	54,07	69,17	31,84	18,67
0,00	57,96	70,31	34,19	21,22
0,20	62,29	75,14	36,12	23,29
0,40	58,88	74,28	34,64	21,72
0,60	59,78	73,37	35,06	22,17
0,80	60,64	72,41	35,44	22,58
1,00	61,48	71,39	35,80	22,95

FIGURE 1 – Résultats agrégés de l'exemple numérique 3.4



Conclusion

À la fin de l'étude de cet article, nous pouvons conclure que la distribution de mélange d'Erlang a l'avantage d'obtenir des expressions fermées pour les différentes mesures de risque(VaR,TVaR,Covariance).Quant à la copule FGM, elle nous permet de quantifier les dépendances faibles. Cependant, cela constiue également une faiblesse dans la mesure où elle ne nous permettra pas de déterminer de fortes dépendances dans un portefeuille. Cela a pour conséquence dans certains cas, une surestimation ou une sous-estimation du capital économique.Pour les mesures de risque, le constat fait au cours de cet article est que l'allocation par la TVaR fait une surestimation par rapport à celle obtenue par la covariance.

Bibliographie

[1] Alain Armstrong, Margaret et Galli. Simulations non gaussiennes séquentielles utilisant la copule fgm. *document de travail Cerna.*

[2] Hélène Cossette, Marie-Pier Côté, Etienne Marceau, and Khouzeima Moutanabbir. Multivariate distribution defined with farlie–gumbel–morgenstern copula and mixed erlang marginals : Aggregation and capital allocation. *Insurance : Mathematics and Economics*, 52(3) :560–572, 2013.

[3] Hélène Cossette, David Landriault, Etienne Marceau, and Khouzeima Moutanabbir. Analysis of the discounted sum of ascending ladder heights. *Insurance : Mathematics and Economics*, 51(2) :393–401, 2012.

[4] Mélina et Marceau Étienne Cossette, Hélène et Mailhot. Allocation de capital basée sur tvar pour des distributions composées multivariées avec des montants de sinistres continus positifs. *Assurance : Mathématiques et Economie*, 50 :247–256.

[5] X Sheldon Lee, Simon CK et Lin. Modélisation et évaluation des pertes d'assurance via des mélanges de distributions erlang. *Journal actuariel nord-américain*, 14 :107–130.

[6] Gordon E Willmot and X Sheldon Lin. Risk modelling with the mixed erlang distribution. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 27(1) :2–16, 2011.