American option pricing under GARCH by a Markov chain approximation

MBOUNGOU MANGOUBI Stanislas

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

April 25, 2024

Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

Outline

UNIVERSITÉ LAVAL

Introduction

Contexte

- Duan et Simonato (1999) proposent une méthode numérique pour évaluer les options américaines, en particulier dans le modèle de tarification des options.
- La méthode est basée sur l'approximation du processus de prix de l'actif sous-jacent par une chaîne de Markov homogène à espace d'états fini.
- L'utilisation d'une représentation matricielle "creuse" peut considérablement augmenter la dimension de la chaîne de Markov pour obtenir de meilleurs résultats numériques.
- GARCH : Generalised Autoregressive Condtional Heteroskedasticity.

Contexte

- La volatilité variable dans le temps est un fait empirique dans les séries chronologiques financières.
- La famille de modèles **ARCH**, en particulier GARCH, est largement utilisée pour décrire la volatilité variable dans le temps.
- La **volatilité stochastique** de l'actif sous-jacent affecte l'évaluation des produits dérivés.
- L'approximation par chaîne de Markov est une nouvelle méthode numérique pour la tarification des options européennes et américaines dans le cadre du modèle GARCH.

Les options americaines et les options européennes

Definition

Une option est un titre financier donnant à son détenteur le droit, et non l'obligation d'acheter ou de vendre (selon qu'il s'agit d'une option d'achat ou de vente) une certaine quantité d'un actif financier à une date convenue et à un prix fixé d'avance.

La description précise d'une option se fait à partir des éléments suivants :

- la nature de l'option : **call**, pour une option d'achat et **put** pour une option de vente;
- de l'actif sous-jacent, sur lequel porte l'option ;
- le montant, c'est-à-dire la quantité d'actif sous-jacent à acheter ou à vendre.

Informations tirées du livre "Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance" de Damien Lamberton et Bernard Lapeyre.

Les options americaines et les options européennes

L'échéance ou date d'expiration limite la durée de vie de l'option. Si l'option peut être exercée à n'importe quel instant avant l'échéance, on parle **d'option américaine**. De façon formelle, on a :

$$\text{Payoff}_{call} = \max(S_t - K, 0) \text{ et } \text{Payoff}_{put} = \max(K - S_t, 0).$$

Si l'option ne peut être exercée qu'à l'échéance, on parle **d'option européenne**. De façon formelle, on a :

$$\text{Payoff}_{call} = \max(S_T - K, 0) \text{ et } \text{Payoff}_{put} = \max(K - S_T, 0).$$

Notons que T est la date d'échéance de l'option, S_t est le cours de l'action à la date t et K le prix d'exercice.

Méthodologie

Représentation du modèle GARCH de Bollerslev(1986)

Soient $\{\varepsilon_t, t = 1, ..., n\}$ un processus stochastique discret à valeurs réelles et $\mathcal{F}_t$, l'ensemble d'informations accumulées jusqu'au temps t (une filtration). Le processus GARCH(p,q) est alors défini par :
$\varepsilon_t/\mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, h_t)$,
où $h_t = Var(\varepsilon_t/\mathcal{F}_{t-1}) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j}$;
avec $\alpha_p > 0$, $\alpha_j \geq 0, j \in \{1, ..., p-1\}$ et $\beta_j > 0, j \in \{1, ..., q\}$.

Représentation du modèle GARCH de Bollerslev(1986)

Le modèle de régression GARCH(p,q) est obtenu en prenant ε_t comme l'innovation dans une régression linéaire : $\varepsilon_t = Y_t - X'B$.

1. Y_t est la variable dépendante du modèle, X' est le vecteur des variables explicatives et B est le vecteur des paramètres réels à estimer. C'est un bruit blanc.
2. $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0, \forall s \neq t;$
3. $\{\varepsilon_t, t = 1, ..., n\}$ est stationnaire si : $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1.$

Exemple de GARCH(1,1) : $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}.$

Les modèles de type GARCH

1. Les modèles de type GARCH utilisent l'information des périodes antérieures pour prédire volatilité future, cela est crucial pour estimer le prix des options.

2. La volatilité est un facteur clé dans la tarification des options, car elle influence le degré d'incertitude associé au prix futur d'un actif. Les modèles GARCH permettent de capturer la volatilité dynamique ainsi que le regroupement et la persistance des chocs de volatilité observés sur les marchés financiers.

3. Dans le modèle GARCH(1, 1), l'effet d'un choc de rendement sur la volatilité actuelle diminue géométriquement au fil du temps Bollerslev(1986).

Modèle de tarification des options GARCH

Definition

- Une option GARCH est un contrat d'option dont le prix est influencé par la volatilité de l'actif sous-jacent, modélisée à l'aide d'un modèle de type GARCH.
- En intégrant le modèle GARCH, les options GARCH offrent une représentation plus réaliste de la dynamique des marchés financiers et peuvent mieux saisir l'impact de la volatilité changeante sur les prix des options.

Modèle de tarification des options GARCH

Dans son article de 1995, Duan considère une économie à temps discret, où $\cancel{X_t}$ est le prix de l'actif sous-jacent au t et définit le taux de rendement de cet actif sous la mesure P par :

$$ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r + \lambda\sqrt{h_t} - \frac{1}{2}h_t + \varepsilon_t, \tag{1}$$

avec, r : le taux de rendement sans risque constant pour une période (composé en continu) et λ est la prime de risque unitaire constante.

Modèle de tarification des options GARCH

Duan (1995) assume que $\frac{S_{t+1}}{S_t}$ est distribué conditionnellement selon une loi lognormale. Les résultats de tarification des options qu'il a développées avec Simonato en 1999 s'appuient sur cette hypothèse. Il admet que $\{\varepsilon_t, t = 1, ..., n\}$ suit un processus GARCH(p,q).

Or, le modèle GARCH ne permet pas de capturer l'effet de levier, c'est-à-dire la tendance des rendements financiers à être plus volatile lorsqu'ils sont négatifs que lorsqu'ils sont positifs. Cela est souvent observé dans les marchés financiers lorsque les baisses de prix ont un impact plus important sur la volatilité future que les augmentations de prix.

Modèle de tarification des options NGARCH(1,1)

Il existe plusieurs modèles permettant de capturer l'effet de levier parmi lesquels les modèles : NGARCH, EGARCH et GJR-GARCH. Duan et Simonato (1999) postule que $\{\varepsilon_t, t = 1, ..., n\}$ suit un processus GARCH non-linéaire d'ordre (1,1), noté NGARCH(1,1).

Comme le modèle choisi est NGARCH(1,1), on postule la dynamique de rendement des actifs sous la mesure de probabilité de physique P comme suit :

$$ln\frac{S_{t+1}}{S_t} = r + \lambda\sqrt{h_{t+1}} - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}\varepsilon_{t+1}, \tag{2}$$

où, $h_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t(\varepsilon_t - \theta)^2,$ et $\varepsilon_{t+1}/\mathcal{F}_t \sim^P \mathcal{N}(0, 1)$.

L'équation (2) décrit la dynamique des taux de rendement de l'actif sous-jacent dans le cadre NGARCH(1,1).

Modèle de tarification des options NGARCH(1,1)

On a : $\beta_0 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$ et $\beta_2 \geq 0$. Ces contraintes assurent que la variance conditionnelle reste non-négative, ce qui est une condition nécessaire pour la validité du modèle.

- $\ln \frac{S_{t+1}}{S_t}$ est le rendement logarithmique de l'actif entre les temps t et $t+1$.
- h_{t+1} est la variance conditionnelle du rendement de l'actif à la période $t+1$, qui représente la volatilité attendue du rendement.
- ε est prévisible, i.e. ε_{t+1} est $\mathcal{F}_t - mesurable$.
- $\mathcal{F}_t$ est la filtration engendrée par $(S_0, h_0, \varepsilon_s : s \in \{1, 2, \ldots, t\})$; c'est l'ensemble des informations disponibles jusqu'au temps t.

Modèle de tarification des options NGARCH(1,1)

- Le paramètre θ détermine l'effet de levier. Un θ positif signifie une corrélation négative entre les innovations pour le rendement de l'actif et sa volatilité conditionnelle.

- Le terme $-\frac{1}{2}h_{t+1}$ ajuste le rendement attendu pour tenir compte de la variation de la volatilité, car la volatilité a un effet négatif sur le rendement attendu d'un actif risqué.

- Le terme $(\varepsilon_t - \theta)^2$ dans l'équation de la variance conditionnelle permet de modéliser l'effet de levier. Un θ positif implique que les rendements négatifs augmentent la volatilité future plus que les rendements positifs.

Modèle de tarification des options NGARCH(1,1)

Notons que la dynamique donnée par l'équation (2) est sous la mesure P ; mesure de probabilité sous laquelle les données sont générées. Sous P, les prix des actifs sont modélisés en tenant compte de toute l'information disponible et de l'incertitude du marché.

- Quant tenu de l'objectif de tarification, une mesure risque neutre Q a été construite en utilisant le théorème de **Girsanov**.
- Cette mesure est utilisée pour la tarification des options.
- Elle est construite de manière que le prix actualisé des actifs soit une martingale. Cela signifie que sous Q, le prix espéré futur d'un actif, actualisé au taux sans risque, est égal à son prix actuel, éliminant ainsi toute opportunité d'arbitrage.

Modèle de tarification des options NGARCH(1,1)

Duan et Simonato (1999) ont utilisé la mesure risque-neutre Q de Duan (1995).

Cette mesure Q satisfait la relation **locally risk-neutral valuation relationship**(LRNVR), c'est-à-dire, elle vérifie que : la mesure Q est mutuellement absolument continue par rapport à la mesure P ; et, le rapport (S_t/S_{t-1}) sous la filtration $\mathcal{F}_t$ suit une distribution lognormale sous Q. Duan (1995) précise que :

$$E^Q\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}/\mathcal{F}_{t-1}\right) = e^r,$$

et $\text{Var}^Q\left(\ln(\frac{S_t}{S_{t-1}})/\mathcal{F}_{t-1}\right) = Var^P\left(\ln(\frac{S_t}{S_{t-1}})/\mathcal{F}_{t-1}\right).$

Modèle de tarification des options NGARCH(1,1)

Ainsi, sous risque-neutre (Q), la dynamique des rendements de l'actif est :

$$ln\frac{S_{t+1}}{S_t} = r - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}\epsilon_{t+1}, \tag{3}$$

$$h_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t(\epsilon_t - \theta - \lambda)^2, \tag{4}$$

$$\epsilon_{t+1}/\mathcal{F}_t \sim^Q \mathcal{N}(0,1), \text{ avec } \epsilon_{t+1} = \varepsilon_{t+1} + \lambda. \tag{5}$$

Le modèle NGARCH(1,1) demeure valable sous la mesure Q, mais l'effet de levier change et devient $\theta + \lambda$. Étant sous la mesure Q, cet ajustement de l'effet de levier permet d'inclure la prime de risque λ. Cela signifie que le modèle peut être utilisé pour la tarification d'options en plus de la modélisation des rendements des actifs.

Modèle de tarification des options GJR-GARCH(1,1)

L'un des objectifs de l'article étant de généraliser les résultats à d'autres modèles alternatifs au modèle NGARCH(1,1). Ainsi, nous avons les dynamiques de volatilités suivantes :

- Modèle GJR-GARCH(1,1) sous P:

$$h_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t \varepsilon_t^2 + \beta_3 h_t \max(-\varepsilon_t, 0)^2, \qquad (6)$$

  où $\beta_3 > 0$ capture l'effet de levier.

- Modèle GJR-GARCH(1,1) sous Q :

$$h_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t (\epsilon_t^2 - \lambda)^2 + \beta_3 h_t \max(-\epsilon_t + \lambda, 0)^2. \quad (7)$$

Modèle de tarification des options EGARCH(1,1)

- Modèle EGARCH(1,1) sous P:

$$\ln(h_{t+1}) = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_1 \ln(h_t) + \beta_2(-|\varepsilon_t| - \gamma\varepsilon_t), \qquad (8)$$

  où $\beta_2 > 0$ et $\gamma > 0$ capturent l'effet de levier.

- Modèle EGARCH(1,1) sous Q :

$$\ln(h_{t+1}) = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_1 \ln(h_t) + \beta_2[|\epsilon_t - \lambda| - \gamma(\epsilon_t - \lambda)]. \qquad (9)$$

Processus de Markov

Definition

Un processus de Markov par rapport à la filtration $\mathcal{F}$ est un processus $Y = \{Y_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ adapté à la filtration $\mathcal{F}$ tel que :
$\forall x \in \mathbf{R}, \forall t, s \in \mathcal{T}$ tel que $s > t, P[Y_s \leq x/\mathcal{F}_t] = P[Y_s \leq x/Y_t]$.

[Cours de Claude Bélisle, 2021]

Chaînes de Markov discret

Definition

Soit S, un ensemble non vide, fini ou infini, dénombrable. Soit ν, une distribution de probabilités sur S. Soit $\mathcal{P}$, une matrice stochastique sur S. Une chaîne de Markov sur S, à temps discret, homogène dans le temps, avec loi initial ν et avec matrice de probabilités de transition $\mathcal{P}$, est une suite de processus (variables) aléatoires $(X_n; n \geq 0)$ qui satisfait les trois conditions suivantes :

1. $\forall i \in S$ on a $P[X_= i] = \nu_i$.
2. $\forall n \geq 0$ et $\forall i_0, i_1, \ldots, i_{n1}, i_n \in S$ pour lesquels $P[(X_0, X_1, \ldots, X_{n1}, X_n) = (i_0, i_1, \ldots, i_{n1}, i_n)] > 0, \forall j \in S$, on a, $P[X_{n+1} = j/(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n)] = P[X_{n+1} = j/X_n = i_n]$.
3. $\forall (i,j) \in S \times S$ et $\forall n$ tels que $P[X_n = i_n] > 0$,

P[X$_{n+1} = j/X_n = i$] ne dépend pas de n et est égale à P_{ij}.

Tarification par les chaînes de Markov

- La méthode de chaîne de Markov proposée par Duan et Simonato (1999) repose sur la discrétisation du prix de l'actif sous-jacent et de la volatilité.
- Cette méthode traite un ensemble fixe de prix de l'actif sous-jacent et la volatilité. Cette partition fixe de l'espace d'états simplifie considérablement la tarification des options en une séquence d'opérations matricielles standard.
- Sous une représentation de chaîne de Markov, l'espérance conditionnelle est simplement un produit de deux composants.

Tarification par les chaînes de Markov

- Pour les options européennes, le premier composant est la matrice de probabilité de transition élevée à une puissance égale à la maturité de l'option (mesurée en termes de période de transition de base), et le second est le vecteur de paiement associé à l'option.

- Pour les options américaines, l'utilisation de l'idée de **programmation dynamique nécessite seulement une revalorisation répétée de la moyenne conditionnelle actualisée d'une période par rapport à la valeur d'exercice anticipée avant de passer à la multiplication matricielle suivante**.

Tarification par les chaînes de Markov

- En d'autres termes, pour chaque étape de temps, on compare la valeur de conserver l'option (c'est-à-dire la moyenne conditionnelle actualisée) avec la valeur d'exercer l'option immédiatement (c'est-à-dire la valeur d'exercice anticipée).
- Si la valeur d'exercice est supérieure, on choisit d'exercer l'option. Sinon, on continue à la prochaine étape de temps et on répète le processus. Cette méthode est souvent appelée l'approche de l'arbre binomial pour l'évaluation des options américaines.

Tarification par les chaînes de Markov

- Dans le cadre de notre modèle NGARCH(1,1), S_t et h_{t+1} ensemble servent de statistiques suffisantes pour $\mathcal{F}_t$.

- Autrement dit, le NGARCH(1, 1) peut être décrit comme un processus de Markov bivarié.

- Le modèle de tarification d'options GARCH(1, 1) reflète explicitement l'état du prix de l'actif sous-jacent dans deux dimensions : le niveau de prix et la volatilité conditionnelle.

- Cette dimension supplémentaire permet au modèle de refléter une variance élevée ou faible de l'actif sous-jacent lorsque l'état du marché change.

Tarification par les chaînes de Markov

- Le principe consiste à utiliser une chaîne de Markov bivarié pour prédire la façon dont le prix d'un actif et sa volatilité évolueront dans le temps, en tenant compte de différents scénarios possibles.
- Cela permet d'évaluer les options en considérant toutes les trajectoires possibles que le prix de l'actif pourrait prendre, et en calculant l'espérance conditionnelle de l'option pour chaque scénario.

Tarification par les chaînes de Markov

Soit $f(S_T, K)$ la fonction payoff au temps T d'une option européenne. Sa valeur au temps t sous Q (en utilisant le processus de rendement de l'actif sous-jacent sous Q) est donnée par :

$$e^{-r(T-t)} E^Q[f(S_T, K)/\mathcal{F}_t].$$

Tarification par les chaînes de Markov d'une option américaine

- Pour les options américaines, on représente le modèle GARCH sous-jacent comme un système bivarié Markovien, c'est-à-dire qu'on traduit le couple (S_t, h_{t+1}) comme étant Markovien.

- Le payoff de l'option à l'instant terminal n'est pas une fonction directe de h_{T+1}. Mais, la décision d'exercice anticipé dépend du niveau de volatilité, car elle détermine la valeur vive d'une option.

Tarification par chaîne de Markov d'une option américaine

Le niveau actuel de la volatilité conditionnelle détermine en partie l'évolution dynamique future du prix de l'actif sous-jacent. La valeur de l'option américaine au temps t dénotée $V(S_t, h_{t+1}, t)$ est définie de façon récursive par :

$$V(S_t, h_{t+1}, t) = \max\{f(S_t, K), e^{-r} E^Q[V(S_{t+1}, h_{t+2}, t+1)/\mathcal{F}_t]\}, \tag{10}$$

où

$$V(S_T, h_{T+1}, T) = f(S_T, K). \tag{11}$$

L'équation (10) permet de déterminer la valeur d'une option américaine en considérant la possibilité d'exercice anticipé et en utilisant une approche de programmation dynamique pour résoudre le problème numérique associé.

Tarification par chaîne de Markov d'une option américaine

- La valorisation des options européennes peut être vue comme un cas particulier de l'équation (10).
  En effet, en l'absence de possibilité d'exercice anticipé, la formule récursive se simplifie en la valeur future attendue de l'option actualisée, calculée périodiquement, et devient $e^{-r(T-t)}E^{Q}[f(S_T, K)/\mathcal{F}_t]$.

- L'implémentation de l'équation (10) pour valoriser les options américaines nécessite le calcul des espérances conditionnelles de l'option à chaque instant où un exercice anticipé est possible.

Tarification par chaîne de Markov d'une option américaine

Approximation du prix de l'actif et de la volatilité conditionnelle sous Q :

- Formellement, les prix des actions sont discrétisés en $\mathbf{m}$ valeurs différentes tandis que les volatilités peuvent prendre $\mathbf{n}$ valeurs différentes.
- Considérons un vecteur $V(t)$ de dimension $mn \times 1$ contenant les valeurs approximatives des options au temps t pour tous les états possibles.

Tarification par chaîne de Markov d'une option américaine

Désignons par Π la matrice de probabilité de transition de Markov de dimension $mn \times mn$. L'élément $(i, j; k, l)$ de cette matrice représente la probabilité de passer des états de prix et de volatilité (i, j) au temps t aux états de prix et de volatilité (k, l) au temps $t + 1$, avec les éléments de Π ordonnés comme suit :

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \pi(1,1;1,1) & \pi(1,1;2,1) & \cdots & \pi(1,1;m,1) & \pi(1,1;1,2) & \cdots & \pi(1,1;m,n) \\ \pi(2,1;1,1) & \pi(2,1;2,1) & \cdots & \pi(2,1;m,1) & \pi(2,1;1,2) & \cdots & \pi(2,1;m,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi(m,1;1,1) & \pi(m,1;2,1) & \cdots & \pi(m,1;m,1) & \pi(m,1;1,2) & \cdots & \pi(m,1;m,n) \\ \pi(1,2;1,1) & \pi(1,2;2,1) & \cdots & \pi(1,2;m,1) & \pi(1,2;1,2) & \cdots & \pi(1,2;m,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi(m,n;1,1) & \pi(m,n;2,1) & \cdots & \pi(m,n;m,1) & \pi(m,n;1,2) & \cdots & \pi(m,n;m,n) \end{bmatrix} \tag{12}$$

Tarification par chaîne de Markov d'une option américaine

L'importance de l'hypothèse de chaînes Markov à temps homogène :

- Pour la tarification NGARCH(1,1), l'hypothèse de temps homogène permet de considérer que le processus de rendement de l'actif sous-jacent et la volatilité sont stables dans le temps, ce qui facilite le calcul des prix des options.
- Cela signifie que les calculs effectués pour une période peuvent être appliqués de manière répétitive pour les périodes suivantes, ce qui est essentiel pour l'application de la programmation dynamique.

Tarification par chaîne de Markov d'une option américaine

Soit le vecteur $\bar{S}$ de taille $mn \times 1$ contenant $\mathbf{m}$ valeurs discrétisées du prix de l'actif sous-jacent, répétées pour $\mathbf{n}$ valeurs différentes des volatilités conditionnelles. Il est défini tel que :

$$\bar{S}' = [\bar{s}(1), \bar{s}(2), \ldots, \bar{s}(m), \ldots, \bar{s}(1), \bar{s}(2), \ldots, \bar{s}(n)]. \tag{13}$$

Cette représentation en chaîne de Markov simplifie le calcul de la relation de programmation dynamique (10), qui peut maintenant être mise en œuvre comme suit :

$$\bar{V}(t) = \max[g(\bar{S}, K), e^{-r}\Pi\bar{V}(t+1)] \text{ avec } \bar{V}(T) = g(\bar{S}, K). \tag{14}$$

Tarification par chaîne de Markov d'une option américaine

Pour les options de vente américaine, $g(\bar{S}, K) = \max\{(K\mathbf{1} - \bar{S}), \mathbf{0}\}$ où $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$ sont des vecteurs des zéros(1) et des un(1) respectivement. Pour les options d'achat américaines, lorsque l'actif sous-jacent ne rapporte pas de dividendes, l'exercice anticipé n'est jamais optimal et la solution est donnée par :

$$\bar{V}(0) = e^{-rT}\Pi^T \max\{\bar{S} - K\mathbf{1}, \mathbf{0}\}. \tag{15}$$

Mise en œuvre de l'approche de la chaîne de Markov

Le fait d'utiliser une chaîne de Markov à espace d'états fini engendre l'existence d'une tendance pour le processus cible à long terme.

Afin d'éliminer cette tendance croissante dans le temps liée au prix de l'actif non ajusté, la chaîne de Markov construite est basée sur un prix d'actif ajusté défini comme :

$$S_t^* = e^{-(r-(1/2)h^*)t} S_t, \text{ où } h^* = \beta_0\{1-\beta_1-\beta_2[1+(\theta+\lambda)^2]\}^{-1}, \quad (16)$$

où h^* est la variance stationnaire de ϵ sous la mesure Q. Ainsi, on peut partitionner en m et n états le logarithme du prix ajusté et la variance conditionnelle respectivement.

Mise en œuvre de l'approche de la chaîne de Markov

Désignons le logarithme du prix de l'actif ajusté dans l'état i par $p(i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$ et le logarithme de la variance conditionnelle par $q(j)$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$. La probabilité de transition de l'état (i, j) au temps t à l'état (k, l) au temps $t + 1$est définie comme :

$\pi(i, j; k, l) = Pr^Q\{p_{t+1} = \bar{p}(k), q_{t+2} = \bar{q}(l) | p_t = \bar{p}(i), q_{t+1} = \bar{q}(j)$ où $t = 0 \ldots T - 1, \}$; p_t indique le logarithme du prix de l'actif ajusté au moment t et q_t le logarithme de la variance conditionnelle connue au moment t.

Mise en œuvre de l'approche de la chaîne de Markov

- Pour calculer les probabilités de transition, on définit d'abord les valeurs discrètes et la plage de valeurs pour le prix de l'actif et sa variance conditionnelle.
- On choisit des points équidistants dans un intervalle symétrique autour du logarithme du prix initial de l'actif, p_0, et un intervalle similaire pour la variance conditionnelle ($[p_0 - I_p, p_0 + I_p]$).
- L'intervalle pour la variance n'est pas centré autour de la variance initiale, mais autour d'une valeur q_1^* , qui est le logarithme d'une somme pondérée entre la variance initiale et la variance stationnaire, avec des poids ajustés selon la maturité de l'option($[q_1^* - I_q, q_1^* + I_q]$).

Mise en œuvre de l'approche de la chaîne de Markov

- Pour les options à courte maturité, on privilégie la variance initiale, tandis que pour les options à longue maturité, on privilégie la variance stationnaire. Une fois l'intervalle global pour le prix de l'actif logarithmique déterminé, nous le divisons également en $m-1$ cellules pour obtenir m valeurs discrètes pour le prix de l'actif.
- De même, nous avons n volatilités conditionnelles discrétisées. Nous exigeons que m et n soient des entiers impairs. Pour le logarithme du prix de l'actif ajusté, nous considérons m cellules correspondant à m prix d'actifs, $p(i)$, $i = 1, ..., m$.

Mise en œuvre de l'approche de la chaîne de Markov

La probabilité de transition sous mesure Q peut être calculée comme suit:

$$\pi(i,j;k,l) = \begin{cases} Pr^Q\{p_{t+1} \in C(K) | p_t & = \bar{p}_i, \text{ si } \Phi(\bar{q}(j), \bar{p}(k), \bar{p}(i)) \in D(l) \\ & q_{t+1} = \bar{q}(j)\} \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases} \tag{17}$$

La probabilité conditionnelle que le prix de l'actif tombe dans la cellule $C(k)$ dans le cadre du processus GARCH peut être calculée analytiquement comme suit :

$$Pr^Q\{p_{t+1} \in C(k) | p_t = \bar{p}, q_{t+1} = \bar{q}(j)\} = Pr^Q\{L_i j(k) \leq Z < L_i j(k+1)\}, \tag{18}$$

où

$$L_{ij}(k) = \frac{c(k) - \bar{p}(i) + \frac{1}{2}\left[e^{\bar{q}(j)} - h^*\right]}{\sqrt{e^{\bar{q}(j)}}} \text{ et } Z \sim^Q N(0,1).$$

Tarification des options

La chaîne de Markov construite permet d'approcher le logarithme du prix ajusté de l'action. Pour passer aux prix réels, on utilise la fonction payoff suivante :

$$g(\bar{P}, K, t) = \max\left\{K\mathbf{1} - e^{[(r-\frac{1}{2}h^*)t\mathbf{1}+\bar{P}]}, \mathbf{0}\right\}, \quad (19)$$

où, $\bar{P}' = [\bar{p}(1), \bar{p}(2), \ldots, \bar{p}(m), \ldots, \bar{p}(1), \bar{p}(2), \ldots, \bar{p}(n)]$.

Les valeurs discrétisées de l'actif et de la volatilité sont données respectivement par : $p_t = -(r - \frac{1}{2}h^*)t + ln(S_t)$ et $q_{t+1} = ln(h_{t+1})$.

Mise en œuvre de l'approche de la chaîne de Markov

Le prix de l'option américaine est donné par :

$$\bar{V}(\bar{P},t) = \max[g(\bar{P},K,t), e^{-r}\Pi\bar{V}(\bar{P},t+1)], \qquad (20)$$

où,

- $\bar{V}(\bar{P},t)$ est le prix de l'option américaine.
- K est le prix d'exercice.
- $g(\bar{P},K,t)$ est le prix de l'option européenne.
- $\bar{V}(\bar{P},T) = g(\bar{P},K,T)$.

Résultats numériques

Tarification avec le modèle Black-Scholes

- Dans cette sous-section, le modèle Black-Scholes sert de référence pour évaluer la performance de la méthode de tarification des options utilisant les chaînes de Markov. Les résultats obtenus avec la méthode de chaîne de Markov sont comparés aux valeurs calculées à l'aide d'un réseau binomial et d'une simulation de Monte Carlo, tous deux basés sur le modèle Black-Scholes.

- Cette comparaison corrobore l'efficacité de la méthode de la chaîne de Markov dans la tarification des options.

- On note aussi que la méthode de la chaîne de Markov converge plus rapidement que la méthode du réseau binomial et à la méthode de simulation de Monte Carlo.

The GARCH option pricing model

Les résultats de tarification obtenus avec la méthode de chaîne de Markov proposée dans l'article est efficace pour la tarification des options américaines dans les cadres Black-Scholes et GARCH. Elle permet d'obtenir des valeurs de prix précises qui convergent vers les valeurs théoriques attendues. Les analyses numériques montrent également que la méthode est compétitive par rapport à d'autres méthodes numériques existantes, telles que la simulation de Monte Carlo et le réseau binomial.

Conclusion

Conclusion

- En somme, la méthode proposée pour évaluer les options américaines est la méthode d'approximation par chaîne de Markov basée sur un processus de type GARCH.
- Cette méthode implique d'approximer le processus de prix de l'actif sous-jacent par une chaîne de Markov homogène dans le temps à espace d'états finis et d'utiliser une distribution conditionnelle sur une période.
- Les probabilités de transition de la chaîne de Markov sont calculées sur la base du processus NGARCH(1,1), et les prix des options sont calculés en utilisant l'approximation par chaîne de Markov et la fonction de paiement des options.

Conclusion

Il a été démontré que la méthode converge vers le processus GARCH cible et produit des valeurs précises pour les options américaines.

Cette méthode offre une alternative aux méthodes numériques existantes pour évaluer les options américaines dans d'autres contextes de tarification.

De plus, le modèle de tarification des options GARCH peut être mis en œuvre en utilisant la méthode d'approximation par chaîne de Markov, permettant ainsi l'évaluation des options américaines en approximant le processus de prix de l'actif sous-jacent avec une chaîne de Markov à espace d'états finis.