AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA im. Stanisława Staszica w Krakowie

Programowanie dynamiczne – formalizacja problemów jako zadań PD

Stanisław Olech - 412023

Automatyka i Robotyka

EAIiIB

Zadanie

1. **Sformułuj problem (zadanie), który można rozwiązać metodą programowania dynamicznego.**

   Wymyślony przez mnie problem to zagadnienie kupna tokarek na linii produkcyjnej. Założenia:
   - Maszyny wymagają serwisowania i konserwacji co okres.
   - Zakładam że maszyny dzielą się na dwa typy nowe w skończoną długością życia oraz stare które mogą po przeglądach i konserwacjach pracować w nieskończoność.
   - Koszt serwisowania jest zależny od typu maszyny.
   - Tokarki mają dwa rozmiary duże i małe. Duże maszyny mogą realizować większe zlecenia jak i mniejsze..
   - Każdy rodzaj tokarki ma inną wydajność i może przetworzyć różną liczbę produktów (zależną też od rodzaju produktu).
   - Popyt jest nieliniowy by można było za pomocą algorytmu przewidywać zmiany w koniunkturze.
   - W każdym etapie możemy kupić nowe maszyny za stałą cenę lub starą maszynę której koszt rośnie ekspotencjalnie.
   - Koszt materiału rośnie logarytmicznie a zysk z sprzedaży rośnie liniowo. Nasz zakład stosuje JIT oraz zamawia tyle materiału ile aktualnie potrzebuję.
   - Nasza hala może pomieścić tylko skończoną liczbę maszyn.

2. **Zdefiniuj problem (opis i wzory) jako zadanie programowania dynamicznego określając:**

   a. **etap,**
   Kolejne etapy to kolejne okresy czasu. Dalej w sprawozdaniu będzie uzasadnione dlaczego rozsądnie jest przyjąć wartość zbliżoną do czasu życia nowej maszyny.

   b. **decyzje,**
   W każdym etapie rozpatrujemy czy chcemy zaopatrzyć się w następne maszyny i jakiego typu mają być te maszyny oraz ile produktów dużych i małych wyprodukujemy na których maszynach.

   c. **stan, rozpatrywany zakres**

Naszym stanem jest wektor liczby starych maszyn oraz macierz przewidywanej liczby nowych maszyn w następnych miesiącach zakładając, że czas życia maszyny to . t musimy się szykować że macierz będzie miała maksymalnie rozmiar $2 \times (t + 1)$ – Jest to największy problem mojego algorytmu. Zakładając że żywotność maszyny t jest krótsza niż liczba etapów skutkuje to $(N + 1)^{2(t+1)+2}$ (N to maksymalna liczba maszyn) stanów które trzeba rozważyć (większość z nich i tak jest nieosiągalna. Suma liczby wszystkich maszyn nie może przekroczyć N. Przez to jest polecane by żywotność maszyny była zbliżona do czasu między etapami – taki zabieg pozwala zmniejszyć liczbę rozważanych stanów w miejscu krytycznym do $(N + 1)^{4+2}$. Dodatkowo zakładamy, że macierz zmniejsza rozmiar gdy zbliżamy się do końca – będzie to zobrazowane na rysunku numer 1.

d. **funkcję celu,**

Naszą funkcją celu jest zysk z sprzedaży w każdym etapie obniżony o koszty materiału. Będzie to wartość

$$f(x, y) = ax + by - c \log(x + y + 1)$$

Równanie 1.

Gdzie:

x – liczba wyprodukowanych małych produktów

y -liczba wyprodukowanych dużych produktów

a – cena sprzedaży małych produktów

b – cena sprzedaży dużych produktów

c -cena materiałów

a, b, c są dodatnimi liczbami rzeczywistymi.

Jest to moim zdaniem dobre przedstawienie zysków ponieważ np. dla parametrów $b = 1$ i $a = 10$ nie opłaca się produkować mniej niż 11 sztuk – zbyt drogie materiały. Maksymalna produkcja dużych jest określona przez

$$y_{max} = \bar{n}_{big} \cdot \bar{\eta}_{big}$$

Równanie 2.

Gdzie:

$\bar{n}_{big}$ - wektor ilości dużych tokarek danego typu

$\bar{\eta}_{big}$ - wektor sprawności dużych tokarek dla dużych produktów.

Maksymalna produkcja małych jest określona przez

$$x_{max} = \left(\bar{n} - \bar{n}_{\ zaj}\right) \cdot \bar{\eta}$$

Równanie 3.

Gdzie:

$\bar{n}$ - wektor ilości tokarek danego typu

$\bar{\eta}$ - wektor sprawności tokarek dla małych produktów

$\bar{n}_{\ zaj}$ - tokarki zajęte produkcją dużych produktów.

e. ograniczenia,

Naszymi ograniczeniami są maksymalna liczba maszyn, produkcją maksymalną zależną od liczby maszyn, popyt w każdym miesiącu.

f. funkcję przejścia,

Dla reszty etapów jeśli długość macierzy nowych maszyn jest mniejsza niż czas życia nowych maszyn + 1 trzeba sprawdzić istnienie (N+1)^2 razy więcej stanów (Zgodnie z rysunkiem numer 1).

Następnie trzeba rozważyć wszystkie kombinacje jaki może być następny stan (trzeba uwzględnić koszt wyprodukowania różniących się maszyn, serwis .Jeśli poprzedni stan ma zanikające maszyny o podanej długości życia trzeba uwzględnić ich produkcję.)

$$\bar{n}_{i+1} \coloneqq \bar{n}_i + \bar{n}_{bought} - \bar{n}_{broken} \cdot$$

Gdzie:

$\bar{n}_{bought}$ – wektor liczby zakupionych w danym etapie maszyn

$\bar{n}_i$ – wektor liczby maszyn danym etapie maszyn

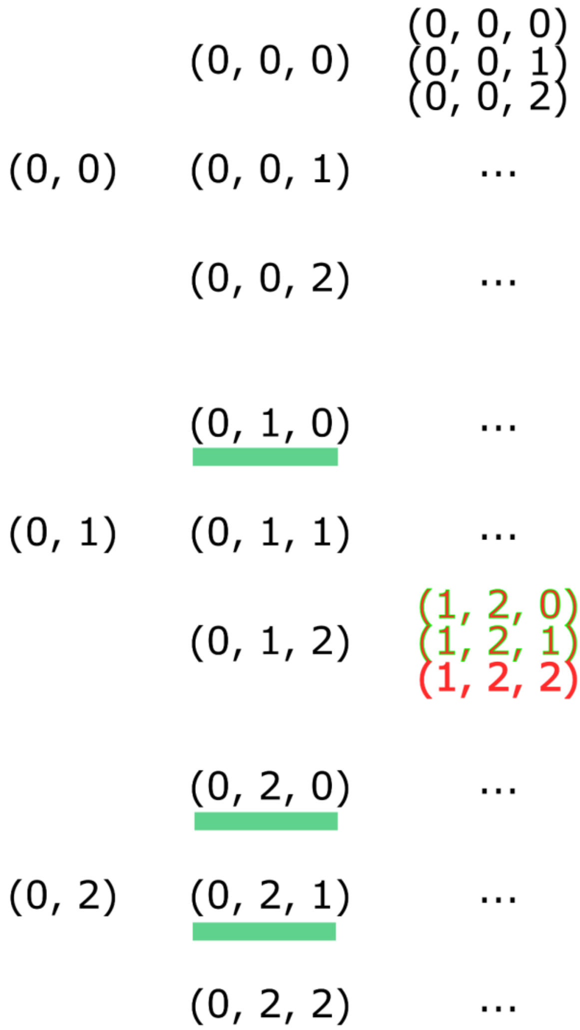
$\bar{n}_{broken}$ – wektor liczby nowych maszyn które się zepsuły w danym etapie.

W macierzy stanu należy przepisać wartość przewidywanego życia nowych maszyn o 1.

g. funkcję oceny etapu ostatniego (ze zbiorem decyzji dopuszczalnych),

W tym etapie macierz nowych maszyn sprowadza się do wektora dwóch wartości – liczby tokarek nowych małych i dużych. Zakładamy, że wszystkie nasze maszyny zepsują się w końcu naszego programu. Więc liczba rozważanych stanów sprowadza się do $(n_{max} + 1)^4$, gdzie

n_{max} to maksymalna liczba maszyn w fabryce. Większość z nich i tak jest nieosiągalna ponieważ suma liczby wszystkich maszyn nie może przekroczyć maksymalnej liczby miejsc w fabryce. Dodatkowo w macierzy liczby nowych maszyn mamy jeszcze jeden problem.



Rys. 1. Wizualizacja wektora z macierzy liczby nowych maszyn. Czas życia maszyny to dwa okresy a maksymalna liczba maszyn to 2. Skrajny prawa liczba w każdym wektorze to liczba maszyn aktualnych a kolejne w lewo to liczba w następnych miesiącach. Skrajny lewy to ostatni stan.

Trzeba zauważyć, że problematyczne są zielone oraz zielono czerwone stany – implikują że produkujemy maszynę która przeżywa tylko jeden okres. Oznacza to że stany gdy liczba w wektorze rośnie i maleje trzeba oznaczyć jako zabronione. W praktyce będzie to trudniejsza funkcja bo będzie musiała prześledzić czas życia każdej z maszyn.

Czerwony stan oznacza wymuszenie doliczenia kosztu produkcji ponieważ między ostatnim a przedostatnim etapem znika nam maszyna.

Wybieramy takie x i y by mogło zostać wyprodukowane przez nasze maszyny: $x \leq x_{max}$,, : $y \leq y_{max}$ oraz obie wartości były mniejsze lub równe popytowi. Zrealizował bym to przez sprawdzeniu wszystkich możliwych opcji szukające maksymalizacji funkcji z równania numer Sama funkcja oceny w tym etapie będzie maksymalizacją funkcji z równania 1 pod spełnionymi warunkami z równania 2 i 3.

h. funkcję oceny etapu przedostatniego.

Funkcja oceny w tym etapie będzie się sprowadzała do

$$z(\bar{n}, t_i) = \bar{n} \cdot \bar{u} + \bar{n}_{bought} \cdot \bar{p}(t_i) + z(\bar{n}^l) + f(x, y)$$

Gdzie:
$\bar{u}$ – wektor kosztów utrzymania każdego rodzaju maszyny
$\bar{n}_{bought}$ – wektor liczby zakupionych w danym etapie maszyn
$z(\bar{n}^l)$ – wartość funkcji oceny dla poprzedzającego etapu
$f(x, y)$ – wartość zysku w danym etapie
t_i – numer etapu (potrzebny do kalkulowania ceny używanej maszyny

Wartość zysku w danym etapie zależy tylko od liczby maszyn dlatego nie zależy od stanu następnego. Dzięki temu możemy sobie doliczyć jej wartość już po wybraniu stanu następnego.