Rachunek Macierzowy i Statystyka Wielowymiarowa
Sprawozdanie 1
Mnożenie macierzy

Adam Staniszewski
Przemysław Węglik

18 marca 2024

Spis treści

1 Algorytm Tradycyjny

1.1 Opis algorytmu

Polega na przeiterowanie przez wszystkie elementy macierzy wynikowej i obliczenia dla nich iloczynów skalarnych odopwiadających kolumn i wierszy. Matematycznie możemy to zapisać jako:

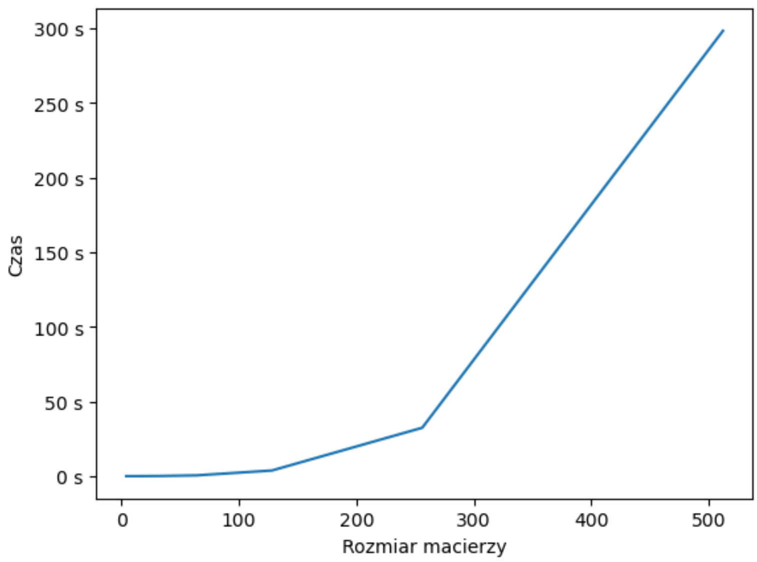
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

gdzie a_{ik} i b_{kj} to elementy macierzy, których mnożenia dokonujemy, a c_{ij} to elementy macierzy wynikowej

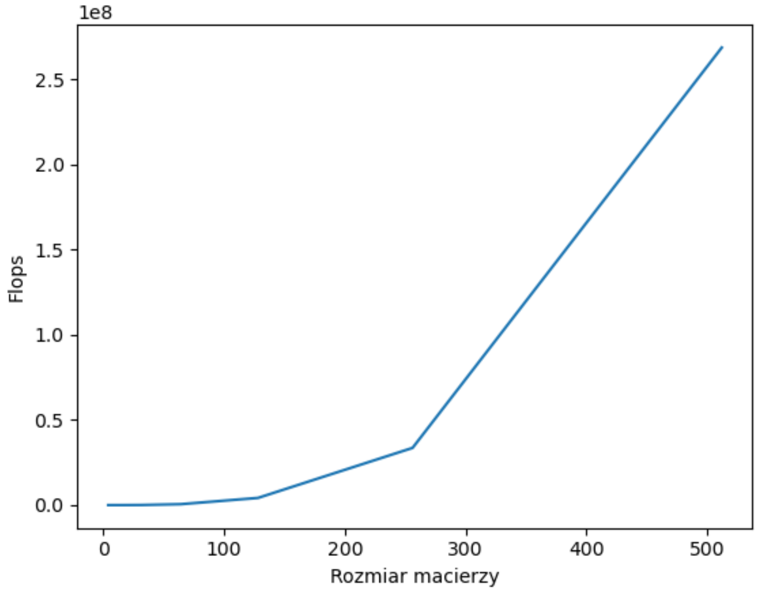
1.2 Kod algorytmu

```python
def traditional_method(A: np.ndarray, B: np.ndarray, counter: Counter):
    add = counter.add
    mul = counter.mul

    rows_A, cols_A = A.shape
    rows_B, cols_B = B.shape

    result = np.zeros((rows_A, cols_B))

    for i in range(rows_A):
        for j in range(cols_B):
            for k in range(cols_A):
                result[i][j] = add(result[i][j], mul(A[i][k], B[k][j]))

    return result
```

1.3 Benchmarki



Rysunek 1: Wykres czasu od rozmiaru macierzy



Rysunek 2: Wykres ilości operacji od rozmiaru macierzy

1.4 Analiza złożoności

W każdym mnożeniu macierzy o rozmiarze n dokonujemy trzykrotnie zagnieżdżonej iteracji o długości równej rozmiarze macierzy. To prowadzi nas do złożoności $O(n^3)$

2 Algorytm Binét'a

2.1 Opis algorytmu

Polega na rekurencyjnym rozbijaniu macierzy na 4 mniejsze i obliczaniu wyników dla tych podproblemów. Tam ponownie będziemy musieli użyć mnożenia i wykorzystamy procedurę. To klasyczne podejście nosi nazwę "divide and conquer". Stosujemy wzór:

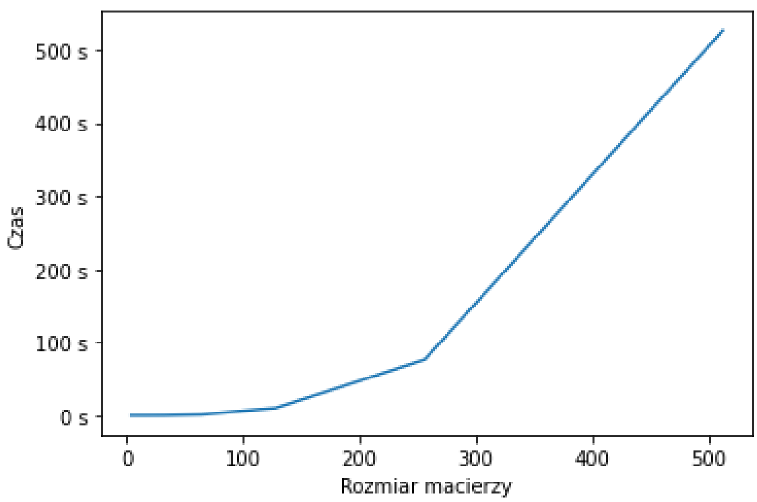
$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}) & (A_{11}B_{21} + A_{12}B_{22}) \\ (A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}) & (A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}) \end{bmatrix}$$

2.2 Kod algorytmu

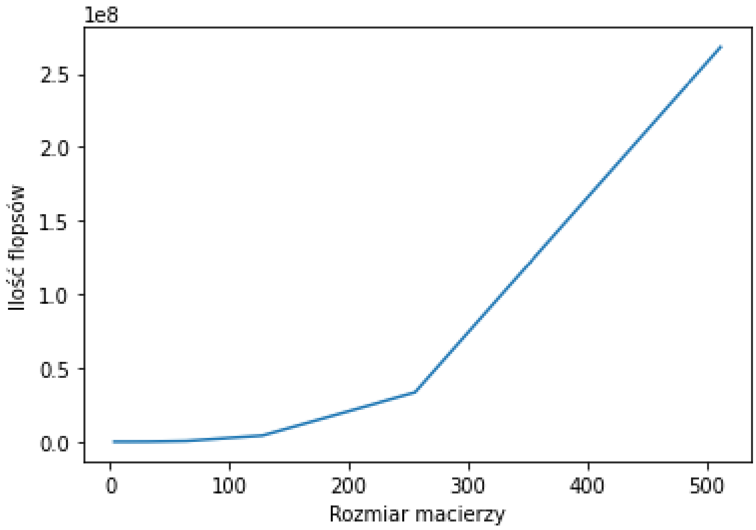
```
    def binet_core_algorithm(A: np.ndarray, B: np.ndarray, counter: Coun
    add = counter.add
    mul = counter.mul

    if A.size > 1:
        split_at = A.shape[0] // 2
        A11, A12, A21, A22 = split(A, split_at, split_at)
        B11, B12, B21, B22 = split(B, split_at, split_at)

        C11 = add(
            binet_core_algorithm(A11, B11, counter),
            binet_core_algorithm(A12, B21, counter),
        )
        C12 = add(
            binet_core_algorithm(A11, B12, counter),
            binet_core_algorithm(A12, B22, counter),
        )
        C21 = add(
            binet_core_algorithm(A21, B11, counter),
            binet_core_algorithm(A22, B21, counter),
        )

        C22 = add(
            binet_core_algorithm(A21, B12, counter),
            binet_core_algorithm(A22, B22, counter),
        )

        return np.concatenate(
            [np.concatenate([C11, C12], axis=1), np.concatenate([C21, C22
            axis=0,
        )

    else:
        return mul(A, B)

def binet_algorithm(A: np.ndarray, B: np.ndarray, counter: Counter) -> np
    new_A, new_B = resize_matrix_to_2n(A, B)
    C = binet_core_algorithm(new_A, new_B, counter)
```

```
C = C[~np.all(C == 0, axis=1)]
C = C[:, ~np.all(C == 0, axis=0)]
return C
```

2.3 Benchmarki



Rysunek 3: Wykres czasu od rozmiaru macierzy



Rysunek 4: Wykres ilości operacji od rozmiaru macierzy

2.4 Analiza złożoności

W każdym mnożeniu macierzy o rozmiarze n wykonujemy 8 podwywołań algorytmu na macierzach o rozmiarzach $n/2$. Taka rekurencja prowadzi do złożoności $O(n^{log_2(8)}) = O(n^3)$ (twierdzenie o rekurencji uniwersalnej).