teraz matura

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

TUŻ PRZED EGZAMINEM

nowa era

Piotr Krzemiński

teraz matura

MATEMATYKA
Poziom podstawowy

TUŻ PRZED EGZAMINEM

nowa era

teraz matura

MATEMATYKA
Poziom podstawowy

TUŻ PRZED EGZAMINEM

nowa era

ISBN 978-83-267-2283-7

Opracowanie merytoryczne i redakcja merytoryczna: Anna Dubiel
Konsultacja merytoryczna: Jacek Klisowski, Ewa Muszyńska
Redakcja językowa: Zofia Psota
Korekta językowa: Dorota Śrutowska
Korekta techniczna: Zofia Chyża
Nadzór artystyczny: Kaia Juszczak
Projekt okładki: Małgorzata Gregorczyk, Maciej Galiński
Projekt graficzny: Małgorzata Gregorczyk, Paulina Tomaszewska
Skład: FIXPOINT Krzysztof Rudnik
Rysunki: Elżbieta Król
Fotografia na okładce: Gallo Images Poland/Getty Images/Photographer's Choice/Harald Sund

Nowa Era Sp. z o.o.
Al. Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
Tel.: 22 570 25 80; faks: 22 570 25 81
Infolinia: 801 88 10 10 (z telefonów stacjonarnych)
58 721 48 00 (z telefonów komórkowych)
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Druk i oprawa: Drukarnia MW, Świecie

Spis treści

Dowiedz się więcej, korzystając z kodów QR zamieszczonych w publikacji

Wstęp

Z *Tuż przed egzaminem* szybko powtórzysz i usystematyzujesz wiedzę niezbędną do zdania egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym. Przedstawiono ją z podziałem na działy, łącząc z przykładami pozwalającymi przećwiczyć kluczowe umiejętności matematyczne sprawdzane na tym egzaminie.

W publikacji znajdziesz 10 działów, zgodnych z nową podstawą programową, podzielonych na krótkie tematy.

Każdy temat składa się z następujących części:

1. Przypomnij sobie
najważniejsze treści teoretyczne, opatrzone uwagami i przypomnieniami na żółtych karteczkach – szybko powtórzysz wiedzę

2. Przeanalizuj przykład
problemy matematyczne rozwiązane krok po kroku – przypomnisz sobie główne etapy rozwiązania typowych zadań z danego tematu

3. Rozwiąż samodzielnie
zadania otwarte z odpowiedziami – utrwalisz przypomniane wiadomości i sposoby rozwiązywania zadań

4. Test
kilka zadań zamkniętych typu maturalnego – rozwiążesz zadania wzorowane na egzaminacyjnych dotyczące właśnie powtórzonych zagadnień

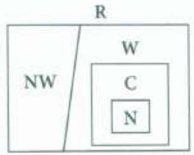
5. To było na maturze
wybrane z matur zadania zamknięte dotyczące danego tematu – sprawdzisz, jak radzisz sobie z zadaniami, które pojawiały się na maturze

Po każdym temacie zamieszczono odpowiedzi do zadań z „Rozwiąż samodzielnie", „Testu" i „To było na maturze" oraz rozwiązania zadań z „Testu".

W *Tuż przed egzaminem* znajdziesz kody QR, które przekierują cię do rozwiązań zadań z „Rozwiąż samodzielnie" oraz do dodatkowych zadań.

1. Liczby rzeczywiste i wartość bezwzględna

1. Przypomnij sobie



Liczby naturalne N to liczby: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

Liczby całkowite C to liczby naturalne i liczby do nich przeciwne: ..., −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, ...

Liczby wymierne W to liczby postaci $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in C$ i $q \neq 0$, np.: $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$ (czyli $1\frac{1}{3}$), $\frac{16}{2}$ (czyli 8), $-\frac{55}{8}$ (czyli $-6\frac{7}{8}$), $\frac{32}{-16}$ (czyli −2).

Liczby niewymierne NW to liczby, których nie można przedstawić w postaci ilorazu $\frac{p}{q}$ dla $p, q \in C$ i $q \neq 0$, np.: $\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \pi, \log_7 10$.

Liczby rzeczywiste R to liczby wymierne i liczby niewymierne.

Liczbą przeciwną do liczby $a \in R$ jest liczba $-a$, np.: liczbą przeciwną do liczby 5 jest liczba −5, liczbą przeciwną do liczby −0,6 jest liczba 0,6.

Liczbą odwrotną do liczby $a \in R \setminus \{0\}$ jest liczba $\frac{1}{a}$, np.: liczbą odwrotną do liczby 8 jest liczba $\frac{1}{8}$, liczbą odwrotną do liczby $-\frac{3}{4}$ jest liczba $-\frac{4}{3}$.

Wartość bezwzględna (moduł)

Wartość bezwzględna dowolnej liczby rzeczywistej a to liczba zdefiniowana następująco:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geqslant 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases},$$

np.: $|4| = 4, |-10| = 10, \left|-7\frac{1}{3}\right| = 7\frac{1}{3}$.

Uwaga

Wartość bezwzględna zawsze jest liczbą nieujemną.

$|a| \geqslant 0$

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Oblicz kwadrat danej liczby.

a) $2 - \sqrt{3}$

b) $\sqrt{7} + 2\sqrt{5}$

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzorów skróconego mnożenia.

a) $\left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$

b) $\left(\sqrt{7} + 2\sqrt{5}\right)^2 = 7 + 4\sqrt{7\cdot 5} + 20 = 27 + 4\sqrt{35}$

wzory skróconego mnożenia, s. 33

Przykład 2.

Usuń niewymierność z mianownika ułamka.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{5}{4+\sqrt{3}}$

Rozwiązanie

a) Mnożymy podaną liczbę przez ułamek o liczbach w liczniku i mianowniku takich, jak mianownik ułamka, z którego niewymierność chcemy usunąć.

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Uwaga

Mnożąc liczbę przez ułamek o takim samym liczniku i mianowniku, nie zmieniamy jej wartości.

b) Korzystamy ze wzoru $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ i mnożymy wskazaną liczbę przez ułamek o takim samym liczniku i mianowniku.

Dobieramy odpowiednią liczbę do mianownika ułamka. Dla $4+\sqrt{3}$ taką liczbą jest $4-\sqrt{3}$, więc podany ułamek mnożymy przez $\frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$.

$$\frac{5}{4+\sqrt{3}} \cdot \frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} = \frac{5(4-\sqrt{3})}{16-3} = \frac{20-5\sqrt{3}}{13}$$

Przykład 3.

Oblicz $a+b$, jeśli $a = \frac{4-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ i $b = \left(2-\sqrt{2}\right)^2$.

Rozwiązanie

Obliczamy a i b.

$$a = \frac{4-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{4-4\sqrt{2}-\sqrt{2}+2}{1-2} = \frac{6-5\sqrt{2}}{-1} = -6+5\sqrt{2}$$

$$b = \left(2-\sqrt{2}\right)^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 6 - 4\sqrt{2}$$

Stąd $a + b = -6 + 5\sqrt{2} + 6 - 4\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Przykład 4.

Dana jest liczba $a = 8 - 2\sqrt{17}$. Wyznacz:

a) liczbę odwrotną do a,

b) liczbę przeciwną do a,

c) wartość bezwzględną liczby a.

Rozwiązanie

a) $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{8-2\sqrt{17}} = \dfrac{1}{8-2\sqrt{17}} \cdot \dfrac{8+2\sqrt{17}}{8+2\sqrt{17}} = \dfrac{8+2\sqrt{17}}{-4} = -\dfrac{4+\sqrt{17}}{2}$

b) $-a = -\left(8-2\sqrt{17}\right) = -8 + 2\sqrt{17}$

c) $8 - 2\sqrt{17} < 0$, więc $|a| = \left|8-2\sqrt{17}\right| = -8 + 2\sqrt{17}$.

Przykład 5.

Porównaj liczby: $a = |8-14| + |-7+2|$, $b = |-4| + 2|3+11|$, $c = -5|6-4| + |1-9|$ i $d = |13-7|\cdot|2-6|$.

Rozwiązanie

Stosujemy definicję wartości bezwzględnej i otrzymujemy:

$$a = |8-14| + |-7+2| = |-6| + |-5| = 6 + 5 = 11,$$

$$b = |-4| + 2|3+11| = 4 + 2\cdot|14| = 4 + 2\cdot 14 = 32,$$

$$c = -5|6-4| + |1-9| = -5\cdot|2| + |-8| = -5\cdot 2 + 8 = -2,$$

$$d = |13-7|\cdot|2-6| = |6|\cdot|-4| = 6\cdot 4 = 24.$$

Porównujemy otrzymane liczby: $c < a < d < b$.

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie terazmatura.pl **Kod:** M02773

1. Oblicz.

a) $\left(2+\sqrt{11}\right)^2$ b) $\left(5+6\sqrt{5}\right)^2$ c) $-\left(\sqrt{2}-3\right)^2$ d) $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{7}\right)^2$

2. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{10}{4-\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{-7}{\sqrt{3}-3}$ d) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+12}$

3. Oblicz.

a) $-|12-16| + 7|1-10|$ b) $\dfrac{|-7-5|}{-2|10|} : \left|\dfrac{4}{9-12}\right|$

4. Oblicz kwadrat odwrotności liczby $a = \dfrac{2}{-\sqrt{3}+5}$.

TEST 1

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Liczba $1+\frac{3}{2\sqrt{3}}$ jest równa

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

2. Którą z poniższych liczb należy odjąć od liczby $\left(2-\sqrt{6}\right)^2$ aby otrzymać liczbę całkowitą?

A. $4\sqrt{6}$ B. $\sqrt{6}$ C. $-\sqrt{6}$ D. $-4\sqrt{6}$

3. Liczba $\frac{6+\sqrt{10}}{1-\sqrt{10}}$ jest równa

A. $-\frac{16+5\sqrt{10}}{9}$ C. $-\frac{6+\sqrt{10}}{9}$
B. $-\frac{16+7\sqrt{10}}{9}$ D. $\frac{4+5\sqrt{10}}{9}$

4. Jeśli $x=\sqrt{3}-1$ i $y=\sqrt{2}$, to wartość wyrażenia $(x^2+y^2)^2$ jest równa

A. $48-24\sqrt{3}$ B. $6-2\sqrt{3}$ C. 4 D. 16

5. Liczba $6-\left(\sqrt{7}-2\right)^2$ jest równa

A. 3 B. 9 C. $-5+4\sqrt{7}$ D. $5+4\sqrt{7}$

6. Liczba $\left(1-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ jest równa

A. $2\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ C. $-4\sqrt{2}$
B. $2-4\sqrt{2}$ D. 0

7. Liczba $|6-12|+2|16-8|$ jest równa

A. -22 B. -10 C. 10 D. 22

8. Liczba $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right|-\left|2-\frac{5}{2}\right|$ jest równa

A. $-\frac{3}{4}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

TO BYŁO NA MATURZE 1

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – sierpień 2010
Kwadrat liczby $x=2-\sqrt{3}$ jest równy

A. $7-4\sqrt{3}$ B. $7+4\sqrt{3}$ C. 1 D. 7

Zadanie 2. (1 pkt) – listopad 2010
Liczba $|5-7|+|-3+4|$ jest równa

A. -3 B. -5 C. 1 D. 3

Zadanie 3. (1 pkt) – listopad 2010
Kwadrat liczby $x=5+2\sqrt{3}$ jest równy

A. 37 B. $25+4\sqrt{3}$ C. $37+20\sqrt{3}$ D. 147

Zadanie 4. (1 pkt) – sierpień 2011
Liczba $|5-2|+|1-6|$ jest równa

A. 8 B. 2 C. 3 D. -2

Zadanie 5. (1 pkt) – maj 2012
Liczba $\left(3-\sqrt{2}\right)^2+4\left(2-\sqrt{2}\right)$ jest równa

A. $19-10\sqrt{2}$ B. $17-4\sqrt{2}$ C. $15+14\sqrt{2}$ D. $19+6\sqrt{2}$

Zadanie 6. (1 pkt) – czerwiec 2012
Ułamek $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$ jest równy

A. 1 B. -1 C. $7+4\sqrt{5}$ D. $9+4\sqrt{5}$

Zadanie 7. (1 pkt) – sierpień 2012
Liczba $\left(2-3\sqrt{2}\right)^2$ jest równa

A. -14 C. $-14-12\sqrt{2}$
B. 22 D. $22-12\sqrt{2}$

Zadanie 8. (1 pkt) – maj 2014
Wartość wyrażenia $\frac{2}{\sqrt{3}-1}-\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ jest równa

A. -2 B. $-2\sqrt{3}$ C. 2 D. $2\sqrt{3}$

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 1

1. a) $15 + 4\sqrt{11}$ b) $205 + 60\sqrt{5}$ c) $6\sqrt{2} - 11$ d) $\frac{29}{4} - \sqrt{7}$

2. a) $2\sqrt{2}$ b) $\frac{10(4+\sqrt{5})}{11}$ c) $\frac{7(3+\sqrt{3})}{6}$ d) $\frac{2\sqrt{6}-1}{23}$

3. a) 59 b) $-\frac{9}{20}$ **4.** $\frac{14-5\sqrt{3}}{2}$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 1

1	2	3	4	5	6	7	8
C	D	B	A	C	A	D	B

1. $1 + \frac{3}{2\sqrt{3}} = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+2}{2}$

2. $\left(2 - \sqrt{6}\right)^2 = 4 - 4\sqrt{6} + 6 = 10 - 4\sqrt{6}$. Żeby ta liczba była całkowita, należy od niej odjąć $-4\sqrt{6}$.

3. $\frac{6+\sqrt{10}}{1-\sqrt{10}} = \frac{\left(6+\sqrt{10}\right)\left(1+\sqrt{10}\right)}{\left(1-\sqrt{10}\right)\left(1+\sqrt{10}\right)} = \frac{16+7\sqrt{10}}{-9}$

4. $(x^2 + y^2)^2 = \left(\left(\sqrt{3} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2\right)^2 = \left(3 - 2\sqrt{3} + 1 + 2\right)^2 =$
$= \left(6 - 2\sqrt{3}\right)^2 = 36 - 24\sqrt{3} + 12 = 48 - 24\sqrt{3}$

5. $6 - \left(\sqrt{7} - 2\right)^2 = 6 - \left(7 - 4\sqrt{7} + 4\right) = 6 - 11 + 4\sqrt{7} = -5 + 4\sqrt{7}$

6. Dla dowolnych a i b mamy: $(a - b)^2 = (b - a)^2$, więc:
$\left(1 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = \left(1 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{2}\right)^2 = 2\left(1 - \sqrt{2}\right)^2$.
Poprawna jest odpowiedź A.

7. $|6 - 12| + 2|16 - 8| = |-6| + 2|8| = 6 + 16 = 22$

8. $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right| - \left|2 - \frac{5}{2}\right| = \left|\frac{1}{4}\right| - \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 1

1	2	3	4	5	6	7	8
A	D	B	A	A	D	D	C

2. Potęgi i pierwiastki

1. Przypomnij sobie

Liczba a przemnożona n-razy przez samą siebie to inaczej a podniesione do potęgi n-tej, czyli **n-ta potęga liczby a**:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}},$$

gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą, n – dowolną liczbą naturalną większą od 1.
Ponadto: $a^1 = a$ i $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$.

Przypomnienie

Dla dowolnej liczby naturalnej n i liczby rzeczywistej $a \neq 0$:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Jeśli wykładnik potęgi jest liczbą wymierną postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p i q to dowolne liczby naturalne, $q > 1$ i $a > 0$, to:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p},$$

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}.$$

Przypomnienie

Dla dowolnej liczby $a > 0$ i liczby naturalnej $n > 1$:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Dla dowolnej liczby a:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Liczbę $\sqrt[q]{a^p}$ nazywamy **pierwiastkiem arytmetycznym q-tego stopnia z liczby a^p**.

Prawa działań na potęgach

Dla dowolnych liczb $a, b > 0$ i $m, n \in \mathbb{R}$:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n,$$

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Uwaga

Jeśli liczby m i n są całkowite, to zapisane wzory są prawdziwe również dla $a, b < 0$.

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Stosując prawa działań na potęgach, zapisz liczbę $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 3^{-9} \cdot \sqrt{27}$ jako potęgę liczby 3.

Rozwiązanie

Krok 1. Zapisujemy kolejne czynniki danej liczby jako potęgi liczby 3.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = 3^{-4}$$

$$\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = (3^3)^{\frac{1}{2}} = 3^{3 \cdot \frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$$

Krok 2. Stosujemy prawo $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 3^{-9} \cdot \sqrt{27} = 3^{-4} \cdot 3^{-9} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{-4+(-9)+\frac{3}{2}} = 3^{-11\frac{1}{2}}$$

Przykład 2.

Zapisz liczbę $\frac{4^{\frac{5}{2}} \cdot 8^{-\frac{4}{3}}}{32\sqrt[4]{16}}$ jako potęgę liczby 2.

Rozwiązanie

Krok 1. Zapisujemy poszczególne liczby jako potęgi 2.

$$4^{\frac{5}{2}} = (2^2)^{\frac{5}{2}} = 2^{2 \cdot \frac{5}{2}} = 2^5$$

$$8^{-\frac{4}{3}} = (2^3)^{-\frac{4}{3}} = 2^{3 \cdot \left(\frac{-4}{3}\right)} = 2^{-4}$$

$$32 = 2^5$$

$$\sqrt[4]{16} = 2^{\frac{4}{4}} = 2$$

Krok 2. Upraszczamy liczbę – stosujemy prawo $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

$$\frac{4^{\frac{5}{2}} \cdot 8^{-\frac{4}{3}}}{32\sqrt[4]{16}} = \frac{2^5 \cdot 2^{-4}}{2^5 \cdot 2} = \frac{2^{-4}}{2} = 2^{-4-1} = 2^{-5}$$

Przykład 3.

Zapisz wyrażenie $\frac{\sqrt{125} : 5^{6\frac{1}{2}}}{\left(\frac{125^{10}}{-25^{20}} + 5^{30}\right)^0}$ w najprostszej postaci.

Rozwiązanie

Krok 1. Zauważamy, że mianownik ułamka jest równy 1, więc całe wyrażenie jest równe wartości licznika.

Krok 2. Zapisujemy licznik w postaci potęgi 5.

$$\sqrt{125} : 5^{6\frac{1}{2}} = (5^3)^{\frac{1}{2}} : 5^{6\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{2}} : 5^{6\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{2}-6\frac{1}{2}} = 5^{-5}$$

Przykład 4.

Zapisz ułamek $\frac{2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}}{6}$ jako potęgę jednej liczby.

Rozwiązanie

Krok 1. Zauważamy, że licznik składa się z trzech takich samych liczb, więc można go zapisać w postaci: $3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$.

Krok 2. Zapisujemy, że $6 = 2 \cdot 3$, i otrzymujemy:

$$\frac{3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot 3} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} = 2^{\frac{1}{2}-1} = 2^{-\frac{1}{2}}.$$

Przykład 5.

Stosując prawa działań na potęgach, udowodnij, że liczba $3^6 + 9^{\frac{5}{2}} + 27$ jest podzielna przez 37.

Rozwiązanie

Krok 1. Zapisujemy każdy ze składników jako potęgę liczby 3.

$$3^6 + (3^2)^{\frac{5}{2}} + 3^3 = 3^6 + 3^5 + 3^3$$

Krok 2. Wyciągamy przed nawias największą potęgę, czyli 3^3, i dodajemy potęgi w nawiasie.

$$3^3(3^3 + 3^2 + 1) = 3^3 \cdot 37$$

Krok 3. Zapisujemy wniosek: dana liczba jest podzielna przez 37.

Przykład 6.

Oblicz.

a) $\sqrt{2}-\sqrt{8}$ b) $\sqrt{45}+\sqrt{125}$ c) $\sqrt[3]{243}-\sqrt[3]{72}$

Rozwiązanie

W każdym z przypadków należy najpierw wyłączyć czynnik przed pierwiastek, a następnie wykonać obliczenia.

a) **Krok 1.** Rozkładamy liczbę podpierwiastkową na czynniki pierwsze.

$$8 = 2\cdot 2\cdot 2$$

Krok 2. Wyłączamy czynnik przed znak pierwiastka.

$$\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 2\cdot 2}=\sqrt{2^2\cdot 2}=2\sqrt{2}$$

Krok 3. Wykonujemy obliczenia.

$$\sqrt{2}-\sqrt{8}=\sqrt{2}-2\sqrt{2}=-\sqrt{2}$$

Przypomnienie

Dla dowolnych liczb $a, b \geqslant 0$:

$$a\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}.$$

Dla dowolnych liczb a, b:

$$a\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3\cdot b}.$$

b) **Krok 1.** Rozkładamy liczby podpierwiastkowe na czynniki pierwsze.

$$45=9\cdot 5=3\cdot 3\cdot 5,\quad 125=25\cdot 5=5\cdot 5\cdot 5$$

Krok 2. Wyłączamy czynnik przed znak pierwiastka i wykonujemy obliczenia.

$$\sqrt{45}+\sqrt{125}=\sqrt{3^2\cdot 5}+\sqrt{5^2\cdot 5}=3\sqrt{5}+5\sqrt{5}=8\sqrt{5}$$

c) **Krok 1.** Rozkładamy liczby podpierwiastkowe na czynniki pierwsze. W przypadku większych liczb warto rozkładaną liczbę dzielić przez liczby pierwsze do momentu uzyskania 1.

243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$$243=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3$$
$$72=8\cdot 9=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$$

Krok 2. Wyłączamy czynnik przed pierwiastek i wykonujemy obliczenia.

$$\sqrt[3]{243}-\sqrt[3]{72}=\sqrt[3]{3^3\cdot 9}-\sqrt[3]{2^3\cdot 9}=$$
$$=3\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{9}$$

Uwaga

Czynnik, który wyciągamy przed pierwiastek, występuje w danej liczbie tyle razy, ile wynosi stopień pierwiastka.

Przykład 7.

Włącz czynnik pod pierwiastek.

a) $5\sqrt{2}$ b) $6\sqrt{3}$ c) $2\sqrt[3]{4}$

Rozwiązanie

W każdym z przypadków liczbę, przez którą przemnożony jest pierwiastek, podnosimy do potęgi równej stopniowi pierwiastka i zapisujemy ją pod symbolem pierwiastka.

a) $5\sqrt{2}=\sqrt{5^2\cdot 2}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{50}$

b) $6\sqrt{3}=\sqrt{6^2\cdot 3}=\sqrt{36\cdot 3}=\sqrt{108}$

c) $2\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^3\cdot 4}=\sqrt[3]{8\cdot 4}=\sqrt[3]{32}$

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie terazmatura.pl **Kod:** M03388

1. Zapisz wyrażenie jako potęgę jednej liczby.

a) $3^4\cdot 9^2\cdot\frac{1}{27}$ c) $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}\cdot\sqrt[4]{64}$

b) $\frac{\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[5]{36}}{6^{\frac{1}{15}}}$ d) $\frac{5^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{4}}}{4}$

2. Uprość wyrażenie.

a) $\sqrt{\frac{5^3\cdot 125}{25^{-1}}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{1}{2}\cdot 8^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{-2}$ d) $\sqrt[5]{5\sqrt[3]{25}}$

3. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt{80}$ b) $\sqrt{24}$ c) $\sqrt[3]{160}$

4. Włącz czynnik pod pierwiastek.

a) $2\sqrt{3}$ b) $7\sqrt{7}$ c) $3\sqrt[3]{5}$

TEST 2

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Wartość wyrażenia $\frac{\sqrt{3}\cdot 3}{9\cdot 3^{-3}}$ wynosi

A. 3^{-2} B. $3^{-\frac{2}{5}}$ C. $3^{\frac{1}{2}}$ D. $3^{\frac{5}{2}}$

2. Wskaż liczbę, którą należy dodać do liczby $\left(\frac{4^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{3}{10}}}\right)^5$, aby otrzymać 0.

A. $\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. -2^{10} D. 2^2

3. Liczba $\frac{2\cdot 4^2\cdot 8^3\cdot 16^4}{32}$ jest równa

A. 2^{14} B. 2^{24} C. 2^{25} D. 2^{35}

4. Liczba $\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{49}}+\frac{(\sqrt[3]{27})^0}{7}$ jest równa

A. $1\frac{4}{7}$ B. $1\frac{5}{7}$ C. 2 D. $8\frac{4}{7}$

5. Liczba $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{64}{27}\right)^{-1}}$ jest równa

A. $\left(\frac{3}{4}\right)^8$ B. $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ C. $\left(\frac{3}{4}\right)^4$ D. $\left(\frac{3}{4}\right)^3$

6. Liczba $\sqrt[3]{6^6}\cdot 36\cdot\frac{1}{216}$ jest równa

A. $\frac{1}{6}$ B. 6 C. 1 D. 36

7. Liczba $8\sqrt{2}$ jest równa

A. $\sqrt{16}$ B. $\sqrt{32}$ C. $\sqrt{128}$ D. $\sqrt{256}$

8. Liczbę $\sqrt{60}$ można zapisać w postaci

A. $4\sqrt{15}$ B. $2\sqrt{15}$ C. $15\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{12}$

2. POTĘGI I PIERWIASTKI

TO BYŁO NA MATURZE 2

W zadaniach 1.–7. wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – czerwiec 2011
Liczbę $\sqrt{20}$ można przedstawić w postaci

A. $5\sqrt{2}$ B. $5\sqrt{4}$ C. $4\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{5}$

Zadanie 2. (1 pkt) – maj 2012
Liczba $\sqrt[3]{(-8)^{-1}}\cdot 16^{\frac{3}{4}}$ jest równa

A. -8 B. -4 C. 2 D. 4

Zadanie 3. (1 pkt) – maj 2013
Liczba $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ jest równa

A. $2\sqrt{2}$ B. 2 C. 4 D. $\sqrt{10}-\sqrt{6}$

Zadanie 4. (1 pkt) – czerwiec 2013
Liczba $\left(\sqrt[3]{16}\cdot 4^{-2}\right)^3$ jest równa

A. 4^4 B. 4^{-4} C. 4^{-8} D. 4^{-12}

Zadanie 5. (1 pkt) – sierpień 2013
Liczba $\frac{5^3\cdot 25}{\sqrt{5}}$ jest równa

A. $5^5\sqrt{5}$ B. $5^4\sqrt{5}$ C. $5^3\sqrt{5}$ D. $5^6\sqrt{5}$

Zadanie 6. (1 pkt) – maj 2014
Liczba $\left(\frac{1}{\left(\sqrt[3]{729}+\sqrt[4]{256}+2\right)^0}\right)^{-2}$ jest równa

A. $\frac{1}{225}$ B. $\frac{1}{15}$ C. 1 D. 15

Zadanie 7. (1 pkt) – czerwiec 2014
Liczba $\frac{3^{27}+3^{26}}{3^{26}+3^{25}}$ jest równa

A. 1 B. 3 C. 6 D. 9

Zadanie 8. (2 pkt) – maj 2013
Wykaż, że liczba $6^{100}-2\cdot 6^{99}+10\cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17.

2. POTĘGI I PIERWIASTKI

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 2

1. a) 3^5 b) $6^{\frac{2}{3}}$ c) $4^{-2\frac{1}{4}}$ d) $5^{\frac{1}{4}}$ **2.** a) 5^4 b) 2^8 c) $3^{\frac{1}{2}}$ d) $5^{\frac{1}{3}}$
3. a) $4\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $2\sqrt[3]{20}$ **4.** a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{343}$ c) $\sqrt[3]{135}$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 2

1	2	3	4	5	6	7	8
D	B	C	B	C	B	C	B

1. Zapisujemy wyrażenie w postaci: $\frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^1}{3^2 \cdot 3^{-2}}$ i stosujemy prawa działań na potęgach: $\frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^1}{3^2 \cdot 3^{-2}} = \frac{3^{1\frac{1}{2}}}{3^{-1}} = 3^{1\frac{1}{2}+1} = 3^{\frac{5}{2}}$.

2. $\left(\frac{4^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{3}{10}}}\right)^5 = \left(\frac{(2^2)^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{3}{10}}}\right)^5 = \left(\frac{2^{\frac{2}{5}}}{2^{\frac{3}{10}}}\right)^5 = \left(2^{\frac{4}{10}-\frac{3}{10}}\right)^5 = \left(2^{\frac{1}{10}}\right)^5 = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.
Żeby otrzymać 0, należy dodać liczbę $-\sqrt{2}$.

3. $\frac{2 \cdot 4^2 \cdot 8^3 \cdot 16^4}{32} = \frac{2 \cdot 2^4 \cdot 2^9 \cdot 2^{16}}{2^5} = \frac{2^{1+4+9+16}}{2^5} = \frac{2^{30}}{2^5} = 2^{25}$

4. $\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{49}} + \frac{\left(\sqrt[3]{27}\right)^0}{7} = \frac{11}{7} + \frac{1}{7} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$

5. $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{64}{27}\right)^{-1}} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{4^3}{3^3}\right)^{-1}} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^8} =$
$= \left(\frac{3}{4}\right)^{8 \cdot \frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^4$

6. $\sqrt[3]{6^6} \cdot 36 \cdot \frac{1}{216} = 6^{\frac{6}{3}} \cdot 6^2 \cdot 6^{-3} = 6^{2+2-3} = 6$

7. $8\sqrt{2} = \sqrt{64 \cdot 2} = \sqrt{128}$

8. $60 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3$, stąd $\sqrt{60} = 2\sqrt{15}$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 2

1	2	3	4	5	6	7
D	B	B	B	B	C	B

3. Logarytmy

1. Przypomnij sobie

Logarytmem liczby *b* przy podstawie a nazywamy wykładnik c, do którego należy podnieść liczbę a, aby otrzymać liczbę b:

$$\log_a b = c, \text{ gdy } a^c = b,$$

gdzie:

- a jest podstawą logarytmu, $a \neq 1$ i $a > 0$,
- b jest liczbą logarytmowaną i $b > 0$,
- c jest szukanym wykładnikiem i $c \in \mathbf{R}$.

Własności logarytmów

Dla $a > 0, a \neq 1, b > 0, c \in \mathbf{R}$.

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$

Prawa działań na logarytmach

Dla $a \neq 1, a > 0, b > 0, c > 0, d \in \mathbf{R}$ prawdziwe są wzory:

- $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ (logarytm iloczynu),
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ (logarytm ilorazu),
- $\log_a b^d = d \cdot \log_a b$ (logarytm potęgi).

Uwaga

Z definicji logarytmu wynika: $a^{\log_a b} = b$.

Przypomnienie

$\log_{10} b = \log b$

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Oblicz.

a) $\log_2 8 + \log_3 27 + \log_4 \frac{1}{16}$

b) $\log_9 3 + 2\log_5 25 + \log 100$

Rozwiązanie

a) **Krok 1.** Analizujemy każdy ze składników sumy.

$\log_2 8 = 3$, ponieważ $2^3 = 8$, $\log_3 27 = 3$, ponieważ $3^3 = 27$,

$\log_4 \frac{1}{16} = -2$, ponieważ $4^{-2} = \frac{1}{16}$.

Krok 2. Wykonujemy dodawanie.

$$\log_2 8 + \log_3 27 + \log_4 \frac{1}{16} = 3 + 3 - 2 = 4$$

b) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$, ponieważ $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$, $2 \cdot \log_5 25 = 2 \cdot 2 = 4$, ponieważ $5^2 = 25$, $\log 100 = 2$, ponieważ $10^2 = 100$.

$$\log_9 3 + 2 \cdot \log_5 25 + \log 100 = \frac{1}{2} + 4 + 2 = 6\frac{1}{2}$$

Przykład 2.

Oblicz.

a) $\log_3 9\sqrt{3} - \log_2 16\sqrt{2}$

b) $\log_{\sqrt{2}} 8 + \log_{\sqrt{7}} \frac{1}{7}$

Rozwiązanie

W bardziej skomplikowanych przypadkach liczbę logarytmowaną zapisujemy jako potęgę podstawy logarytmu.

a) $\log_3 9\sqrt{3} = \log_3\left(3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) = \log_3 3^{2\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}$

$$\log_2 16\sqrt{2} = \log_2\left(2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right) = \log_2 2^{4\frac{1}{2}} = 4\frac{1}{2}$$

$$\log_3 9\sqrt{3} - \log_2 16\sqrt{2} = 2\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} = -2$$

b) $\log_{\sqrt{2}} 8 = \log_{\sqrt{2}} 2^3 = \log_{\sqrt{2}}\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^3 = \log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\right)^6 = 6$

$$\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{7} = \log_{\sqrt{7}} 7^{-1} = \log_{\sqrt{7}}\left(\left(\sqrt{7}\right)^2\right)^{-1} = \log_{\sqrt{7}}\left(\sqrt{7}\right)^{-2} = -2$$

$$\log_{\sqrt{2}} 8 + \log_{\sqrt{7}} \frac{1}{7} = 6 - 2 = 4$$

Przykład 3.

Zapisz sumę $\log_4 20 + \log_4 3\frac{1}{5} + 11^{\log_{11} 4}$ w postaci jednej liczby.

Rozwiązanie

Krok 1. Analizujemy poszczególne składniki sumy.

$$\underbrace{\log_4 20 + \log_4 3\frac{1}{5}}_{1} + \underbrace{11^{\log_{11} 4}}_{2}$$

1. Stosujemy wzór na sumę logarytmów o takich samych podstawach.

$$\log_4 20 + \log_4 3\frac{1}{5} = \log_4\left(20 \cdot 3\frac{1}{5}\right) = \log_4 64 = 3$$

2. Stosujemy zależność $a^{\log_a b} = b$: $11^{\log_{11} 4} = 4$.

Krok 2. Sumujemy otrzymane wyniki.

$$\log_4 20 + \log_4 3\frac{1}{5} + 11^{\log_{11} 4} = 3 + 4 = 7$$

Przykład 4.

Udowodnij, że $2\log_4 8 + \frac{\log_3 27}{\log_9 \frac{1}{729}} + \log 300 - \log 3$ jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie

Krok 1. Analizujemy elementy wyrażenia.

$$\underbrace{2\log_4 8}_{1} + \underbrace{\frac{\log_3 27}{\log_9 \frac{1}{729}}}_{2} + \underbrace{\log 300 - \log 3}_{3}$$

1. Korzystamy z własności logarytmów $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$.

$$2\log_4 8 = \log_4 8^2 = \log_4 64 = 3$$

2. Obliczamy wartość ilorazu: $\frac{\log_3 27}{\log_9 \frac{1}{729}} = \frac{3}{(-3)} = -1$.

3. Stosujemy wzór na różnicę logarytmów o takich samych podstawach.

$$\log 300 - \log 3 = \log \frac{300}{3} = \log 100 = 2$$

Krok 2. Wykonujemy dodawanie.

$$2\log_4 8 + \frac{\log_3 27}{\log_9 \frac{1}{729}} + \log 300 - \log 3 = 3 - 1 + 2 = 4$$

Krok 3. Wniosek: dana liczba jest równa 4, więc jest liczbą naturalną.

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M04152

1. Oblicz.

a) $\log_4 16 + \log_2 16$

b) $\log_3 9 - \log_8 64$

c) $\log_8 2 + \log_{36} 6$

d) $\log_{\frac{1}{10}} 100 - \log 1000$

2. Przedstaw w najprostszej postaci.

a) $2\log_6 3 + \log_6 4$

b) $\log 20 + \log 5$

c) $\log_{12} 1 + 5^{\log_5 8}$

d) $-3\log_8 4 - \log_{0,5} 8$

3. Uprość wyrażenie.

a) $\log_3 3\frac{1}{3} + \log_3 8\frac{1}{10}$

b) $(\log 170 - \log 17)^2$

TEST 3

W poniższych zadaniach zaznacz poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Suma $2\log_3 27 + 4\log_6 36$ jest równa

A. 5 B. 9 C. 14 D. 42

2. Suma $\log_5 1 + \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{64}$ jest równa

A. 3 B. 2 C. -1 D. -2

3. Liczba $\log_8 2 + \log_8 32$ jest równa

A. 1 B. 2 C. $\log_8 34$ D. $\log_8 \frac{1}{16}$

4. Różnica $\log_2 \frac{1}{2} - \log_{\frac{1}{2}} 2$ jest równa

A. -2 B. -1 C. 1 D. 0

5. Liczba $\log 243$ jest równa

A. $\log 240 + \log 3$
B. $\log 81 + \log 3$
C. $\log 200 + \log 43$
D. $\log 27 + \log 3$

6. Liczba $\log 200$ jest równa

A. $\log 25 + \log 8$
B. $\log 600 - \log 400$
C. 20
D. $2\log 100$

7. Liczba $\log_7 1 + \log_7 3 + 2$ jest równa

A. $3 + \log_7 3$
B. $2\frac{1}{7} + \log_7 3$
C. $\log_7 147$
D. $\log_7 52$

8. Liczba $\log_4 2 + \log_{16} 4 + \log_{256} 16$ jest równa

A. -8 B. -6 C. $\frac{1}{8}$ D. $1\frac{1}{2}$

3. LOGARYTMY

TO BYŁO NA MATURZE 3

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – maj 2010
Liczba $\log_4 8 + \log_4 2$ jest równa

A. 1 B. 2 C. $\log_4 6$ D. $\log_4 10$

Zadanie 2. (1 pkt) – sierpień 2010
Różnica $\log_3 9 - \log_3 1$ jest równa

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Zadanie 3. (1 pkt) – sierpień 2011
Liczba $\log_2 4 + 2\log_3 1$ jest równa

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

Zadanie 4. (1 pkt) – maj 2012
Iloczyn $2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 9$ jest równy

A. -6 B. -4 C. -1 D. 1

Zadanie 5. (1 pkt) – sierpień 2012
Liczba $\log_3 27 - \log_3 1$ jest równa

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Zadanie 6. (1 pkt) – maj 2013
Liczba $\log 100 - \log_2 8$ jest równa

A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

Zadanie 7. (1 pkt) – czerwiec 2013
Liczba $\log 4 + \log 5 - \log 2$ jest równa

A. 10 B. 2 C. 1 D. 0

Zadanie 8. (1 pkt) – maj 2014
Suma $\log_8 16 + 1$ jest równa

A. 3 B. $\frac{3}{2}$ C. $\log_8 17$ D. $\frac{7}{3}$

3. LOGARYTMY

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 3

1. a) 6 b) 0 c) $\frac{5}{6}$ d) -5 **2.** a) 2 b) 2 c) 8 d) 1 **3.** a) 3 b) 1

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 3

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	B	D	B	A	C	D

1. $2\log_3 27 + 4\log_6 36 = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 6 + 8 = 14$

2. $\log_5 1 + \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{64} = 0 + 2 = 2$

3. Stosujemy wzór $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$ i otrzymujemy:
$\log_8 2 + \log_8 32 = \log_8 64 = 2.$

4. $\log_2 \frac{1}{2} - \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1 - (-1) = 0$

5. Sprawdzamy, czy kolejne liczby są równe danej liczbie. Wykorzystujemy wzór na logarytm iloczynu:
A. $\log 240 + \log 3 = \log(240 \cdot 3) \neq \log 243$,
B. $\log 81 + \log 3 = \log(81 \cdot 3) = \log 243$.
Poprawna jest odpowiedź B.

6. Wykonujemy przekształcenia w kolejnych punktach: A. Stosujemy wzór na logarytm iloczynu: $\log 25 + \log 8 = \log(25 \cdot 8) = \log 200$.
Poprawna jest odpowiedź A.

7. $\log_7 1 + \log_7 3 + 2 = 0 + \log_7 3 + \log_7 49 = \log_7(3 \cdot 49) = \log_7 147$

8. $\log_4 2 + \log_{16} 4 + \log_{256} 16 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 3

1	2	3	4	5	6	7	8
B	C	C	B	D	B	C	D

3. LOGARYTMY

4. Obliczenia procentowe

1. Przypomnij sobie

Procent oznacza setną część danej wielkości w.

$$1\%\, w = 0{,}01w$$

$$100\%\, w = w$$

Uwaga
Często zamiast zapisu $\frac{p}{100}$ stosujemy zapis dziesiętny, np. 5% z x to $0{,}05x$, 120% z x to $1{,}2x$.

Obliczenia procentowe

- Obliczanie p procent liczby y: $\frac{p}{100} \cdot y$
- Obliczanie, jakim procentem liczby $x (x \neq 0)$ jest liczba y: $\frac{y}{x} \cdot 100\%$
- Obliczanie liczby x, której p procent jest równe y: $x = \frac{100y}{p}$

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Oblicz:
a) liczbę a, wiedząc, że stanowi ona 36% liczby 350,
b) liczbę b,wiedząc, że 75% tej liczby to 42,
c) o ile procent liczba 42 jest mniejsza od 200.

Rozwiązanie
a) $a = 36\% \cdot 350 = 0{,}36 \cdot 350 = 126$
b) $75\% \cdot b = 42$, czyli $0{,}75 \cdot b = 42$, stąd $b = 56$.
c) Aby obliczyć, o ile procent liczba 42 jest mniejsza od 200, należy obliczyć, jaki procent liczby 200 stanowi różnica pomiędzy tymi dwiema liczbami.

$$\frac{200-42}{200} \cdot 100\% = 79\%$$

Przykład 2.

Cena zestawu ogrodowego wynosiła 400 zł, a po wprowadzeniu promocji wynosi 350 zł.
a) O ile procent obniżyła się cena zestawu?
b) O ile procent należy ją podnieść, aby otrzymać cenę wyjściową?

4. OBLICZENIA PROCENTOWE

Rozwiązanie

a) Aby ustalić, o ile procent cena się obniżyła, należy obliczyć, ile procent ceny wyjściowej stanowi różnica między tymi cenami.

$$\frac{400\text{ zł} - 350\text{ zł}}{400\text{ zł}} \cdot 100\% = 0{,}125 \cdot 100\% = 12{,}5\%$$

Cena zestawu spadła o 12,5%.

b) Aby ustalić, o ile procent należy podnieść końcową cenę zestawu, aby otrzymać cenę początkową, należy obliczyć, jaką część końcowej ceny stanowi różnica między tymi cenami.

$$\frac{50\text{ zł}}{350\text{ zł}} \cdot 100\% \approx 0{,}1429 \cdot 100\% = 14{,}29\%$$

Obecną cenę zestawu należy podnieść o około 14,29%.

Przykład 3.

Na otwarcie sklepu zoologicznego jego właściciel zamówił pewną liczbę rybek akwariowych. Sprzedał 12% tych rybek i obecnie ma ich w sklepie 264. Ile rybek było w sklepie podczas otwarcia?

Rozwiązanie

Niech a oznacza początkową liczbę rybek. Obecnie w sklepie są 264 rybki – ta liczba stanowi 100% – 12% = 88% wszystkich rybek zamówionych na otwarcie sklepu.

$$88\% \cdot a = 264, \text{ stąd } a = 300.$$

Podczas otwarcia w sklepie było 300 rybek.

Przykład 4.

Książka do nauki fotografowania kosztuje 162,75 zł. Cena zawiera 5% podatku VAT. Podaj cenę książki bez podatku.

Rozwiązanie

Niech a oznacza cenę książki bez podatku VAT. Skoro książka z pięcioprocentowym podatkiem VAT kosztuje 162,75 zł, to ta kwota stanowi 105% ceny książki bez podatku, czyli:

$$105\% \cdot a = 162{,}75, \text{ stąd } a = 155.$$

Cena książki bez podatku to 155 zł.

Przykład 5.

Od nowego roku cenę dzierżawy sklepu handlowego zwiększono o 15%, a po kolejnym roku – o kolejne 10%. O ile procent zwiększono cenę dzierżawy w stosunku do ceny sprzed dwóch lat?

Rozwiązanie

Niech a oznacza początkową cenę dzierżawy. Cena po pierwszym wzroście wynosi $115\% \cdot a$, cena po drugim wzroście jest równa 110% poprzedniej ceny, więc ostateczna cena wynosi:

$$110\% \cdot (115\% \cdot a) = 1{,}1 \cdot 1{,}15 \cdot a = 1{,}265 \cdot a = 126{,}5\% \cdot a.$$

Obliczamy, o ile procent zwiększyła się cena:

$$126{,}5\% \cdot a - a = 126{,}5\% \cdot a - 100\% \cdot a = 26{,}5\% \cdot a.$$

Cena zwiększyła się o 26,5% w stosunku do ceny sprzed dwóch lat.

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M06233

1. Która z liczb jest większa: a – stanowiąca 23% liczby 98 czy b – stanowiąca 32% liczby 89?

2. Liczba a jest równa 85, a liczba b stanowi 60% liczby a. Oblicz liczbę b i ustal, ile procent liczby b stanowi liczba a. Liczbę procent podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

3. Wiadomo, że 374 jest równe 44% pewnej liczby. Oblicz tę liczbę i ustal, ile procent sumy tych liczb stanowi ich różnica. Liczbę procent podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

4. Jedna sadzonka ozdobnego drzewka kosztuje 8 zł. Klienci, którzy kupią więcej niż 100 sadzonek, otrzymują rabat w wysokości 7%. Oblicz wartość rabatu klienta, który kupił 255 sadzonek.

5. Pewien uczeń za test z matematyki uzyskał 42 punkty, co stanowiło 56% punktów możliwych do zdobycia. Za jedno poprawnie rozwiązane zadanie można było uzyskać 1 punkt. Na ile pytań uczeń odpowiedział błędnie?

TEST 4

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. W sadzie zebrano 9,6 t jabłek. Po okresie przechowania w chłodni okazało się, że do spożycia nadaje się 7,8 t. Ile procent jabłek było niezdatnych do zjedzenia?

A. 8,25% B. 18,75% C. 22,5% D. 81,25%

2. Cena biletu na koncert wynosiła 100 zł. Zwiększono ją o 130%. Ile wynosi nowa cena?

A. 130 zł B. 170 zł C. 230 zł D. 260 zł

3. Wraz z 23-procentowym podatkiem VAT laptop kosztuje 2460 zł. Jaka jest jego cena bez podatku VAT?

A. 1894,20 zł B. 2000 zł C. 2437 zł D. 3025,80 zł

4. Pierwszego dnia do szkoły przyszło 200 uczniów. Drugiego dnia ich liczba zmniejszyła się o 10%, a trzeciego – zwiększyła o 10% w stosunku do poprzedniego dnia. Ilu uczniów było obecnych w szkole trzeciego dnia?

A. 162 B. 180 C. 198 D. 200

5. Państwo Kowalscy zlecili remont łazienki. Zaliczka stanowi 20% ceny usługi i wynosi 2600 zł. Ile pieniędzy państwo Kowalscy dopłacą po zakończeniu remontu?

A. 13 000 zł B. 10 400 zł C. 3250 zł D. 2167 zł

6. Wiemy, że 4% liczby a stanowi 35% z 240. Liczba a jest równa

A. 2100 B. 84 C. 73,5 D. 3,36

7. Liczbę a zwiększono o 75%, a następnie zmniejszono o 50%. Otrzymana liczba wynosi

A. $137{,}5\% \cdot a$ C. $87{,}5\% \cdot a$
B. $125\% \cdot a$ D. $37{,}5\% \cdot a$

8. Liczba a jest pięć razy większa od liczby b. Ile procent liczby a stanowi liczba b?

A. 20% B. 25% C. 250% D. 500%

4. OBLICZENIA PROCENTOWE

TO BYŁO NA MATURZE 4

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – maj 2010
Spodnie po obniżce ceny o 30% kosztują 126 zł. Ile kosztowały spodnie przed obniżką?

A. 163,80 zł B. 180 zł C. 294 zł D. 420 zł

Zadanie 2. (1 pkt) – sierpień 2011
Suma liczby x i 15% tej liczby jest równa 230. Równaniem opisującym tę zależność jest

A. $0{,}15 \cdot x = 230$ C. $x + 0{,}15 \cdot x = 230$
B. $0{,}85 \cdot x = 230$ D. $x - 0{,}15 \cdot x = 230$

Zadanie 3. (1 pkt) – maj 2012
Cenę nart obniżono o 20%, a po miesiącu nową cenę obniżono o dalsze 30%. W wyniku obu obniżek cena nart zmniejszyła się o

A. 44% B. 50% C. 56% D. 60%

Zadanie 4. (1 pkt) – maj 2013
Liczby a i b są dodatnie oraz 12% liczby a jest równe 15% liczby b. Stąd wynika, że a jest równe

A. 103% liczby b C. 150% liczby b
B. 125% liczby b D. 153% liczby b

Zadanie 5. (1 pkt) – sierpień 2013
Gdy od 17% liczby 21 odejmiemy 21% liczby 17, to otrzymamy

A. 0 B. $\frac{4}{100}$ C. 3,57 D. 4

Zadanie 6. (1 pkt) – maj 2014
Jeżeli liczba 78 jest o 50% większa od liczby c, to

A. $c = 60$ B. $c = 52$ C. $c = 48$ D. $c = 39$

Zadanie 7. (1 pkt) – czerwiec 2014
Czterech przyjaciół zarejestrowało spółkę. Wysokość udziałów poszczególnych wspólników w kapitale zakładowym spółki wyraża stosunek 12 : 8 : 3 : 2. Jaką część kapitału zakładowego stanowi udział największego inwestora?

A. 12% B. 32% C. 48% D. 52%

4. OBLICZENIA PROCENTOWE

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 4

1. liczba b **2.** $b = 51$, 166,67% **3.** 850, 38,89% **4.** 142,80 zł
5. na 33 pytania

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 4

1	2	3	4	5	6	7	8
B	C	B	C	B	A	C	A

1. Obliczamy ilość jabłek niezdatnych do spożycia: 9,6 t − 7,8 t = 1,8 t. Stanowią one $\frac{1{,}8\ \text{t}}{9{,}6\ \text{t}} \cdot 100\% = 18{,}75\%$ wszystkich jabłek.

2. Cenę biletu zwiększono o 130%, więc jego nowa cena wynosi:
100 zł + 130% · 100 zł = 100 zł + 130 zł = 230 zł.

3. Laptop z 23-procentowym podatkiem VAT kosztuje 2460 zł, zatem: $123\% \cdot x = 2460$ zł, gdzie x oznacza cenę bez podatku. Stąd $x = 2000$ zł.

4. Drugiego dnia było obecnych w szkole 90% z 200 uczniów, czyli 180 uczniów. Trzeciego dnia liczba uczniów wzrosła o 10%, było ich zatem $110\% \cdot 180 = 198$.

5. Oznaczmy cenę remontu literą x. Zaliczka stanowi 20% tej ceny, więc: $20\% \cdot x = 2600$ zł, stąd $x = 13\,000$ zł. Państwo Kowalscy dopłacą:
13 000 zł − 2600 zł = 10 400 zł.

6. Obliczamy 35% z 240: $0{,}35 \cdot 240 = 84$, co stanowi 4% liczby a, czyli $0{,}04a = 84$. Stąd $a = 2100$.

7. Zwiększenie liczby a o 75%: $1{,}75a$. Zmniejszenie powstałej liczby o 50%: $b = 0{,}5 \cdot 1{,}75a = 0{,}875a = 87{,}5\% \cdot a$.

8. Liczba a jest 5 razy większa od liczby b, więc $a = 5b$. Obliczamy, ile procent liczby a stanowi liczba b: $\frac{b}{a} \cdot 100\% = \frac{b}{5b} \cdot 100\% = \frac{1}{5} \cdot 100\% = 20\%$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 4

1	2	3	4	5	6	7
B	C	A	B	A	B	C

5. Działania na wyrażeniach algebraicznych

1. Przypomnij sobie

Wyrażenie algebraiczne jest zapisem matematycznym zbudowanym ze zmiennych (np. a, b, c, d, x, y, z) oraz z liczb połączonych działaniami takimi jak dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie czy potęgowanie i pierwiastkowanie. Wyrażeniami algebraicznymi są np.:

$$a + b - 2c,\ x^2 - \frac{x}{y} + 1{,}5b^{-\frac{3}{4}},\ \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Wzory skróconego mnożenia

W przekształceniach wyrażeń algebraicznych stosuje się następujące tożsamości:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (kwadrat sumy),
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (kwadrat różnicy),
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ (różnica kwadratów).

Zasady przekształcania wyrażeń algebraicznych

- Jeśli przed nawiasem znajduje się liczba bądź zmienna, to każdy element nawiasu należy przez nią pomnożyć, a jeśli ta liczba bądź zmienna ma ujemny znak, to należy dodatkowo zmienić znak każdego z elementów nawiasu na przeciwny, np.:
  - $r(6 + a + 4b) = 6r + 6a + 24b$,
  - $-c(2 - 7 + 100d) = -2c + 7c - 100cd$.
- Mnożąc dwa (lub więcej) nawiasów przez siebie, należy każdy element danego nawiasu pomnożyć przez każdy element drugiego nawiasu, np.:
  - $(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$.
- Wyrażenie algebraiczne doprowadzamy do najprostszej postaci, redukując wyrazy podobne, np.:
  - $x(y + 2z) - y(2x + z) + 2z(x + y) = \mathbf{xy} + 2xz - \mathbf{2xy} - yz + 2xz + 2yz = -xy + 4xz + yz$,
  - $-3(4 - a + 3b) + 2(b + 6a) = \mathbf{-12} + 3a - 9b + 2b + 12a = -12 + 15a - 7b$.

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Wykonaj działania.

a) $2x^2-(2y-x)^2$

b) $(a+b)^2-2(a-3b)^2$

c) $2x(-x+y)-y(x-2y)$

d) $-(8+x)\left(4-\frac{1}{2}x\right)$

Rozwiązanie

a) **Krok 1.** Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.

$$2x^2-(2y-x)^2=2x^2-(4y^2-4xy+x^2)$$

Krok 2. Opuszczamy nawias i zmieniamy znak wyrazów znajdujących się wewnątrz niego.

$$2x^2-(4y^2-4xy+x^2)=2x^2-4y^2+4xy-x^2$$

Krok 3. Redukujemy wyrazy podobne.

$$\mathbf{2x^2}-4y^2+4xy-\mathbf{x^2}=x^2-4y^2+4xy$$

b) **Krok 1.** Korzystamy ze wzorów skróconego mnożenia.

$$(a+b)^2-2(a-3b)^2=a^2+2ab+b^2-2(a^2-6ab+9b^2)$$

Krok 2. Mnożymy nawias przez -2 i redukujemy wyrazy podobne.

$$a^2+2ab+b^2-2(a^2-6ab+9b^2)=$$

$$=\mathbf{a^2}+2ab+b^2-\mathbf{2a^2}+12ab-18b^2=-a^2+14ab-17b^2$$

c) Wykonujemy mnożenie i redukujemy wyrazy podobne.

$$2x(-x+y)-y(x-2y)=-2x^2+\mathbf{2xy}-\mathbf{xy}+2y^2=-2x^2+xy+2y^2$$

d) Mnożymy wyrażenia w nawiasach, redukujemy wyrazy podobne i zmieniamy znak na przeciwny.

$$-(8+x)\left(4-\frac{1}{2}x\right)=-\left(32-\mathbf{4x}+\mathbf{4x}-\frac{1}{2}x^2\right)=-32+\frac{1}{2}x^2$$

Przykład 2.

Liczby a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że jeżeli $(a-2b)^2=\left(\sqrt{2}b-a\right)\left(\sqrt{2}b+a\right)$, to $a=b$.

Rozwiązanie

Krok 1. Korzystamy ze wzorów na kwadrat różnicy i różnicę kwadratów.

$$a^2-4ab+4b^2=2b^2-a^2$$

Krok 2. Przenosimy wszystkie wyrazy na jedną stronę i redukujemy wyrazy podobne.

$$\mathbf{a^2}+\mathbf{a^2}-4ab+4b^2-2b^2=0$$

$$2a^2-4ab+2b^2=0$$

Krok 3. Dzielimy obie strony przez 2 i stosujemy wzór na kwadrat różnicy.

$$a^2-2ab+b^2=0$$

$$(a-b)^2=0$$

Krok 4. Zapisujemy wniosek: $a-b=0$, więc $a=b$.

Przykład 3.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{2(2a+b)^2}{-a^2b}$, jeśli:

a) $a=-1, b=3$,

b) $a=\sqrt{2}, b=-2$.

Rozwiązanie

a) $\frac{2(2a+b)^2}{-a^2b}=\frac{2(2\cdot(-1)+3)^2}{-(-1)^2\cdot 3}=\frac{2(-2+3)^2}{-3}=-\frac{2}{3}$

b) $\frac{2(2a+b)^2}{-a^2b}=\frac{2(2\sqrt{2}-2)^2}{-(\sqrt{2})^2\cdot(-2)}=\frac{2(8-8\sqrt{2}+4)}{-2\cdot(-2)}=\frac{24-16\sqrt{2}}{4}=6-4\sqrt{2}$

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M06257

1. Oblicz.

a) $4-(x-6)(3-x)$

b) $(2x+4)^2-(x-4)(x+4)$

c) $\left(\frac{2x}{3}-\frac{3y}{2}\right)^2+2xy$

d) $\left(x\sqrt{2}+y\sqrt{5}\right)^2$

2. Oblicz wartość wyrażenia dla $a=2$ i $b=3\sqrt{3}$.

a) $\frac{\left(-a\sqrt{3}+b\right)^2}{8-2a}$

b) $\sqrt{(b+a)(b-a)+3ab}$

3. Udowodnij, że jeśli $\left(a-2\sqrt{2}\right)^2+10=\left(3\sqrt{2}+b\right)^2$, to $a^2-b^2=2\sqrt{2}(2a+3b)$ dla dowolnych liczb a i b.

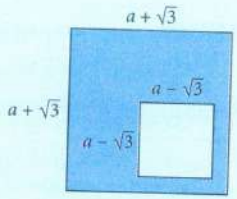
TEST 5

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każdą odpowiedź możesz uzyskać 1 punkt.

1. Wyrażenie $(x-2)(y+x)$ jest równe

A. $xy + x^2 + 2y + 2x$
B. $x(y+x) - 2(y+x)$
C. $2x(y-2)$
D. $xy - 2x$

2. Wskaż wyrażenie opisujące pole zacieniowanego obszaru.



A. $12a$
B. $a^2 + 3$
C. $2a^2 + 6$
D. $4a\sqrt{3}$

3. Jeśli dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi równość $(a+2)^2 = (b-4)^2$, to

A. $a^2 - b^2 = (a-2)(b-4)$
B. $a^2 - b^2 = 4(-a-2b+3)$
C. $a^2 - b^2 = -20$
D. $a^2 - b^2 = 12$

4. Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y wyrażenie $(3x-2)(3x-2) - (3x-2)$ przyjmuje postać

A. $3x - 2$
B. $9x^2 + 9x + 6$
C. $9x^2 - 3x - 2$
D. $9x^2 - 15x + 6$

5. Wyrażenie $2ac - ac^2 - 2b + bc$ jest równe

A. $(ac-b)(2+c)$
B. $(ac-b)(2-c)$
C. $(ac+b)(2+c)$
D. $(ac+b)(2-c)$

6. Wartość wyrażenia $\frac{2a^2-3b^2}{a^2-2b+b^2}$ dla $a = -b = 1$ jest równa

A. 1
B. 0
C. $-\frac{1}{4}$
D. -2

TO BYŁO NA MATURZE 5

W zadaniach 1.–5. wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – maj 2011
Wyrażenie $5a^2 - 10ab + 15a$ jest równe iloczynowi

A. $5a^2(1 - 10b + 3)$
B. $5a(a - 2b + 3)$
C. $5a(a - 10b + 15)$
D. $5(a - 2b + 3)$

Zadanie 2. (1 pkt) – sierpień 2011
Dla pewnych liczb a i b zachodzą równości: $a^2 - b^2 = 200$ i $a + b = 8$. Dla tych liczb a i b wartość wyrażenia $a - b$ jest równa

A. 25
B. 16
C. 10
D. 2

Zadanie 3. (1 pkt) – czerwiec 2012
Równość $\left(a + 2\sqrt{2}\right)^2 = a^2 + 28\sqrt{2} + 8$ zachodzi dla

A. $a = 14$
B. $a = 7\sqrt{2}$
C. $a = 7$
D. $a = 2\sqrt{2}$

Zadanie 4. (1 pkt) – maj 2013
Dla każdej liczby rzeczywistej x wyrażenie $4x^2 - 12x + 9$ jest równe

A. $(4x+3)(x+3)$
B. $(2x-3)(2x+3)$
C. $(2x-3)(2x-3)$
D. $(x-3)(4x-3)$

Zadanie 5. (1 pkt) – sierpień 2013
Dla każdej z liczb rzeczywistych a, b wyrażenie $a - b + ab - 1$ jest równe

A. $(a+1)(b-1)$
B. $(1-b)(1+a)$
C. $(a-1)(b+1)$
D. $(a+b)(1+a)$

Zadanie 6. (2 pkt) – czerwiec 2014
Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b prawdziwa jest nierówność

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$$

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 5

1. a) $x^2-9x+22$ b) $3x^2+16x+32$ c) $\frac{4x^2}{9}+\frac{9y^2}{4}$ d) $2x^2+2xy\sqrt{10}+5y^2$

2. a) $\frac{3}{4}$ b) $\sqrt{23+18\sqrt{3}}$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 5

1	2	3	4	5	6
B	D	B	D	B	C

1. Wykonujemy mnożenie: $(x-2)(y+x)=xy+x^2-2y-2x$. Odpowiedź A jest błędna. Odrzucamy odpowiedzi C i D, ponieważ wyrażenia w tych punktach składają się z dwóch jednomianów. Poprawna jest odpowiedź B.

2. Szukane pole jest różnicą pól dwóch kwadratów:

$$P=\left(a+\sqrt{3}\right)^2-\left(a-\sqrt{3}\right)^2=$$
$$=a^2+2a\sqrt{3}+3-\left(a^2-2a\sqrt{3}+3\right)=$$
$$=a^2+2a\sqrt{3}+3-a^2+2a\sqrt{3}-3=4a\sqrt{3}.$$

3. Przekształcamy równanie, korzystając ze wzorów na kwadrat sumy i kwadrat różnicy: $a^2+4a+4=b^2-8b+16$. Przenosimy kwadraty na jedną stronę, a pozostałe wyrazy na drugą i otrzymujemy:
$a^2-b^2=-4a-8b+12=4(-a-2b+3)$. Poprawna jest odpowiedź B.

4. $(3x-2)(3x-2)-(3x-2)=9x^2-12x+4-3x+2=9x^2-15x+6$

5. Przekształcamy dane wyrażenia: A. $(ac-b)(2+c)=2ac+ac^2-2b-bc$, B. $(ac-b)(2-c)=2ac-ac^2-2b+bc$. Poprawna jest odpowiedź B.

6. Podstawiamy do wyrażenia $a=1$, $b=-1$ i otrzymujemy:
$$\frac{2\cdot 1^2-3\cdot(-1)^2}{1^2-2\cdot(-1)+(-1)^2}=\frac{-1}{4}.$$

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 5

1	2	3	4	5
B	A	C	C	C

6. Równania i nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą

1. Przypomnij sobie

Równanie pierwszego stopnia, nazywane również równaniem liniowym, przyjmuje postać:

$$ax=b,$$

gdzie a i $b\in\mathbb{R}$, a x to niewiadoma.

Liczba rozwiązań równania pierwszego stopnia

- Jeśli $a\neq 0$ i $b\in\mathbb{R}$, to równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie.
- Jeśli $a=0$ i $b\neq 0$, to równanie nie ma rozwiązania – jest sprzeczne.
- Jeśli $a=0$ i $b=0$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań – jest tożsamościowe.

Rozwiązywanie równań pierwszego stopnia

1. Przenosimy wiadome na jedną stronę równania, a niewiadome na drugą stronę, sprowadzając równanie do postaci $ax=b$.
2. Dzielimy obie strony równania przez liczbę $a\neq 0$. Jeśli $a=0$, to równanie jest sprzeczne lub tożsamościowe.

Nierówność pierwszego stopnia przyjmuje jedną z postaci:

$$ax>b,\quad ax<b,$$
$$ax\geqslant b,\quad ax\leqslant b,$$

gdzie a i $b\in\mathbb{R}$, a x to niewiadoma.

Rozwiązywanie nierówności pierwszego stopnia

1. Przenosimy wiadome na jedną stronę nierówności, a niewiadome na drugą stronę, sprowadzając nierówność do postaci $ax>b$, $ax\geqslant b$, $ax<b$, $ax\leqslant b$.
2. Dzielimy obie strony nierówności przez liczbę $a\neq 0$, przy czym jeśli $a>0$, to zwrot nierówności pozostaje bez zmian, a jeśli $a<0$, to zwrot nierówności zmieniamy na przeciwny.

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{4}x - \frac{1}{8} = 5x + \frac{3}{2}$

b) $2(8x-1)+5=-6+4(3+4x)$

c) $2(9-x)+2=16+2(-x+2)$

Uwaga

Równanie liniowe możesz uprościć w dowolnym momencie, mnożąc obie strony przez odpowiednią liczbę, dzięki czemu stanie się ono bardziej czytelne.

Rozwiązanie

a) **Krok 1.** Upraszczamy równanie, eliminując ułamki – mnożymy obydwie strony równania przez 8 i przenosimy wiadome na prawą, a niewiadome na lewą stronę równania.

$$2x - 1 = 40x + 12$$
$$-38x = 13$$

Krok 2. Dzielimy obie strony równania przez -38.

$$x = -\frac{13}{38}$$

b) **Krok 1.** Opuszczamy nawiasy i przenosimy wiadome na prawą, a niewiadome na lewą stronę równania.

$$16x + 3 = 6 + 16x$$
$$0 = 3$$

Krok 2. Zapisujemy odpowiedź: otrzymaliśmy sprzeczność, więc równanie nie ma rozwiązań.

c) **Krok 1.** Opuszczamy nawiasy i grupujemy wiadome i niewiadome.

$$20 - 2x = 20 - 2x$$
$$0 = 0$$

Krok 2. Zapisujemy odpowiedź: równanie jest spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą.

Przykład 2.

Rozwiąż nierówność.

a) $-\frac{4x}{3} > \frac{34}{6} + \frac{3x}{2}$

b) $2(x-6) \leqslant -2(2x-9)$

Zbiór rozwiązań przedstaw na osi liczbowej.

Rozwiązanie

a) **Krok 1.** Mnożymy obie strony nierówności przez 6 i przenosimy wiadome na prawą, a niewiadome na lewą stronę nierówności.

$$-8x > 34 + 9x$$
$$-17x > 34$$

Krok 2. Dzielimy obie strony przez -17.

$$x < -2$$

Krok 3. Zaznaczamy przedział $(-\infty, -2)$ na osi liczbowej.

Uwaga

Dzieląc nierówność przez liczbę ujemną, musisz zmienić jej zwrot na przeciwny.

b) **Krok 1.** Dzielimy nierówność stronami przez 2.

$$x - 6 \leqslant -(2x - 9)$$

Krok 2. Przenosimy wyrazy wolne na prawą, a pozostałe na lewą stronę nierówności i dzielimy obie strony przez 3.

$$x - 6 \leqslant -2x + 9$$
$$3x \leqslant 15$$

Krok 3. Zapisujemy rozwiązanie.

$$x \leqslant 5$$

Krok 4. Zaznaczamy przedział $(-\infty, 5)$ na osi liczbowej.

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M06884

1. Rozwiąż równanie.

a) $-\frac{2}{3}x + 11 = \frac{5}{6}x + 2$

b) $-4(1-15x)+2x=31(2x+1)$

c) $8 - 7x = \frac{1}{8}(-56x + 64)$

d) $2x(3x+1) = -7 + 6x^2$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{1}{3}(9-x) - 4 > 6 - (4x+1)$

b) $\frac{3}{4} + \frac{7x}{8} < 2 - \frac{5x}{8}$

c) $\frac{6-x}{6} + \frac{5x}{3} > 1$

d) $(x-2)^2 + x \leqslant x^2 + 6$

TEST 6

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Rozwiązaniem równania $5(x-3)=7(x+9)$ jest liczba

A. -39 B. -24 C. 24 D. 39

2. Rozwiązaniem równania $-9(3x+1)=18$ jest liczba

A. 1 B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. -1

3. Rozwiązaniem równania $4x-\frac{2}{3}=-4+\frac{2}{3}x$ jest liczba

A. $3\frac{1}{3}$ B. 1 C. -1 D. $-3\frac{1}{3}$

4. Największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $\frac{x}{2}\leqslant\frac{x}{4}-x$ jest

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

5. Liczba będąca rozwiązaniem równania $(x+1)^2=(x+2)^2$ spełnia nierówność

A. $x<-\frac{3}{2}$ B. $x>1$ C. $-1<x<1$ D. $-3<x<-1$

6. Liczbą, która nie spełnia nierówności $1\geqslant\frac{1}{12}x-\frac{1}{24}x$, jest

A. -24 B. -12 C. 24 D. 48

7. Wskaż równanie, które ma nieskończenie wiele rozwiązań.

A. $9x-5=6+8x$

B. $\frac{1}{8}x-4=-x$

C. $2-7x=7\left(\frac{2}{7}-x\right)$

D. $-0{,}5x+2=11(6x+1)$

8. Lewa strona pewnego równania jest równa $-3x+9$. Wskaż prawą stronę tego równania, wiedząc, że jego rozwiązaniem jest liczba $x=2$.

A. $5-x$ B. $x-5$ C. $-3x+11$ D. $-3x+7$

TO BYŁO NA MATURZE 6

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – Informator 2010, zestaw P1
Wskaż przedział, który jest zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x}{4}+\frac{1}{6}<\frac{x}{3}$.

A. $(-\infty,-2)$ B. $(-\infty,2)$ C. $(-2,+\infty)$ D. $(2,+\infty)$

Zadanie 2. (1 pkt) – Informator 2010, zestaw P1
Która z liczb jest rozwiązaniem równania $2(x-1)+x=x-3(2-3x)$?

A. $\frac{8}{11}$ B. $-\frac{4}{11}$ C. $\frac{4}{7}$ D. -1

Zadanie 3. (1 pkt) – maj 2011
Rozwiązanie równania $x(x+3)-49=x(x-4)$ należy do przedziału

A. $(-\infty,3)$ B. $(10,+\infty)$ C. $(-5,-1)$ D. $(2,+\infty)$

Zadanie 4. (1 pkt) – maj 2011
Najmniejszą liczbą całkowitą należącą do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{3}{8}+\frac{x}{6}<\frac{5x}{12}$ jest

A. 1 B. 2 C. -1 D. -2

Zadanie 5. (1 pkt) – sierpień 2011
Rozwiązaniem równania $3(2-3x)=x-4$ jest

A. $x=1$ B. $x=2$ C. $x=3$ D. $x=4$

Zadanie 6. (1 pkt) – maj 2013
Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $\frac{x}{2}\leqslant\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}$ jest

A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 6

1. a) $x = 6$ b) brak rozwiązań c) wszystkie liczby rzeczywiste d) $x = -\frac{7}{2}$

2. a) $x > \frac{11}{18}$ b) $x < \frac{5}{6}$ c) $x > 0$ d) $x \geqslant -\frac{2}{3}$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 6

1	2	3	4	5	6	7	8
A	D	C	B	D	D	C	A

1. Wykonujemy przekształcenia i otrzymujemy równanie: $5x - 15 = 7x + 63$, stąd $-2x = 78$, więc $x = -39$.

2. Po przekształceniach otrzymujemy równanie $-27x = 27$, stąd $x = -1$.

3. Przenosimy niewiadome na jedną, a wyrazy wolne na drugą stronę. Otrzymujemy: $3\frac{1}{3}x = -3\frac{1}{3}$, stąd $x = -1$.

4. Mnożymy obie strony nierówności przez 4 i otrzymujemy: $2x \leqslant x - 4x$, więc $5x \leqslant 0$, stąd $x \in (-\infty, 0)$. Największą liczbą całkowitą spełniającą to równanie jest 0.

5. Do obu stron równania stosujemy wzór $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ i otrzymujemy: $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4$, stąd $-2x = 3$, czyli $x = -\frac{3}{2}$. Ta liczba spełnia nierówność $-3 < x < -1$.

6. Mnożymy obie strony nierówności przez 24 i otrzymujemy: $24 \geqslant 2x - x$, stąd $x \leqslant 24$. Tej nierówności nie spełnia liczba 48.

7. Szukamy równania, w którym współczynniki przy x i wyrazy wolne po prawej i lewej stronie są równe, więc odrzucamy odpowiedzi A i B. Sprawdzamy kolejno równania z punktów C i D: C. $P = 7\left(\frac{2}{7} - x\right) = 2 - 7x$, czyli $L = P$. Poprawna jest odpowiedź C.

8. Podstawiamy do lewej strony równania liczbę 2 i otrzymujemy $L = 3$. Sprawdzamy kolejno, które wyrażenie przyjmuje wartość 3 dla $x = 2$: A. $5 - x = 5 - 2 = 3$. Otrzymujemy $L = P$. Poprawna jest odpowiedź A.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 6

1	2	3	4	5	6
D	C	D	B	A	B

7. Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

1. Przypomnij sobie

Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi przyjmuje postać:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases},$$

gdzie x i y to niewiadome, natomiast a, b, c, d, e i f to dowolne liczby rzeczywiste (nazywane współczynnikami).

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb x i y, które spełniają jednocześnie oba równania.

Liczba rozwiązań układu równań

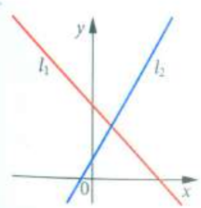
Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi:

- jest oznaczony, jeśli ma jedno rozwiązanie,
- jest nieoznaczony, jeśli ma nieskończenie wiele rozwiązań,
- jest sprzeczny, jeśli nie ma rozwiązań.

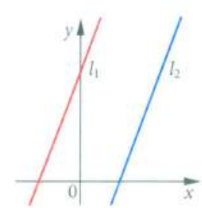
Interpretacja geometryczna układu równań

Proste l_1 i l_2 opisane są równaniami układu $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

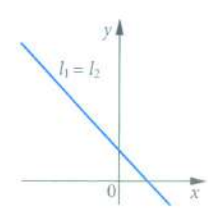
Szkicujemy te proste w układzie współrzędnych. Współrzędne punktów (x, y) należących jednocześnie do obu prostych stanowią rozwiązanie układu równań. Zachodzi jedna z trzech możliwości:



Układ równań jest **oznaczony** – proste się przecinają.



Układ równań jest **sprzeczny** – proste są równoległe i różne.



Układ równań jest **nieoznaczony** – proste się pokrywają.

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 3x + 4y = -19 \\ -x + 5y = 0 \end{cases}$ metodą:

a) podstawiania,

b) przeciwnych współczynników.

Podaj jego interpretację geometryczną.

Rozwiązanie

a) **Krok 1.** Z dowolnego równania wyznaczamy jedną z niewiadomych, np. x z drugiego równania.

$$\begin{cases} 3x + 4y = -19 \\ x = 5y \end{cases}$$

> **Uwaga**
> Wybierz tę spośród dwóch niewiadomych, którą najłatwiej wyznaczyć z jednego z równań.

Krok 2. Wyznaczoną niewiadomą podstawiamy do drugiego równania układu – w omawianym przypadku do pierwszego równania.

$$\begin{cases} 3 \cdot 5y + 4y = -19 \\ x = 5y \end{cases}$$

Krok 3. Rozwiązujemy otrzymane równanie.

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = 5y \end{cases}$$

Krok 4. Obliczoną wartość y podstawiamy do równania, które wykorzystaliśmy w pierwszym kroku i obliczamy drugą niewiadomą.

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = 5 \cdot (-1) \end{cases}$$

Krok 5. Zapisujemy rozwiązanie.

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases}$$

b) **Krok 1.** Mnożymy (bądź dzielimy) jedno z równań układu przez tak dobraną liczbę, aby otrzymać przeciwne współczynniki przy jednej z niewiadomych.

W omawianym przykładzie można drugie równanie pomnożyć przez 3 – otrzymujemy przeciwne współczynniki przy x.

$$\begin{cases} 3x + 4y = -19 \\ -3x + 15y = 0 \end{cases}$$

Krok 2. Dodajemy obydwa równania stronami i rozwiązujemy otrzymane równanie.

$$\begin{cases} 3x + 4y = -19 \\ -3x + 15y = 0 \end{cases}$$

$$3x - 3x + 4y + 15y = -19$$

$$19y = -19$$

$$y = -1$$

Krok 3. Obliczoną wartość podstawiamy do dowolnego z dwóch równań układu i obliczamy drugą niewiadomą.

$$\begin{cases} y = -1 \\ -x + 5 \cdot (-1) = 0 \end{cases}$$

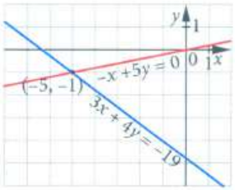
Krok 4. Zapisujemy rozwiązanie.

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases}$$

Interpretacja geometryczna

Układ równań ma jedno rozwiązanie, więc równania układu opisują dwie proste przecinające się w punkcie $(-5, -1)$.

Rysujemy dane proste w układzie współrzędnych i zaznaczamy punkt ich przecięcia.



Przykład 2.

Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -4x - 2y = -12 \end{cases}$ i określ, czy jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

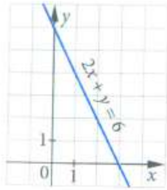
Rozwiązanie

Krok 1. Wyznaczamy y z każdego równania.

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = -2x + 6 \end{cases}$$

Krok 2. Rysujemy prostą opisaną równaniami układu w układzie współrzędnych.

Krok 3. Zapisujemy rozwiązanie układu równań. Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań postaci $(x, -2x + 6)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Jest to układ nieoznaczony.



Przykład 3.

Rozwiąż algebraicznie i geometrycznie układ równań $\begin{cases} y - 2x = 2 \\ -6x + 3y = -15 \end{cases}$.

Określ, czy jest on oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

Rozwiązanie

Rozwiązanie algebraiczne

Krok 1. Wyznaczamy y z pierwszego równania, a drugie równanie dzielimy przez 3.

$$\begin{cases} y = 2 + 2x \\ -2x + y = -5 \end{cases}$$

Krok 2. Podstawiamy wyznaczone wyrażenie do drugiego równania i rozwiązujemy je.

$$\begin{cases} y = 2 + 2x \\ -2x + 2 + 2x = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 + 2x \\ 2 = -5 \end{cases}$$

Krok 3. Zapisujemy rozwiązanie.
Sprzeczność – równanie nie ma rozwiązań.

Rozwiązanie graficzne

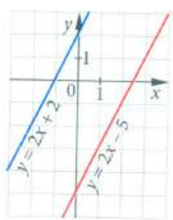
Krok 1. Przekształcamy obydwa równania do postaci kierunkowej.

równanie kierunkowe prostej, s. 177

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

Krok 2. Rysujemy proste dane równaniami układu w układzie współrzędnych.

Krok 3. Otrzymane proste są równoległe i różne, więc układ nie ma rozwiązań – jest sprzeczny.



Przykład 4.

Dla jakich a układ równań $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 4ax + 2y = 20 \end{cases}$ ma jedno rozwiązanie?

Rozwiązanie

Krok 1. Dzielimy drugie równanie przez 2 i sprowadzamy obydwa równania do postaci kierunkowej.

$$\begin{cases} y = -2x + 10 \\ y = -2ax + 10 \end{cases}$$

Krok 2. Zauważamy, że dany układ będzie miał jedno rozwiązanie wtedy, gdy współczynniki kierunkowe prostych zadanych równaniami będą różne, czyli dla $-2 \neq -2a$. Stąd $a \neq 1$.

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M08109

1. Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną i ustal, czy jest on oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

a) $\begin{cases} x - y = 6 \\ -x + 2y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x - y - 1 = 0 \\ -5x + y = 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y - 2x - 1 = 0 \\ 8x + 4 = 4y \end{cases}$

e) $\begin{cases} -2y + 4x = -6 \\ y = 2x - 11 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y - 1 = -3x \\ 2y = -6x \end{cases}$

g) $\begin{cases} \frac{1}{16}x + \frac{1}{8}y = 3 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + \frac{y}{3} = 8 \\ 2x + \frac{2y}{3} = 16 \end{cases}$

TEST 7

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} -x + 3y = -4 \\ 7x + y = -16 \end{cases}$ jest para liczb

A. $x = 2, y = 2$
B. $x = -2, y = 2$
C. $x = 2, y = -2$
D. $x = -2, y = -2$

2. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 5x + 10y = 15 \\ x - y = 3 \end{cases}$ jest para liczb (x, y) takich, że

A. $x \geqslant 1, y \geqslant 1$
B. $x \geqslant 1, y \leqslant 1$
C. $x \leqslant 1, y \geqslant 1$
D. $x \leqslant 1, y \leqslant 1$

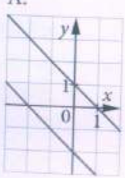
3. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases}$ jest para liczb (x, y) takich, że

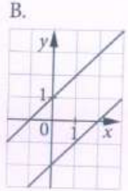
A. $x + y > 2$ B. $xy > 2$ C. $x - y < 0$ D. $x - y > 0$

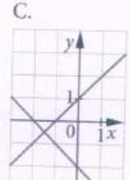
4. Wskaż układ równań, którego rozwiązaniem jest para liczb $(-10, -19)$.

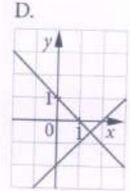
A. $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + y = 9 \end{cases}$
B. $\begin{cases} 3x - 2y = -8 \\ x + y = 9 \end{cases}$
C. $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x - y = 9 \end{cases}$
D. $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - y = 9 \end{cases}$

5. Wskaż interpretację geometryczną układu równań $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x - 2 \end{cases}$.

A.


B.


C.


D.


TO BYŁO NA MATURZE 7

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – maj 2011

Układ równań $\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 6x + ay = 15 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli

A. $a = -1$ B. $a = 0$ C. $a = 2$ D. $a = 3$

Zadanie 2. (1 pkt) – sierpień 2011

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ jest

A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

Zadanie 3. (1 pkt) – maj 2013

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 5x + 3y = 3 \\ 8x - 6y = 48 \end{cases}$ jest para liczb

A. $x = -3$ i $y = 4$
B. $x - 3$ i $y = 6$
C. $x = 3$ i $y = -4$
D. $x = 9$ i $y = 4$

Zadanie 4. (1 pkt) – sierpień 2013

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 3x - 5y = 0 \\ 2x - y = 14 \end{cases}$ jest para liczb (x, y) takich, że

A. $x < 0$ i $y < 0$
B. $x < 0$ i $y > 0$
C. $x > 0$ i $y < 0$
D. $x > 0$ i $y > 0$

Zadanie 5. (1 pkt) – grudzień 2013

Dane jest równanie $3x + 4y - 5 = 0$. Z którym z poniższych równań tworzy ono układ sprzeczny?

A. $6x + 8y - 10 = 0$
B. $4x - 3y + 5 = 0$
C. $9x + 12y - 10 = 0$
D. $5x + 4y - 3 = 0$

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 7

1. a) $x = 23$, $y = 17$, układ oznaczony b) $x = -\frac{17}{6}$, $y = \frac{11}{6}$, układ oznaczony c) $x = 3$, $y = 2$, układ oznaczony d) nieskończenie wiele rozwiązań postaci $(x, 2x + 1)$ dla $x \in \mathbf{R}$, układ nieoznaczony e) brak rozwiązania, układ sprzeczny f) brak rozwiązania, układ sprzeczny g) $x = 27$, $y = \frac{21}{2}$, układ oznaczony h) nieskończenie wiele rozwiązań postaci $(x, -3x + 24)$ dla $x \in \mathbf{R}$, układ nieoznaczony

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 7

1	2	3	4	5
D	B	C	A	B

1. Wyznaczamy x z pierwszego równania: $x = 4 + 3y$, podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy: $7(4 + 3y) + y = -16$, stąd $y = -2$. Obliczoną wartość y podstawiamy do dowolnego równania wyjściowego układu i wyznaczamy x. Rozwiązaniem jest para liczb: $x = -2$, $y = -2$.

2. Dzielimy pierwsze równanie przez -5 i otrzymujemy: $-x - 2y = -3$, dodajemy obydwa równania stronami: $-3y = 0$, stąd $y = 0$. Obliczoną wartość y podstawiamy do dowolnego z równań układu i wyznaczamy x. Rozwiązaniem jest para liczb: $x = 3$, $y = 0$. Poprawna jest odpowiedź B.

3. Dodajemy obydwa równania stronami i otrzymujemy: $3y = 3$, stąd $y = 1$. Podstawiamy obliczoną wartość y do dowolnego równania i wyznaczamy $x = \frac{2}{3}$. Sprawdzamy kolejne warunki: A. $\frac{2}{3} + 1 = 1\frac{2}{3} < 2$, B. $\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} < 2$, C. $\frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} < 0$. Poprawna jest odpowiedź C.

4. W każdym z punktów podstawiamy wskazane liczby i sprawdzamy, czy otrzymana równość jest prawdziwa: A. $3 \cdot (-10) - 2 \cdot (-19) = 8$, $-10 - (-19) = 9$. Poprawna jest odpowiedź A.

5. Proste dane równaniami układu mają równe współczynniki kierunkowe i różne wyrazy wolne, więc są równoległe. Ponadto współczynnik kierunkowy jest dodatni, więc poprawna jest odpowiedź B.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 7

1	2	3	4	5
D	A	C	D	C

8. Równania kwadratowe z jedną niewiadomą

1. Przypomnij sobie

Równanie kwadratowe to równanie drugiego stopnia:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gdzie $a, b, c \in \mathbf{R}$ i $a \neq 0$.

Wyróżnik (delta) równania kwadratowego to liczba zdefiniowana następująco:

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Liczba rozwiązań (pierwiastków) równania kwadratowego

- Jeśli $\Delta > 0$, to równanie kwadratowe ma dwa różne rozwiązania.

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Takie równanie kwadratowe można zapisać w postaci iloczynowej:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- Jeśli $\Delta = 0$, to równanie kwadratowe ma jedno rozwiązanie.

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Postać iloczynowa: $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

- Jeśli $\Delta < 0$, to równanie kwadratowe nie ma rozwiązań.

Uwaga

Z równania kwadratowego w postaci iloczynowej możesz odczytać jego rozwiązania.

Rozwiązywanie równania kwadratowego

1. Obliczamy wyróżnik równania kwadratowego.
2. Obliczamy pierwiastki równania lub stwierdzamy brak rozwiązań.

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^2 + 9 = 6x$ c) $2x^2 - 4x + 21 = 0$

Jeśli to możliwe, zapisz je w postaci iloczynowej.

Rozwiązanie

a) **Krok 1.** Obliczamy deltę równania.

$a = 1, b = -1, c = -2$
$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 9$

Krok 2. Delta jest dodatnia, więc równanie ma dwa rozwiązania.

$x_1 = \frac{1+\sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1+3}{2} = 2$
$x_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

Krok 3. Zapisujemy równanie w postaci iloczynowej.

$(x-2)(x+1) = 0$

b) **Krok 1.** Przenosimy wszystkie wyrazy równania na jedną stronę i obliczamy deltę.

$x^2 - 6x + 9 = 0$
$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 9 = 0$

Krok 2. Delta jest równa zero, więc równanie ma jedno rozwiązanie.

$x_0 = \frac{6}{2} = 3$

Krok 3. Zapisujemy równanie w postaci iloczynowej.

$(x-3)^2 = 0$

c) **Krok 1.** Obliczamy deltę.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 21 < 0$

Krok 2. Zapisujemy rozwiązanie.

Delta jest ujemna, więc równanie nie ma rozwiązań.

Przykład 2.

Rozwiąż równanie.
a) $x^2 - 16x = 0$
b) $x^2 - 49 = 0$

Rozwiązanie

a) **Krok 1.** Wyłączamy przed nawias czynnik x i otrzymujemy równanie w postaci iloczynowej.

$$x(x-16) = 0$$

Krok 2. Przyrównujemy każdy z czynników do zera i zapisujemy rozwiązania równania.

$$x = 0 \text{ lub } x - 16 = 0$$
$$x = 0 \text{ lub } x = 16$$

b) **Krok 1.** Przenosimy wyraz wolny na prawą stronę równania.

$$x^2 = 49$$

Krok 2. Wyciągamy pierwiastek kwadratowy z danej liczby.

$$x = \sqrt{49} = 7 \text{ lub } x = -\sqrt{49} = -7$$

Uwaga
Równanie kwadratowe $ax^2 + bx = 0$, dla $a \neq 0$ i $b \neq 0$, ma dwa rozwiązania:
$x_1 = 0, \; x_2 = -\frac{b}{a}$.

Przypomnienie
$a \cdot b = 0$, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

Uwaga
Jeśli a i c są przeciwnych znaków, to równane kwadratowe $ax^2 + c = 0$, dla $a \neq 0$ i $c \neq 0$, ma dwa rozwiązania:
$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \; x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Przykład 3.

Rozwiąż równanie.
a) $(x-4)(x+6) = 0$
b) $-3(4x-1)(5x+10) = 0$

Rozwiązanie

a) Równanie jest w postaci iloczynowej, więc odczytujemy jego rozwiązania.

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -6$$

b) Przyrównujemy wyrażenia w nawiasach do zera i rozwiązujemy tak powstałe równania liniowe.

$$4x - 1 = 0 \text{ lub } 5x + 10 = 0$$
$$x = \frac{1}{4} \text{ lub } x = -2$$

Uwaga
Równanie kwadratowe $a(bx-c)(dx-e) = 0$, dla $a \neq 0$, $b \neq 0$ i $d \neq 0$, ma dwa rozwiązania:
$x_1 = \frac{c}{b}, \; x_2 = \frac{e}{d}$.

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M08926

1. Rozwiąż równanie. Jeśli to możliwe, zapisz je w postaci iloczynowej.

a) $x^2 - 3x - 4 = 0$
b) $3x^2 + 2x + \frac{1}{3} = 0$
c) $2x^2 = 7x - 18$
d) $25x^2 + 1 = 10x$
e) $2x^2 - x = 0$
f) $x^2 - 81 = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $-4(x-3)(x-9) = 0$
b) $2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$
c) $(3x-3)(6x-9) = 0$

8. RÓWNANIA KWADRATOWEZ JEDNĄ NIEWIADOMĄ

TEST 8

W poniższych zadaniach zaznacz poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $(x-11)(x+4)=0$. Suma x_1+x_2 wynosi

A. 15 B. 7 C. −7 D. −18

2. Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $x^2-6x-16=0$. Wartość $x_1 \cdot x_2$ wynosi

A. −16 B. 8 C. −2 D. −16

3. Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $2x^2-72=0$. Suma kwadratów tych pierwiastków wynosi

A. 72 B. 36 C. 6 D. 0

4. Wskaż równanie kwadratowe, którego pierwiastkami są liczby −1 i 3.

A. $-9(x+1)(x+3)=0$ C. $-(x-1)(x+3)=0$
B. $3(x-1)(x-3)=0$ D. $6(x+1)(x-3)=0$

5. Liczby x_1 i x_2 takie, że $x_1<x_2$, są rozwiązaniami równania $x^2-11x+28=0$. Iloraz $\frac{x_2}{x_1}$ wynosi

A. 28 B. $1\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{7}$ D. $\frac{1}{28}$

6. Jednym z rozwiązań równania kwadratowego $-4x^2+\frac{4}{a}x=0$, $a \neq 0$, jest liczba $\frac{1}{3}$. Wobec tego a wynosi

A. −3 B. $-\frac{1}{3}$ C. 3 D. 9

7. Wskaż równanie kwadratowe, które ma wspólny pierwiastek z równaniem $(4x-1)(2x+8)=0$.

A. $2(x+2)(9-x)=0$ C. $\left(x-\frac{1}{4}\right)(3x-9)=0$
B. $-\left(x+\frac{1}{4}\right)(x-4)=0$ D. $4x(x+8)=0$

TO BYŁO NA MATURZE 8

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – listopad 2010
Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $x^2+10x-24=0$ i $x_1<x_2$. Oblicz $2x_1+x_2$.

A. −22 B. −17 C. 8 D. 13

Zadanie 2. (1 pkt) – czerwiec 2011
Liczby x_1 i x_2 są rozwiązaniami równania $2(x-5)(x+7)=0$. Suma x_1+x_2 jest równa

A. 2 B. −2 C. 12 D. −12

Zadanie 3. (1 pkt) – maj 2012
Liczby x_1, x_2 są różnymi rozwiązaniami równania $2x^2+3x-7=0$. Suma x_1+x_2 jest równa

A. $-\frac{7}{2}$ B. $-\frac{7}{4}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{3}{4}$

Zadanie 4. (1 pkt) – Informator 2014/2015
Mniejszą z dwóch liczb spełniających równanie $x^2+5x+6=0$ jest

A. −6 B. −3 C. −2 D. −1

Zadanie 5. (1 pkt) – grudzień 2013
Równanie $(2x-1)\cdot(x-2)=(1-2x)\cdot(x+2)$ ma dwa rozwiązania. Są to liczby

A. −2 oraz $\frac{1}{2}$ B. 0 oraz $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ oraz 2 D. −2 oraz 2

Zadanie 6. (1 pkt) – maj 2014
Pierwiastki x_1, x_2 równania $2(x+2)(x-2)=0$ spełniają warunek

A. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-1$ C. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{4}$
B. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=0$ D. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}$

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 8

1. a) $x_1 = -1, x_2 = 4$, $(x+1)(x-4) = 0$ b) $x_0 = -\frac{1}{3}$, $3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 = 0$
c) brak rozwiązań d) $x_0 = \frac{1}{5}$, $25\left(x-\frac{1}{5}\right)^2 = 0$ e) $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$, $x(2x-1) = 0$ f) $x_1 = 9, x_2 = -9$, $(x-9)(x+9) = 0$

2. a) $x_1 = 3, x_2 = 9$ b) $x_0 = -\frac{1}{2}$ c) $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 8

1	2	3	4	5	6	7
B	D	A	D	B	C	C

1. Odczytujemy pierwiastki równania: $x_1 = 11, x_2 = -4$ i obliczamy ich sumę: $x_1 + x_2 = 11 + (-4) = 7$.

2. $\Delta = 6^2 - 4\cdot(-16) = 100$, więc $x_1 = \frac{6-10}{2} = -2$, $x_2 = \frac{6+10}{2} = 8$. Stąd $x_1 \cdot x_2 = -16$.

3. Przenosimy wyraz wolny na prawą stronę, dzielimy równanie stronami przez 2 i otrzymujemy: $x^2 = 36$. Stąd $x_1 = -6, x_2 = 6$, więc suma kwadratów pierwiastków wynosi $(-6)^2 + 6^2 = 72$.

4. Szukamy równania, którego lewa strona jest równa zero dla $x = -1$ i $x = 3$. Poprawna jest odpowiedź D.

5. $\Delta = 9$, $x_1 = 4, x_2 = 7$, więc iloraz $\frac{x_2}{x_1} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$.

6. Liczba $\frac{1}{3}$ jest rozwiązaniem równania, więc $-4\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{a}\cdot\frac{1}{3} = 0$. Stąd $\frac{4}{9} = \frac{4}{3a}$, więc $a = 3$.

7. Odczytujemy pierwiastki równania $(4x-1)(2x+8) = 0$: $\frac{1}{4}$ i -4. Poprawna jest odpowiedź C.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 8

1	2	3	4	5	6
A	B	C	B	B	B

9. Nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą

1. Przypomnij sobie

Nierówność kwadratowa przyjmuje jedną z postaci:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$
$$ax^2 + bx + c \geqslant 0,$$
$$ax^2 + bx + c < 0,$$
$$ax^2 + bx + c \leqslant 0$$

dla $a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$.
Rozwiązanie nierówności kwadratowej polega na wskazaniu wszystkich wartości x, które ją spełniają.

Rozwiązywanie nierówności kwadratowej

1. Rozwiązujemy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Zaznaczamy na osi Ox rozwiązania równania kwadratowego (jeśli istnieją) i szkicujemy parabolę będącą wykresem funkcji kwadratowej. funkcja kwadratowa, s. 91
3. Odczytujemy z wykresu wszystkie możliwe wartości x, które spełniają nierówność.

Uwaga
Rozwiązywanie nierówności rozpocznij od przeniesienia wszystkich wyrazów na jedną stronę.

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Rozwiąż nierówność $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$. Zbiór rozwiązań przedstaw na osi liczbowej.

Rozwiązanie

Krok 1. Rozwiązujemy równanie kwadratowe.

$$\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6 = 1,\quad x_1 = 2,\quad x_2 = 3$$

Krok 2. Szkicujemy poglądowy wykres – zaznaczamy pierwiastki równania i rysujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry.

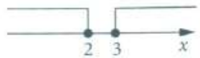
Przypomnienie

Jeśli współczynnik przy x^2 jest dodatni, to ramiona paraboli są skierowane do góry, a jeśli jest on ujemny, to ramiona paraboli są skierowane do dołu.

Krok 3. Odczytujemy z wykresu wartości x, dla których parabola znajduje się powyżej osi Ox lub ją przecina.

$x \in (-\infty, 2\rangle \cup \langle 3, +\infty)$

Krok 4. Zaznaczamy zbiór na osi liczbowej.



Przykład 2.

Rozwiąż nierówność $x^2 - 2x + 1 \leqslant 0$.

Rozwiązanie

Krok 1. Rozwiązujemy równanie kwadratowe.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0, x_0 = 1$$

Krok 2. Szkicujemy poglądowy wykres.

Krok 3. Odczytujemy z wykresu, że nierówność jest spełniona tylko dla $x = 1$, ponieważ dla tej liczby funkcja przyjmuje wartość 0, a dla pozostałych wykres funkcji znajduje się powyżej osi Ox, więc osiąga wartości dodatnie.

Przykład 3.

Rozwiąż nierówność $x^2 - 4x + 11 < 0$.

Rozwiązanie

Krok 1. Rozwiązujemy równanie kwadratowe.

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = -28 < 0,$$

więc równanie nie ma rozwiązań.

Krok 2. Szkicujemy poglądowy wykres.

krok3 Wykres funkcji znajduje się powyżej osi Ox, więc dla wszystkich x funkcja przyjmuje wartości dodatnie. Nierówność nie ma rozwiązań. Możemy zapisać, że $x \in \varnothing$ (x należy do zbioru pustego).

Przykład 4.

Rozwiąż nierówność $2(x - 1)(x + 4) < 0$. Zbiór rozwiązań przedstaw na osi liczbowej.

Rozwiązanie

Krok 1. Wzór podany jest w postaci iloczynowej, z której odczytujemy miejsca zerowe.

$$x_1 = 1, x_2 = -4$$

Krok 2. Szkicujemy parabolę. Ramiona paraboli są skierowane do góry, ponieważ współczynnik przy x^2, który jest równy iloczynowi współczynników przy niewiadomych i współczynnika przed równaniem, wynosi: $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 > 0$.

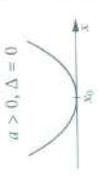
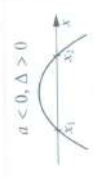
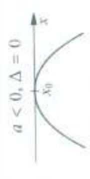
Krok 3. Odczytujemy z wykresu wartości x, dla których parabola znajduje się poniżej osi Ox.

$$x \in (-4, 1)$$

Krok 4. Zaznaczamy zbiór na osi liczbowej.

Uwaga

Wszystkie przypadki rozwiązań nierówności kwadratowej przedstawia tabela na s. 62 (zakładamy, że $x_1 < x_2$).

Wykres funkcji $y = ax^2 + bx + c$	Rozwiązanie nierówności $ax^2 + bx + c \geqslant 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \leqslant 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$a > 0, \Delta > 0$ 	$x \in (-\infty, x_1\rangle \cup \langle x_2, +\infty)$	$x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$	$x \in \langle x_1, x_2\rangle$	$x \in (x_1, x_2)$
$a > 0, \Delta = 0$ 	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$	$x = x_0$	$x \in \emptyset$
$a > 0, \Delta < 0$ 	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \emptyset$	$x \in \emptyset$
$a < 0, \Delta > 0$ 	$x \in \langle x_1, x_2\rangle$	$x \in (x_1, x_2)$	$x \in (-\infty, x_1\rangle \cup \langle x_2, +\infty)$	$x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$
$a < 0, \Delta = 0$ 	$x = x_0$	$x \in \emptyset$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$
$a < 0, \Delta < 0$ 	$x \in \emptyset$	$x \in \emptyset$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$

Przykład 5.

Rozwiąż nierówność $x^2 < 3$.

Rozwiązanie

Krok 1. Rozwiązujemy równanie kwadratowe $x^2 - 3 = 0$.

$$x_1 = \sqrt{3}, \quad x_2 = -\sqrt{3}$$

Krok 2. Szkicujemy poglądowy wykres.

Krok 3. Odczytujemy z wykresu wartości x, dla których nierówność jest spełniona.

$$x \in \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$$

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie terazmatura.pl **Kod:** M08973

1. Rozwiąż nierówność.

a) $(x+1)(x-11) \geqslant 0$

b) $\frac{7}{8}(x-2)(x+3) < 0$

c) $(x-7)^2 \leqslant 0$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 5x - 24 \geqslant 0$

b) $-x^2 + 10x + 11 < 0$

c) $2x^2 + 15x + 28 \leqslant 0$

d) $7x^2 - 5x + 12 < 0$

3. Rozwiąż nierówność i określ, ile liczb całkowitych ją spełnia.

a) $-x^2 + 100 > 0$

b) $-2x^2 + 8x - 19 \leqslant 0$

c) $x^2 + 13x < -42$

d) $x^2 - 12x - 64 \geqslant 0$

9. NIERÓWNOŚCI KWADRATOWEZ JEDNĄ NIEWIADOMĄ

TEST 9

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

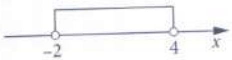
1. Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 - 8x + 12 \geqslant 0$ jest zbiór

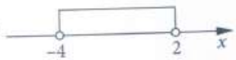
A. $(-\infty, -2\rangle \cup \langle 6, +\infty)$ C. $\langle -6, 2\rangle$

B. $(-\infty, 2\rangle \cup \langle 6, +\infty)$ D. $\langle 2, 6\rangle$

2. Zbiór rozwiązań nierówności $(x-2)(x+4) > 0$ przedstawiono na rysunku

A. 

B. 

C. 

D. 

3. Która z podanych liczb nie spełnia nierówności $x^2 - x < 10$?

A. 4 B. 2 C. 0 D. -2

4. Zbiorem rozwiązań nierówności $-x(x-9) > 0$ jest

A. $(0, 3)$ B. $(-3, 3)$ C. $(0, 9)$ D. $(-\infty, 9)$

5. Wskaż liczbę, która spełnia nierówność $x^2 - x - 2 < 0$.

A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

6. Zbiorem rozwiązań nierówności $26 - x^2 < 0$ jest

A. $\left(-\sqrt{26}, \sqrt{26}\right)$ C. $\left(-\infty, -\sqrt{26}\right) \cup \left(\sqrt{26}, +\infty\right)$

B. $(-13, 13)$ D. $(-\infty, -13) \cup (13, +\infty)$

7. Zbiór rozwiązań nierówności $x^2 \leqslant 10$ jest zawarty w przedziale

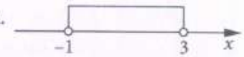
A. $\langle -3, 3\rangle$ C. $(-\infty, -10)$

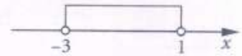
B. $(10, +\infty)$ D. $(-4, 4)$

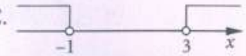
TO BYŁO NA MATURZE 9

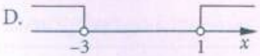
W zadaniach 1.–3. wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – listopad 2009
Zbiór rozwiązań nierówności $(x+1)(x-3) > 0$ przedstawiony jest na rysunku

A. 

B. 

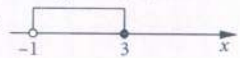
C. 

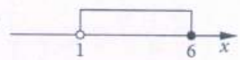
D. 

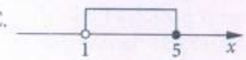
Zadanie 2. (1 pkt) – maj 2010
Do zbioru rozwiązań nierówności $(x-2)(x+3) < 0$ należy liczba

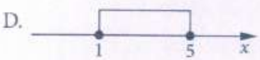
A. 9 B. 7 C. 4 D. 1

Zadanie 3. (1 pkt) – maj 2011
Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności:
$3(x-1)(x-5) \leqslant 0$ i $x > 1$.

A. 

B. 

C. 

D. 

Zadanie 4. (2 pkt) – czerwiec 2012
Rozwiąż nierówność $x^2 - 3x - 10 < 0$.

Zadanie 5. (2 pkt) – maj 2013
Rozwiąż nierówność $2x^2 - 7x + 5 \geqslant 0$.

Zadanie 6. (2 pkt) – sierpień 2013
Rozwiąż nierówność $3x - x^2 \geqslant 0$.

Zadanie 7. (2 pkt) – czerwiec 2014
Rozwiąż nierówność $(2x-3)(3-x) \geqslant 0$.

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 9

1. a) $x \in (-\infty, -1) \cup (11, +\infty)$ b) $x \in (-3, 2)$ c) $x = 7$
2. a) $x \in (-\infty, -3) \cup \langle 8, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, -1) \cup (11, +\infty)$
c) $x \in \left\langle -4, -3\frac{1}{2} \right\rangle$ d) $x \in \emptyset$ **3.** a) $x \in (-10, 10)$, 19 liczb całkowitych
b) $x \in \mathbb{R}$, nieskończenie wiele liczb całkowitych c) $x \in (-7, -6)$, żadna liczba całkowita nie spełnia tej nierówności d) $x \in (-\infty, -4) \cup (16, +\infty)$, nieskończenie wiele liczb całkowitych

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 9

1	2	3	4	5	6	7
B	D	A	C	B	C	D

1. Rozwiązujemy równanie kwadratowe: $\Delta = 16$, $x_1 = 2$, $x_2 = 6$. Szkicujemy wykres i odczytujemy z niego zbiór wartości x, dla których parabola leży powyżej osi Ox lub ją przecina: $x \in (-\infty, 2\rangle \cup \langle 6, +\infty)$.

2. Odczytujemy rozwiązania równania kwadratowego: $x_1 = -4$, $x_2 = 2$. Szkicujemy parabolę i odczytujemy z wykresu zbiór wartości x, dla których wykres leży poniżej osi Ox: $x \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$. Poprawna jest odpowiedź D.

3. Sprawdzamy kolejno, która z podanych liczb nie spełnia nierówności: A. $4^2 - 4 = 12 > 10$. Poprawna jest odpowiedź A.

4. Odczytujemy rozwiązania równania kwadratowego: $x_1 = 0$, $x_2 = 9$. Szkicujemy parabolę i odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności: $x \in (0, 9)$.

5. Sprawdzamy kolejno, czy dana liczba spełnia nierówność: A. $2^2 - 2 - 2 = 0$, B. $1^2 - 1 - 2 = -2 < 0$. Poprawna jest odpowiedź B.

6. Pierwiastkami równania $26 - x^2 = 0$ są liczby $-\sqrt{26}$ i $\sqrt{26}$. Szkicujemy wykres i odczytujemy zbiór rozwiązań: $x \in \left(-\infty, -\sqrt{26}\right) \cup \left(\sqrt{26}, +\infty\right)$.

7. Pierwiastkami równania $x^2 = 10$ są liczby $-\sqrt{10}$ i $\sqrt{10}$. Szkicujemy wykres i odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności: $x \in \left\langle -\sqrt{10}, \sqrt{10} \right\rangle$. Ten zbiór jest zawarty w przedziale $(-4, 4)$, ponieważ $\sqrt{10} \approx 3{,}16$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 9

1	2	3
C	D	C

4. $x \in (-5, 2)$ **5.** $x \in (-\infty, 1\rangle \cup \left\langle \frac{5}{2}, +\infty \right)$
6. $x \in \langle 0, 3\rangle$ **7.** $x \in \left\langle \frac{3}{2}, 3 \right\rangle$

10. Równania wielomianowe

1. Przypomnij sobie

Równanie wielomianowe może przyjąć jedną z postaci:

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0,$$
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = 0,$$
$$x^3 = a,$$
$$ax(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0,$$

gdzie $a \neq 0$, $b, c, d \in \mathbb{R}$, x_1, x_2, x_3, x_4 to rozwiązania równania.

Rozwiązywanie równania wielomianowego

- Równanie w postaci $x^n = a$, gdzie $n \geqslant 2$.

  Wyciągamy pierwiastek n-tego stopnia z liczby stojącej po prawej stronie równania. Równanie to ma:
  - jedno rozwiązanie: $x = \sqrt[n]{a}$ dla $a \in \mathbb{R}$ i n nieparzystego,
  - dwa rozwiązania: $x = \sqrt[n]{a}$ lub $x = -\sqrt[n]{a}$ dla $a > 0$ i n parzystego.
- Równanie w postaci iloczynowej, np. $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$, gdzie $a \neq 0$.

  Przyrównujemy każdy z czynników równania do zera:
  $$x - x_1 = 0, \quad x - x_2 = 0, \quad x - x_3 = 0.$$
  Rozwiązujemy tak powstałe równania liniowe:
  $$x = x_1 \text{ lub } x = x_2 \text{ lub } x = x_3.$$

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Rozwiąż równanie $x^3 = -8$.

Rozwiązanie

Wyciągamy pierwiastek trzeciego stopnia z liczby -8.

$$x = \sqrt[3]{-8} = -2$$

Uwaga

Rozwiązując równania typu $x^n = a$, odpowiadamy na pytanie: jaką liczbę należy podnieść do n-tej potęgi, aby otrzymać liczbę a.

Przykład 2.

Rozwiąż równanie $2x^2 - 32 = 0$.

Rozwiązanie

Krok 1. Przenosimy wiadomą na prawą stronę i dzielimy obie strony równania przez 2.

$$2x^2 = 32$$

$$x^2 = 16$$

Krok 2. Ponieważ wykładnik potęgi jest parzysty, otrzymujemy dwa rozwiązania.

$$x = \sqrt{16} \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt{16}$$
$$x = 4 \qquad\qquad x = -4$$

Uwaga

Rozwiązywanie równania typu $x^n - a = 0$ rozpocznij od przeniesienia wiadomych na jedną, a niewiadomych na drugą stronę równania.

Przykład 3.

Rozwiąż równanie $x^4 - 81 = 0$.

Rozwiązanie

Przenosimy wiadomą na prawą stronę i wyciągamy pierwiastek czwartego stopnia. Otrzymujemy dwa rozwiązania.

$$x^4 = 81$$
$$x = \sqrt[4]{81} \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt[4]{81}$$
$$x = 3 \qquad\qquad x = -3$$

Przykład 4.

Rozwiąż równanie $x^2 + 1 = 0$.

Rozwiązanie

Krok 1. Przenosimy wyraz wolny na prawą stronę równania.

$$x^2 = -1$$

Krok 2. Zapisujemy, że równanie nie ma rozwiązania.

Uwaga

Żadna liczba rzeczywista podniesiona do potęgi parzystej nie da liczby ujemnej.

10. RÓWNANIA WIELOMIANOWE

Przykład 5.

Rozwiąż równanie.

a) $-2x(x-1)(x+3)(x+4) = 0$

b) $3(2x+1)(x^2-x-6)(x-4) = 0$

Rozwiązanie

a) **Krok 1.** Przyrównujemy każdy z czynników do zera i rozwiązujemy powstałe równania liniowe.

$$-2x = 0 \quad \text{lub} \quad x-1=0 \quad \text{lub} \quad x+3=0 \quad \text{lub} \quad x+4=0$$

Krok 2. Zapisujemy rozwiązania równania.

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x = 1 \quad \text{lub} \quad x = -3 \quad \text{lub} \quad x = -4$$

b) **Krok 1.** Każdy z czynników przyrównujemy do zera i rozwiązujemy tak powstałe równania.

$$2x+1=0 \quad \text{lub} \quad x^2-x-6=0 \quad \text{lub} \quad x-4=0$$
$$2x = -1 \qquad \Delta = 25 \qquad x = 4$$
$$x = -\frac{1}{2} \qquad x_1 = -2,\ x_2 = 3$$

Krok 2. Zapisujemy rozwiązania równania.

$$x = -2 \quad \text{lub} \quad x = -\frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad x = 3 \quad \text{lub} \quad x = 4$$

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M09279

1. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 4 = 0$ b) $2x^2 = 6$ c) $x^2 - 121 = 0$ d) $x^3 = -64$ e) $2x^4 - 32 = 0$ f) $x^2 = \frac{1}{16}$ g) $x^2 + 36 = 0$ h) $x^3 + 1 = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $x(x-1)(x+10) = 0$

b) $-4(3-x)(2x+9)(1+x) = 0$

c) $2x(7x+14)(x^2-1)(x^2+9) = 0$

d) $(6x-1)(x^2-9x-22)(5+x) = 0$

e) $(x^2+100)(-49-x^2) = 0$

f) $(x^3+27)(x^5-1)(x^7+1) = 0$

g) $x(x^2-2)(x^2+4) = 0$

h) $4(x^2-5x-50)(x^2+5x-50) = 0$

10. RÓWNANIA WIELOMIANOWE

TEST 10

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Wskaż liczbę, która jest rozwiązaniem równania $x^3 - \frac{1}{8} = 0$.

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{2}$

2. Liczba a jest rozwiązaniem równania $x^3 + 1 = 0$, a liczba b – rozwiązaniem równania $x^5 = 32$. Wobec tego

A. $a > b$ B. $a \cdot b > 0$ C. $b - a < 0$ D. $a + b > 0$

3. Wskaż równanie, które nie ma rozwiązania.

A. $x^3 + 121 = 0$
B. $x^3 - 64 = 0$
C. $x^2 - 200 = 0$
D. $x^2 + 25 = 0$

4. Równanie $3(x-6)(x-5)(x-1)(x^2+9) = 0$ ma dokładnie

A. jedno rozwiązanie.
B. dwa rozwiązania.
C. trzy rozwiązania.
D. pięć rozwiązań.

5. Suma pierwiastków równania $-(x-4)(x+1)(x-5) = 0$ wynosi

A. 10 B. 8 C. -8 D. -10

6. Suma pierwiastków równania $x(x-1)(x-7)(x-4) = 0$ wynosi

A. -12 B. 0 C. 12 D. 28

7. Równanie $3x^3 - \frac{1}{9} = 0$ jest spełnione przez

A. dokładnie jedną liczbę niewymierną.
B. dokładnie jedną liczbę wymierną.
C. trzy liczby niewymierne.
D. trzy liczby wymierne.

TO BYŁO NA MATURZE 10

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – czerwiec 2012
Równanie $(x+5)(x-3)(x^2+1) = 0$ ma

A. dwa rozwiązania: $x = -5$, $x = 3$.
B. dwa rozwiązania: $x = -3$, $x = 5$.
C. cztery rozwiązania: $x = -5$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$.
D. cztery rozwiązania: $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 5$.

Zadanie 2. (1 pkt) – maj 2013
Liczba rzeczywistych rozwiązań równania $(x+1)(x+3)(x^2+3) = 0$ jest równa

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

Zadanie 3. (1 pkt) – maj 2014
Wspólnym pierwiastkiem równań $(x^2-1)(x-10)(x-5) = 0$ oraz $\frac{2x-10}{x-1} = 0$ jest liczba

A. -1 B. 1 C. 5 D. 10

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 10

1. a) $-2, 2$ b) $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ c) $-11, 11$ d) -4 e) $-2, 2$ f) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$
g) brak rozwiązań h) -1
2. a) $-10, 0, 1$ b) $-4\frac{1}{2}, -1, 3$ c) $-2, -1, 0, 1$ d) $-5, -2, \frac{1}{6}, 11$
e) brak rozwiązań f) $-3, -1, 1$ g) $-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$ h) $-10, -5, 5, 10$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 10

1	2	3	4	5	6	7
A	D	D	C	B	C	B

1. Rozwiązaniem równania $x^3 = \frac{1}{8}$ jest $\frac{1}{2}$, bo $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

2. Rozwiązaniem równania $x^3 + 1 = 0$ jest -1, więc $a = -1$. Rozwiązaniem równania $x^5 = 32$ jest 2, więc $b = 2$. Sprawdzamy kolejno, czy liczby a i b spełniają podane warunki: A. $-1 < 2$, B. $(-1)\cdot 2 = -2 < 0$, C. $2-(-1) = 3 > 0$. Liczby a i b nie spełniają nierówności w punktach A, B i C, więc poprawna jest odpowiedź D.

3. Odrzucamy odpowiedzi A i B, ponieważ niewiadoma jest w nieparzystej potędze, więc równanie ma jedno rozwiązanie. Sprawdzamy kolejno pozostałe punkty: C. $x^2 = 200$ i $200 > 0$, więc równanie ma dwa rozwiązania. Poprawna jest odpowiedź D.

4. W równaniu są cztery czynniki, z których trzy mają po jednym rozwiązaniu, a czwarte równanie: $x^2 + 9 = 0$ nie ma rozwiązania. Poprawna jest odpowiedź C.

5. Pierwiastkami równania są liczby: $-1, 4, 5$, ich suma wynosi 8.

6. Pierwiastkami równania są liczby: $0, 1, 4, 7$, ich suma wynosi 12.

7. Przenosimy wyraz wolny na prawą stronę równania i mnożymy równanie stronami przez 3: $x^3 = \frac{1}{27}$. Rozwiązaniem jest liczba $\frac{1}{3}$. Poprawna jest odpowiedź B.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 10

1	2	3
A	C	C

11. Równania wymierne

1. Przypomnij sobie

Równanie wymierne z niewiadomą x to równanie postaci:
$$\frac{W(x)}{V(x)} = 0,$$
gdzie $W(x)$ i $V(x)$ to sumy algebraiczne, $V(x) \neq 0$.

Rozwiązywanie równania wymiernego

1. Określamy dziedzinę równania, czyli wszystkie wartości x, dla których mianownik równania: $V(x)$ przyjmuje wartości różne od 0.
2. Rozwiązujemy równanie $W(x) = 0$.
3. Sprawdzamy, czy wyznaczone wartości x należą do dziedziny równania.

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Rozwiąż równanie $\frac{9x-3}{6-x} = 0$.

Rozwiązanie

Krok 1. Wyznaczamy wszystkie wartości x, dla których mianownik równania przyjmuje wartości różne od 0. $\quad 6 - x \neq 0$, $x \neq 6$

Krok 2. Przyrównujemy licznik do 0 i rozwiązujemy otrzymane równanie liniowe. $\quad 9x - 3 = 0$, $x = 3$

Krok 3. Sprawdzamy, czy liczba 3 należy do dziedziny równania. Zapisujemy rozwiązanie. $\quad x = 3$

Przykład 2.

Rozwiąż równanie $\frac{x+1}{x+3} = 2$.

Rozwiązanie

Krok 1. Wyznaczamy wszystkie wartości x, dla których mianownik równania przyjmuje wartości różne od 0. $\quad x + 3 \neq 0$, $x \neq -3$

Krok 2. Zapisujemy 2 jako iloraz, a następnie mnożymy „na krzyż" odpowiednie wyrażenia. Otrzymujemy równoważną postać równania.

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{2}{1}$$
$$x + 1 = 2(x+3)$$
$$x = -5$$

Uwaga

Metoda mnożenia „na krzyż":
jeżeli $\frac{W(x)}{V(x)} = \frac{U(x)}{T(x)}$, to
$W(x) \cdot T(x) = U(x) \cdot V(x)$.

Krok 3. Sprawdzamy, czy -5 należy do dziedziny równania i zapisujemy rozwiązanie. $x = -5$

Przykład 3.

Rozwiąż równanie $\frac{x^2-64}{(x-4)(x+2)} = 0$.

Rozwiązanie

Krok 1. Wyznaczamy dziedzinę równania. $(x-4)(x+2) \neq 0$
$x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$

Krok 2. Wyznaczamy wartości x, dla których licznik przyjmuje wartość 0. $x^2 - 64 = 0$
$x_1 = 8, \ x_2 = -8$

Krok 3. Liczby 8 i -8 należą do dziedziny równania, więc są jego rozwiązaniami. $x = 8, \ x = -8$

Przykład 4.

Rozwiąż równanie $\frac{x^2-81}{(x-9)(x+3)} = 0$.

Rozwiązanie

Krok 1. Wyznaczamy dziedzinę równania. $(x-9)(x+3) \neq 0$
$x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 9\}$

Krok 2. Przyrównujemy licznik do 0. $x^2 - 81 = 0$
$x_1 = 9, \ x_2 = -9$

Krok 3. Sprawdzamy, czy liczby 9 i -9 należą do dziedziny równania, i zapisujemy rozwiązanie. $x = -9$

Przykład 5.

Rozwiąż równanie $\frac{1-2x}{3-x} = x$.

Rozwiązanie

Krok 1. Wyznaczamy dziedzinę równania.

$$3 - x \neq 0$$
$$x \neq 3$$

Krok 2. Zapisujemy równoważną postać równania i rozwiązujemy je.

$$x(3-x) = 1 - 2x$$
$$3x - x^2 = 1 - 2x$$
$$-x^2 + 5x - 1 = 0$$
$$\Delta = 21$$
$$x_1 = \frac{5-\sqrt{21}}{2}, \quad x_2 = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

Krok 3. Wyznaczone liczby należą do dziedziny równania, więc są jego rozwiązaniami.

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M09867

1. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x-1}{2x+4} = 0$
b) $\frac{10-x}{6x-1} = 0$
c) $\frac{4x-3}{-x-8} = \frac{1}{2}$
d) $\frac{12x+6}{6x+12} = 3$

2. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x^2-1}{(x+1)(x-2)} = 0$
b) $\frac{9-x^2}{(x-9)(x+9)} = 0$
c) $\frac{x^2+36}{(x-6)(x+4)} = 0$
d) $\frac{x^2-49}{(7-x)x} = 0$

3. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{5-3x}{2x+6} = x$
b) $\frac{x^2-4x+4}{x+1} = 3x$
c) $\frac{1-3x}{x^2-x-2} = 0$
d) $\frac{2x-4}{3x} = \frac{x-1}{x-2}$

TEST 11

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Równanie $\frac{3-x}{x-9} = \frac{4}{3}$

A. nie ma rozwiązań.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.
C. ma dokładnie dwa rozwiązania.
D. ma dokładnie trzy rozwiązania.

2. Rozwiązaniem równania $\frac{4-x}{2-x} = 8$ jest liczba

A. $\frac{30}{7}$ B. 4 C. 2 D. $\frac{12}{7}$

3. Równanie $\frac{x^2-2}{(x-1)(x+1)} = 0$

A. nie ma rozwiązań.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.
C. ma dokładnie dwa rozwiązania.
D. ma dokładnie cztery rozwiązania.

4. Rozwiązaniem równania $\frac{5-x}{2x-2} = \frac{1}{2}$ jest

A. $x = 3$ B. $x = 5$ C. $x = 1$ D. $x = 2$

5. Równanie $\frac{2x-3}{4-7x} = 6$

A. ma dwa całkowite rozwiązania.
B. ma jedno niewymierne rozwiązanie.
C. ma jedno wymierne rozwiązanie.
D. nie ma rozwiązań.

6. Rozwiązaniem równania $\frac{5-3(x-1)}{2(x-1)} = -3$ jest liczba

A. $\frac{14}{9}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{14}{9}$

7. Jednym z rozwiązań równania $\frac{3x}{x+3} = 6 - x$ jest liczba

A. 6 B. 0 C. $-2\sqrt{3}$ D. $-3\sqrt{2}$

11. RÓWNANIA WYMIERNE

TO BYŁO NA MATURZE 11

W zadaniach 1.–5. wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – listopad 2009
Rozwiązaniem równania $\frac{x-5}{x+3} = \frac{2}{3}$ jest liczba

A. 21 B. 7 C. $\frac{17}{3}$ D. 0

Zadanie 2. (1 pkt) – maj 2010
Rozwiązaniem równania $\frac{3x-1}{7x+1} = \frac{2}{5}$ jest

A. 1 B. $\frac{7}{3}$ C. $\frac{4}{7}$ D. 7

Zadanie 3. (1 pkt) – sierpień 2010
Równanie $\frac{x^2-4}{(x-4)(x+4)} = 0$

A. nie ma rozwiązań.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.
C. ma dokładnie dwa rozwiązania.
D. ma dokładnie cztery rozwiązania.

Zadanie 4. (1 pkt) – czerwiec 2011
Równanie $\frac{x^2+25}{x-5} = 0$

A. nie ma rozwiązań.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.
C. ma dokładnie dwa rozwiązania.
D. ma dokładnie trzy rozwiązania.

Zadanie 5. (1 pkt) – sierpień 2014
Rozwiązaniem równania $\frac{x-5}{7-x} = \frac{1}{3}$ jest liczba

A. -11 B. $\frac{11}{2}$ C. $\frac{2}{11}$ D. 11

Zadanie 6. (2 pkt) – grudzień 2013
Rozwiąż równanie $\frac{x(x+1)}{x-1} = 5x - 4$ dla $x \neq 1$.

Zadanie 7. (2 pkt) – Informator 2014/2015
Rozwiąż równanie $\frac{2-3x}{1-2x} = -\frac{1}{2}$.

11. RÓWNANIA WYMIERNE

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 11

1. a) $x = 1$ b) $x = 10$ c) $x = -\frac{2}{9}$ d) $x = -5$ **2.** a) $x = 1$ b) $x = -3$ lub $x = 3$ c) brak rozwiązań d) $x = -7$ **3.** a) $x = -5$ lub $x = \frac{1}{2}$ b) $x = -4$ lub $x = \frac{1}{2}$ c) $x = \frac{1}{3}$ d) $x = \frac{-5-\sqrt{57}}{2}$ lub $x = \frac{-5+\sqrt{57}}{2}$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 11

1	2	3	4	5	6	7
B	D	C	A	C	B	D

1. Wyznaczamy dziedzinę równania: $x - 9 \neq 0$, stąd $x \neq 9$. Mnożymy „na krzyż" i otrzymujemy równanie $3(3 - x) = 4(x - 9)$, którego rozwiązaniem jest $x = \frac{45}{7}$. Poprawna jest odpowiedź B.

2. Wyznaczamy dziedzinę: $2 - x \neq 0$, stąd $x \neq 2$. Mnożymy „na krzyż" i otrzymujemy równanie $8(2 - x) = 4 - x$. Stąd $x = \frac{12}{7}$.

3. Wyznaczamy dziedzinę: $(x - 1)(x + 1) \neq 0$, stąd $x \neq -1$ i $x \neq 1$. Rozwiązujemy równanie $x^2 - 2 = 0$ i otrzymujemy: $x = \sqrt{2}$ i $x = -\sqrt{2}$. Poprawna jest odpowiedź C.

4. Wyznaczamy dziedzinę: $2x - 2 \neq 0$, stąd $x \neq 1$. Po przekształceniu otrzymujemy równanie $2(5 - x) = 2x - 2$. Jego rozwiązaniem jest liczba 3.

5. Wyznaczamy dziedzinę: $4 - 7x \neq 0$, stąd $x \neq \frac{4}{7}$. Po przekształceniu otrzymujemy równanie $6(4 - 7x) = 2x - 3$, którego rozwiązaniem jest $x = \frac{27}{44}$. Jest to liczba wymierna, więc poprawna jest odpowiedź C.

6. Wyznaczamy dziedzinę: $x - 1 \neq 0$, stąd $x \neq 1$. Przekształcamy równanie do postaci: $-3 \cdot 2(x - 1) = 5 - 3(x - 1)$, stąd $x = -\frac{2}{3}$.

7. Wyznaczamy dziedzinę: $x + 3 \neq 0$, stąd $x \neq -3$. Przekształcamy równanie do postaci: $3x = (x + 3)(6 - x)$. Otrzymujemy równanie kwadratowe: $x^2 = 18$, którego rozwiązaniami są liczby $3\sqrt{2}$ i $-3\sqrt{2}$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 11

1	2	3	4	5
A	D	C	A	B

6. $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$ **7.** $x = \frac{5}{8}$

12. Funkcja i jej własności

1. Przypomnij sobie

Funkcją nazywamy przyporządkowanie f, w którym każdemu elementowi x ze zbioru X odpowiada dokładnie jeden element y ze zbioru Y:

$$f : X \to Y.$$

Do zbioru X należą elementy, dla których funkcja jest określona. Zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji, a jego elementy – **argumentami**. Dziedzinę oznaczamy literą D.

Wartości funkcji f to elementy zbioru Y, które są przyporządkowane jakimś elementom zbioru X. Zbiór wartości oznaczamy Z_w.

Miejscem zerowym funkcji $y = f(x)$ nazywamy taki argument x, dla którego wartość funkcji jest równa zero: $f(x) = 0$.

Przypomnienie

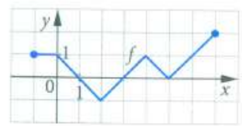
Zapis $f(x) = y$ oznacza, że funkcja f przyporządkowuje argumentowi x wartość y.

Jeżeli punkt $P = (x_P, y_P)$ należy do wykresu funkcji f, to $f(x_P) = y_P$.

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Określ własności funkcji $y = f(x)$ na podstawie jej wykresu i podaj wartość przyjmowaną przez tę funkcję dla argumentu 4.



Rozwiązanie

Krok 1. Określamy własności funkcji.

- **Dziedzina**

  Odczytujemy z osi Ox argumenty, dla których istnieje wykres funkcji: $D = \langle -1, 7 \rangle$.

- **Zbiór wartości**

  Odczytujemy z osi Oy wartości, dla których istnieje wykres funkcji: $Z_w = \langle -1, 2 \rangle$.

- **Wartość największa**

  Odczytujemy z osi Oy wartość, dla której wykres funkcji jest położony najwyżej: 2.

- **Wartość najmniejsza**

  Odczytujemy z osi Oy wartość, dla której wykres funkcji jest położony najniżej: -1.

- **Miejsce zerowe**

  Odczytujemy z osi Ox argumenty, dla których wykres funkcji przecina oś Ox: $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$.

- **Przedziały monotoniczności**

  Określamy przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca lub stała.

Uwaga

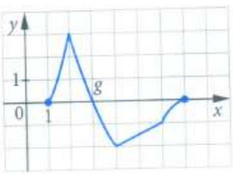
Przedziały monotoniczności to przedziały maksymalnej długości, w których funkcja jest rosnąca, malejąca lub stała.

1. Funkcja rosnąca – przesuwamy się zgodnie ze zwrotem osi Ox i szukamy fragmentów wykresu biegnących do góry, odczytujemy z osi Ox przedziały: $\langle 2, 4\rangle$, $\langle 5, 7\rangle$.
2. Funkcja malejąca – przesuwamy się zgodnie ze zwrotem osi Ox i szukamy fragmentów wykresu biegnących do dołu, odczytujemy z osi Ox przedziały: $\langle 0, 2\rangle$, $\langle 4, 5\rangle$.
3. Funkcja stała – szukamy równoległych do osi Ox fragmentów wykresu i odczytujemy z niej przedział: $\langle -1, 0\rangle$.

Krok 2. Odczytujemy, że funkcja f dla argumentu 4 przyjmuje wartość 1, czyli $f(4) = 1$.

Przykład 2.

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = g(x)$. Na jego podstawie podaj rozwiązania nierówności: $g(x) > 0$, $g(x) < 0$, $g(x) \geqslant 0$, $g(x) \leqslant 0$.



Rozwiązanie

- $g(x) > 0$. Odczytujemy z osi Ox argumenty, dla których wykres funkcji leży powyżej osi Ox: $x \in (1, 3)$.
- $g(x) < 0$. Odczytujemy z osi Ox argumenty, dla których wykres funkcji leży poniżej osi Ox: $x \in (3, 7)$.
- $g(x) \geqslant 0$. Odczytujemy z osi Ox argumenty, dla których wykres funkcji leży powyżej osi Ox lub ją przecina: $x \in \langle 1, 3\rangle \cup \{7\}$.
- $g(x) \leqslant 0$. Odczytujemy z osi Ox argumenty, dla których wykres funkcji leży poniżej osi Ox lub ją przecina: $x \in \{1\} \cup \langle 3, 7\rangle$.

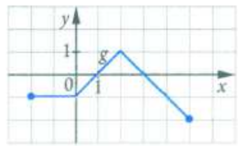
3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M12011

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Na jego podstawie podaj:

   a) dziedzinę i zbiór wartości funkcji,
   b) wartość największą funkcji,
   c) wartość najmniejszą funkcji,
   d) miejsca zerowe funkcji w przedziale $\left\langle -\frac{1}{2}, 3\right\rangle$,
   e) argumenty, dla których spełniona jest nierówność $f(x) < 0$,
   f) wartość, jaką funkcja osiąga dla argumentu $x = 0$,
   g) przedziały maksymalnej długości, w których funkcja jest rosnąca.

2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji g. Na jego podstawie podaj:

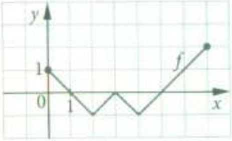


   a) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja jest malejąca,
   b) liczbę miejsc zerowych funkcji g,
   c) argumenty, dla których $g(x) > 0$,
   d) argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość największą,
   e) wartość, jaką ta funkcja przyjmuje dla $x = 4$.

TEST 12

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

Wykres do zadań 1.–3.



1. Funkcja f osiąga wartość największą dla

A. $x = 0$ B. $x = 2$ C. $x = 3$ D. $x = 7$

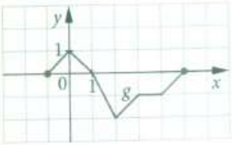
2. Która z liczb nie jest miejscem zerowym funkcji f?

A. 0 B. 1 C. 3 D. 5

3. Zbiorem wartości funkcji f jest

A. $\langle -1, 2\rangle$ B. $\langle 0, 7\rangle$ C. $\langle 1, 5\rangle$ D. $\langle 4, 7\rangle$

Wykres do zadań 4.–5.



4. Funkcja g jest malejąca w przedziale

A. $\langle -1, 1\rangle$ B. $\langle 3, 4\rangle$ C. $\langle 0, 2\rangle$ D. $\langle 1, 5\rangle$

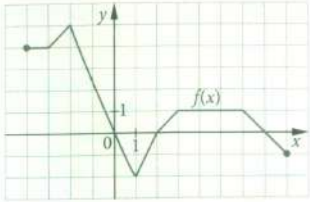
5. Wskaż przedział, w którym $g(x) > 0$.

A. $(-1, 5)$ B. $(-1, 1)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, 5)$

TO BYŁO NA MATURZE 12

W zadaniach 1.–3. wskaż poprawną odpowiedź.

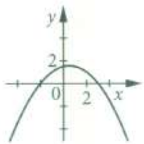
Zadanie 1. (1 pkt) – listopad 2010
Korzystając z wykresu funkcji f, wskaż nierówność prawdziwą.



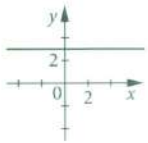
A. $f(-1) < f(1)$
B. $f(1) < f(3)$
C. $f(-1) < f(3)$
D. $f(3) < f(0)$

Zadanie 2. (1 pkt) – maj 2012
Wskaż wykres funkcji, która w przedziale $\langle -4, 4\rangle$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

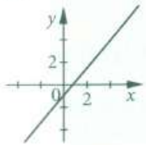
A.



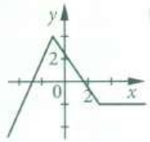
B.



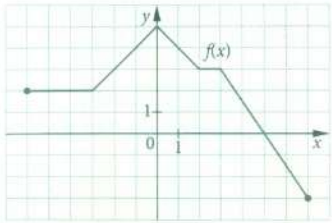
C.



D.

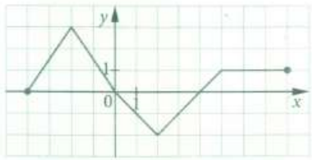


Zadanie 3. (1 pkt) – czerwiec 2013
Zbiorem wartości funkcji f jest przedział



A. $\langle -3, 5\rangle$ C. $\langle 0, 6\rangle$
B. $\langle -6, 7\rangle$ D. $\langle -5, 8\rangle$

Zadanie 4. (2 pkt) – maj 2011
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu i zapisz:



a) zbiór wartości funkcji f,
b) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca.

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 12

1. a) $D = \langle -2, 6 \rangle$, $Z_w = \langle -2, 2 \rangle$ b) 2 c) -2 d) 2 e) $x \in (-2, -1)$
f) $f(0) = 1$ g) $\langle -2, 0 \rangle$, $\langle 2, 4 \rangle$
2. a) $\langle 2, 5 \rangle$ b) dwa miejsca zerowe c) $x \in (1, 3)$ d) $x = 2$ e) $g(4) = -1$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 12

1	2	3	4	5
D	A	A	C	B

1. Na wykresie funkcji znajdujemy punkt położony najwyżej. Następnie z osi Ox odczytujemy argument, dla którego funkcja osiąga wartość największą – jest to $x = 7$.

2. Funkcja przyjmuje wartość zero dla $x \in \{1, 3, 5\}$, więc $x = 0$ nie jest jej miejscem zerowym.

3. Odczytujemy z osi Oy zbiór wartości: $\langle -1, 2 \rangle$.

4. Odczytujemy z wykresu, że funkcja jest malejąca w przedziale $\langle 0, 2 \rangle$. Poprawna jest odpowiedź C.

5. Odczytujemy z osi Ox argumenty, dla których wykres funkcji leży powyżej osi Ox: $x \in (-1, 1)$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 12

1	2	3
B	C	A

4. a) $\langle -2, 3 \rangle$ b) $\langle -2, 2 \rangle$

12. FUNKCJA I JEJ WŁASNOŚCI

13. Funkcja liniowa

1. Przypomnij sobie

Funkcja liniowa to funkcja określona wzorem:

$$f(x) = ax + b,$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

Przypomnienie

Współczynnik a nazywamy współczynnikiem kierunkowym.

Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór liczb rzeczywistych.

Współczynniki a i b we wzorze funkcji liniowej

Funkcja liniowa $y = ax + b$ jest:

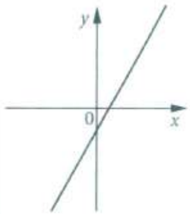
- rosnąca dla $a > 0$,
- malejąca dla $a < 0$,
- stała dla $a = 0$.

Uwaga

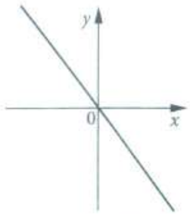
Prosta $x = c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$, nie jest wykresem funkcji.

Prosta o równaniu $y = ax + b$ przecina oś Oy w punkcie o współrzędnych $(0, b)$.

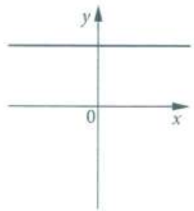
Znaki współczynników funkcji liniowej $y = ax + b$ na podstawie jej wykresu



$a > 0$, bo funkcja jest rosnąca.
$b < 0$, bo punkt przecięcia z osią Oy leży poniżej osi Ox.



$a < 0$, bo funkcja jest malejąca.
$b = 0$, bo punkt przecięcia z osią Oy leży w początku układu współrzędnych.



$a = 0$, bo funkcja jest stała.
$b > 0$, bo punkt przecięcia z osią Oy leży powyżej osi Ox.

Miejsce zerowe funkcji liniowej $y = ax + b$ dla $a \neq 0$ jest równe $-\frac{b}{a}$.

13. FUNKCJA LINIOWA

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Dana jest funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = 2x - 4$ dla $x \in \mathbb{R}$.

a) Wyznacz miejsce zerowe funkcji f.

b) Podaj współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji z osią Oy.

c) Określ, czy funkcja jest rosnąca, malejąca czy stała.

d) Naszkicuj wykres funkcji.

Rozwiązanie

a) Miejsce zerowe funkcji f to argument, dla którego $f(x) = 0$.

$2x - 4 = 0$
$x = 2$

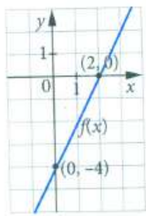
Możemy je również obliczyć za pomocą współczynników a i b.

$-\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = 2$

b) Współrzędne punktu przecięcia prostej z osią Oy to $(0, b)$, czyli $(0, -4)$.

c) Funkcja f jest rosnąca, ponieważ współczynnik kierunkowy $a = 2$ jest dodatni.

d) Aby narysować prostą w układzie współrzędnych, wystarczy zaznaczyć dowolne dwa punkty należące do wykresu funkcji liniowej, a następnie przeprowadzić przez nie prostą.
Mogą to być punkty przecięcia z osiami układu. W tym przypadku: z osią Oy – punkt $(0, -4)$, z osią Ox – punkt o pierwszej współrzędnej będącej miejscem zerowym funkcji liniowej, a drugiej równej zero, czyli $(2, 0)$.



Przykład 2.

Dana jest funkcja liniowa $g(x) = (6m + 6)x + 9$. Dla jakich wartości m funkcja g jest:

a) rosnąca, b) malejąca, c) stała?

Rozwiązanie

a) Funkcja liniowa jest rosnąca wtedy, gdy jej współczynnik kierunkowy jest dodatni.
Zatem funkcja g jest rosnąca, gdy:

$6m + 6 > 0 \quad |:6$
$m + 1 > 0$
$m > -1$

b) Funkcja g jest malejąca wtedy, gdy:

$6m + 6 < 0 \quad |:6$
$m + 1 < 0$
$m < -1$

c) Funkcja g jest stała wtedy, gdy:

$6m + 6 = 0 \quad |:6$
$m + 1 = 0$
$m = -1$

Przykład 3.

Do wykresu funkcji liniowej $h(x) = (3m - 9)x + 12$ należy punkt $P = (-1, -24)$.

a) Wyznacz wartość m.

b) Podaj argument, dla którego wartość funkcji wynosi 21.

Rozwiązanie

a) Punkt P należy do wykresu funkcji, więc $h(-1) = -24$. Rozwiązujemy otrzymane równanie.

$(3m - 9) \cdot (-1) + 12 = -24$
$-3m + 9 + 12 = -24$
$m = 15$
Zatem $h(x) = 36x + 12$.

b) Szukamy argumentu x, dla którego $h(x) = 21$.

$36x + 12 = 21$
$x = \frac{1}{4}$

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M12067

1. Funkcja liniowa określona jest wzorem $f(x) = -3x + 10$.

a) Wyznacz jej miejsce zerowe.

b) Wyznacz współrzędne punktu przecięcia funkcji f z osią Oy.

2. Dla jakich wartości m funkcja $g(x) = (16m - 8)x + 5$ jest:

a) rosnąca, b) malejąca, c) stała?

3. Wykres funkcji $h(x) = \left(1 - \frac{2}{3}m\right)x - 6m + 1$ przechodzi przez punkt $(9, -2)$. Wyznacz wartość m i naszkicuj wykres funkcji.

TEST 13

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. O funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ wiadomo, że jest rosnąca, a jej wykres przecina oś Oy poniżej osi Ox. Prawdą jest, że

A. $a > 0, b > 0$ C. $a < 0, b > 0$
B. $a > 0, b < 0$ D. $a < 0, b < 0$

2. Funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = (9m^2 - 6m + 1)x + 4$ jest stała. Wobec tego

A. $m < \frac{1}{3}$ B. $m > \frac{1}{3}$ C. $m = \frac{1}{3}$ D. $m = 0$

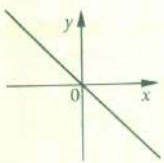
3. Do wykresu funkcji liniowej $g(x) = (-2m - 6)x + 5m$ należy punkt $P = (2, \sqrt{2})$. Wobec tego

A. $m = \frac{\sqrt{2}-10}{10}$ C. $m = \sqrt{2} - 12$
B. $m = \frac{\sqrt{2}+10}{10}$ D. $m = \sqrt{2} + 12$

4. Miejsce zerowe funkcji $f(x) = 9x + 27$ jest także miejscem zerowym funkcji $g(x) = (-m + 1)x - 4m + 10$. Wynika stąd, że

A. $m = 7$ B. $m = \frac{11}{2}$ C. $m = -\frac{11}{2}$ D. $m = -7$

5. Rysunek przedstawia wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + b$.



Z analizy wykresu wynika, że

A. $a > 0, b = 0$ C. $a < 0, b < 0$
B. $a = 0, b > 0$ D. $a < 0, b = 0$

TO BYŁO NA MATURZE 13

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

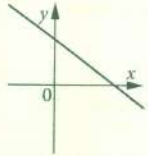
Zadanie 1. (1 pkt) – sierpień 2011
Funkcja liniowa $f(x) = (m - 2)x - 11$ jest rosnąca dla

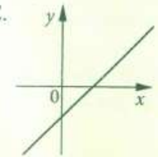
A. $m > 2$ B. $m > 0$ C. $m < 13$ D. $m < 11$

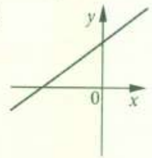
Zadanie 2. (1 pkt) – maj 2012
Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = ax + 6$, gdzie $a > 0$. Wówczas spełniony jest warunek

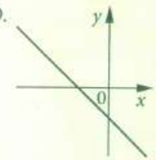
A. $f(1) > 1$ B. $f(2) = 2$ C. $f(3) < 3$ D. $f(4) = 4$

Zadanie 3. (1 pkt) – czerwiec 2012
Jeden z rysunków przedstawia wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, gdzie $a > 0$ i $b < 0$. Wskaż ten wykres.

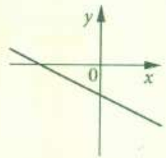
A.


C.


B.


D.


Zadanie 4. (1 pkt) – maj 2013
Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu pewnej funkcji liniowej $y = ax + b$. Jakie znaki mają współczynniki a i b?



A. $a < 0$ i $b < 0$ C. $a > 0$ i $b < 0$
B. $a < 0$ i $b > 0$ D. $a > 0$ i $b > 0$

Zadanie 5. (1 pkt) – maj 2014
Funkcja liniowa $f(x) = (m^2 - 4)x + 2$ jest malejąca, gdy

A. $m \in \{-2, 2\}$ C. $m \in (-\infty, -2)$
B. $m \in (-2, 2)$ D. $m \in (2, +\infty)$

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 13

1. a) $3\frac{1}{3}$ b) $(0,10)$ **2.** a) $m \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ b) $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ c) $m = \frac{1}{2}$
3. $m = 1$, $h(x) = \frac{1}{3}x - 5$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 13

1	2	3	4	5
B	C	D	A	D

1. Wykres funkcji przecina oś Oy poniżej osi Ox, więc $b < 0$. Funkcja jest rosnąca, więc $a > 0$. Poprawna jest odpowiedź B.

2. Aby funkcja liniowa f była stała, musi być spełniony warunek $9m^2 - 6m + 1 = 0$. Przekształcamy otrzymane równanie, korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy: $(3m - 1)^2 = 0$, stąd $m = \frac{1}{3}$.

3. Do wykresu funkcji należy punkt P, więc $g(2) = \sqrt{2}$. Rozwiązujemy równanie $\sqrt{2} = (-2m - 6) \cdot 2 + 5m$. Otrzymujemy: $m = \sqrt{2} + 12$.

4. Obliczamy miejsce zerowe funkcji f: $f(x) = 0$, gdy $9x + 27 = 0$. Stąd $x = -3$. Ta liczba jest również miejscem zerowym funkcji g, więc $g(3) = 0$. Otrzymujemy: $(-m + 1) \cdot (-3) - 4m + 10 = 0$. Stąd $m = 7$.

5. Wykres przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc $b = 0$. Funkcja jest malejąca, więc $a < 0$. Poprawna jest odpowiedź D.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 13

1	2	3	4	5
A	A	C	A	B

14. Funkcja kwadratowa (I)

1. Przypomnij sobie

Funkcja kwadratowa (trójmian kwadratowy) jest funkcją określoną wzorem:

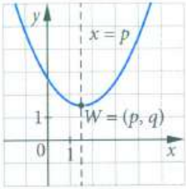
$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdzie $a, b, c \in \mathbf{R}$ i $a \neq 0$.
Jest to postać ogólna funkcji kwadratowej.

Wykresem funkcji kwadratowej jest **parabola**, której punktem charakterystycznym jest **wierzchołek** W o współrzędnych:

$$W = (p, q) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right),$$

gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$.
Prosta $x = p$ jest **osią symetrii** paraboli.



Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych **R**.

Zbiór wartości funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest określony następująco:

$$Z_w = \begin{cases} \langle q, +\infty), & \text{gdy } a > 0 \\ (-\infty, q\rangle, & \text{gdy } a < 0 \end{cases}.$$

Przypomnienie

Funkcja kwadratowa osiąga wartość najmniejszą $y = q$ dla $x = p$, gdy $a > 0$.

Funkcja kwadratowa osiąga wartość największą $y = q$ dla $x = p$, gdy $a < 0$.

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej
Wzór funkcji kwadratowej: $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, można przedstawić w postaci kanonicznej:

$$y = a(x - p)^2 + q.$$

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = 2x^2 - 8x + 12$. Podaj:
a) współrzędne wierzchołka paraboli,
b) wzór funkcji w postaci kanonicznej,
c) dziedzinę i zbiór wartości funkcji f,
d) najmniejszą wartość funkcji i argument, dla którego jest ona osiągana.

Rozwiązanie

a) Wypisujemy współczynniki funkcji kwadratowej, a następnie obliczamy wartości współrzędnych p i q, korzystając ze wzorów.

$$a = 2, b = -8, c = 12,$$

stąd

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{4} = 2, q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-64+96}{8} = 4.$$

Wobec tego wierzchołek ma współrzędne $W = (2, 4)$.

Uwaga

Aby obliczyć współrzędną q, możesz skorzystać z tego, że jest ona wartością funkcji w punkcie p, np. dla funkcji f mamy: $q = f(p)$.

b) Zapisujemy funkcję f w postaci kanonicznej. Mamy $a = 2$, $p = 2$ i $q = 4$.

$$f(x) = a(x-p)^2 + q = 2(x-2)^2 + 4$$

c) $D = \mathbb{R}$, zbiór wartości jest postaci $\langle q, +\infty)$, bo $a = 2 > 0$, czyli $Z_w = \langle 4, +\infty)$.

d) Funkcja f osiąga najmniejszą wartość $y = q = 4$ dla $x = 2$.

Przykład 2.

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = -3(x+1)^2 - 5$. Podaj:

a) wzór funkcji w postaci ogólnej,

b) współrzędne wierzchołka paraboli,

c) dziedzinę i zbiór wartości funkcji f.

Rozwiązanie

a) Korzystamy ze wzoru $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ i przekształcamy wzór funkcji z postaci kanonicznej do postaci ogólnej.

$$f(x) = -3(x+1)^2 - 5 = -3(x^2 + 2x + 1) - 5 = -3x^2 - 6x - 8$$

b) Z postaci kanonicznej funkcji odczytujemy, że $p = -1, q = -5$, stąd $W = (-1, -5)$.

c) $D = \mathbb{R}$, zbiór wartości jest postaci $(-\infty, q\rangle$, bo $a = -3 < 0$, więc $Z_w = (-\infty, -5\rangle$.

Przykład 3.

Dana jest funkcja kwadratowa określona wzorem $f(x) = x^2 - 6x + 9$. Podaj:

a) wzór funkcji w postaci kanonicznej,

b) równanie osi symetrii paraboli,

c) zbiór wartości funkcji f.

Rozwiązanie

a) $a = 1, b = -6, c = 9$, stąd $p = \frac{6}{2} = 3, q = 0$, więc $f(x) = (x-3)^2$.

b) Oś symetrii wykresu funkcji kwadratowej jest określona równaniem $x = p = 3$.

c) Mamy $a = 1 > 0$, więc $Z_w = \langle 0, +\infty)$.

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M13396

1. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$. Podaj:

a) współrzędne wierzchołka paraboli,

b) wzór funkcji w postaci kanonicznej,

c) dziedzinę i zbiór wartości funkcji f,

d) najmniejszą wartość funkcji i argument, dla którego jest ona osiągana.

2. Dana jest funkcja kwadratowa $g(x) = 2(x+6)^2 + 12$. Podaj:

a) wzór funkcji w postaci ogólnej,

b) równanie osi symetrii paraboli,

c) zbiór wartości funkcji g.

3. Dana jest funkcja kwadratowa $h(x) = -x^2 + 3x$. Podaj:

a) współrzędne wierzchołka paraboli,

b) wzór funkcji w postaci kanonicznej,

c) dziedzinę i zbiór wartości funkcji h.

TEST 14

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Wskaż współrzędne wierzchołka paraboli określonej równaniem $y = x^2 + 2x$.

A. $(1,2)$ B. $(2,1)$ C. $(-1,-1)$ D. $(1,1)$

2. Dana jest parabola o wierzchołku $W = (6,-3)$. Wskaż wzór, który może ją opisywać.

A. $f(x) = (x-6)^2 - 3$ C. $f(x) = (x-6)^2 + 3$
B. $f(x) = (x+6)^2 - 3$ D. $f(x) = (x+6)^2 + 3$

3. Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $g(x) = 2x^2 - 2x + \frac{3}{2}$. Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział

A. $\left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right)$ B. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle$ C. $\langle 1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1\rangle$

4. Wskaż wzór funkcji, której zbiorem wartości jest zbiór $(-\infty, 4\rangle$.

A. $g(x) = x^2 + 4$ C. $g(x) = -(x-4)^2 + 1$
B. $g(x) = -(x-1)^2 + 4$ D. $g(x) = -(x-4)^2 - 4$

5. Wierzchołek paraboli $y = 5x^2 - 10x + 7$ leży na prostej

A. $x = 5$ B. $x = 2$ C. $y = 1$ D. $y = 2$

6. Parabola jest określona równaniem $y = \sqrt{2}(x+1)^2 - 1$. Równanie osi symetrii tej paraboli ma postać

A. $x = -\sqrt{2}$ B. $x = -1$ C. $x = 1$ D. $x = \sqrt{2}$

TO BYŁO NA MATURZE 14

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – listopad 2010
Wskaż równanie prostej, która jest osią symetrii paraboli o równaniu $y = x^2 - 4x + 2010$.

A. $x = 4$ B. $x = -4$ C. $x = 2$ D. $x = -2$

Zadanie 2. (1 pkt) – sierpień 2011
Zbiorem wartości funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 4$ jest

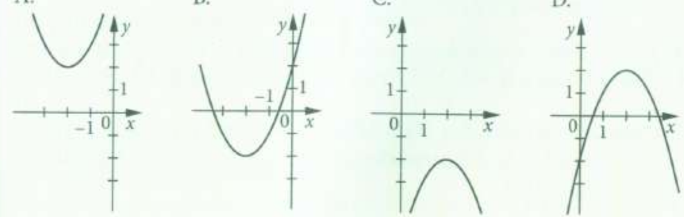
A. $\langle -4, +\infty)$ B. $\langle -2, +\infty)$ C. $\langle 2, +\infty)$ D. $\langle 4, +\infty)$

Zadanie 3. (1 pkt) – czerwiec 2012
Wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = x^2 - 4x + 4$ jest punkt o współrzędnych

A. $(0,2)$ B. $(0,-2)$ C. $(-2,0)$ D. $(2,0)$

Zadanie 4. (1 pkt) – sierpień 2012
Wskaż fragment wykresu funkcji kwadratowej, której zbiorem wartości jest $\langle -2, +\infty)$.

A. B. C. D.



Zadanie 5. (1 pkt) – maj 2013
Wierzchołkiem paraboli $y = -3(x-2)^2 + 4$ jest punkt o współrzędnych

A. $(-2,-4)$ B. $(-2,4)$ C. $(2,-4)$ D. $(2,4)$

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 14

1. a) $W = (-1, 3)$ b) $f(x) = 2(x+1)^2 + 3$ c) $D = \mathbb{R}, Z_w = \langle 3, +\infty)$
d) $y = 3$ dla $x = -1$
2. a) $g(x) = 2x^2 + 24x + 84$ b) $x = -6$ c) $Z_w = \langle 12, +\infty)$
3. a) $W = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ b) $h(x) = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$ c) $D = \mathbb{R}, Z_w = \left(-\infty, \frac{9}{4}\right\rangle$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 14

1	2	3	4	5	6
C	A	C	B	D	B

1. Wypisujemy współczynniki funkcji kwadratowej: $a = 1, b = 2, c = 0$, a następnie obliczamy p i q: $p = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1, q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-4}{4} = -1$. Stąd wierzchołek $W = (-1, -1)$.

2. Podstawiamy współrzędne wierzchołka do wzoru na postać kanoniczną funkcji kwadratowej i otrzymujemy: $f(x) = a(x-6)^2 - 3$, gdzie $a \neq 0$. Tę funkcję może opisywać wzór A.

3. Mamy $a = 2 > 0$, więc zbiór wartości funkcji g jest postaci $\langle q, +\infty)$. Obliczamy $q = \frac{8}{8} = 1$, więc $Z_w = \langle 1, +\infty)$.

4. Zbiór wartości funkcji kwadratowej jest postaci $(-\infty, q\rangle$, gdy $a < 0$. Dla funkcji g mamy: $a < 0, q = 4$. Poprawna jest odpowiedź B.

5. Obliczamy współrzędne wierzchołka $W = (p, q)$: $p = 1, q = 2$. Wierzchołek znajduje się na prostych o równaniach: $x = 1, y = 2$. Poprawna jest odpowiedź D.

6. Oś symetrii paraboli ma postać $x = p$. Funkcja jest w postaci kanonicznej, więc z jej wzoru odczytujemy wartość p: $p = -1$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 14

1	2	3	4	5
C	A	D	B	D

15. Funkcja kwadratowa (II)

1. Przypomnij sobie

Miejsce zerowe funkcji kwadratowej

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$:

- ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, gdy $\Delta = b^2 - 4ac > 0$,
- ma jedno miejsce zerowe: $x_0 = -\frac{b}{2a}$, gdy $\Delta = 0$,
- nie ma miejsc zerowych, gdy $\Delta < 0$.

Postać funkcji kwadratowej

Wzór funkcji kwadratowej, dla $a \neq 0$, można przedstawić w postaci:

- **ogólnej:** $y = ax^2 + bx + c$,
- **iloczynowej:**
  - $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, jeśli $\Delta > 0$,
  - $y = a(x - x_0)^2$, jeśli $\Delta = 0$,
- **kanonicznej:** $y = a(x-p)^2 + q$, gdzie p i q to współrzędne wierzchołka paraboli, $W = (p, q)$.

Punkty przecięcia paraboli z osiami układu

Parabola $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, przecina:

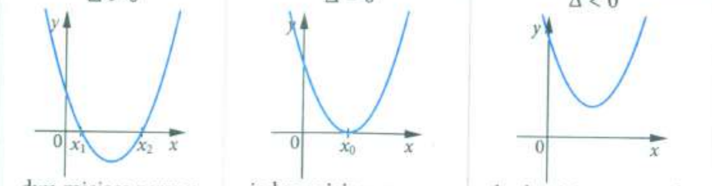
- oś Ox w punktach: $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$, gdy $\Delta > 0$, lub w punkcie $(x_0, 0)$, gdy $\Delta = 0$,
- oś Oy w punkcie $(0, c)$.

Interpretacja geometryczna

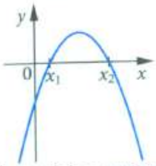
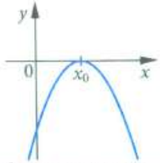
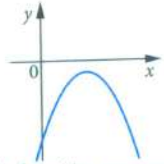
Jeśli współczynnik $a > 0$, to ramiona paraboli $y = ax^2 + bx + c$ skierowane są do góry, jeśli $a < 0$ – skierowane są do dołu.

$a > 0$

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$



dwa miejsca zerowe	jedno miejsce zerowe	brak miejsc zerowych

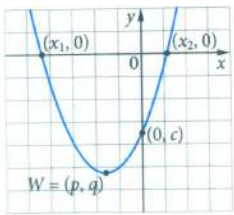
$a < 0$		
$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
		
dwa miejsca zerowe	jedno miejsce zerowe	brak miejsc zerowych

Szkicowanie paraboli

Aby narysować parabolę $y = ax^2 + bx + c$, należy ustalić:

- współrzędne jej wierzchołka $W = (p, q) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$,
- punkty przecięcia paraboli z osią Ox (jeśli istnieją): $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$,
- punkt przecięcia paraboli z osią Oy: $(0, c)$,
- zwrot ramion paraboli ($a > 0$ – do góry, $a < 0$ – do dołu).

Dodatkowo można zaznaczyć inne punkty należące do wykresu funkcji, po obliczeniu ich ze wzoru.



2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

Rozwiązanie

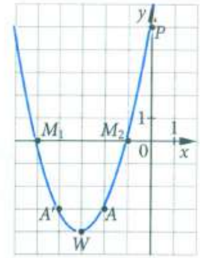
Krok 1. Wyznaczamy punkty charakterystyczne należące do wykresu funkcji f i określamy zwrot ramion paraboli:

- współrzędne wierzchołka paraboli: $W = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = (-3, -4)$,
- punkty przecięcia paraboli z osią Ox
  $\Delta = 16 > 0$, stąd $x_1 = -5$, $x_2 = -1$, mamy dwa punkty: $(-5, 0)$, $(-1, 0)$,
- punkt przecięcia paraboli z osią Oy: $P = (0, c) = (0, 5)$,
- zwrot ramion paraboli – ramiona będą skierowane do góry, bo $a = 1 > 0$.

Aby uzyskać dokładniejszy wykres, wyznaczamy współrzędne innych punktów należących do paraboli. Weźmy $x = -2$. Obliczamy

$$f(-2) = (-2)^2 + 6 \cdot (-2) + 5 = -3$$

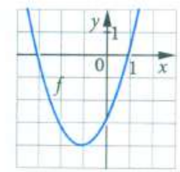
i zapisujemy współrzędne punktu: $A = (-2, -3)$. Ponieważ parabola jest symetryczna względem osi $x = -3$, kolejnym punktem może być punkt symetryczny do A: $A' = (-4, -3)$.



Krok 2. Zaznaczamy wyznaczone punkty i szkicujemy parabolę.

Przykład 2.

Na podstawie wykresu funkcji f wyznacz jej wzór w postaci ogólnej.



Rozwiązanie

Krok 1. Odczytujemy z wykresu miejsca zerowe funkcji f: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, a następnie zapisujemy wzór funkcji w postaci iloczynowej.

$$f(x) = a(x + 3)(x - 1), \text{ gdzie } a \neq 0$$

Krok 2. Do wykresu funkcji należy punkt $(0, -3)$, więc $f(0) = -3$. Rozwiązujemy otrzymane równanie.

$$a(0 + 3)(0 - 1) = -3$$

$$-3a = -3, \text{ więc } a = 1$$

Krok 3. Wstawiamy do wzoru obliczoną wartość a i przekształcamy wzór z postaci iloczynowej do postaci ogólnej.

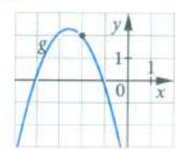
$$f(x) = (x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x - 3$$

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M15867

1. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x^2 - 6x - 7$.

2. Na podstawie wykresu funkcji g wyznacz jej wzór ogólny.

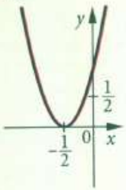


TEST 15

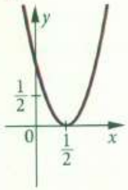
W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Na którym z wykresów przedstawiono parabolę określoną równaniem $y = 4x^2 - 4x + 1$?

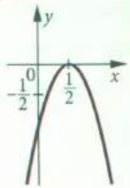
A.



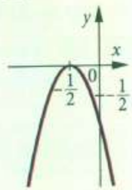
B.



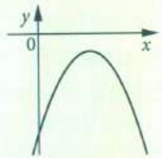
C.



D.



2. Dany jest wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ dla $a, b, c \in \mathbf{R}$ i $a \neq 0$. Wynika z tego, że



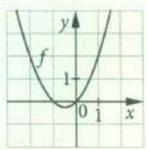
A. $a > 0, c > 0$ C. $a < 0, c < 0$

B. $a > 0, c < 0$ D. $a < 0, c > 0$

3. Do wykresu funkcji kwadratowej określonej równaniem $f(x) = ax^2 + 14x - 24$ należy punkt $(5, -4)$. Wobec tego

A. $a = -2$ B. $a = -\frac{1}{28}$ C. $a = \frac{1}{28}$ D. $a = 2$

4. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji kwadratowej f. Wskaż jej wzór.



A. $f(x) = x^2 - x$ C. $f(x) = x^2 + 1$

B. $f(x) = x^2 + x$ D. $f(x) = x^2 - 1$

TO BYŁO NA MATURZE 15

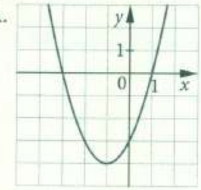
W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – listopad 2009
Do wykresu funkcji $f(x) = x^2 + x - 2$ należy punkt

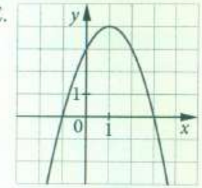
A. $(-1, -4)$ B. $(-1, 1)$ C. $(-1, -1)$ D. $(-1, -2)$

Zadanie 2. (1 pkt) – czerwiec 2012
Na jednym z poniższych rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = x^2 + 2x - 3$. Wskaż ten rysunek.

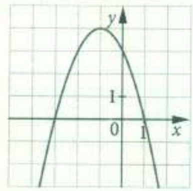
A.



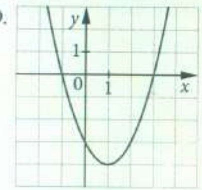
C.



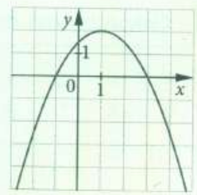
B.



D.



Zadanie 3. (1 pkt) – maj 2014
Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej f. Funkcja f jest określona wzorem



A. $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)(x - 1)$

B. $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 3)(x - 1)$

C. $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)(x + 1)$

D. $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 3)(x + 1)$

Zadanie 4. (1 pkt) – czerwiec 2014
Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = 3x^2 + 7x + c$ jest liczba $\frac{-7}{3}$. Wówczas c jest równe

A. 0 B. 1 C. −98 D. 98

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 15

1. wierzchołek: $(3, -16)$, punkty przecięcia z osią Ox: $(-1, 0)$, $(7, 0)$, punkt przecięcia z osią Oy: $(0, -7)$ **2.** $g(x) = -x^2 - 5x - 4$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 15

1	2	3	4
B	C	A	B

1. Współczynnik $a = 4 > 0$, więc ramiona paraboli skierowane są do góry. Obliczamy miejsce zerowe: $\Delta = 0$, $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$. Poprawny jest wykres B.

2. Ramiona paraboli skierowane są do dołu, więc $a < 0$. Parabola przecina oś Oy poniżej osi Ox, więc $c < 0$.

3. Jeśli do wykresu funkcji f należy punkt $(5, -4)$, to $f(5) = -4$. Rozwiązujemy otrzymane równanie: $a \cdot 5^2 + 14 \cdot 5 - 24 = -4$, stąd $a = -2$.

4. Miejscami zerowymi funkcji f są liczby -1 i 0, więc postać iloczynowa funkcji to: $f(x) = ax(x+1)$, $a \neq 0$. Do wykresu funkcji należy punkt $(1, 2)$, więc $f(1) = 2$. Stąd $a = 1$. Zatem $f(x) = x(x+1) = x^2 + x$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 15

1	2	3	4
D	A	D	A

16. Pojęcie ciągu

1. Przypomnij sobie

Ciąg liczbowy to funkcja, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich $\{1, 2, 3, \dots\}$, a wartości są liczbami rzeczywistymi:

$$f : \{1, 2, 3, \dots\} \to \mathbb{R}.$$

Wzór ogólny ciągu to wyrażenie, według którego oblicza się wyrazy ciągu, np. $a_n = \frac{n^2}{4n+1}$, $b_n = -n^3 + 2$.

Przypomnienie

Ciągi oznaczamy: $(a_n), (b_n), (c_n)$ itd.

Ciągi są zdefiniowane dla $n \geqslant 1$.

Wyrazy ciągu to wartości ciągu. Jeśli dany jest wzór ogólny ciągu, to obliczamy je, podstawiając za n kolejne liczby naturalne, np. dla podanych wyżej ciągów (a_n) i (b_n): $a_1 = \frac{1}{5}$, $a_2 = \frac{4}{9}$, $a_3 = \frac{9}{13}$, $b_1 = 1$, $b_2 = -6$, $b_3 = -25$.

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = n^2 - n + 4$ dla $n \geqslant 1$. Wyznacz trzy początkowe wyrazy tego ciągu.

Rozwiązanie

Wyznaczamy wyrazy a_1, a_2 i a_3, podstawiając za n we wzorze ogólnym kolejno 1, 2 i 3.

$$a_1 = 1^2 - 1 + 4 = 4,\quad a_2 = 2^2 - 2 + 4 = 6,\quad a_3 = 3^2 - 3 + 4 = 10$$

Przykład 2.

Ciąg (b_n) jest określony wzorem ogólnym $b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ dla $n \geqslant 1$. Wyznacz b_3, b_4 i b_{10}.

Rozwiązanie

Podstawiamy za n we wzorze ogólnym kolejno 3, 4 i 10.

- $b_3 = (-1)^3 \cdot \frac{1}{3} = -1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$
- $b_4 = (-1)^4 \cdot \frac{1}{4} = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
- $b_{10} = (-1)^{10} \cdot \frac{1}{10} = 1 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

Przykład 3.

Które wyrazy ciągu (a_n) określonego dla $n \geqslant 1$ są równe 5?

a) $a_n = 4n - 11$

b) $a_n = n^2 - 2n + 2$

Rozwiązanie

a) Wyznaczamy n, dla którego n-ty wyraz ciągu wynosi 5. Rozwiązujemy równanie $a_n = 5$.

$$4n - 11 = 5$$

$$4n = 16 \quad |:4$$

$$n = 4$$

$n = 4 \geqslant 1$, więc czwarty wyraz ciągu (a_n) jest równy 5.

Uwaga

Aby wyznaczyć wyrazy ciągu równe danej liczbie, przyrównaj wzór tego ciągu do tej liczby, a następnie sprawdź, czy rozwiązania równania należą do dziedziny ciągu.

b) Rozwiązujemy równanie $a_n = 5$.

$$n^2 - 2n + 2 = 5$$

$$n^2 - 2n - 3 = 0$$

$$\Delta = 16 > 0$$

$$n_1 = -1, \quad n_2 = 3$$

Odrzucamy pierwsze rozwiązanie, bo $n = -1$ nie należy do dziedziny ciągu. Trzeci wyraz ciągu (a_n) jest równy 5.

Przykład 4.

Który wyraz ciągu $a_n = \frac{3n}{n+1}$, $n \geqslant 1$, jest równy $\frac{8}{3}$?

Rozwiązanie

Wyznaczamy n, dla którego $a_n = \frac{8}{3}$. Rozwiązujemy otrzymane równanie.

$$\frac{3n}{n+1} = \frac{8}{3}$$

$$8 \cdot (n+1) = 3 \cdot 3n$$

$$8n + 8 = 9n$$

$$n = 8$$

Liczba 8 należy do dziedziny ciągu, więc ósmy wyraz ciągu jest równy $\frac{8}{3}$.

Przykład 5.

Ile wyrazów ciągu $b_n = -n^2 + 17n - 60$, $n \geqslant 1$, jest dodatnich?

Rozwiązanie

Szukamy wartości n, dla których wyrazy ciągu są dodatnie. Rozwiązujemy nierówność $b_n > 0$.

$$-n^2 + 17n - 60 > 0$$

$$\Delta = 49$$

$$n_1 = 5, \quad n_2 = 12$$

Stąd $n \in (5, 12)$. Liczby naturalne dodatnie, należące do tego przedziału, to: 6, 7, 8, 9, 10, 11. Tych liczb jest sześć, więc sześć wyrazów ciągu (b_n) jest dodatnich.

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M19514

1. Oblicz wyrazy a_1 i a_5 ciągu (a_n) dla $n \geqslant 1$.

a) $a_n = n^2 + 3n - 4$

b) $a_n = (-1)^n \cdot (2n - 1)$

c) $a_n = \frac{1}{4n} + n$

d) $a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}$

2. Który wyraz ciągu (b_n) jest równy 14, jeśli:

a) $b_n = 3n + 5$,

b) $b_n = \frac{1}{3}n + 9$?

3. Który wyraz ciągu (c_n) jest równy $\frac{1}{12}$, jeśli:

a) $c_n = \frac{2}{n} - \frac{1}{4}$,

b) $c_n = 1 - \frac{11}{3n}$?

4. Ile wyrazów ciągu $d_n = -n^2 + 16$, $n \geqslant 1$, jest dodatnich?

TEST 16

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ dla $n \geqslant 1$. Czwarty wyraz tego ciągu jest równy

A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 8

2. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1} + 1$ dla $n \geqslant 1$. Wyraz a_1 jest równy

A. 1 B. $\frac{9}{5}$ C. $\frac{8}{5}$ D. 0

3. Ciąg (b_n) jest określony wzorem $b_n = (n-6)^2 + 4$ dla $n \geqslant 1$. Wobec tego

A. $b_5 < b_7$ B. $b_5 = 2b_7$ C. $b_5 = b_7$ D. $b_5 = b_7 - 2$

4. Ile wyrazów ciągu $b_n = n^2 - 8n + 15$ dla $n \geqslant 1$ jest równych 0?

A. żaden B. jeden C. dwa D. trzy

5. Dane są dwa ciągi określone dla liczb naturalnych dodatnich: $a_n = 13$ i $b_n = 3n + 4$. Dla jakiego n zachodzi równość $a_n = b_n$?

A. 43 B. 9 C. 4 D. 3

6. Ile wyrazów ciągu $a_n = 8 - n^2$ dla $n \geqslant 1$ jest dodatnich?

A. 2 B. 4 C. 5 D. 7

7. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2^n - 3^n$ dla liczb naturalnych dodatnich. Wobec tego

A. $a_3 - a_2 = -24$
B. $a_3 - a_2 = -14$
C. $a_3 - a_2 = -6$
D. $a_3 - a_2 = -1$

16. POJĘCIE CIĄGU

TO BYŁO NA MATURZE 16

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – listopad 2009
Dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ ciąg (a_n) jest określony wzorem: $a_n = (-1)^n \cdot (3-n)$. Wtedy

A. $a_3 < 0$ B. $a_3 = 0$ C. $a_3 = 1$ D. $a_3 > 1$

Zadanie 2. (1 pkt) – sierpień 2011
Ile wyrazów ujemnych ma ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 2n^2 - 9$ dla $n \geqslant 1$?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Zadanie 3. (1 pkt) – maj 2012
Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$ dla $n \geqslant 1$. Wówczas wyraz a_5 tego ciągu jest równy

A. $-\frac{3}{25}$ B. $\frac{3}{25}$ C. $-\frac{7}{25}$ D. $\frac{7}{25}$

Zadanie 4. (1 pkt) – czerwiec 2012
Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \sqrt{2n+4}$ dla $n \geqslant 1$. Wówczas

A. $a_8 = 2\sqrt{5}$ B. $a_8 = 8$ C. $a_8 = 5\sqrt{2}$ D. $a_8 = \sqrt{12}$

Zadanie 5. (1 pkt) – sierpień 2012
Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{n}{(-2)^n}$ dla $n \geqslant 1$. Wówczas

A. $a_3 = \frac{1}{2}$ B. $a_3 = -\frac{1}{2}$ C. $a_3 = \frac{3}{8}$ D. $a_3 = -\frac{3}{8}$

Zadanie 6. (1 pkt) – czerwiec 2013
Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = -2 + \frac{12}{n}$ dla $n \geqslant 1$. Równość $a_n = 4$ zachodzi dla

A. $n = 2$ B. $n = 3$ C. $n = 4$ D. $n = 5$

16. POJĘCIE CIĄGU

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 16

1. a) $a_1 = 0, a_5 = 36$ b) $a_1 = -1, a_5 = -9$ c) $a_1 = \frac{5}{4}, a_5 = \frac{101}{20}$
d) $a_1 = \frac{1}{3}, a_5 = \frac{16}{3}$ **2.** a) trzeci b) piętnasty **3.** a) szósty b) czwarty
4. trzy wyrazy

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 16

1	2	3	4	5	6	7
B	A	C	C	D	A	B

1. $a_4 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

2. $a_1 = \frac{1^2-1}{1^2+1} + 1 = 0 + 1 = 1$

3. Obliczamy wyrazy b_5 i b_7: $b_5 = (5-6)^2 + 4 = 1 + 4 = 5$,
$b_7 = (7-6)^2 + 4 = 1 + 4 = 5$. Stąd $b_5 = b_7$.

4. Rozwiązujemy równanie $b_n = 0$: $n^2 - 8n + 15 = 0, \Delta = 4, n_1 = 3, n_2 = 5$.
Oba rozwiązania są większe od 1, czyli dwa wyrazy ciągu są równe 0.

5. Rozwiązujemy równanie $a_n = b_n$: $3n + 4 = 13$, stąd $n = 3$.

6. Rozwiązujemy nierówność $a_n > 0$: $8 - n^2 > 0$. Przekształcamy równanie kwadratowe, korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów: $(2\sqrt{2} - n)(2\sqrt{2} + n) > 0$. Stąd $n \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$. Liczby naturalne dodatnie zawarte w tym przedziale to 1 i 2, więc dwa wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie.

7. Obliczamy wyrazy a_2 i a_3, a następnie różnicę $a_3 - a_2$:
$a_2 = 2^2 - 3^2 = 4 - 9 = -5, a_3 = 2^3 - 3^3 = 8 - 27 = -19$,
$a_3 - a_2 = -19 - (-5) = -14$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 16

1	2	3	4	5	6
B	C	B	A	D	A

17. Ciąg arytmetyczny (I)

1. Przypomnij sobie

Ciąg arytmetyczny to ciąg liczbowy, w którym wyraz $n + 1$ powstaje w wyniku dodania do n-tego wyrazu ciągu tej samej liczby $r \in \mathbf{R}$. Liczbę r nazywamy **różnicą ciągu**.

Kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r:

$$a_1,$$
$$a_2 = a_1 + r,$$
$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r,$$
$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r \text{ itd.}$$

Przypomnienie

Dla dwóch kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy $r \in \mathbf{R}$:

$$a_{n+1} - a_n = r.$$

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy $r \in \mathbf{R}$:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, \quad \text{dla } n \geqslant 1.$$

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Dane są ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla $n \geqslant 1$ oraz jego dwa wyrazy: $a_6 = 14$ i $a_7 = 9$. Wyznacz wyrazy a_1 i a_9.

Rozwiązanie

Krok 1. Wyznaczamy różnicę ciągu.

$$r = a_7 - a_6 = 9 - 14 = -5$$

Krok 2. Wyznaczamy wyraz a_1.

$$a_6 = a_1 + 5r$$
$$14 = a_1 + 5 \cdot (-5)$$
$$14 = a_1 - 25$$
$$a_1 = 39$$

Uwaga

Jeśli a_n i a_m są dwoma wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy $r \in \mathbf{R}$, to:

$$a_n = a_m + (n-m)r.$$

Krok 3. Wyznaczamy wyraz a_9.

$$a_9 = a_7 + 2r$$
$$a_9 = 9 + 2 \cdot (-5)$$
$$a_9 = 9 - 10$$
$$a_9 = -1$$

Przykład 2.

Czterdziesty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 60, a dziesiąty wynosi 12. Wyznacz:

a) różnicę ciągu, b) wzór ogólny ciągu, c) wyraz a_{2015}.

Rozwiązanie

a) Aby obliczyć różnicę r, korzystamy z własności ciągu arytmetycznego.

$$a_{40} = a_{10} + 30r$$
$$60 = 12 + 30r$$
$$30r = 48 \quad |:30$$
$$r = \frac{8}{5}$$

b) Do wyznaczenia wzoru ogólnego ciągu arytmetycznego potrzebna jest wartość pierwszego wyrazu tego ciągu i jego różnica. Obliczamy a_1.

$$a_{10} = a_1 + 9r$$
$$a_1 = a_{10} - 9r$$
$$a_1 = 12 - 9 \cdot \frac{8}{5} = -\frac{12}{5}$$

Wyznaczamy wzór ogólny ciągu (a_n).

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = -\frac{12}{5} + (n-1) \cdot \frac{8}{5} = \frac{8}{5}n - 4$$

c) Obliczamy a_{2015}, podstawiając za n we wzorze ogólnym ciągu liczbę 2015.

$$a_{2015} = \frac{8}{5} \cdot 2015 - 4 = 3220$$

Przykład 3.

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = 6n - 18$ dla $n \geqslant 1$. Wyznacz różnicę r tego ciągu.

Rozwiązanie

Sposób I

Obliczamy dwa kolejne wyrazy ciągu, a_1 i a_2, a następnie obliczamy różnicę $r = a_2 - a_1$.

$$a_1 = 6 \cdot 1 - 18 = -12$$
$$a_2 = 6 \cdot 2 - 18 = -6$$
$$r = a_2 - a_1 = -6 - (-12) = 6$$

Sposób II

Różnicę ciągu arytmetycznego można odczytać z jego wzoru ogólnego – jest to współczynnik przy zmiennej n. W tym przypadku $r = 6$.

Przykład 4.

Oblicz wyraz a_2 ciągu arytmetycznego (a_n), $n \geqslant 1$, jeśli $a_5 = -16$ i $r = 3$.

Rozwiązanie

Zapisujemy równanie, korzystając z własności ciągu arytmetycznego, i rozwiązujemy je.

$$a_5 = a_2 + 3r$$
$$a_2 = a_5 - 3r$$
$$a_2 = -16 - 3 \cdot 3$$
$$a_2 = -25$$

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M19658

1. Wyznacz wyrazy a_4, a_{10} i a_{19} ciągu arytmetycznego (a_n), wiedząc, że $a_7 = 54$ i $a_{14} = 12$.

2. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (b_n) oraz wyraz b_{17}, jeśli $b_5 = 38$ i $r = 8$.

3. Oblicz różnice ciągów arytmetycznych $c_n = -3n + 14$ i $d_n = \frac{3+4n}{-2}$ określonych dla $n \geqslant 1$. Która z nich jest większa?

TEST 17

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. W ciągu arytmetycznym (a_n) określonym dla $n \geqslant 1$ dane są $a_2 = 14$ i $a_3 = 18$. Wzór ogólny tego ciągu ma postać

A. $a_n = 4n + 10$ C. $a_n = 4n + 6$
B. $a_n = -4n + 10$ D. $a_n = 4n - 6$

2. Dane są ciąg arytmetyczny (a_n), określony dla liczb naturalnych dodatnich, oraz jego dwa wyrazy: $a_3 = 15$ i $a_6 = -3$. Wobec tego

A. $a_4 = 21$ B. $a_4 = 9$ C. $a_4 = 6$ D. $a_4 = 3$

3. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są $a_{10} = 10$ i $a_{20} = -10$. Wyraz a_{30} jest równy

A. 30 B. −20 C. −30 D. −50

4. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), określony dla liczb naturalnych dodatnich, w którym $a_{15} = 18$ i $r = 4$. Drugi wyraz tego ciągu jest równy

A. −34 B. 13 C. 52 D. 70

5. Dla dowolnego ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy $r \in \mathbf{R}$, określonego dla $n \geqslant 1$, prawdą jest, że

A. $a_4 - a_6 = a_2$ C. $a_4 - a_6 = 2r$
B. $a_4 - a_6 = -a_2$ D. $a_4 - a_6 = -2r$

6. Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony wzorem ogólnym $a_n = 17 - 5n$, dla $n \geqslant 1$. Jego różnica jest równa

A. 17 B. 5 C. −5 D. −17

TO BYŁO NA MATURZE 17

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – listopad 2009
W ciągu arytmetycznym trzeci wyraz jest równy 14, a jedenasty jest równy 34. Różnica tego ciągu jest równa

A. 9 B. $\frac{5}{2}$ C. 2 D. $\frac{2}{5}$

Zadanie 2. (1 pkt) – maj 2010
W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_3 = 13$ i $a_5 = 39$. Wówczas wyraz a_1 jest równy

A. 13 B. 0 C. −13 D. −26

Zadanie 3. (1 pkt) – sierpień 2010
W ciągu arytmetycznym (a_n) mamy: $a_2 = 5$ i $a_4 = 11$. Oblicz a_5.

A. 8 B. 14 C. 17 D. 6

Zadanie 4. (1 pkt) – czerwiec 2011
Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n - 1$ dla $n \geqslant 1$. Różnica tego ciągu jest równa

A. −1 B. 1 C. 2 D. 3

Zadanie 5. (1 pkt) – maj 2013
Ciąg (a_n) określony dla $n \geqslant 1$ jest arytmetyczny oraz $a_3 = 10$ i $a_4 = 14$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. $a_1 = -2$ B. $a_1 = 2$ C. $a_1 = 6$ D. $a_1 = 12$

Zadanie 6. (1 pkt) – maj 2014
Liczby 2, −1, −4 są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla liczb naturalnych $n \geqslant 1$. Wzór ogólny tego ciągu ma postać

A. $a_n = -3n + 5$ C. $a_n = -n + 3$
B. $a_n = n - 3$ D. $a_n = 3n - 5$

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 17

1. $a_4 = 72$, $a_{10} = 36$, $a_{19} = -18$ **2.** $b_n = 8n - 2$, $b_{17} = 134$
3. różnica ciągu (d_n)

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 17

1	2	3	4	5	6
C	B	C	A	D	C

1. Wzór ogólny ciągu arytmetycznego ma postać $a_n = a_1 + (n-1)r$. Korzystając z własności ciągu, obliczamy jego różnicę: $r = a_3 - a_2 = 18 - 14 = 4$, a następnie jego pierwszy wyraz: $a_1 = a_2 - r = 14 - 4 = 10$. Wyznaczamy wzór ogólny: $a_n = 10 + (n-1) \cdot 4 = 4n + 6$.

2. Obliczamy różnicę r: $a_6 = a_3 + 3r$, stąd $-3 = 15 + 3r$, więc $r = -6$. Obliczamy wyraz a_4: $a_4 = a_3 + r = 15 - 6 = 9$.

3. Obliczamy różnicę r: $a_{20} = a_{10} + 10r$, stąd $r = -2$, oraz wyraz a_{30}: $a_{30} = a_{20} + 10r = -10 + 10 \cdot (-2) = -30$.

4. Z własności ciągu arytmetycznego: $a_{15} = a_2 + 13r$, $18 = a_2 + 52$, stąd $a_2 = -34$.

5. Dla ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r mamy: $a_6 = a_4 + 2r$, stąd $a_4 - a_6 = -2r$.

6. Różnica ciągu arytmetycznego jest równa współczynnikowi przy zmiennej n, więc $r = -5$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 17

1	2	3	4	5	6
B	C	B	C	B	A

17. CIĄG ARYTMETYCZNY (I)

18. Ciąg arytmetyczny (II)

1. Przypomnij sobie

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), $n \geqslant 2$, zachodzi zależność:

$$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}.$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem:

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$$

lub wzorem równoważnym:

$$S_n = \frac{2a_1+(n-1)r}{2} \cdot n.$$

Uwaga

Każdy wyraz ciągu arytmetycznego, oprócz pierwszego, jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich.

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = 4n + 2$. Oblicz sumę dziewięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie

Krok 1. Obliczamy wyrazy a_1 i a_9.

$$a_1 = 4 \cdot 1 + 2 = 6, \quad a_9 = 4 \cdot 9 + 2 = 38$$

Krok 2. Stosujemy wzór na sumę początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$S_9 = \frac{a_1+a_9}{2} \cdot 9 = \frac{6+28}{2} \cdot 9 = 153$$

Przykład 2.

Liczby $2x$, 10, $3x$ są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n).

a) Wyznacz te wyrazy.

b) Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

18. CIĄG ARYTMETYCZNY (II)

Rozwiązanie

a) Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$10 = \frac{2x+3x}{2}$$

$$20 = 5x$$

$$x = 4$$

Szukane wyrazy ciągu to: 8, 10, 12.

b) **Sposób I**

Krok 1. Korzystamy z wyliczonych w podpunkcie a) wyrazów ciągu do wyznaczenia jego różnicy: $r = a_2 - a_1 = 10 - 8 = 2$, a następnie obliczamy wyrazy a_4 i a_5.

$$a_4 = a_3 + r = 12 + 2 = 14, \quad a_5 = a_4 + r = 14 + 2 = 16$$

Krok 2. Obliczamy sumę.

$$S_5 = 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 60$$

Sposób II

Krok 1. Obliczamy różnicę r: $r = 2$.

Krok 2. Stosujemy wzór na sumę początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$S_5 = \frac{2a_1+(5-1)r}{2} \cdot 5 = \frac{2\cdot 8+4\cdot 2}{2} \cdot 5 = 12 \cdot 5 = 60$$

Przykład 3.

Dane są ciąg arytmetyczny (a_n), określony dla $n \geqslant 1$, oraz trzy jego wyrazy: $a_7 = 2x + 2$, $a_8 = -x + 4$ i $a_9 = 8x$.

a) Wyznacz wyrazy a_7, a_8 i a_9.

b) Oblicz sumę 25 początkowych wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie

a) Stosujemy wzór na zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

$$a_8 = \frac{a_7+a_9}{2}$$

$$-x + 4 = \frac{2x+2+8x}{2} \quad |\cdot 2$$

$$-2x + 8 = 2x + 2 + 8x$$

$$-12x = -6$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Stąd: $a_7 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 3$, $a_8 = -\frac{1}{2} + 4 = 3\frac{1}{2}$, $a_9 = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$.

b) Korzystamy ze wzoru na sumę początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego do obliczenia sumy S_{25}.

Krok 1. Wyznaczamy różnicę r oraz wyraz a_1.

$$r = a_8 - a_7 = 3\frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = a_7 - 6r = 3 - 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 - 3 = 0$$

Krok 2. Obliczamy sumę S_{25}.

$$S_{25} = \frac{2a_1+24r}{2} \cdot 25 = \frac{0+12}{2} \cdot 25 = 150$$

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M21496

1. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = 10n - 2$ dla $n \geqslant 1$. Wyznacz sumę:

a) dwunastu początkowych wyrazów ciągu (a_n),

b) dwudziestu początkowych wyrazów tego ciągu.

2. Trzeci wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geqslant 1$ wynosi 21, a czwarty 28. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

3. Liczby $23, 7x + 6, 3x$ są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n), $n \geqslant 1$.

a) Wyznacz drugi i trzeci wyraz tego ciągu.

b) Oblicz sumę ośmiu początkowych wyrazów ciągu (a_n).

4. Liczby $9 - x, 5, 2x + 1$ są odpowiednio drugim, trzecim i czwartym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu.

TEST 18

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = 8n + 1$ dla $n \geqslant 1$. Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu wynosi

A. 3645 B. 450 C. 90 D. 81

2. W ciągu arytmetycznym (a_n), $n \geqslant 1$, dane są trzy pierwsze wyrazy: $a - 3, 3, 5a - 9$. Trzeci wyraz tego ciągu jest równy

A. 18 B. 9 C. 6 D. 0

3. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są $a_4 = 10$ oraz $a_6 = 22$. Suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu wynosi

A. 1 B. 4 C. 28 D. 42

4. W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geqslant 1$, dane są: $a_1 = -x$, $a_2 = 0$, $a_3 = 3x + 18$. Suma tych wyrazów jest równa

A. -9 B. -8 C. 0 D. 9

5. Liczby $11, 4x, \frac{5}{2}x$ są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Różnica tego ciągu jest równa

A. -3 B. -2 C. 2 D. 3

6. Liczby $-8+x, 2x, 12x-10$ są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Różnica tego ciągu wynosi

A. -6 B. 4 C. 10 D. 14

TO BYŁO NA MATURZE 18

W zadaniach 1.–4. wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – listopad 2010
W ciągu arytmetycznym $a_1 = 3$ oraz $a_{20} = 7$. Wtedy suma $S_{20} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{19} + a_{20}$ jest równa

A. 95 B. 200 C. 230 D. 100

Zadanie 2. (1 pkt) – sierpień 2013
Liczby $7, a, 49$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Wtedy a jest równe

A. 14 B. 21 C. 28 D. 42

Zadanie 3. (1 pkt) – czerwiec 2014
W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geqslant 1$, dane są dwa wyrazy: $a_2 = 11$ i $a_4 = 7$. Suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

A. 36 B. 40 C. 13 D. 20

Zadanie 4. (2 pkt) – sierpień 2011
Liczby $2x + 1, 6, 16x + 2$ są w podanej kolejności pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

Zadanie 5. (2 pkt) – sierpień 2012
Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 3, czwarty wyraz tego ciągu jest równy 15. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 6. (2 pkt) – czerwiec 2014
Liczby $6, 2x+4, x+26$ w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Oblicz różnicę r tego ciągu.

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 18

1. a) $S_{12} = 756$ b) $S_{20} = 2060$ **2.** $S_{10} = 385$
3. a) $a_2 = 13, a_3 = 3$ b) $S_8 = -96$ **4.** 13

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 18

1	2	3	4	5	6
B	C	B	C	A	C

1. $a_1 = 8\cdot 1+1 = 9, a_{10} = 8\cdot 10+1 = 81, S_{10} = \frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10 = \frac{9+81}{2}\cdot 10 = 450$

2. Wykorzystujemy zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego i obliczamy a: $3 = \frac{a-3+5a-9}{2}$. Stąd $a = 3$. Wobec tego: $a_3 = 5\cdot 3 - 9 = 6$.

3. Wyznaczamy różnicę ciągu: $a_6 = a_4 + 2r$, stąd $r = 6$. Wyznaczamy pierwszy wyraz: $a_4 = a_1 + 3r$, stąd $a_1 = -8$. Obliczamy sumę S_4:
$S_4 = \frac{a_1+a_4}{2}\cdot 4 = \frac{-8+10}{2}\cdot 4 = 4$.

4. Wykorzystujemy zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego do obliczenia x: $0 = \frac{-x+3x+18}{2}$. Stąd $x = -9$. Wobec tego: $a_1 = 9$ i $a_3 = -9$, czyli $S_3 = 9 + 0 + (-9) = 0$.

5. Wykorzystujemy zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego do obliczenia x: $4x = \frac{11+\frac{5}{2}x}{2}$, stąd $x = 2$. Wobec tego: $r = a_2 - a_1 = 4\cdot 2 - 11 = -3$.

6. Korzystamy z własności ciągu arytmetycznego dla trzech kolejnych wyrazów i obliczamy x: $2x = \frac{-8+x+12x-10}{2}$, stąd $x = 2$. Obliczamy różnicę r: $r = a_2 - a_1 = 4 - (-6) = 10$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 18

1	2	3
D	B	B

4. $x = \frac{1}{2}$ **5.** $S_6 = 78$ **6.** $r = 14$

19. Ciąg geometryczny (I)

1. Przypomnij sobie

Ciąg geometryczny to ciąg liczbowy, w którym wyraz $n+1$ otrzymujemy, mnożąc n-ty wyraz przez stałą liczbę $q \in R$, nazywaną **ilorazem ciągu.**

Kolejne wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q:

$$a_1,$$
$$a_2 = a_1 \cdot q,$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2,$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \text{ itd.}$$

Przypomnienie

Dla dwóch kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q, takich że $a_n \neq 0$:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie $q \in R$:
$$a_n = a_1 q^{n-1}, \quad \text{dla } n \geqslant 1.$$

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

W ciągu geometrycznym (a_n) dane są $a_5 = 10$ i $a_6 = 20$. Wyznacz a_4 i a_8.

Rozwiązanie

Krok 1. Obliczamy iloraz ciągu.
$$q = \frac{a_6}{a_5}$$
$$q = \frac{20}{10} = 2$$

Krok 2. Korzystamy z własności ciągu geometrycznego i obliczamy wyraz a_4.
$$a_5 = a_4 \cdot q$$
$$10 = a_4 \cdot 2$$
$$a_4 = 5$$

Krok 3. Wyznaczamy wyraz a_8.
$$a_8 = a_6 \cdot q^2$$
$$a_8 = 20 \cdot 2^2$$
$$a_8 = 80$$

Uwaga

Jeśli a_n i a_m są dwoma wyrazami ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q, to:
$$a_n = a_m \cdot q^{n-m}.$$

Przykład 2.

W ciągu geometrycznym (b_n) dane są $b_2 = 216$ i $b_5 = 8$. Wyznacz iloraz tego ciągu oraz wyraz b_1.

Rozwiązanie

Krok 1. Obliczamy iloraz ciągu.

$$b_5 = b_2 \cdot q^3$$
$$8 = 216q^3 \quad |:216$$
$$q^3 = \frac{1}{27}$$
$$q = \frac{1}{3}$$

Krok 2. Obliczamy wyraz b_1.

$$b_2 = b_1 \cdot q$$
$$216 = b_1 \cdot \frac{1}{3} \quad |\cdot 3$$
$$b_1 = 648$$

Przykład 3.

W ciągu geometrycznym (c_n), w którym wszystkie wyrazy są dodatnie, dane są $c_1 = 2$ i $c_3 = 98$. Wyznacz iloraz tego ciągu.

Rozwiązanie

Korzystamy z własności ciągu geometrycznego do obliczenia ilorazu q.

$$c_3 = c_1 \cdot q^2$$
$$98 = 2q^2 \quad |:2$$
$$q^2 = 49$$
$$q = 7 \quad \text{lub} \quad q = -7$$

Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie, więc odrzucamy rozwiązanie $q = -7$. Ilorazem ciągu (c_n) jest $q = 7$.

Przykład 4.

Dany jest ciąg geometryczny (d_n) określony dla liczb naturalnych dodatnich. Wiadomo, że $d_3 = \sqrt{3}$, $d_4 = 3\sqrt{3}$. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu oraz wyraz d_8.

Rozwiązanie

Do wyznaczenia wzoru ogólnego ciągu geometrycznego potrzebne są wartość pierwszego wyrazu tego ciągu i jego iloraz.

Krok 1. Wyznaczmy iloraz q ciągu (d_n).

$$d_4 = d_3 \cdot q$$
$$3\sqrt{3} = q\sqrt{3}$$
$$q = 3$$

Krok 2. Obliczamy wyraz d_1.

$$d_3 = d_1 \cdot q^2$$
$$\sqrt{3} = d_1 \cdot 3^2 \quad |:9$$
$$d_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

Krok 3. Wyznaczamy wzór ogólny ciągu (d_n).

$$d_n = d_1 \cdot q^{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{9} \cdot 3^{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{3^n}{3} = \frac{\sqrt{3}}{27} \cdot 3^n$$

Krok 4. Na podstawie wzoru ogólnego obliczamy d_8.

$$d_8 = \frac{\sqrt{3}}{27} \cdot 3^8 = \frac{\sqrt{3}}{3^3} \cdot 3^8 = \sqrt{3} \cdot 3^{8-3} = \sqrt{3} \cdot 3^5 = 243\sqrt{3}$$

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M22666

1. W ciągu geometrycznym (a_n), $n \geqslant 1$, dane są $a_2 = 4$ i $a_3 = 16$. Wyznacz pierwszy i piąty wyraz tego ciągu.

2. Ciąg (b_n) jest geometryczny, $b_6 = 5$ i $b_9 = 135$. Wyznacz iloraz q tego ciągu oraz b_8.

3. Liczby 6 i 3 są dwoma początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego (c_n). Wyznacz wzór ogólny tego ciągu oraz wyraz c_6.

TEST 19

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Iloraz ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geqslant 1$, wynosi -1, a jego pierwszy wyraz jest równy 2. Siódmy wyraz ciągu wynosi

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

2. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony dla $n \geqslant 1$. Iloraz i trzeci wyraz tego ciągu są sobie równe i wynoszą 4. Wskaż a_5.

A. 64 B. 16 C. 1 D. $\frac{1}{4}$

3. W ciągu geometrycznym (a_n), określonym dla liczb naturalnych dodatnich, dane są $a_2 = 18$ i $a_3 = 54$. Pierwszy wyraz tego ciągu wynosi

A. 1 B. 3 C. 6 D. 9

4. Liczby $a_1 = 6$ i $a_4 = \frac{3}{4}$ są wyrazami ciągu geometrycznego (a_n) określonego dla $n \geqslant 1$. Wobec tego

A. $a_3 = 3$ B. $a_3 = \frac{3}{2}$ C. $a_3 = \frac{1}{2}$ D. $a_3 = \frac{1}{4}$

5. W ciągu geometrycznym (a_n), określonym dla $n \geqslant 1$, dane są $a_2 = -1$ i $a_5 = -125$. Iloraz tego ciągu wynosi

A. $5\sqrt{5}$ B. 5 C. -5 D. $-5\sqrt{5}$

6. W ciągu geometrycznym (a_n), określonym dla liczb naturalnych dodatnich, czwarty wyraz wynosi $\frac{5}{8}$, a iloraz $\frac{8}{5}$. Wobec tego trzeci wyraz jest równy

A. $\frac{64}{25}$ B. 1 C. $\frac{25}{64}$ D. -1

TO BYŁO NA MATURZE 19

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – maj 2010
W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 3$ i $a_4 = 24$. Iloraz tego ciągu jest równy

A. 8 B. 2 C. $\frac{1}{8}$ D. $-\frac{1}{2}$

Zadanie 2. (1 pkt) – sierpień 2010
W malejącym ciągu geometrycznym (a_n) mamy: $a_1 = 2$ i $a_3 = -4$. Iloraz tego ciągu jest równy

A. -2 B. 2 C. $-\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$

Zadanie 3. (1 pkt) – listopad 2010
W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = -2$ i $a_2 = 12$. Wtedy

A. $a_4 = 26$ B. $a_4 = 432$ C. $a_4 = 32$ D. $a_4 = 2592$

Zadanie 4. (1 pkt) – maj 2011
Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_3 = 1$ i $a_4 = \frac{2}{3}$. Wtedy

A. $a_1 = \frac{2}{3}$ B. $a_1 = \frac{4}{9}$ C. $a_1 = \frac{3}{2}$ D. $a_1 = \frac{9}{4}$

Zadanie 5. (1 pkt) – sierpień 2012
W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 36$, $a_2 = 18$. Wtedy

A. $a_4 = -18$ B. $a_4 = 0$ C. $a_4 = 4{,}5$ D. $a_4 = 144$

Zadanie 6. (1 pkt) – czerwiec 2013
W ciągu geometrycznym (a_n) pierwszy wyraz jest równy $\frac{9}{8}$, a czwarty wyraz jest równy $\frac{1}{3}$. Wówczas iloraz q tego ciągu jest równy

A. $q = \frac{1}{3}$ B. $q = \frac{1}{2}$ C. $q = \frac{2}{3}$ D. $q = \frac{3}{2}$

19. CIĄG GEOMETRYCZNY (I)

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 19

1. $a_1 = 1, a_5 = 256$ **2.** $q = 3, b_8 = 45$ **3.** $c_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n, c_6 = \frac{3}{16}$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 19

1	2	3	4	5	6
D	A	C	B	B	C

1. Siódmy wyraz ciągu geometrycznego jest równy
$a_7 = a_1 q^6 = 2 \cdot (-1)^6 = 2.$

2. Jeśli $a_3 = q = 4$, to $a_5 = a_3 \cdot q^2 = 4 \cdot 4^2 = 64.$

3. Obliczamy iloraz q: $q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{54}{18} = 3$, a następnie wyraz a_1:
$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{18}{3} = 6.$

4. Obliczamy iloraz q: $a_4 = a_1 \cdot q^3$, więc $q^3 = \frac{a_4}{a_1}$. Stąd $q^3 = \frac{1}{8}$, czyli $q = \frac{1}{2}$.
Obliczamy wyraz a_3: $a_3 = \frac{a_4}{q}$, stąd $a_3 = \frac{3}{2}$.

5. Z własności ciągu geometrycznego: $a_5 = a_2 \cdot q^3$, więc $-125 = -1 \cdot q^3$, stąd $q = 5$.

6. Obliczamy wyraz a_3: $a_4 = a_3 \cdot q$, czyli $a_3 = \frac{a_4}{q}$. Stąd $a_3 = \frac{25}{64}$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 19

1	2	3	4	5	6
B	D	B	D	C	C

20. Ciąg geometryczny (II)

1. Przypomnij sobie

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), $n \geqslant 2$, zachodzi zależność:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}.$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q \neq 1$ wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

W przypadku gdy $q = 1$, wzór przyjmuje postać:

$$S_n = n \cdot a_1.$$

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony dla $n \geqslant 1$. Wiadomo, że $a_2 = 14$, $a_3 = 28$, $a_4 = x$.

a) Wyznacz x.

b) Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie

a) Wykorzystujemy związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego do obliczenia x.

$$a_3^2 = a_2 \cdot a_4$$
$$28^2 = 14 \cdot x$$
$$x = 56$$

b) **Sposób I**

Krok 1. Obliczamy iloraz q ciągu (a_n).

$$a_3 = a_2 q, \text{ stąd } q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{28}{14} = 2$$

Krok 2. Obliczamy wyrazy a_1 i a_5.

- $a_2 = a_1 q$, stąd $a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{14}{2} = 7$
- $a_5 = a_4 q = 56 \cdot 2 = 112$

Krok 3. Obliczamy sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu (a_n).

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 7 + 14 + 28 + 56 + 112 = 217$$

Sposób II

Stosujemy wzór na sumę początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (po obliczeniu ilorazu q i wyrazu a_1).

$$S_5 = a_1 \cdot \frac{1-q^5}{1-q} = 7 \cdot \frac{1-32}{1-2} = 7 \cdot \frac{-31}{-1} = 217$$

Przykład 2.

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla liczb naturalnych dodatnich, jest równy -1, a jego iloraz wynosi 3. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie

Stosujemy wzór na sumę początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

$$S_6 = (-1) \cdot \frac{1-3^6}{1-3} = (-1) \cdot \frac{-728}{-2} = -364$$

Przykład 3.

Liczby $36, 2x, 4$ są trzema początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego (a_n) o wyrazach dodatnich. Wyznacz:

a) drugi wyraz tego ciągu,

b) iloraz ciągu,

c) sumę czterech początkowych wyrazów ciągu.

Rozwiązanie

a) Wykorzystujemy związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego do obliczenia x.

$$(2x)^2 = 36 \cdot 4$$

$$4x^2 = 36 \cdot 4 \quad |:4$$

$$x^2 = 36$$

$$x = 6 \quad \text{lub} \quad x = -6$$

Odrzucamy ujemne rozwiązanie, bo wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie. Drugi wyraz ciągu jest równy 12.

b) Obliczamy iloraz q.

$$a_2 = a_1 q, \text{ stąd } q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

c) Znamy trzy pierwsze wyrazy ciągu, więc obliczamy wyraz a_4, a następnie sumę S_4.

$$a_4 = a_3 q = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$S_4 = 36 + 12 + 4 + \frac{4}{3} = 53\frac{1}{3}$$

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M22982

1. W ciągu geometrycznym (a_n), określonym dla $n \geqslant 1$, dane są: $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1$. Oblicz:

a) iloraz q tego ciągu,

b) wyraz a_1,

c) sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu.

2. Trzy początkowe wyrazy ciągu geometrycznego o wyrazach dodatnich są równe odpowiednio: $\frac{3}{5}, x, 15$. Wyznacz:

a) x, b) iloraz tego ciągu, c) piąty wyraz ciągu.

3. Wyrazy trzeci, czwarty i piąty ciągu geometrycznego wynoszą odpowiednio: $10x, 1, \frac{1}{5x^2}$. Wyznacz:

a) trzeci wyraz tego ciągu,

b) iloraz ciągu,

c) sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu.

TEST 20

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Liczby $22, x, 5\frac{1}{2}$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o wszystkich wyrazach dodatnich. Wtedy

A. $x = 11$ B. $x = 2$ C. $x = \frac{1}{2}$ D. $x = \frac{1}{11}$

2. Liczby $3x, -9, 6x$ są trzema początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego. Kwadrat pierwszego wyrazu tego ciągu jest równy

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ C. $4\frac{1}{2}$ D. $40\frac{1}{2}$

3. Liczby $2, 10, 34x + 16$ są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wobec tego

A. $x = 34$ B. $x = 5$ C. $x = 1$ D. $x = \frac{1}{10}$

4. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony dla $n \geqslant 1$. Jeśli iloraz $q = 3$ i $a_2 = 12$, to suma trzech początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

A. 156 B. 52 C. 36 D. $16\frac{1}{3}$

5. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są $a_1 = 10$ i $q = 1$. Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

A. 100 B. 550 C. 1000 D. 5500

6. W ciągu geometrycznym (a_n) określonym dla $n \geqslant 1$ dane są: $a_{10} = -48$, $a_{11} = 2s$, $a_{12} = -\frac{3}{16}$. Wskaż możliwą wartość s.

A. $s = \frac{9}{4}$ B. $s = \frac{2}{3}$ C. $s = \frac{4}{9}$ D. $s = -\frac{3}{2}$

20. CIĄG GEOMETRYCZNY (II)

TO BYŁO NA MATURZE 20

W zadaniach 1.–5. wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – czerwiec 2012
Ciąg $(2\sqrt{2}, 4, a)$ jest geometryczny. Wówczas

A. $a = 8\sqrt{2}$ B. $a = 4\sqrt{2}$ C. $a = 8 - 2\sqrt{2}$ D. $a = 8 + 2\sqrt{2}$

Zadanie 2. (1 pkt) – maj 2013
Ciąg $(27, 18, x + 5)$ jest geometryczny. Wtedy

A. $x = 4$ B. $x = 5$ C. $x = 7$ D. $x = 9$

Zadanie 3. (1 pkt) – sierpień 2013
Liczby $3x - 4, 8, 2$, w podanej kolejności, są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wtedy

A. $x = -6$ B. $x = 0$ C. $x = 6$ D. $x = 12$

Zadanie 4. (1 pkt) – maj 2014
Liczby $x-2, 6, 12$ w podanej kolejności są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Liczba x jest równa

A. 0 B. 2 C. 3 D. 5

Zadanie 5. (1 pkt) – czerwiec 2014
W ciągu geometrycznym (a_n), określonym dla $n \geqslant 1$, wyraz $a_1 = 5$, natomiast iloraz $q = -2$. Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

A. -1705 B. -1023 C. 1705 D. 5115

20. CIĄG GEOMETRYCZNY (II)

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 20

1. a) $q = 2$ b) $a_1 = \frac{1}{4}$ c) $S_6 = 15\frac{3}{4}$ **2.** a) $x = 3$ b) $q = 5$ c) 375

3. a) 20 b) $q = \frac{1}{20}$ c) $S_5 = 8421\frac{1}{20}$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 20

1	2	3	4	5	6
A	D	C	B	A	D

1. Wykorzystujemy związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego: $x^2 = 22 \cdot 5\frac{1}{2} = 121$. Stąd $x = 11$ lub $x = -11$. Odrzucamy ujemne rozwiązanie, ponieważ wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie. Poprawna jest odpowiedź A.

2. Wykorzystujemy związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego: $81 = 18x^2$. Stąd $x^2 = 4\frac{1}{2}$. Obliczamy kwadrat pierwszego wyrazu: $(3x)^2 = 9x^2 = 9 \cdot 4\frac{1}{2} = 40\frac{1}{2}$.

3. Obliczamy iloraz q: $q = \frac{10}{2} = 5$ i trzeci wyraz tego ciągu: $10 \cdot 5 = 50$. Otrzymujemy równanie: $34x + 16 = 50$, stąd $x = 1$.

4. Obliczamy wyrazy a_1 i a_3: $a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{12}{3} = 4$, $a_3 = a_2 q = 12 \cdot 3 = 36$. Stąd suma $S_3 = 4 + 12 + 36 = 52$.

5. Ponieważ $q = 1$, wszystkie wyrazy tego ciągu są sobie równe i wynoszą 10. Wobec tego $S_{10} = 10 \cdot 10 = 100$.

6. Wykorzystujemy związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego: $(2s)^2 = -48 \cdot \left(-\frac{3}{16}\right)$. Stąd $s^2 = \frac{9}{4}$, więc $s = \frac{3}{2}$ lub $s = -\frac{3}{2}$. Poprawna jest odpowiedź D.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 20

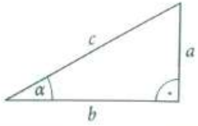
1	2	3	4	5
B	C	D	D	A

21. Funkcje trygonometryczne

1. Przypomnij sobie

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Dany jest trójkąt prostokątny o bokach a, b, c i kącie ostrym α.



- **Sinusem** kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości przeciwprostokątnej.
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$
- **Cosinusem** kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości przeciwprostokątnej.
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$
- **Tangensem** kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie.
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Przypomnienie
Kąt α nazywamy kątem ostrym, jeśli $\alpha \in (0°, 90°)$.

Uwaga
Funkcje trygonometryczne kąta ostrego przyjmują wartości dodatnie.

Przypomnienie
Kąt α nazywamy kątem rozwartym, jeśli $\alpha \in (90°, 180°)$.

Funkcje trygonometryczne kąta rozwartego

Do obliczania wartości funkcji trygonometrycznych kąta rozwartego stosuje się **wzory redukcyjne**, gdzie α jest kątem ostrym.

$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$ $\quad\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$ $\quad\operatorname{tg}(90° + \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ $\quad\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ $\quad\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

Uwaga
Wartość sinusa kąta rozwartego jest dodatnia, a wartości cosinusa i tangensa kąta rozwartego są ujemne.

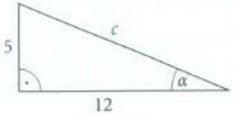
2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 5 i 12. Oblicz wartości sinusa, cosinusa i tangensa kąta leżącego naprzeciwko krótszej przyprostokątnej. Podaj przybliżoną miarę tego kąta.

Rozwiązanie

Krok 1. Sporządzamy rysunek pomocniczy.



Krok 2. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa do obliczenia długości przeciwprostokątnej.

$$c^2 = 5^2 + 12^2$$

$$c^2 = 169$$

$$c = 13 \quad \text{lub} \quad c = -13$$

Odrzucamy ujemne rozwiązanie, ponieważ długość boku jest zawsze dodatnia. Stąd $c = 13$.

Krok 3. Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych.

$$\sin\alpha = \frac{5}{13}, \quad \cos\alpha = \frac{12}{13}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$$

Krok 4. Aby wyznaczyć przybliżoną miarę kąta α, korzystamy z tablic funkcji trygonometrycznych. Wybieramy jedną z funkcji, np. sinus, i szukamy kąta, dla którego sinus przyjmuje wartość $\frac{5}{13} \approx 0{,}3846$. Odczytujemy, że $\alpha \approx 23^\circ$.

Przykład 2.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sin 45^\circ + \cos 30^\circ - \frac{\operatorname{tg} 45^\circ}{2}$ b) $4\cos^2 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$

Rozwiązanie

Podstawiamy odpowiednie wartości.

a) $\sin 45^\circ + \cos 30^\circ - \frac{\operatorname{tg} 45^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{2}$

b) $4\cos^2 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Przykład 3.

Oblicz.

a) $\sin 135^\circ$ b) $\cos 150^\circ$ c) $\operatorname{tg} 120^\circ$

Uwaga

Możesz również zapisać:
$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ)$,
$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ)$,
$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ)$.

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzorów redukcyjnych.

a) $\sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

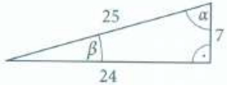
b) $\cos 150^\circ = \cos(90^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ + 30^\circ) = -\frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = -\sqrt{3}$

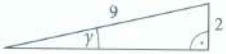
3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie terazmatura.pl **Kod:** M23927

1. Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny. Oblicz wartości sinusa, cosinusa i tangensa kątów ostrych tego trójkąta. Podaj przybliżone miary tych kątów.



2. Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny. Oblicz wartości sinusa, cosinusa i tangensa kąta γ.



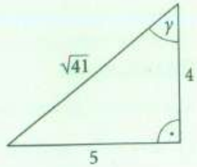
3. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{(\sin 30^\circ)^2 + (\cos 45^\circ)^2}{2\operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ}$.

4. Oblicz wartość wyrażenia $4\sin 120^\circ + \cos 135^\circ - 2\operatorname{tg} 135^\circ$.

TEST 21

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

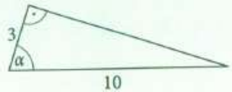
1. Rysunek przedstawia trójkąt prostokątny. Wskaż wartość cosinusa kąta γ.



A. $\frac{\sqrt{41}}{4}$ C. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{4\sqrt{41}}{41}$ D. $\frac{5}{4}$

2. Dany jest trójkąt prostokątny (patrz rysunek). Wskaż wartość tangensa kąta α.



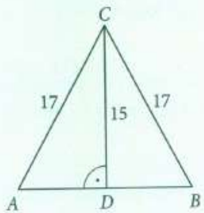
A. $\frac{3\sqrt{91}}{91}$ C. $\frac{\sqrt{91}}{10}$

B. $\frac{10\sqrt{91}}{91}$ D. $\frac{\sqrt{91}}{3}$

3. Kąty α i β są kątami ostrymi pewnego trójkąta prostokątnego. Wiadomo, że $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. Wskaż miarę kąta β.

A. $30°$ B. $45°$ C. $60°$ D. $75°$

4. Odcinek CD jest wysokością trójkąta równoramiennego ABC przedstawionego na rysunku obok. Wskaż wartość cosinusa kąta BAC.



A. $\frac{16}{17}$ C. $\frac{15}{16}$

B. $\frac{15}{17}$ D. $\frac{8}{17}$

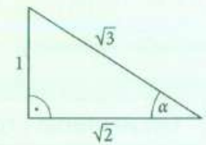
5. Wyrażenie $\cos 30° = \sin\alpha$ jest prawdziwe dla

A. $\alpha = 30°$ B. $\alpha = 45°$ C. $\alpha = 120°$ D. $\alpha = 150°$

TO BYŁO NA MATURZE 21

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – listopad 2009
Dany jest trójkąt prostokątny (patrz rysunek).
Wtedy $\operatorname{tg}\alpha$ jest równy



A. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Zadanie 2. (1 pkt) – maj 2012
Liczba $\operatorname{tg} 30° - \sin 30°$ jest równa

A. $\sqrt{3}-1$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{3}-1}{6}$ D. $\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$

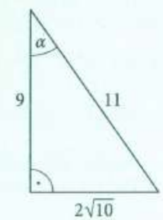
Zadanie 3. (1 pkt) – maj 2012
W trójkącie prostokątnym ABC odcinek AB jest przeciwprostokątną i $|AB| = 13$ oraz $|BC| = 12$. Wówczas sinus kąta ABC jest równy

A. $\frac{12}{13}$ B. $\frac{5}{13}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{13}{12}$

Zadanie 4. (1 pkt) – czerwiec 2012
Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = 1$. Wówczas

A. $\alpha < 30°$ B. $\alpha = 30°$ C. $\alpha = 45°$ D. $\alpha > 45°$

Zadanie 5. (1 pkt) – sierpień 2012
W trójkącie prostokątnym dane są długości boków (zobacz rysunek). Wtedy



A. $\cos\alpha = \frac{9}{11}$ C. $\sin\alpha = \frac{11}{2\sqrt{10}}$

B. $\sin\alpha = \frac{9}{11}$ D. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 21

1. $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{24}{25}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{7}{24}$, $\alpha \approx 74°$, $\beta \approx 16°$ **2.** $\sin\gamma = \frac{2}{9}$, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{77}}{9}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{2\sqrt{77}}{77}$ **3.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$

4. $2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 21

1	2	3	4	5
B	D	C	D	C

1. $\cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{41}} = \frac{4\sqrt{41}}{41}$

2. Oznaczamy długość drugiej przyprostokątnej literą x. Obliczamy x, korzystając z twierdzenia Pitagorasa: $3^2 + x^2 = 10^2$, więc $x = \sqrt{91}$. Stąd $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{91}}{3}$.

3. Skoro $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ i α jest kątem ostrym, to $\alpha = 30°$. Wobec tego $\beta = 180° - 30° - 90° = 60°$.

4. Obliczamy długość odcinka AD, korzystając z twierdzenia Pitagorasa: $|AD| = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$. Zatem $\cos|\sphericalangle BAC| = \cos|\sphericalangle DAC| = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{8}{17}$.

5. $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Odrzucamy odpowiedzi A i B, bo $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Obliczamy kolejno wartości sinusa dla kątów w C i D:

C. $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Poprawna jest odpowiedź C.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 21

1	2	3	4	5
D	D	B	C	A

22. Tożsamości trygonometryczne

1. Przypomnij sobie

W trygonometrii w obliczeniach stosuje się następujące **tożsamości trygonometryczne** (prawdziwe dla dowolnego kąta α):

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (jedynka trygonometryczna),
- $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $(\cos\alpha \neq 0)$.

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Kąt α jest kątem ostrym i $\cos\alpha = \frac{15}{17}$. Oblicz sinus kąta α.

Rozwiązanie

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej.

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{15}{17}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\alpha + \frac{225}{289} = 1$$

$$\sin^2\alpha = \frac{64}{289}$$

$$\sin\alpha = \frac{8}{17} \quad \text{lub} \quad \sin\alpha = -\frac{8}{17}$$

Odrzucamy ujemne rozwiązanie, ponieważ wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego są dodatnie.
Stąd $\sin\alpha = \frac{8}{17}$.

Przykład 2.

Wiedząc, że α jest kątem rozwartym oraz $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, oblicz wartość wyrażenia $\frac{1}{6}\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Rozwiązanie

Sposób I

Krok 1. Korzystamy z jedynki trygonometrycznej do wyznaczenia wartości cosinusa kąta α.

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{5}{9} + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{4}{9}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad \cos\alpha = -\frac{2}{3}$$

α jest kątem rozwartym, więc $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$.

Krok 2. Obliczamy $\operatorname{tg}\alpha$, korzystając z tożsamości trygonometrycznej.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Krok 3. Obliczamy wartość wyrażenia.

$$\frac{1}{6}\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{5}{36}$$

Sposób II

Krok 1. Przekształcamy wyrażenie, korzystając z tożsamości $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

$$\frac{1}{6}\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{6}\sin\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{6\cos\alpha}$$

Krok 2. Obliczamy $\cos\alpha$, korzystając z jedynki trygonometrycznej.

$$\cos\alpha = -\frac{2}{3}$$

Krok 3. Obliczamy wartość wyrażenia.

$$\frac{\sin^2\alpha}{6\cos\alpha} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}{6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{5}{36}$$

Przykład 3.

Wiedząc, że α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg}\alpha = 4$, oblicz wartość wyrażenia $\left(\frac{4}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2$.

Rozwiązanie

Krok 1. Rysujemy trójkąt prostokątny, w którym tangens kąta ostrego jest równy 4, np. trójkąt o przyprostokątnych 4 i 1.

Krok 2. Obliczamy x, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$4^2 + 1^2 = x^2$$

$$17 = x^2$$

$$\sqrt{17} = x$$

Krok 3. Wyznaczamy wartości sinusa i cosinusa kąta α na podstawie definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym.

$$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

Krok 4. Obliczamy wartość wyrażenia.

$$\left(\frac{4}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 = \left(\frac{4}{\frac{4}{\sqrt{17}}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{17}}}\right)^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2 + \left(\sqrt{17}\right)^2 = 2\cdot 17 = 34$$

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M27477

1. Cosinus kąta ostrego α wynosi $\frac{24}{25}$. Wyznacz sinus tego kąta.

2. Sinus kąta rozwartego α wynosi $\frac{1}{6}$. Oblicz cosinus i tangens tego kąta.

3. Wiedząc, że kąt α jest rozwarty i $\sin\alpha = \frac{3}{8}$, oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$.

4. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$. Oblicz wartość wyrażenia $1 - 13\sin\alpha + 26\cos\alpha$.

TEST 22

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Wobec tego

A. $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$
B. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$
C. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$
D. $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

2. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{10}$. Stąd

A. $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{11}}{10}$
B. $\cos\alpha = \frac{10\sqrt{11}}{33}$
C. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\sqrt{11}}{10}$
D. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{10\sqrt{11}}{33}$

3. Jeśli α jest kątem ostrym i $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, to wartość wyrażenia $\sqrt{3\sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha + 1}$ jest równa

A. 0 B. 1 C. $\sqrt{\frac{5}{2}}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

4. Jeśli $\alpha \in (0°, 90°)$ i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{8}$, to liczba $8\cos\alpha$ jest równa

A. $\frac{\sqrt{59}}{64}$ B. $\frac{\sqrt{59}}{8}$ C. $\sqrt{59}$ D. $\frac{59}{64}$

5. Jeżeli α jest kątem rozwartym i $\cos^2\alpha = \frac{64}{81}$, to

A. $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{64}{17}$ B. $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{64}{81}$ C. $\operatorname{tg}^2\alpha = 17$ D. $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{17}{64}$

6. Wiedząc, że α jest kątem rozwartym i że sinus tego kąta wynosi $\frac{11}{12}$, wskaż wartość wyrażenia $2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

A. $\frac{\sqrt{23}+22}{144}$ B. $\frac{23}{144}$ C. $\frac{265}{144}$ D. $\frac{582}{144}$

TO BYŁO NA MATURZE 22

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – maj 2010
Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{3}{4}$. Wartość wyrażenia $2 - \cos^2\alpha$ jest równa

A. $\frac{25}{16}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{17}{16}$ D. $\frac{31}{16}$

Zadanie 2. (1 pkt) – maj 2011
Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. Wtedy

A. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$
B. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$
C. $\sin\alpha = \frac{12}{5}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{13}$
D. $\sin\alpha = \frac{5}{12}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{13}$

Zadanie 3. (1 pkt) – sierpień 2012
Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{7}{13}$. Wtedy $\operatorname{tg}\alpha$ jest równy

A. $\frac{7}{6}$ B. $\frac{7\cdot 13}{120}$ C. $\frac{7}{\sqrt{120}}$ D. $\frac{7}{13\sqrt{120}}$

Zadanie 4. (1 pkt) – maj 2013
Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Wartość wyrażenia $\cos^2\alpha - 2$ jest równa

A. $-\frac{7}{4}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 5. (1 pkt) – maj 2014
Jeśli α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$, to wartość wyrażenia $\frac{3\cos\alpha - 2\sin\alpha}{\sin\alpha - 5\cos\alpha}$ jest równa

A. $-\frac{11}{23}$ B. $\frac{24}{5}$ C. $-\frac{23}{11}$ D. $\frac{5}{24}$

Zadanie 6. (1 pkt) – sierpień 2014
Kąt α jest ostry i spełniona jest równość $3\operatorname{tg}\alpha = 2$. Wtedy wartość wyrażenia $\sin\alpha + \cos\alpha$ jest równa

A. 1 B. $\frac{5\sqrt{13}}{26}$ C. $\frac{5\sqrt{13}}{13}$ D. $\sqrt{5}$

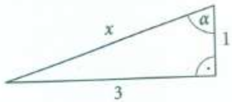
Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 22

1. $\sin\alpha = \frac{7}{25}$ **2.** $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{35}}{6}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{35}}{35}$ **3.** $\frac{55}{64}$ **4.** $1 + 4\frac{1}{2}\sqrt{26}$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 22

1	2	3	4	5	6
D	A	B	C	D	C

1. Rysujemy przykładowy trójkąt prostokątny o kącie α takim, że $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do obliczenia x: $1^2 + 3^2 = x^2$. Stąd $x = \sqrt{10}$.



Wyznaczamy wartości $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$: $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$. Poprawna jest odpowiedź D.

2. Korzystamy z jedynki trygonometrycznej do obliczenia $\cos\alpha$:

$\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$. Stąd $\cos\alpha = \frac{\sqrt{99}}{10}$, bo α jest kątem ostrym, więc

$\cos\alpha = \frac{3\sqrt{11}}{10}$. Poprawna jest odpowiedź A.

3. $\sin^2\alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$. Stąd $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, bo α jest kątem ostrym. Mamy:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{3\sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha + 1} = \sqrt{3\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} + 1} = 1$.

4. $\left(\frac{\sqrt{5}}{8}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$. Stąd $\cos\alpha = \frac{\sqrt{59}}{8}$, więc $8\cos\alpha = 8\cdot\frac{\sqrt{59}}{8} = \sqrt{59}$.

5. $\sin^2\alpha = 1 - \frac{64}{81} = \frac{17}{81}$. Obliczamy $\operatorname{tg}^2\alpha$: $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\frac{17}{81}}{\frac{64}{81}} = \frac{17}{64}$.

6. $\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{11}{12}\right)^2$. Stąd $\cos^2\alpha = \frac{23}{144}$. Obliczamy wartość wyrażenia:

$2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 2\cdot\frac{121}{144} + \frac{23}{144} = \frac{265}{144}$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 22

1	2	3	4	5	6
A	A	C	A	A	C

23. Trójkąty

1. Przypomnij sobie

Podział trójkątów ze względu na boki

- Trójkąty równoboczne – wszystkie boki takiej samej długości
- Trójkąty równoramienne – dwa boki (ramiona) takiej samej długości
- Trójkąty różnoboczne – każdy bok innej długości

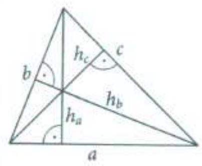
Podział trójkątów ze względu na kąty

miary kątów, s. 166

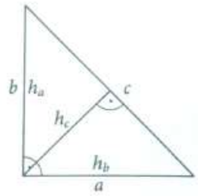
- Trójkąty ostrokątne – wszystkie kąty wewnętrzne ostre
- Trójkąty prostokątne – jeden z kątów wewnętrznych prosty
- Trójkąty rozwartokątne – jeden z kątów wewnętrznych rozwarty

Przypomnienie
Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa $180°$.

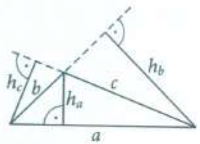
Wysokość trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta z przeciwległym bokiem (lub jego przedłużeniem), prostopadły do tego boku (lub jego przedłużenia). Każdy trójkąt ma trzy wysokości.



trójkąt ostrokątny



trójkąt prostokątny



trójkąt rozwartokątny

Wzory na pole trójkąta

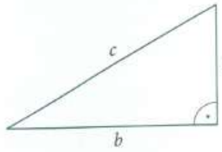
- $P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$
- $P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sin\beta = \frac{1}{2}ac\sin\gamma$,
  gdzie α, β i γ to odpowiednio kąty między bokami a i b, b i c, a i c.

Wzory dla trójkąta równobocznego o boku a

- Pole: $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
- Wysokość: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
- Promień okręgu wpisanego w trójkąt: $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
- Promień okręgu opisanego na trójkącie: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Wzory dla trójkąta prostokątnego

- Długość przeciwprostokątnej: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Pole: $P = \frac{1}{2}ab$
- Promień okręgu wpisanego w trójkąt: $r = \frac{a+b-c}{2}$
- Promień okręgu opisanego na trójkącie: $R = \frac{1}{2}c$

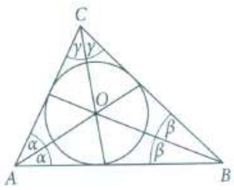


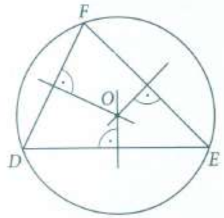
Przypomnienie

Twierdzenie Pitagorasa
Jeśli trójkąt jest prostokątny, to
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Trójkąt a okrąg

W każdy trójkąt można wpisać okrąg i na każdym trójkącie można opisać okrąg.





- Środek okręgu wpisanego w trójkąt jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych tego trójkąta.
- Środek okręgu opisanego na trójkącie jest punktem przecięcia symetralnych boków tego trójkąta.

Przypomnienie

Dwusieczna kąta to prosta dzieląca go na dwa kąty o równej mierze.
Symetralna odcinka to prosta prostopadła do tego odcinka, przechodząca przez jego środek.

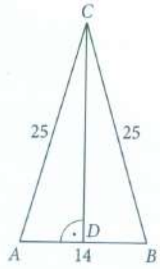
2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Dany jest trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB równej 14 i ramionach równych 25. Oblicz:
a) wysokość opuszczoną na podstawę,
b) obwód trójkąta ABC,
c) pole trójkąta ABC.

Rozwiązanie

Szkicujemy trójkąt równoramienny ABC.



a) Stosujemy twierdzenie Pitagorasa w trójkącie ADC do obliczenia wysokości CD.

$$|AD|^2 + |CD|^2 = |AC|^2$$
$$7^2 + |CD|^2 = 25^2$$
$$|CD|^2 = 576$$
$$|CD| = 24$$

b) $Ob = 25 + 25 + 14 = 64$

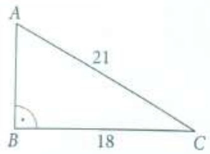
c) $P = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 24 = 168$

Przykład 2.

Przyprostokątna BC trójkąta prostokątnego ABC ma długość 18, a przeciwprostokątna AC – 21. Kąt przy wierzchołku B jest prosty. Oblicz:
a) pole i obwód tego trójkąta,
b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie

Szkicujemy trójkąt prostokątny ABC.



a) **Krok 1.** Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa do obliczenia długości przyprostokątnej AB.

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$
$$|AB|^2 + 18^2 = 21^2$$
$$|AB|^2 = 117$$
$$|AB| = 3\sqrt{13}$$

Krok 2. Obliczamy pole i obwód trójkąta ABC.

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{13} \cdot 18 = 27\sqrt{13}$$
$$Ob = 18 + 3\sqrt{13} + 21 = 39 + 3\sqrt{13}$$

b) $R = \frac{1}{2}|AC| = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$

Przykład 3.

Obwód trójkąta równobocznego ABC jest równy 24. Oblicz:

a) pole tego trójkąta,

b) wysokość tego trójkąta,

c) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt i promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie

a) **Krok 1.** Niech a oznacza długość boku trójkąta ABC. Wyznaczamy a.

$$3a = 24 \quad |:3$$
$$a = 8$$

Krok 2. Obliczamy pole trójkąta.

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$$

b) $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

c) $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M28416

1. Wysokość trójkąta równoramiennego wynosi 12, a podstawa ma długość 18. Oblicz:

a) długość ramienia tego trójkąta,

b) obwód tego trójkąta,

c) pole tego trójkąta.

2. Trójkąt ABC jest prostokątny. Kąt przy wierzchołku A jest prosty, $|AB| = 9$, $|AC| = 15$. Oblicz:

a) promień okręgu opisanego na tym trójkącie,

b) obwód tego trójkąta,

c) pole tego trójkąta.

3. Wysokość trójkąta równobocznego jest równa $\frac{11\sqrt{3}}{2}$. Oblicz:

a) długość boku tego trójkąta,

b) pole tego trójkąta,

c) promień okręgu opisanego na tym trójkącie,

d) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

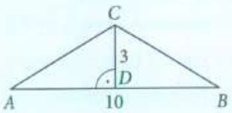
TEST 23

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Bok trójkąta równobocznego ma długość 1. Średnica okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równa

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

2. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o podstawie równej 10 i opuszczonej na nią wysokości równej 3. Obwód trójkąta ABC jest równy



A. $10+2\sqrt{34}$ C. $16+2\sqrt{29}$
B. $6+2\sqrt{29}$ D. $4\sqrt{34}$

3. Wysokość trójkąta równobocznego wynosi 9. Pole tego trójkąta jest równe

A. $\frac{18\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{54\sqrt{3}}{4}$ C. $27\sqrt{3}$ D. $\frac{81\sqrt{3}}{2}$

4. Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ma długość 3, a jedna z przyprostokątnych tego trójkąta ma długość 2. Druga przyprostokątna tego trójkąta jest równa

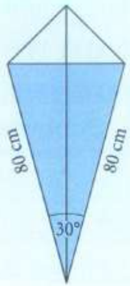
A. $\sqrt{5}$ B. $4\sqrt{2}$ C. $\sqrt{13}$ D. $2\sqrt{5}$

5. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 4 i 9 jest jednym z boków trójkąta równobocznego. Obwód trójkąta równobocznego jest równy

A. $\sqrt{291}$ B. 291 C. $13+\sqrt{97}$ D. $3\sqrt{97}$

TO BYŁO NA MATURZE 23

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.



Zadanie 1. (1 pkt) – maj 2010
Latawiec ma wymiary podane na rysunku.
Powierzchnia zacieniowanego trójkąta jest równa

A. $3200\ cm^2$ C. $1600\ cm^2$
B. $6400\ cm^2$ D. $800\ cm^2$

Zadanie 2. (1 pkt) – sierpień 2010
Okrąg opisany na trójkącie równobocznym ma promień 12.
Wysokość tego trójkąta jest równa

A. 18 C. 22
B. 20 D. 24

Zadanie 3. (1 pkt) – czerwiec 2011
Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 i 8. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy

A. 14 B. 8 C. 6 D. 5

Zadanie 4. (1 pkt) – maj 2012
W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC| = |BC| = 5$ oraz wysokość $|CD| = 2$. Podstawa AB tego trójkąta ma długość

A. 6 B. $2\sqrt{21}$ C. $2\sqrt{29}$ D. 14

Zadanie 5. (1 pkt) – maj 2012
W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7. Obwód tego trójkąta jest równy

A. $16\sqrt{6}$ B. $14\sqrt{6}$ C. $12+4\sqrt{6}$ D. $12+2\sqrt{6}$

Zadanie 6. (1 pkt) – czerwiec 2014
Na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długości 12 i 9, opisano okrąg. Promień tego okręgu jest równy

A. $\sqrt{108}$ B. $\frac{15}{2}$ C. 15 D. $\frac{\sqrt{108}}{2}$

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 23

1. a) 15 b) 48 c) 108 **2.** a) $\frac{3}{2}\sqrt{34}$ b) $24 + 3\sqrt{34}$ c) $67\frac{1}{2}$

3. a) 11 b) $\frac{121\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{11\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{11\sqrt{3}}{6}$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 23

1	2	3	4	5
A	A	C	B	D

1. Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a jest równy: $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, więc $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Średnica okręgu wynosi: $2r = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Niech $|AC| = |BC| = x$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ADC do obliczenia x: $3^2 + 5^2 = x^2$. Stąd $x = \sqrt{34}$. Obwód trójkąta ABC wynosi: $10 + 2\sqrt{34}$.

3. Niech a oznacza długość boku trójkąta równobocznego. Otrzymujemy równość: $\frac{a\sqrt{3}}{2} = 9$, stąd $a = 6\sqrt{3}$. Obliczamy pole tego trójkąta:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(6\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{108\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}.$$

4. Przeciwprostokątna tego trójkąta jest dwa razy dłuższa od promienia opisanego na nim okręgu, więc jej długość wynosi 6. Niech x oznacza długość szukanej przyprostokątnej. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy: $2^2 + x^2 = 6^2$. Stąd $x = 4\sqrt{2}$.

5. Niech x oznacza długość przeciwprostokątnej tego trójkąta. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy: $4^2 + 9^2 = x^2$, stąd $x = \sqrt{97}$. Obwód trójkąta równobocznego o boku x jest równy $3\sqrt{97}$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 23

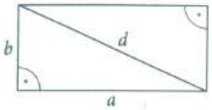
1	2	3	4	5	6
C	A	D	B	D	B

24. Prostokąty

1. Przypomnij sobie

Prostokąt to czworokąt, którego przeciwległe boki są równe, a wszystkie kąty wewnętrzne są proste.

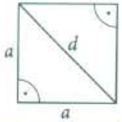
Wzory dla prostokąta



- Pole: $P = ab$
- Obwód: $Ob = 2(a + b)$
- Długość przekątnej: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

Kwadrat jest prostokątem, którego wszystkie boki są równe.

Wzory dla kwadratu



- Pole: $P = a^2 = \frac{d^2}{2}$
- Obwód: $Ob = 4a$
- Długość przekątnej: $d = a\sqrt{2}$
- Promień okręgu opisanego na kwadracie: $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
- Promień okręgu wpisanego w kwadrat: $r = \frac{a}{2}$

Przypomnienie
Suma miar kątów wewnętrznych dowolnego czworokąta jest równa 360°.

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Dany jest kwadrat o polu 25. Podaj:
a) długość przekątnej tego kwadratu,
b) promień okręgu opisanego na tym kwadracie,
c) promień okręgu wpisanego w ten kwadrat.

Rozwiązanie

a) **Krok 1.** Niech a oznacza długość boku kwadratu. Obliczamy a.

$$a^2 = 25$$
$$a = 5$$

Krok 2. Wyznaczamy długość przekątnej kwadratu: $d = a\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

b) $R = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ c) $r = \frac{a}{2} = \frac{5}{2}$

Przykład 2.

Promień okręgu wpisanego w kwadrat ma długość $r = 6$. Oblicz:
a) długość przekątnej tego kwadratu,
b) promień okręgu opisanego na tym kwadracie,
c) obwód tego kwadratu.

Rozwiązanie

a) **Krok 1.** Niech a oznacza długość boku kwadratu. Obliczamy a.

$$r = \frac{a}{2}$$
$$6 = \frac{a}{2}$$
$$a = 12$$

Krok 2. Wyznaczamy długość przekątnej kwadratu: $d = a\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$.

b) $R = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

c) $Ob = 4a = 4 \cdot 12 = 48$

Przykład 3.

Pole prostokąta wynosi 20, a jeden z jego boków jest 5 razy dłuższy od drugiego. Oblicz:
a) długości boków tego prostokąta,
b) długość przekątnej tego prostokąta.

Rozwiązanie

a) **Krok 1.** Oznaczamy długości boków prostokąta literami a i b, gdzie $a > b$, i zapisujemy zależność między nimi.

$$a = 5b$$

Krok 2. Podstawiamy wyznaczoną wartość do równania na pole prostokąta i obliczamy długość jednego boku.

$$a \cdot b = 20$$
$$5b^2 = 20 \quad |:5$$
$$b^2 = 4, \text{ stąd } b = 2$$

Krok 3. Obliczamy długość drugiego boku: $a = 5 \cdot 2 = 10$.

b) $d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$

Przykład 4.

Przekątna prostokąta ma długość $\sqrt{58}$, a jeden z jego boków ma długość 7. Oblicz:
a) długość drugiego boku tego prostokąta,
b) obwód tego prostokąta.

Rozwiązanie

a) Oznaczamy szukaną długość boku prostokąta literą a i obliczamy ją, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$a^2 + 7^2 = \left(\sqrt{58}\right)^2$$
$$a^2 = 9$$
$$a = 3$$

b) $Ob = 2(3 + 7) = 20$

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M31388

1. Długość przekątnej kwadratu wynosi $10\sqrt{2}$. Oblicz:
a) obwód tego kwadratu,
b) pole tego kwadratu,
c) promień okręgu wpisanego w ten kwadrat,
d) promień okręgu opisanego na tym kwadracie.

2. Dany jest prostokąt o bokach a i b. Przekątna tego prostokąta jest cztery razy dłuższa od a. Wiedząc, że $b = 15$, oblicz obwód i pole tego prostokąta.

3. Długość jednego z boków prostokąta stanowi $\frac{3}{2}$ długości drugiego boku. Wiedząc, że pole tego prostokąta wynosi 600, oblicz długości jego boków.

TEST 24

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Przekątna prostokąta ma długość $\sqrt{320}$. Jakie długości mogą mieć boki tego prostokąta?

A. 4 i 8 B. 8 i 16 C. 5 i $\sqrt{15}$ D. $\sqrt{32}$ i $\sqrt{10}$

2. Przekątna kwadratu ma długość 10. Ile wynosi promień okręgu wpisanego w ten kwadrat?

A. 10 B. $5\sqrt{2}$ C. 5 D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

3. Dany jest prostokąt $ABCD$, którego boki mają długości 7 i 13. Zbudowano kwadrat $EFGH$ o obwodzie dwukrotnie mniejszym niż obwód prostokąta $ABCD$. Pole powstałego kwadratu jest równe

A. 25 B. 45,5 C. 100 D. 400

4. Długość jednego z boków prostokąta stanowi $\frac{1}{3}$ długości drugiego boku. Wiedząc, że obwód tego prostokąta jest równy 56, wskaż długość jego krótszego boku.

A. 21 B. $18\frac{2}{3}$ C. 14 D. 7

5. Na kwadracie opisano okrąg o promieniu $8\sqrt{2}$. Przekątna tego kwadratu jest równa

A. $16\sqrt{2}$ B. 16 C. 8 D. $4\sqrt{2}$

6. Dany jest prostokąt o bokach 11 i 12. Jego przekątna jest jednocześnie przekątną pewnego kwadratu. Długość boku tego kwadratu jest równa

A. $\sqrt{530}$ B. $\sqrt{265}$ C. $\frac{\sqrt{530}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{265}}{2}$

24. PROSTOKĄTY

TO BYŁO NA MATURZE 24

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – maj 2010
Okrąg opisany na kwadracie ma promień 4. Długość boku tego kwadratu jest równa

A. $4\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 8 D. 4

Zadanie 2. (1 pkt) – czerwiec 2011
Obwód prostokąta jest równy 28. Stosunek długości jego boków jest równy 3 : 4. Dłuższy bok tego prostokąta jest równy

A. 14 B. 8 C. 7 D. 6

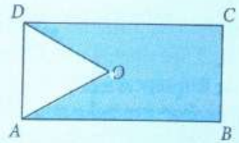
Zadanie 3. (1 pkt) – maj 2012
Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe

A. 25 B. 50 C. 75 D. 100

Zadanie 4. (1 pkt) – sierpień 2012
Przekątna AC prostokąta $ABCD$ ma długość 14. Bok AB tego prostokąta ma długość 6. Długość boku BC jest równa

A. 8 B. $4\sqrt{10}$ C. $2\sqrt{58}$ D. 10

Zadanie 5. (1 pkt) – sierpień 2013
Z prostokąta $ABCD$ o obwodzie 30 wycięto trójkąt równoboczny AOD o obwodzie 15 (tak jak na rysunku).



Obwód zacieniowanej figury jest równy

A. 25 B. 30 C. 35 D. 40

24. PROSTOKĄTY

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 24

1. a) 40 b) 100 c) 5 d) $5\sqrt{2}$ **2.** $Ob = 2(\sqrt{15} + 15)$, $P = 15\sqrt{15}$
3. 20, 30

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 24

1	2	3	4	5	6
B	D	A	D	A	C

1. Sprawdzamy, czy $d = \sqrt{a^2 + b^2}$, gdzie a i b to długości boków prostokąta, a d to jego przekątna: A. $d = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} \neq \sqrt{320}$, B. $d = \sqrt{8^2 + 16^2} = \sqrt{320}$. Poprawna jest odpowiedź B.

2. Niech a oznacza długość boku kwadratu. Otrzymujemy: $a\sqrt{2} = 10$, stąd $a = 5\sqrt{2}$. Promień okręgu wpisanego w ten kwadrat wynosi $\frac{a}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

3. Obwód kwadratu jest równy połowie obwodu prostokąta, czyli $\frac{1}{2} \cdot 2(7 + 13) = 20$. Bok kwadratu jest równy $20 : 4 = 5$, a jego pole wynosi $5^2 = 25$.

4. Niech a oznacza długość jednego z boków tego prostokąta. Drugi bok jest równy $\frac{1}{3}a$. Obwód prostokąta wynosi 56, więc otrzymujemy równanie $2\left(a + \frac{1}{3}a\right) = 56$, stąd $a = 21$. Wobec tego krótszy bok ma długość 7.

5. Przekątna kwadratu jest dwa razy dłuższa od promienia okręgu opisanego na tym kwadracie, czyli jest równa $2 \cdot 8\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$.

6. Obliczamy długość przekątnej prostokąta: $\sqrt{11^2 + 12^2} = \sqrt{265}$. Niech a oznacza długość boku kwadratu. Przekątna kwadratu jest równa $a\sqrt{2}$, więc $a\sqrt{2} = \sqrt{265}$. Stąd $a = \frac{\sqrt{265}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{265}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{530}}{2}$.

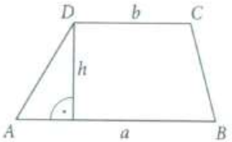
Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 24

1	2	3	4	5
A	B	B	B	C

25. Trapezy i równoległoboki

1. Przypomnij sobie

Trapez to czworokąt, w którym dwa przeciwległe boki są równoległe.



Odcinki AB i CD, $AB \parallel CD$, nazywamy **podstawami** trapezu, a odcinki AD i BC – **ramionami** trapezu.

Przypomnienie

Trapez, którego ramiona są równej długości, nazywamy **równoramiennym**.
Trapez, w którym jedno z ramion jest prostopadłe do podstaw, nazywamy **prostokątnym**.

Wzór na pole trapezu

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

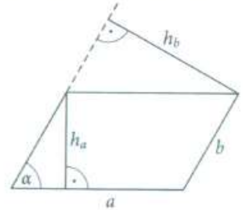
Równoległobok to czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Przypomnienie

Do równoległoboków zalicza się prostokąty i romby.

Wzory na pole i obwód równoległoboku

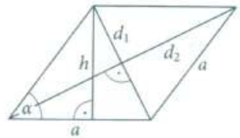
- Pole: $P = ah_a = bh_b = ab\sin\alpha$
- Obwód: $Ob = 2(a + b)$



Romb to równoległobok, którego boki mają taką samą długość.
Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym i dzielą się na połowy.

Wzory na pole i obwód rombu

- Pole: $P = ah = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2$
- Obwód: $Ob = 4a$



2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o dłuższej podstawie AB i wysokości 4. Kąt między ramieniem a podstawą AB ma miarę 30°. Długość podstawy CD jest równa 7. Oblicz:

a) długość ramion tego trapezu,

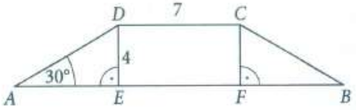
b) długość podstawy AB,

c) pole tego trapezu,

d) obwód tego trapezu.

Rozwiązanie

Szkicujemy trapez równoramienny $ABCD$.



a) Trójkąt ADE ma kąty wewnętrzne o miarach 30°, 60° i 90°, jest zatem połową trójkąta równobocznego o wysokości AE. Długość połowy podstawy tego trójkąta wynosi 4, więc długość jego boku to 8. Ramiona trapezu $|AD| = |BC| = 8$.

b) $|AB| = |AE| + |EF| + |FB|$. Wiemy, że $|AE| = |FB|$ i $|EF| = |DC| = 7$, więc $|AB| = 2|AE| + 7$.
Obliczamy długość odcinka AE – jest to wysokość trójkąta równobocznego o boku 8, więc

$$|AE| = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Stąd

$$|AB| = 2 \cdot 4\sqrt{3} + 7 = 8\sqrt{3} + 7.$$

> **Uwaga**
> Długości odcinków $|AD|$ i $|AE|$ możesz obliczyć, korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym ADE.

c) $P = \frac{|AB|+|CD|}{2} \cdot h = \frac{7+8\sqrt{3}+7}{2} \cdot 4 = 28 + 16\sqrt{3}$

d) $Ob = 8 + 8 + 7 + 8\sqrt{3} + 7 = 30 + 8\sqrt{3}$

7. Planimetria

25. TRAPEZY I RÓWNOLEGŁOBOKI

Przykład 2.

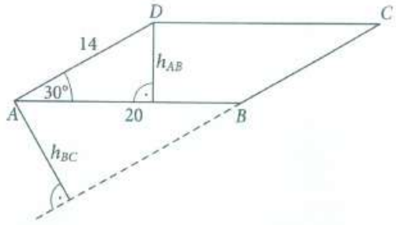
Dany jest równoległobok $ABCD$ o bokach długości 14 i 20. Kąt ostry równoległoboku ma miarę 30°. Oblicz:

a) pole tego równoległoboku,

b) wysokości tego równoległoboku.

Rozwiązanie

Szkicujemy równoległobok $ABCD$.



a) $P = |AB| \cdot |AD| \cdot \sin|\sphericalangle BAD| = 20 \cdot 14 \cdot \sin 30^\circ = 20 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2} = 140$

b) **Krok 1.** Obliczamy wysokość opuszczoną na bok AB. Korzystamy ze wzoru na pole: $P = |AB|h_{AB}$.

$$20h_{AB} = 140$$
$$h_{AB} = 7$$

Krok 2. Obliczamy wysokość opuszczoną na bok BC. Korzystamy ze wzoru na pole: $P = |BC|h_{BC}$.

$$14h_{BC} = 140$$
$$h_{BC} = 10$$

Przykład 3.

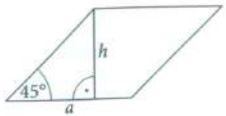
Pole rombu jest równe $18\sqrt{2}$, a miara jego kąta ostrego wynosi 45°. Oblicz:

a) długość boku tego rombu,

b) wysokość tego rombu.

Rozwiązanie

Szkicujemy romb.



a) Korzystając ze wzoru na pole: $P = a^2 \sin 45°$, obliczamy długość boku rombu.

$$a^2 \sin 45° = 18\sqrt{2}$$

$$a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2} \quad \Big|: \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a^2 = 36$$

$$a = 6$$

b) Korzystając ze wzoru na pole rombu: $P = ah$, obliczamy jego wysokość.

$$6h = 18\sqrt{2} \quad |:6$$

$$h = 3\sqrt{2}$$

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M31500

1. Wysokość trapezu równoramiennego jest równa długości jego krótszej podstawy i wynosi 7. Wiedząc, że jeden z kątów tego trapezu ma miarę 45°, oblicz obwód i pole tej figury.

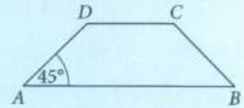
2. Miara kąta ostrego między bokami równoległoboku jest równa 60°, a boki mają długości 8 i 10. Oblicz pole tego równoległoboku i jego wysokości.

3. Kąt ostry rombu ma miarę 30°, a jego obwód jest równy 48. Oblicz pole tej figury.

TEST 25

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. W trapezie równoramiennym $ABCD$ kąt między ramieniem a dolną podstawą ma miarę 45° (zobacz rysunek) i dane są: $|AD| = |CD| = |BC| = 8$. Podstawa AB ma długość



A. $8 + 16\sqrt{2}$
B. $8 + 8\sqrt{2}$
C. $8 + 4\sqrt{2}$
D. $8 + 2\sqrt{2}$

2. Dany jest trapez, w którym jedna z podstaw ma długość a, wysokość jest od niej dwa razy krótsza, a druga podstawa jest sześć razy dłuższa od wysokości. Pole tego trapezu jest równe

A. $\frac{7}{4}a^2$ B. a^2 C. $\frac{3}{4}a^2$ D. $\frac{1}{2}a^2$

3. Pole równoległoboku wynosi 300. Wiedząc, że jego boki są równe 20 i 30, wskaż długość krótszej wysokości tej figury.

A. 20 B. 15 C. 10 D. 5

4. Długości boków równoległoboku wynoszą 6 i 2, a sinus kąta między tymi bokami jest równy $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Pole figury jest równe

A. $3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}$
B. $2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}$
C. $\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$
D. $3\sqrt{6} + \sqrt{2}$

5. Kąt ostry rombu ma miarę 30°, a wysokość wynosi 9. Długość boku tego rombu jest równa

A. $\frac{9}{2}$ B. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ C. $9\sqrt{3}$ D. 18

TO BYŁO NA MATURZE 25

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – maj 2011
Wysokość rombu o boku długości 6 i kącie ostrym 60° jest równa

A. $3\sqrt{3}$ B. 3 C. $6\sqrt{3}$ D. 6

Zadanie 2. (1 pkt) – czerwiec 2013

Kosinus kąta ostrego rombu jest równy $\frac{\sqrt{3}}{2}$, bok rombu ma długość 3. Pole tego rombu jest równe

A. $\frac{9}{2}$ B. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ D. 6

Zadanie 3. (1 pkt) – sierpień 2013
Pole równoległoboku o bokach długości 4 i 12 oraz kącie ostrym 30° jest równe

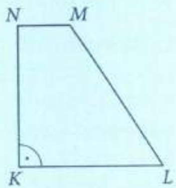
A. 24 B. $12\sqrt{3}$ C. 12 D. $6\sqrt{3}$

Zadanie 4. (1 pkt) – maj 2014
Wysokość trapezu równoramiennego o kącie ostrym 60° i ramieniu długości $2\sqrt{3}$ jest równa

A. $\sqrt{3}$ B. 3 C. $2\sqrt{3}$ D. 2

Zadanie 5. (1 pkt) – czerwiec 2014
W trapezie $KLMN$, w którym $KL \parallel MN$, kąt LKN jest prosty (zobacz rysunek) oraz dane są: $|MN| = 3$, $|KN| = 4\sqrt{3}$, $|\sphericalangle KLM| = 60°$. Pole tego trapezu jest równe

A. $4 + 2\sqrt{3}$ C. $20\sqrt{3}$
B. $10\sqrt{3}$ D. $24 + 6\sqrt{3}$



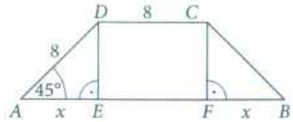
Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 25

1. $Ob = 28 + 14\sqrt{2}$, $P = 98$ **2.** $P = 40\sqrt{3}$, wysokości: $4\sqrt{3}, 5\sqrt{3}$ **3.** 72

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 25

1	2	3	4	5
B	B	C	A	D

1. Trójkąt ADE ma kąty wewnętrzne o miarach 45°, 45° i 90°, więc odcinek AD jest przekątną kwadratu o boku x. Stąd $x\sqrt{2} = 8$, więc $x = 4\sqrt{2}$. Podstawa AB ma długość: $|AB| = 2x + |EF| = 2 \cdot 4\sqrt{2} + 8 = 8\sqrt{2} + 8$.

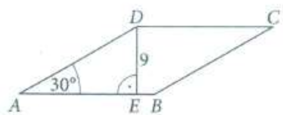


2. Wysokość trapezu jest równa $\frac{a}{2}$, druga podstawa wynosi $6 \cdot \frac{a}{2} = 3a$. Obliczamy pole trapezu: $P = \frac{a+3a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{4a^2}{4} = a^2$.

3. Oznaczamy literami h_1 i h_2 odpowiednio wysokości opuszczone na boki o długościach 20 i 30. Korzystamy ze wzoru na pole równoległoboku do wyznaczenia obu wysokości: $20h_1 = 300$ i $30h_2 = 300$. Stąd $h_1 = 15$, $h_2 = 10$. Poprawna jest odpowiedź C.

4. Korzystamy ze wzoru $P = ab\sin\alpha$ dla $a = 6$, $b = 2$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$:
$P = 6 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = 3\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) = 3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}$.

5. Miary kątów wewnętrznych trójkąta ADE to: 30°, 60° i 90°. Z zależności między długościami jego boków otrzymujemy: $|AD| = 2 \cdot 9 = 18$. Bok rombu jest równy 18.



Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 25

1	2	3	4	5
A	A	A	B	C

26. Kąty w okręgu

1. Przypomnij sobie

Podział kątów ze względu na miary

Kąt α nazywamy kątem:

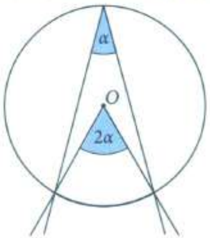
- zerowym, gdy $\alpha = 0°$,
- ostrym, gdy $\alpha \in (0°, 90°)$,
- prostym, gdy $\alpha = 90°$,
- rozwartym, gdy $\alpha \in (90°, 180°)$,
- półpełnym, gdy $\alpha = 180°$,
- pełnym, gdy $\alpha = 360°$.

- Jeśli α jest kątem wypukłym, to $\alpha \in \langle 0°, 180° \rangle$.
- Jeśli α jest kątem wklęsłym, to $\alpha \in (180°, 360°)$.

Kąty w okręgu

Kąt środkowy w okręgu to kąt, którego wierzchołkiem jest środek okręgu.

Kąt wpisany w okrąg to kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a każde ramię tego kąta przecina okrąg w jeszcze jednym punkcie.

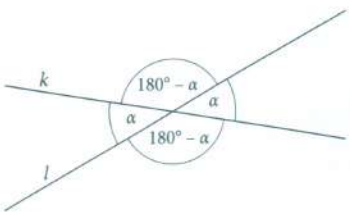


Przypomnienie

Jeśli kąt środkowy i kąt wpisany są oparte na tym samym łuku, to miara kąta środkowego jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego.

Kąt wpisany oparty na półokręgu ma miarę 90°.

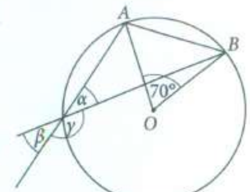
Jeśli dwie proste k i l przecinają się pod kątem α, to przecinają się również pod kątem $180° - \alpha$.



2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Kąt AOB jest kątem środkowym o mierze 70°. Podaj miary pokazanych na rysunku kątów: OAB, OBA, α, β, γ.



Rozwiązanie

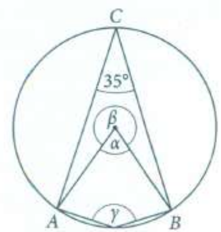
Trójkąt ABO jest równoramienny, ponieważ $|AO| = |BO|$.
Miary kątów OAB i ABO są równe

$$|\sphericalangle OAB| = |\sphericalangle ABO| = \frac{180° - 70°}{2} = 55°.$$

Kąt α jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku co kąt środkowy AOB, więc jego miara jest o połowę mniejsza od miary tego kąta, czyli wynosi 35°.
Kąty α i β są kątami wierzchołkowymi, więc $\beta = \alpha = 35°$.
Kąty α i γ są przyległe, więc $\gamma = 180° - 35° = 145°$.

Przykład 2.

Kąt ACB jest kątem wpisanym o mierze 35° (zobacz rysunek). Kąt α jest kątem środkowym. Podaj miary kątów α, β, γ.



Rozwiązanie

Kąt α jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt wpisany ACB, więc

$$\alpha = 2|\sphericalangle ACB| = 70°.$$

Kąt β wraz z kątem α tworzy kąt pełny, czyli 360°. Jego miara jest równa

$$\beta = 360° - \alpha = 360° - 70° = 290°.$$

Kąt γ jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku co kąt środkowy β, więc

$$\gamma = \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2} \cdot 290° = 145°.$$

Uwaga

Kąty α i β są oparte na różnych łukach, które razem tworzą okrąg.

Przykład 3.

Kąt AOB jest kątem środkowym opartym na łuku stanowiącym $\frac{3}{8}$ długości okręgu. Podaj miarę kąta wpisanego α, opartego na tym samym łuku co kąt AOB.

Rozwiązanie

Krok 1. Obliczamy miarę kąta AOB. Jest ona równa $\frac{3}{8}$ miary kąta pełnego, więc $|\sphericalangle AOB| = \frac{3}{8} \cdot 360^\circ = 135^\circ$.

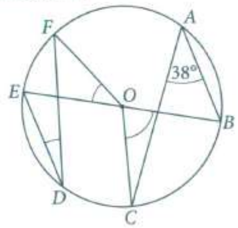
Krok 2. Obliczamy miarę kąta α. Jest ona dwa razy mniejsza od miary kąta AOB, więc $\alpha = \frac{1}{2} \cdot 135^\circ = 67{,}5^\circ = 67^\circ 30'$.

Przypomnienie
Stopnie dzielimy na minuty.
$1^\circ = 60'$

3. Rozwiąż samodzielnie

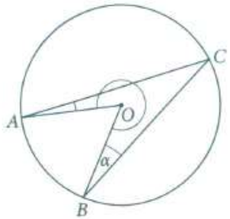
Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M31736

1. W okręgu o środku w punkcie O dane są kąty: wpisane CAB i FDE oraz środkowe BOC i FOE. Wiedząc, że miara kąta BOC jest dwukrotnie większa od miary kąta FOE oraz $|\sphericalangle CAB| = 38^\circ$, oblicz miary kątów BOC, FOE, FDE.



2. Podaj miary kątów wpisanego i środkowego opartych na łuku stanowiącym $\frac{1}{6}$ długości okręgu.

3. Dany jest okrąg o środku O. Miara kąta wklęsłego AOB jest równa 300°, $\alpha = 20^\circ$. Oblicz miarę kąta OAC.

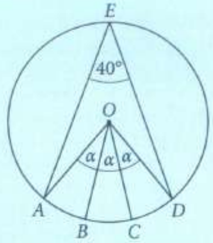


TEST 26

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

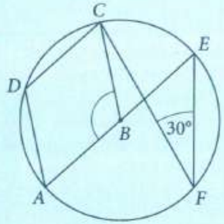
1. Dane są okrąg o środku O i kąt wpisany AED o mierze 40°. Wskaż miarę kąta BOD.

A. $13^\circ 20'$ C. $53^\circ 20'$
B. $26^\circ 40'$ D. $66^\circ 40'$



2. Dany jest okrąg o środku B. Czworokąt $ABCD$ jest rombem, odcinek AE – średnicą okręgu, a kąt wpisany CFE ma miarę 30°. Wskaż miarę kąta rozwartego rombu.

A. 100° C. 150°
B. 120° D. 160°



3. Kąty α i β są odpowiednio kątami środkowym i wpisanym, opartymi na tym samym łuku. Różnica miar tych kątów wynosi 18°. Miara kąta α wynosi

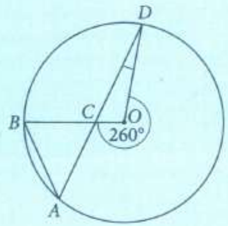
A. 36° B. 27° C. 18° D. 9°

4. Kąt AOB jest kątem środkowym opartym na łuku stanowiącym $\frac{1}{8}$ długości okręgu. Na tym samym łuku oparto kąt wpisany ACB. Różnica $|\sphericalangle AOB| - |\sphericalangle ACB|$ jest równa

A. 90° B. 45° C. $22^\circ 30'$ D. $11^\circ 14'$

5. Trójkąt ABC jest równoramienny, gdzie $|AB| = |AC|$, a punkt O jest środkiem okręgu. Wiedząc, że miara wklęsłego kąta BOD jest równa 260°, wskaż miarę kąta CDO.

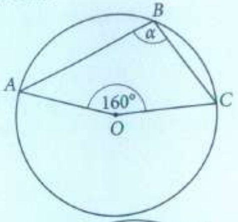
A. 10° B. 15° C. 25° D. 30°



TO BYŁO NA MATURZE 26

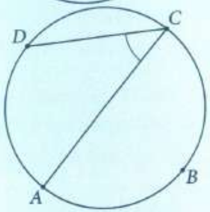
W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – maj 2011
Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany α ma miarę



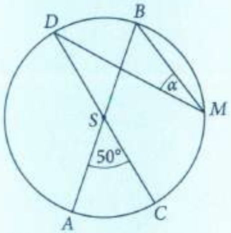
A. 80° C. 110°
B. 100° D. 120°

Zadanie 2. (1 pkt) – maj 2012
Punkty A, B, C, D dzielą okrąg na 4 równe łuki. Miara zaznaczonego na rysunku kąta wpisanego ACD jest równa



A. 90° C. 45°
B. 60° D. 30°

Zadanie 3. (1 pkt) – maj 2013
Średnice AB i CD okręgu o środku S przecinają się pod kątem 50° (tak jak na rysunku). Miara kąta α jest równa

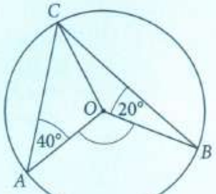


A. 25° C. 40°
B. 30° D. 50°

Zadanie 4. (1 pkt) – maj 2014
Kąt środkowy oparty na łuku, którego długość jest równa $\frac{4}{9}$ długości okręgu, ma miarę

A. 160° B. 80° C. 40° D. 20°

Zadanie 5. (1 pkt) – sierpień 2014
Punkty A, B i C leżą na okręgu o środku O (zobacz rysunek). Zaznaczony na rysunku wypukły kąt środkowy AOB ma miarę



A. 60° C. 120°
B. 100° D. 140°

26. KĄTY W OKRĘGU

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 26

1. $|\sphericalangle BOC| = 76^\circ$, $|\sphericalangle FOE| = 38^\circ$, $|\sphericalangle FDE| = 19^\circ$
2. kąt środkowy: 60°, kąt wpisany: 30° **3.** 10°

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 26

1	2	3	4	5
C	B	A	C	B

1. Kąt AOD jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt wpisany AED, więc jego miara wynosi 80°. Stąd
$\alpha = \frac{80^\circ}{3} = 26\frac{2}{3}^\circ = 26^\circ 40'$ i $|\sphericalangle BOD| = 2\alpha = 53^\circ 20'$.

2. Kąt CBE jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt wpisany CFE, więc jego miara jest równa 60°. Kąty ABC i CBE są przyległe, więc $|\sphericalangle ABC| = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Poprawna jest odpowiedź B.

3. Wiemy, że $\alpha = 2\beta$. Różnica tych kątów jest równa $2\beta - \beta = \beta = 18^\circ$, więc $\alpha = 36^\circ$.

4. Miara kąta AOB to: $|\sphericalangle AOB| = \frac{1}{8} \cdot 360^\circ = 45^\circ$, a miara kąta ACB to: $|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AOB| = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22\frac{1}{2}^\circ = 22^\circ 30'$. O tyle różnią się te kąty.

5. Miara kąta wpisanego BAD jest równa połowie miary wypukłego kąta środkowego COD, więc $|\sphericalangle BAD| = \frac{1}{2} \cdot (360^\circ - 260^\circ) = 50^\circ$. Trójkąt ABC jest równoramienny, więc $|\sphericalangle BCA| = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$. Kąty DCO i BCA są kątami wierzchołkowymi, więc $|\sphericalangle DCO| = |\sphericalangle BCA|$. Suma miar kątów w trójkącie jest równa 180°, więc $|\sphericalangle CDO| = 180^\circ - 65^\circ - 100^\circ = 15^\circ$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 26

1	2	3	4	5
B	C	A	A	C

26. KĄTY W OKRĘGU

27. Odcinek w układzie współrzędnych

1. Przypomnij sobie

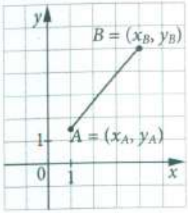
Dany jest odcinek o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$.

Długość odcinka AB dana jest wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Środkiem odcinka AB jest punkt o współrzędnych:

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$



2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Dany jest odcinek AB taki, że $A = (6, -1)$ i $B = (2, 10)$.

a) Oblicz długość tego odcinka.

b) Wyznacz współrzędne jego środka.

Rozwiązanie

a) $|AB| = \sqrt{(2-6)^2 + (10-(-1))^2} = \sqrt{4^2 + 11^2} = \sqrt{137}$

b) $S = \left(\frac{6+2}{2}, \frac{-1+10}{2}\right) = \left(\frac{8}{2}, \frac{9}{2}\right) = \left(4, 4\frac{1}{2}\right)$

Przykład 2.

Środkiem odcinka CD jest punkt $S = (-1, 1)$, a punkt $D = (10, 4)$.

a) Wyznacz współrzędne punktu C.

b) Oblicz długość odcinka CS.

Rozwiązanie

a) **Krok 1.** Zapisujemy współrzędne środka odcinka CD, gdzie $C = (x_C, y_C)$.

$$(-1, 1) = \left(\frac{x_C + 10}{2}, \frac{y_C + 4}{2}\right)$$

Krok 2. Porównujemy odpowiadające sobie współrzędne. Rozwiązujemy otrzymane równania.

$$\begin{cases} -1 = \frac{x_C + 10}{2} & |\cdot 2 \\ 1 = \frac{y_C + 4}{2} & |\cdot 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2 = x_C + 10 \\ 2 = y_C + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_C = -12 \\ y_C = -2 \end{cases}$$

Stąd $C = (-12, -2)$.

b) $|CS| = \sqrt{(-1-(-12))^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{11^2 + 3^2} = \sqrt{130}$

Przykład 3.

Dane są wierzchołki $A = (2, 1)$ i $B = (8, 1)$ trójkąta równobocznego ABC. Oblicz obwód i pole tego trójkąta.

Rozwiązanie

Krok 1. Obliczamy długość boku trójkąta ABC.

$$|AB| = \sqrt{(8-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{6^2} = 6$$

Krok 2. Obliczamy obwód i pole tego trójkąta.

$$Ob = 3|AB| = 3 \cdot 6 = 18, \quad P = \frac{|AB|^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M31810

1. Oblicz długość odcinka o końcach w punktach:

a) $A = (10, 4)$, $B = (5, 9)$,

b) $C = (-12, 0)$, $D = (2, 2)$,

c) $E = (7, -3)$, $F = (11, -1)$.

2. Oblicz współrzędne środka odcinka o końcach w punktach:

a) $A = (9, 3)$, $B = (4, 7)$,

b) $C = (-13, -1)$, $D = (2, 1)$,

c) $E = (6, -4)$, $F = (10, 0)$.

3. Punkt $S = (12, 14)$ jest środkiem odcinka AB, gdzie $A = (12, 6)$.

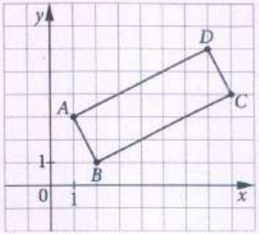
a) Wyznacz współrzędne punktu B.

b) Oblicz długość odcinka AB.

TEST 27

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

Informacja do zadań 1.–2.
Rysunek przedstawia prostokąt $ABCD$.



1. Długość boku BC tego prostokąta jest równa

A. $\sqrt{125}$ B. $\sqrt{109}$ C. $\sqrt{61}$ D. $\sqrt{45}$

2. Przekątne BD i AC tego prostokąta przecinają się w punkcie o współrzędnych

A. $\left(5, \frac{5}{2}\right)$ B. $\left(4, \frac{9}{2}\right)$ C. $\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$ D. $\left(\frac{15}{2}, 5\right)$

3. Dany jest odcinek AB taki, że $A = (50, 12)$ i $B = (-64, 28)$. Symetralna tego odcinka przecina go w punkcie o współrzędnych

A. $(31, -18)$ B. $(-7, 20)$ C. $(-14, 40)$ D. $(39, -26)$

4. Dane są punkty C i D takie, że $C = (x, y)$ i $D = (2x, 4y)$. Wiedząc, że środek S odcinka CD ma współrzędne $(-6, 15)$, wskaż współrzędne punktu D.

A. $D = (-8, 24)$ C. $D = (-4, 6)$
B. $D = \left(-\frac{39}{2}, \frac{27}{2}\right)$ D. $D = (-39, 54)$

5. W trójkącie równoramiennym ABC dane są: $A = (-7, 2)$, $B = (-2, -3)$, $C = (0, 1)$. Wskaż długość jego ramienia.

A. $\sqrt{13}$ B. $\sqrt{20}$ C. $\sqrt{50}$ D. $\sqrt{106}$

TO BYŁO NA MATURZE 27

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – listopad 2009
Dane są punkty $A = (-2, 3)$ oraz $B = (4, 6)$. Długość odcinka AB jest równa

A. $\sqrt{208}$ B. $\sqrt{52}$ C. $\sqrt{45}$ D. $\sqrt{40}$

Zadanie 2. (1 pkt) – sierpień 2011
Dane są punkty $A = (1, -4)$ i $B = (2, 3)$. Odcinek AB ma długość

A. 1 B. $4\sqrt{3}$ C. $5\sqrt{2}$ D. 7

Zadanie 3. (1 pkt) – sierpień 2012
Punkty $B = (-2, 4)$ i $C = (5, 1)$ są dwoma sąsiednimi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Pole tego kwadratu jest równe

A. 74 B. 58 C. 40 D. 29

Zadanie 4. (1 pkt) – maj 2013
Punkty $A = (-1, 2)$ i $B = (5, -2)$ są dwoma sąsiednimi wierzchołkami rombu $ABCD$. Obwód tego rombu jest równy

A. $\sqrt{13}$ B. 13 C. 676 D. $8\sqrt{13}$

Zadanie 5. (1 pkt) – maj 2013
Punkt $S = (-4, 7)$ jest środkiem odcinka PQ, gdzie $Q = (17, 12)$. Zatem punkt P ma współrzędne

A. $P = (2, -25)$ C. $P = (-25, 2)$
B. $P = (38, 17)$ D. $P = (-12, 4)$

Zadanie 6. (1 pkt) – sierpień 2013
Punkt $S = (4, 1)$ jest środkiem odcinka AB, gdzie $A = (a, 0)$ i $B = (a + 3, 2)$. Zatem

A. $a = 0$ B. $a = \frac{1}{2}$ C. $a = 2$ D. $a = \frac{5}{2}$

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 27

1. a) $5\sqrt{2}$ b) $10\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{5}$ **2.** a) $\left(\frac{13}{2},5\right)$ b) $\left(\frac{-11}{2},0\right)$ c) $(8,-2)$
3. a) $(12,22)$ b) 16

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 27

1	2	3	4	5
D	C	B	A	C

1. $B=(2,1)$, $C=(8,4)$, więc
$|BC|=\sqrt{(8-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}$.

2. Przekątne prostokąta przecinają się w połowie, więc obliczamy współrzędne środka jednej z nich: $S_{BD}=\left(\frac{2+7}{2},\frac{1+6}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},\frac{7}{2}\right)$.

3. Symetralna odcinka przechodzi przez jego środek, więc obliczamy współrzędne środka odcinka AB: $S=\left(\frac{50-64}{2},\frac{12+28}{2}\right)=(-7,20)$.

4. Skoro $S=(-6,15)$, to: $\left(\frac{x+2x}{2},\frac{y+4y}{2}\right)=(-6,15)$. Otrzymujemy równania: $\frac{3x}{2}=-6$ i $\frac{5y}{2}=15$, stąd $x=-4$ i $y=6$.
Zatem $D=(2\cdot(-4),4\cdot 6)=(-8,24)$.

5. Obliczamy długości trzech boków trójkąta ABC.
$|AB|=\sqrt{(-2-(-7))^2+(-3-2)^2}=\sqrt{5^2+(-5)^2}=\sqrt{50}$,
$|AC|=\sqrt{(0-(-7))^2+(1-2)^2}=\sqrt{7^2+(-1)^2}=\sqrt{50}$,
$|BC|=\sqrt{(0-(-2))^2+(1-(-3))^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$.
Ramię trójkąta ma długość $\sqrt{50}$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 27

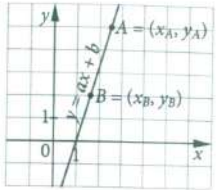
1	2	3	4	5	6
C	C	B	D	C	D

28. Równanie prostej

1. Przypomnij sobie

Wyznaczanie równania prostej przechodzącej przez dwa punkty

Dane są punkty $A=(x_A,y_A)$ i $B=(x_B,y_B)$ oraz szukana prosta $y=ax+b$.



Przypomnienie

Przez dwa punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.

Każda prosta nierównoległa do osi Oy jest wykresem funkcji liniowej $f(x)=ax+b$.

Podstawiamy współrzędne punktów A i B do równania prostej i zapisujemy układ równań.

rozwiązywanie układu równań, s. 45

$$\begin{cases} y_A=ax_A+b \\ y_B=ax_B+b \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest para liczb (a,b), które są współczynnikami szukanej prostej.

Równanie prostej

- Postać kierunkowa: $y=ax+b$
- Postać ogólna: $Ax+By+C=0$, gdzie $A\neq 0$ lub $B\neq 0$

Uwaga

W postaci ogólnej można zapisać każdą prostą, a w postaci kierunkowej – prostą, która jest wykresem funkcji liniowej.

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Wyznacz równanie kierunkowe i równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkty $A=(1,3)$ i $B=(-5,-21)$.

Rozwiązanie

Krok 1. Zapisujemy prostą w postaci kierunkowej: $y=f(x)=ax+b$. Przechodzi ona przez punkty A i B, więc $f(1)=3$ i $f(-5)=-21$. Zapisujemy układ równań z niewiadomymi a i b.

$$\begin{cases} 3=a+b \\ -21=-5a+b \end{cases}$$

Krok 2. Rozwiązujemy układ równań i podajemy rozwiązanie.

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}$$

Krok 3. Zapisujemy równanie prostej w postaci kierunkowej i ogólnej.

$$y = 4x - 1$$

$$4x - y - 1 = 0$$

Uwaga

Aby przekształcić równanie prostej z postaci kierunkowej do postaci ogólnej, należy przenieść wszystkie wyrazy na jedną stronę równania.

Przykład 2.

Wyznacz równanie kierunkowe prostej, która jest wykresem funkcji liniowej f, wiedząc, że ta prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych, a $f(6) = -18$.

Rozwiązanie

Krok 1. Niech $f(x) = ax + b$. Wykres funkcji liniowej przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc $f(0) = 0$. Zapisujemy równanie i wyznaczamy b.

$$0 = a \cdot 0 + b$$
$$b = 0$$

Krok 2. Rozwiązujemy równanie $f(6) = -18$. Podstawiamy $b = 0$ i wyznaczamy a.

$$-18 = 6a \quad |:6$$
$$a = -3$$

Krok 3. Zapisujemy równanie kierunkowe prostej.

$$y = -3x$$

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M33825

1. Wyznacz równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkty $A = (4, 6)$ i $B = (-2, 12)$.

2. Wyznacz równanie ogólne prostej $y = f(x)$, wiedząc, że $f(7) = 1$ i $f(1) = 7$.

3. Wyznacz równanie kierunkowe i równanie ogólne prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i punkt $A = (8, -4)$.

TEST 28

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

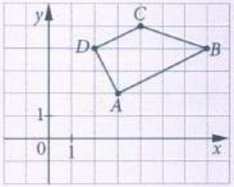
1. Funkcja liniowa f spełnia warunki: $f(2014) = 2015$ i $f(2015) = 2016$. Wskaż równanie prostej, która jest wykresem funkcji f.

A. $x - y - 1 = 0$
B. $x - y + 1 = 0$
C. $-x - y + 1 = 0$
D. $-x - y - 1 = 0$

2. Współczynnik kierunkowy prostej k wynosi -4, a do jej wykresu należy punkt $P = (5, -12)$. Wobec tego równanie prostej k może przyjąć postać

A. $y = -x + 2$
B. $y = -2x - 4$
C. $y = -4x + 8$
D. $y = -4x - 43$

Informacja do zadań 3.–4.
Na rysunku przedstawiono trapez prostokątny $ABCD$.



3. Wskaż równanie prostej zawierającej przekątną AC.

A. $y = 3x - 7$
B. $y = \frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$
C. $y = -x - 1$
D. $y = -x + 9$

4. Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez wierzchołek B i początek układu współrzędnych jest równy

A. $-\frac{4}{7}$
B. 0
C. $\frac{4}{7}$
D. $\frac{7}{4}$

5. Do prostej l należą punkty $P = (4, -34)$ i $Q = (-2, 26)$. Wskaż równanie tej prostej.

A. $y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{10}$
B. $y = 6x - 10$
C. $y = -\frac{1}{10}x + \frac{3}{5}$
D. $y = -10x + 6$

TO BYŁO NA MATURZE 28

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

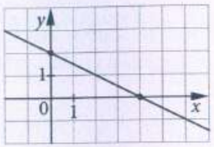
Zadanie 1. (1 pkt) – czerwiec 2011
Dane są punkty $A = (-2,2)$ i $B = (4,-2)$. Współczynnik kierunkowy prostej AB jest równy

A. $a = -\frac{2}{3}$ B. $a = -\frac{3}{2}$ C. $a = \frac{3}{2}$ D. $a = \frac{2}{3}$

Zadanie 2. (1 pkt) – sierpień 2011
Do wykresu funkcji liniowej f należą punkty $A = (1,2)$ i $B = (-2,5)$. Funkcja f ma wzór

A. $f(x) = x + 3$
B. $f(x) = x - 3$
C. $f(x) = -x - 3$
D. $f(x) = -x + 3$

Zadanie 3. (1 pkt) – czerwiec 2013
Wskaż równanie prostej, której fragment przedstawiony jest na wykresie.



A. $x - 2y - 4 = 0$
B. $x + 2y + 4 = 0$
C. $x - 2y + 4 = 0$
D. $x + 2y - 4 = 0$

Zadanie 4. (1 pkt) – maj 2014
O funkcji liniowej f wiadomo, że $f(1) = 2$. Do wykresu tej funkcji należy punkt $P = (-2,3)$. Wzór funkcji f to

A. $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$
B. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$
C. $f(x) = -3x + 7$
D. $f(x) = -2x + 4$

Zadanie 5. (1 pkt) – czerwiec 2014
Na prostej o równaniu $y = ax + b$ leżą punkty $K = (1,0)$ i $L = (0,1)$. Wynika stąd, że

A. $a = -1$ i $b = 1$
B. $a = 1$ i $b = -1$
C. $a = -1$ i $b = -1$
D. $a = 1$ i $b = 1$

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 28

1. $y = -x + 10$ **2.** $x + y - 8 = 0$ **3.** równanie kierunkowe: $y = -\frac{1}{2}x$, równanie ogólne: $\frac{1}{2}x + y = 0$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 28

1	2	3	4	5
B	C	A	C	D

1. Zauważamy, że dla danego argumentu funkcja liniowa przyjmuje wartość o 1 większą, więc równanie prostej ma postać: $y = x + 1$. Przekształcamy równanie do postaci ogólnej: $x - y + 1 = 0$.

2. Równanie prostej k ma postać: $y = -4x + b$. Jeśli do prostej k należy punkt $P = (5,-12)$, to $-12 = -4 \cdot 5 + b$. Stąd $b = 8$. Poprawna jest odpowiedź C.

3. Do prostej $y = ax + b$ należą punkty $A = (3,2)$ i $C = (4,5)$. Rozwiązujemy układ równań: $\begin{cases} 2 = 3a + b \\ 5 = 4a + b \end{cases}$ i otrzymujemy: $a = 3, b = -7$.
Poprawna jest odpowiedź A.

4. Wyraz wolny prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych jest równy zero, więc $y = ax$. Do prostej należy punkt $B = (7,4)$, więc $4 = 7a$. Stąd $a = \frac{4}{7}$.

5. Niech l: $y = ax + b$. Rozwiązujemy układ równań: $\begin{cases} -34 = 4a + b \\ 26 = -2a + b \end{cases}$ i otrzymujemy: $a = -10, b = 6$. Poprawna jest odpowiedź D.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 28

1	2	3	4	5
A	D	D	A	A

29. Prostopadłość i równoległość prostych

1. Przypomnij sobie

Dwie proste o równaniach $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są:
- równoległe, gdy $a_1 = a_2$,
- prostopadłe, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Wyznacz równanie prostej k równoległej do prostej $y = 4x - 2$, przechodzącej przez punkt $A = (2, 5)$.

Rozwiązanie

Krok 1. Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej k.
Jest on równy współczynnikowi kierunkowemu danej prostej, więc prosta k jest opisana równaniem: $y = 4x + b$.

Krok 2. Podstawiamy współrzędne punktu A do równania prostej k i obliczamy b.

$$5 = 4 \cdot 2 + b$$
$$b = -3$$

Krok 3. Zapisujemy równanie prostej k.

$$y = 4x - 3$$

Przykład 2.

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej $y = -2x + 6$, przechodzącej przez początek układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Krok 1. Iloczyn współczynników kierunkowych prostych prostopadłych jest równy -1. Wyznaczamy współczynnik kierunkowy szukanej prostej.

Oznaczamy go literą a.

$$-2 \cdot a = -1 \quad |:(-2)$$
$$a = \frac{1}{2}$$

Ta prosta ma postać: $y = \frac{1}{2}x + b$.

Krok 2. Wyznaczamy współczynnik b. Prosta przecina oś Oy w punkcie o współrzędnych $(0, 0)$, więc $b = 0$.

współczynniki we wzorze funkcji liniowej, s. 85

Krok 3. Zapisujemy równanie szukanej prostej: $y = \frac{1}{2}x$.

Przykład 3.

Wyznacz wartość m, dla której proste $y = -3mx + 4$ i $y = (m+1)x + \frac{1}{2}m$ są:

a) równoległe,
b) prostopadłe.

Rozwiązanie

a) Proste są równoległe, jeśli ich współczynniki kierunkowe są równe. Zapisujemy równanie i wyznaczamy wartość m.

$$-3m = m + 1$$
$$-4m = 1$$
$$m = -\frac{1}{4}$$

b) Proste są prostopadłe, jeśli iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy -1. Zapisujemy równanie i wyznaczamy wartości m.

$$-3m \cdot (m + 1) = -1$$
$$-3m^2 - 3m + 1 = 0$$
$$\Delta = 21 > 0$$
$$m_1 = \frac{-3-\sqrt{21}}{6}$$
$$m_2 = \frac{-3+\sqrt{21}}{6}$$

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M34721

1. Wyznacz równanie prostej równoległej do prostej l, przechodzącej przez punkt A.

a) $l\colon y = 2x + \frac{1}{4}$, $A = (0, 0)$

b) $l\colon y = \frac{1}{5}x - 2$, $A = (-1, 0)$

c) $l\colon y = -6x - 1$, $A = (10, -2)$

2. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej k, przechodzącej przez punkt B.

a) $k\colon y = \frac{1}{4}x + 51$, $B = (0, 0)$

b) $k\colon y = -8x - 6$, $B = (0, 4)$

c) $k\colon y = 12x + 2$, $B = (-1, -4)$

3. Dla jakiej wartości m proste:

a) $y = (2m + 3)x - 3$ i $y = \frac{2}{3}mx + 5$ są równoległe,

b) $y = -\frac{1}{2}mx + 7\frac{1}{2}$ i $y = (4m - 7)x$ są prostopadłe?

TEST 29

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Prostą prostopadłą do prostej $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ jest prosta o równaniu

A. $y = \frac{1}{4}x + 1$

B. $y = -\frac{1}{4}x + 1$

C. $y = 4x + 1$

D. $y = -4x + 1$

2. Prostą równoległą do prostej $y = 3(-x + 1)$ jest prosta o równaniu

A. $y = -x + 5$

B. $y = 3x - 6$

C. $y = -3x + 4$

D. $y = \frac{1}{3}x + 7$

3. Przekątna AC kwadratu $ABCD$ jest zawarta w prostej o równaniu $y = x + 4$, a punkt $D = (-3, 3)$. Wskaż równanie prostej, w której jest zawarta druga przekątna tego kwadratu.

A. $y = -\frac{1}{3}x$

B. $y = -x$

C. $y = -x + 6$

D. $y = x + 6$

4. Wskaż równanie prostej równoległej do prostej $y = 7x + 2015$, przechodzącej przez punkt $Q = (-3, -6)$.

A. $y = 7x + 15$

B. $y = 7x + 39$

C. $y = -\frac{1}{7}x - 6\frac{3}{7}$

D. $y = -\frac{1}{7}x - 3\frac{6}{7}$

5. Prosta $k\colon y = 2mx + 6$ jest prostopadła do prostej $l\colon y = 4nx + 1$. Wynika stąd, że

A. $2m = -4n$

B. $2m - 4n = 0$

C. $8mn = -1$

D. $8mn = 0$

TO BYŁO NA MATURZE 29

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – maj 2011
Prosta k ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(-2, 1)$.

A. $y = -2x + 3$
B. $y = 2x + 1$
C. $y = 2x + 5$
D. $y = -x + 1$

Zadanie 2. (1 pkt) – maj 2013
Prosta o równaniu $y = \frac{2}{m}x + 1$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -\frac{3}{2}x - 1$. Stąd wynika, że

A. $m = -3$ B. $m = \frac{2}{3}$ C. $m = \frac{3}{2}$ D. $m = 3$

Zadanie 3. (1 pkt) – czerwiec 2013
Dana jest prosta l o równaniu $y = -\frac{2}{5}x$. Prosta k równoległa do prostej l i przecinająca oś Oy w punkcie o współrzędnych $(0, 3)$ ma równanie

A. $y = -0{,}4x + 3$
B. $y = -0{,}4x - 3$
C. $y = 2{,}5x + 3$
D. $y = 2{,}5x - 3$

Zadanie 4. (1 pkt) – maj 2014
Punkt $C = (0, 2)$ jest wierzchołkiem trapezu $ABCD$, którego podstawa AB jest zawarta w prostej o równaniu $y = 2x - 4$. Wskaż równanie prostej zawierającej podstawę CD.

A. $y = \frac{1}{2}x + 2$
B. $y = -2x + 2$
C. $y = -\frac{1}{2}x + 2$
D. $y = 2x + 2$

Zadanie 5. (1 pkt) – czerwiec 2014
Proste o równaniach: $y = mx - 5$ oraz $y = (1 - 2m)x + 7$ są równoległe, gdy

A. $m = -1$ B. $m = -\frac{1}{3}$ C. $m = \frac{1}{3}$ D. $m = 1$

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 29

1. a) $y = 2x$ b) $y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$ c) $y = -6x + 58$
2. a) $y = -4x$ b) $y = \frac{1}{8}x + 4$ c) $y = -\frac{1}{12}x - 4\frac{1}{12}$
3. a) $m = -\frac{9}{4}$ b) $m = -\frac{1}{4}$ lub $m = 2$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 29

1	2	3	4	5
D	C	B	A	C

1. Współczynnik kierunkowy a szukanej prostej spełnia warunek: $a \cdot \frac{1}{4} = -1$, więc $a = -4$. Poprawna jest odpowiedź D.

2. Przekształcamy równanie danej prostej: $y = -3x - 3$. Współczynnik kierunkowy szukanej prostej jest taki sam, równy -3. Poprawna jest odpowiedź C.

3. Przekątne kwadratu są prostopadłe, więc proste, w których są zawarte, też są prostopadłe. Wobec tego prosta BD ma postać: $y = -x + b$. Podstawiamy do wzoru prostej współrzędne punktu D i otrzymujemy: $3 = -(-3) + b$. Stąd $b = 0$. Poprawna jest odpowiedź B.

4. Szukana prosta jest równoległa do danej prostej, więc ma postać: $y = 7x + b$. Podstawiamy współrzędne punktu Q i otrzymujemy: $-6 = 7 \cdot (-3) + b$. Stąd $b = 15$. Poprawna jest odpowiedź A.

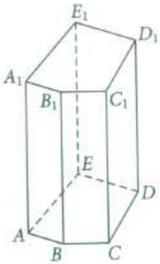
5. Proste k i l są prostopadłe, więc iloczyn ich współczynników kierunkowych wynosi -1. Otrzymujemy: $2m \cdot 4n = -1$. Stąd $8mn = -1$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 29

1	2	3	4	5
C	D	A	D	C

30. Graniastosłupy

1. Przypomnij sobie



Graniastosłup to wielościan, którego wszystkie wierzchołki leżą na dwóch równoległych płaszczyznach, a krawędzie nieleżące na tych płaszczyznach są równoległe.

Wielokąty $ABCDE$ i $A_1B_1C_1D_1E_1$ nazywamy **podstawami** graniastosłupa, pozostałe wielokąty to jego **ściany boczne**.

Wysokość graniastosłupa to odległość między płaszczyznami zawierającymi jego podstawy.

Graniastosłup, którego podstawa jest n-kątem, nazywamy graniastosłupem n-kątnym.

Wzory dla graniastosłupa

- Pole powierzchni całkowitej: $P_c = 2P_p + P_b$, gdzie P_p jest polem podstawy, P_b – polem powierzchni bocznej, czyli sumą pól ścian bocznych.
- Objętość graniastosłupa: $V = P_p \cdot h$, gdzie h jest wysokością graniastosłupa.

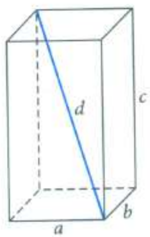
Przypomnienie

Graniastosłup n-kątny ma:
- $2n$ wierzchołków,
- $3n$ krawędzi,
- n ścian bocznych.

Rodzaje graniastosłupów

- Graniastosłup **prosty** to graniastosłup, którego wszystkie krawędzie boczne są prostopadłe do płaszczyzn obu podstaw. Wysokość graniastosłupa prostego jest równa długości jego krawędzi bocznej.
- Graniastosłup **prawidłowy** to graniastosłup prosty, którego podstawy są wielokątami foremnymi.

Prostopadłościan to graniastosłup, którego wszystkie ściany są prostokątami.



Wzory dla prostopadłościanu

- Pole powierzchni całkowitej: $P_c = 2(ab + ac + bc)$
- Objętość: $V = abc$
- Długość przekątnej: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

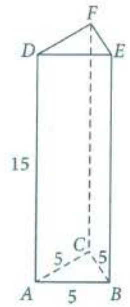
Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny, którego krawędź podstawy ma długość 5, a wysokość jest od niej trzy razy dłuższa.

a) Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

b) Oblicz objętość tego graniastosłupa.

c) Podaj liczbę krawędzi i wierzchołków tej bryły.

Rozwiązanie



a) **Krok 1.** Szkicujemy graniastosłup i nanosimy dane. Jest to graniastosłup prawidłowy, więc jego podstawy to trójkąty równoboczne.

Krok 2. Obliczamy pole podstawy.

$$P_p = \frac{5^2\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

Krok 3. Obliczamy pole powierzchni bocznej. Jest ono równe polu trzech prostokątów o bokach 5 i 15.

$$P_b = 3 \cdot 5 \cdot 15 = 225$$

Krok 4. Obliczamy pole powierzchni całkowitej.

$$P_c = 2P_p + P_b = 2 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{4} + 225 = 25\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 9\right)$$

b) $V = P_p \cdot |AD| = \frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot 15 = \frac{375\sqrt{3}}{4}$

c) Podstawą tego graniastosłupa jest trójkąt, więc graniastosłup ma $3 \cdot 3 = 9$ krawędzi i $2 \cdot 3 = 6$ wierzchołków.

Przykład 2.

Dany jest prostopadłościan, którego krawędzie podstawy mają długości 3 i 6, a jego objętość jest równa 144. Oblicz:

a) wysokość tego prostopadłościanu,

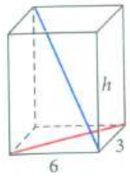
b) pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu,

c) długość przekątnych: prostopadłościanu i jego podstawy.

Rozwiązanie

a) Zapisujemy wzór na objętość prostopadłościanu i obliczamy wysokość bryły.

$$3 \cdot 6 \cdot h = 144, \text{ stąd } 18h = 144, \text{ więc } h = 8.$$



b) $P_c = 2(3 \cdot 6 + 3 \cdot 8 + 6 \cdot 8) = 180$

c) Przekątna podstawy: $\sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Przekątna prostopadłościanu: $\sqrt{3^2 + 6^2 + 8^2} = \sqrt{109}$

Przykład 3.

Pewien graniastosłup prawidłowy ma 12 wierzchołków.

a) Jakim wielokątem jest podstawa tego graniastosłupa?

b) Ile wynosi suma długości jego krawędzi, jeśli każda z nich ma długość 4?

Rozwiązanie

a) Liczba wierzchołków graniastosłupa jest dwukrotnie większa od liczby boków wielokąta w podstawie, więc podstawą tego graniastosłupa jest sześciokąt foremny.

b) Liczba krawędzi graniastosłupa jest trzykrotnie większa od liczby boków wielokąta w podstawie, więc wynosi 18. Suma długości wszystkich krawędzi jest równa $18 \cdot 4 = 72$.

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M36867

1. Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o bokach długości 4 i 11. Wysokość prostopadłościanu jest pięć razy krótsza od obwodu tego prostokąta. Oblicz objętość prostopadłościanu i długość jego przekątnej.

2. Podstawą graniastosłupa prawidłowego jest trójkąt o wysokości $5\sqrt{3}$. Oblicz:
   a) wysokość graniastosłupa, wiedząc, że jego objętość jest równa $400\sqrt{3}$,
   b) pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa,
   c) pole powierzchni całkowitej tej bryły.

3. Pewien graniastosłup prawidłowy ma 12 krawędzi.
   a) Jakim wielokątem jest podstawa tego graniastosłupa?
   b) Ile wierzchołków ma ten graniastosłup?

TEST 30

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 9 i 12. Wysokość tego graniastosłupa jest równa długości przeciwprostokątnej trójkąta w podstawie. Ile wynosi objętość tej bryły?

   A. 1620 B. 810 C. 648 D. 594

2. Graniastosłup prawidłowy ma 36 krawędzi, a suma długości krawędzi podstawy wynosi 24. Ile wynosi długość krawędzi podstawy?

   A. $1\frac{1}{3}$ B. $1\frac{1}{2}$ C. 2 D. 3

3. Wysokość prostopadłościanu jest równa $h = 10$, a długość jednej z krawędzi podstawy wynosi $a = 4$. Długość drugiej krawędzi podstawy jest średnią arytmetyczną liczb a i h. Pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu wynosi

   A. 138 B. 276 C. 280 D. 560

4. Prostokąt o bokach długości 5 i 8 jest podstawą prostopadłościanu o wysokości 10. Wskaż długość przekątnej tego prostopadłościanu.

   A. $\sqrt{89}$ B. $5\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{41}$ D. $3\sqrt{21}$

5. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku długości 7. Ile jest równa wysokość tego prostopadłościanu, jeśli jego objętość wynosi 539?

   A. 11 B. $15\frac{3}{4}$ C. $25\frac{2}{3}$ D. 77

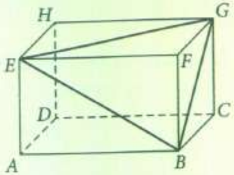
TO BYŁO NA MATURZE 30

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – maj 2010
Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o wymiarach $5 \times 3 \times 4$ jest równe

A. 94 B. 60 C. 47 D. 20

Zadanie 2. (1 pkt) – maj 2011
W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ mamy: $|AB| = 5$, $|AD| = 4$, $|AE| = 3$. Który z odcinków AB, BG, GE, EB jest najdłuższy?



A. AB C. GE
B. BG D. EB

Zadanie 3. (1 pkt) – sierpień 2011
W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym wszystkie krawędzie są tej samej długości. Suma długości wszystkich krawędzi jest równa 90. Wtedy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe

A. 300 C. $300 + 50\sqrt{3}$
B. $300\sqrt{3}$ D. $300 + 25\sqrt{3}$

Zadanie 4. (1 pkt) – maj 2013
Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa jest o 10 większa od liczby wszystkich jego ścian bocznych. Stąd wynika, że podstawą tego graniastosłupa jest

A. czworokąt B. pięciokąt C. sześciokąt D. dziesięciokąt

Zadanie 5. (1 pkt) – maj 2013
Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o wysokości 7 jest równa $28\sqrt{3}$. Długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa jest równa

A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 30

1. $V = 264$, $d = \sqrt{173}$ **2.** a) 16 b) 480 c) $50\sqrt{3} + 480$
3. a) kwadratem b) 8

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 30

1	2	3	4	5
B	C	B	D	A

1. Obliczamy długość przeciwprostokątnej trójkąta w podstawie, korzystając z twierdzenia Pitagorasa: $\sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$, czyli wysokość graniastosłupa $h = 15$. Obliczamy objętość tego graniastosłupa:
$V = P_p \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 = 810.$

2. Niech n oznacza liczbę krawędzi podstawy tego graniastosłupa. Jeśli graniastosłup ma 36 krawędzi, to $3n = 36$, stąd $n = 12$. Podstawą graniastosłupa jest dwunastokąt foremny, więc długość krawędzi podstawy wynosi $24 : 12 = 2$.

3. Obliczamy długość krawędzi podstawy: $\frac{a+h}{2} = \frac{10+4}{2} = 7$. Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa: $P_c = 2(4 \cdot 7 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 10) = 276$.

4. Przekątna prostopadłościanu jest równa:
$\sqrt{5^2 + 8^2 + 10^2} = \sqrt{189} = 3\sqrt{21}$.

5. Pole podstawy tego prostopadłościanu wynosi $7^2 = 49$. Niech h oznacza wysokość tej bryły. Ze wzoru na objętość otrzymujemy: $49h = 539$. Stąd $h = 11$.

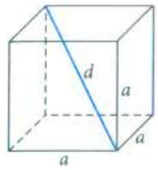
Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 30

1	2	3	4	5
A	C	C	B	B

31. Sześciany

1. Przypomnij sobie

Sześcian to prostopadłościan, którego wszystkie ściany są kwadratami.



Wzory dla sześcianu

- Pole powierzchni całkowitej: $P_c = 6a^2$
- Objętość: $V = a^3$
- Długość przekątnej sześcianu: $d = a\sqrt{3}$

Przypomnienie
Sześcian ma 12 krawędzi i 8 wierzchołków.

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Długość krawędzi sześcianu jest równa 11. Oblicz:
a) pole powierzchni całkowitej tego sześcianu,
b) objętość sześcianu.

Rozwiązanie

a) $P_c = 6 \cdot 11^2 = 726$ b) $V = 11^3 = 1331$

Przykład 2.

Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 96. Oblicz:
a) długość krawędzi tego sześcianu,
b) długość przekątnej jednej ze ścian tego sześcianu,
c) długość przekątnej sześcianu,
d) objętość sześcianu,
e) sumę długości wszystkich krawędzi tego sześcianu.

Rozwiązanie

a) Niech a oznacza długość krawędzi sześcianu. Ze wzoru na pole powierzchni całkowitej otrzymujemy:
$$6a^2 = 96 \quad |:6$$
$$a^2 = 16$$
$$a = 4$$
b) Przekątna ściany sześcianu to przekątna kwadratu, więc jej długość wynosi: $a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

c) $d = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

d) $V = a^3 = 4^3 = 64$

e) Sześcian ma 12 krawędzi, wobec tego suma długości wszystkich jego krawędzi jest równa $12a = 12 \cdot 4 = 48$.

Przykład 3.

Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu wynosi 84. Oblicz pole jednej ściany tego sześcianu.

Rozwiązanie

Krok 1. Niech a oznacza długość krawędzi sześcianu. Obliczamy a.
$$12a = 84 \quad |:12$$
$$a = 7$$
Krok 2. Obliczamy pole jednej ściany sześcianu.
$$a^2 = 7^2 = 49$$

Przykład 4.

Objętość sześcianu jest równa 1000.
a) Podaj długość krawędzi tego sześcianu.
b) Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły.

Rozwiązanie

a) Niech a oznacza długość krawędzi sześcianu. Obliczamy ją, korzystając ze wzoru na objętość sześcianu.

$$a^3 = 1000$$
$$a = \sqrt[3]{1000}$$
$$a = 10$$

b) $P_c = 6a^2 = 6 \cdot 10^2 = 600$

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M39304

1. Objętość sześcianu jest równa 1. Oblicz:
a) pole powierzchni całkowitej tego sześcianu,
b) sumę długości wszystkich krawędzi sześcianu,
c) długość przekątnej sześcianu.

2. Pole jednej ściany sześcianu jest równe 144. Oblicz:
a) długość krawędzi tego sześcianu,
b) długość przekątnej ściany sześcianu,
c) długość przekątnej sześcianu,
d) objętość sześcianu,
e) pole powierzchni całkowitej tego sześcianu.

3. Przekątna ściany sześcianu ma długość 20. Oblicz:
a) objętość sześcianu,
b) pole powierzchni całkowitej tego sześcianu,
c) długość przekątnej sześcianu.

TEST 31

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Obwód jednej ściany sześcianu jest równy 36. Pole powierzchni całkowitej tej bryły wynosi

A. 108 B. 216 C. 486 D. 729

2. Objętość sześcianu jest równa 8. Ile wynosi długość przekątnej jednej ściany sześcianu?

A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{2}$

3. Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu wynosi $24\sqrt{5}$. Objętość tej bryły jest równa

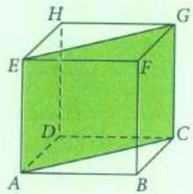
A. $120\sqrt{5}$ B. $80\sqrt{5}$ C. $40\sqrt{5}$ D. $20\sqrt{5}$

4. Jeśli przekątna sześcianu ma długość 3, to długość jego krawędzi wynosi

A. 9 B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt[3]{3}$ D. $\sqrt{3}$

5. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$. Wiedząc, że pole jednej ściany tego sześcianu jest równe 121, oblicz obwód prostokąta $ACGE$.

A. $22(1+\sqrt{2})$ C. $484\sqrt{2}$
B. $11(1+\sqrt{2})$ D. $121\sqrt{2}$



6. Długość przekątnej ściany sześcianu jest równa 12. Ile wynosi długość przekątnej sześcianu?

A. $6\sqrt{2}$ B. $6\sqrt{3}$ C. $6\sqrt{6}$ D. $12\sqrt{3}$

TO BYŁO NA MATURZE 31

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – listopad 2009
Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 150 cm^2. Długość krawędzi tego sześcianu jest równa

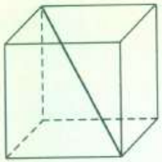
A. 3,5 cm B. 4 cm C. 4,5 cm D. 5 cm

Zadanie 2. (1 pkt) – maj 2011
Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 54. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa

A. $\sqrt{6}$ B. 3 C. 9 D. $3\sqrt{3}$

Zadanie 3. (1 pkt) – sierpień 2011
Krawędź sześcianu ma długość 9. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa

A. $\sqrt[3]{9}$ C. $9\sqrt{3}$
B. $9\sqrt{2}$ D. $9+9\sqrt{2}$



Zadanie 4. (1 pkt) – maj 2012
Pole powierzchni jednej ściany sześcianu jest równe 4. Objętość tego sześcianu jest równa

A. 6 B. 8 C. 24 D. 64

Zadanie 5. (1 pkt) – sierpień 2012
Objętość sześcianu jest równa 64. Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe

A. 512 B. 384 C. 96 D. 16

Zadanie 6. (1 pkt) – czerwiec 2013
Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 12. Suma długości wszystkich krawędzi tego sześcianu jest równa

A. $12\sqrt{2}$ B. $8\sqrt{2}$ C. $6\sqrt{2}$ D. $3\sqrt{2}$

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 31

1. a) 6 b) 12 c) $\sqrt{3}$ **2.** a) 12 b) $12\sqrt{2}$ c) $12\sqrt{3}$ d) 1728 e) 864
3. a) $2000\sqrt{2}$ b) 1200 c) $10\sqrt{6}$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 31

1	2	3	4	5	6
C	B	C	D	A	C

1. Jeśli obwód jednej ściany sześcianu wynosi 36, to jego krawędź ma długość: $\frac{36}{4} = 9$. Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe: $P_c = 6 \cdot 9^2 = 486$.

2. Niech a oznacza długość krawędzi tego sześcianu. Jeśli jego objętość wynosi 8, to $a^3 = 8$. Stąd $a = 2$. Długość przekątnej jednej ściany sześcianu jest równa: $a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

3. Sześcian ma 12 krawędzi, więc długość jednej z nich wynosi: $\frac{24\sqrt{5}}{12} = 2\sqrt{5}$. Objętość tego sześcianu jest równa: $\left(2\sqrt{5}\right)^3 = 40\sqrt{5}$.

4. Niech a oznacza długość krawędzi sześcianu. Jeśli przekątna sześcianu ma długość 3, to $a\sqrt{3} = 3$. Stąd $a = \sqrt{3}$.

5. Jeśli pole jednej ściany sześcianu jest równe 121, to długość krawędzi sześcianu wynosi: $a = \sqrt{121} = 11$. Jeden z boków prostokąta $ACGE$ jest krawędzią podanego sześcianu, a drugi przekątną jego ściany, więc obwód tego prostokąta jest równy: $2\left(a + a\sqrt{2}\right) = 2a\left(1 + \sqrt{2}\right) = 22\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

6. Niech a oznacza długość krawędzi sześcianu. Otrzymujemy $a\sqrt{2} = 12$, stąd $a = 6\sqrt{2}$. Długość przekątnej sześcianu jest równa: $d = a\sqrt{3} = 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{6}$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 31

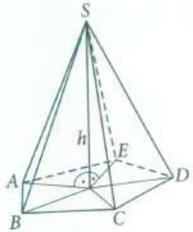
1	2	3	4	5	6
D	D	C	B	C	A

32. Ostrosłupy

1. Przypomnij sobie

Ostrosłup to wielościan, którego jedna ściana, nazywana **podstawą**, jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany, nazywane **ścianami bocznymi**, są trójkątami o wspólnym wierzchołku, nazywanym **wierzchołkiem ostrosłupa**.

Wysokość ostrosłupa to odległość wierzchołka ostrosłupa od płaszczyzny zawierającej jego podstawę.



Wzory dla ostrosłupa

- Pole powierzchni całkowitej:

$$P_c = P_p + P_b,$$

gdzie P_p jest polem podstawy, P_b – polem powierzchni bocznej, czyli sumą pól ścian bocznych.

- Objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h,$$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa.

Przypomnienie

Ostrosłup n-kątny ma:
- $n+1$ wierzchołków,
- $2n$ krawędzi,
- n ścian bocznych.

Rodzaje ostrosłupów

- **Czworościan** to ostrosłup, którego podstawa jest trójkątem.
- **Czworościan foremny** to czworościan, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi.
- Ostrosłup **prawidłowy** to ostrosłup, którego podstawa jest **wielokątem foremnym**, a wszystkie krawędzie boczne są równej długości. Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego to trójkąty równoramienne.

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Podstawa ostrosłupa prawidłowego jest kwadratem o boku 40.

a) Wiedząc, że wysokość tego ostrosłupa wynosi 15, oblicz jego objętość.

b) Wiedząc, że wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa jest równa 25, oblicz pole jego powierzchni całkowitej.

Rozwiązanie

a) $V = \frac{1}{3}P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 40^2 \cdot 15 = 8000$

b) **Krok 1.** Obliczamy pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Jest ono równe sumie pól czterech trójkątów równoramiennych o podstawie 40 i wysokości 25.

$$P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 25 = 2000$$

Krok 2. Obliczamy pole powierzchni całkowitej.

$$P_c = P_p + P_b = 1600 + 2000 = 3600$$

Przykład 2.

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Oblicz długość boku podstawy tego ostrosłupa, jeśli jego wysokość jest równa 9.

Rozwiązanie

Krok 1. Niech a oznacza długość boku podstawy ostrosłupa. Zapisujemy wzór na pole podstawy, czyli pole trójkąta równobocznego o boku a.

$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Krok 2. Obliczamy a, korzystając ze wzoru na objętość ostrosłupa.

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 9$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} \quad \Big| : \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$a^2 = 1$$

$$a = 1$$

Przykład 3.

Pewien ostrosłup prawidłowy ma 8 krawędzi.

a) Jakim wielokątem jest podstawa tego ostrosłupa?

b) Ile wierzchołków ma ta bryła?

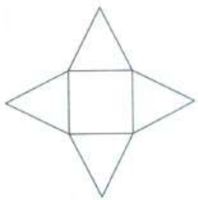
c) Narysuj przykładową siatkę tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

a) Jeśli ostrosłup ma 8 krawędzi, to jego podstawa ma $\frac{8}{2} = 4$ boki. Ten ostrosłup jest prawidłowy, więc jego podstawą jest kwadrat.

b) Liczba wierzchołków ostrosłupa jest o 1 większa od liczby boków wielokąta w podstawie, więc ten ostrosłup ma 5 wierzchołków.

c)



3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M40149

1. Który z ostrosłupów ma większą objętość?

- Ostrosłup $ABCS$ o wysokości 11 i podstawie, która jest trójkątem równobocznym o boku 6.
- Ostrosłup $DEFGT$ o wysokości $11\sqrt{3}$ i podstawie, która jest kwadratem o boku 3.

2. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach 10 i 15. Ile wynosi wysokość tego ostrosłupa, jeśli jego objętość jest równa 650?

3. Pewien ostrosłup ma 9 ścian bocznych.

a) Jakim wielokątem jest podstawa tego ostrosłupa?

b) Ile krawędzi i wierzchołków ma ta bryła?

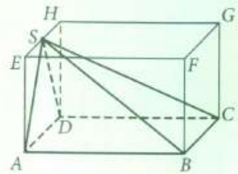
TEST 32

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

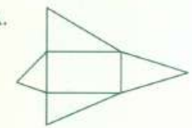
1. Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy 9. Ile wynosi pole jego powierzchni bocznej, jeśli wysokość ściany bocznej jest równa 16?

A. 288 B. 216 C. 81 D. 72

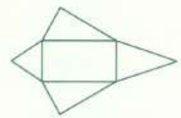
2. Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$. Siatką ostrosłupa $ABCDS$, gdzie $|ES| = |SH|$, jest



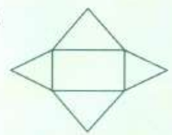
A.



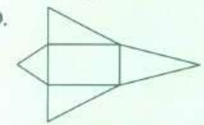
B.



C.



D.



3. Pewien ostrosłup ma 12 krawędzi. Ile wierzchołków ma ta bryła?

A. 13 B. 11 C. 7 D. 6

4. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny prostokątny o ramieniu długości 4. Ile wynosi objętość tej bryły, jeśli jej wysokość jest równa długości ramienia trójkąta w podstawie?

A. 32 B. $32\sqrt{2}$ C. $\frac{32\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{32}{3}$

5. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Krawędź jego podstawy ma długość 6, a wysokość ścian bocznych wynosi 12. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe

A. 180 B. 144 C. 60 D. 48

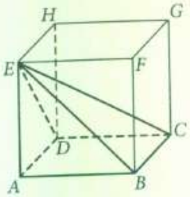
TO BYŁO NA MATURZE 32

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

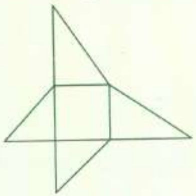
Zadanie 1. (1 pkt) – maj 2010
Ostrosłup ma 18 wierzchołków. Liczba wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa

A. 11 B. 18 C. 27 D. 34

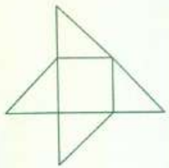
Zadanie 2. (1 pkt) – czerwiec 2011
Dany jest sześcian $ABCDEFGH$. Siatką ostrosłupa czworokątnego $ABCDE$ jest



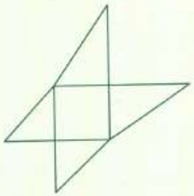
A.



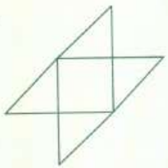
C.



B.



D.



Zadanie 3. (1 pkt) – maj 2014
Jeżeli ostrosłup ma 10 krawędzi, to liczba ścian bocznych jest równa

A. 5 B. 7 C. 8 D. 10

Zadanie 4. (1 pkt) – czerwiec 2014
Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 432, a krawędź podstawy tego ostrosłupa ma długość 12. Wysokość tego ostrosłupa jest równa

A. 3 B. 9 C. 27 D. 108

Zadanie 5. (1 pkt) – sierpień 2014
Ostrosłup i graniastosłup mają równe pola podstaw i równe wysokości. Objętość ostrosłupa jest równa $81\sqrt{3}$. Objętość graniastosłupa jest równa

A. 27 B. $27\sqrt{3}$ C. 243 D. $243\sqrt{3}$

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 32

1. Ostrosłupy mają taką samą objętość. **2.** 13
3. a) dziewięciokąt b) 18 krawędzi, 10 wierzchołków

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 32

1	2	3	4	5
B	D	C	D	A

1. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe sumie pól powierzchni trzech trójkątów: $P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 16 = 216$.

2. Ściany BAS i CDS są przystającymi trójkątami prostokątnymi, bo $|AS| = |DS|$ i $|\sphericalangle BAS| = 90^\circ = |\sphericalangle CDS|$. Poprawna jest odpowiedź D.

3. Jeśli ostrosłup ma 12 krawędzi, to jego podstawą jest sześciokąt. Ten ostrosłup ma zatem 7 wierzchołków.

4. $V = \frac{1}{3}P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = \frac{32}{3}$

5. $P_c = P_p + P_b = 6^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 180$

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 32

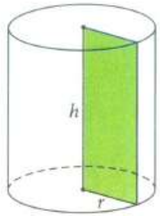
1	2	3	4	5
D	A	A	B	D

33. Bryły obrotowe

1. Przypomnij sobie

Walec to bryła obrotowa powstała w wyniku obrotu prostokąta wokół prostej zawierającej jeden z jego boków.

Przekrojem osiowym walca o wysokości h i promieniu podstawy r jest prostokąt o bokach długości h i $2r$.



Wzory dla walca

- Pole podstawy: $P_p = \pi r^2$
- Pole powierzchni bocznej: $P_b = 2\pi rh$
- Pole powierzchni całkowitej: $P_c = 2\pi r(r + h)$
- Objętość: $V = \pi r^2 h$

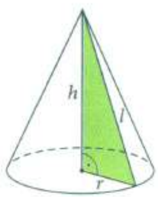
Przypomnienie

Długość okręgu (obwód koła) o promieniu r wynosi $2\pi r$.

Pole koła o promieniu r jest równe πr^2.

Stożek to bryła obrotowa powstała w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej jedną z jego przyprostokątnych.

Każdy odcinek łączący wierzchołek stożka z brzegiem jego podstawy nazywamy **tworzącą** stożka. Oznaczamy ją literą l.



Przekrojem osiowym stożka o tworzącej l i promieniu podstawy r jest trójkąt równoramienny o ramieniu długości l i podstawie długości $2r$.

Wzory dla stożka

- Pole podstawy: $P_p = \pi r^2$
- Pole powierzchni bocznej: $P_b = \pi rl$
- Pole powierzchni całkowitej: $P_c = \pi r(r + l)$
- Objętość: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Dany jest walec o promieniu podstawy $r = 6$ i wysokości $h = 7$. Oblicz:
a) pole powierzchni całkowitej tego walca,
b) objętość walca.

Rozwiązanie

a) $P_c = 2\pi r(r + h) = 2\pi \cdot 6 \cdot (6 + 7) = 156\pi$
b) $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 7 = 252\pi$

Przykład 2.

Objętość walca jest równa 225π, a promień jego podstawy wynosi 5. Oblicz:
a) wysokość tego walca,
b) pole podstawy walca.

Rozwiązanie

a) Niech h oznacza wysokość walca. Obliczamy h, korzystając ze wzoru na objętość walca.

$$\pi \cdot 5^2 \cdot h = 225\pi$$
$$25\pi h = 225\pi \quad |:25\pi$$
$$h = 9$$

b) Pole podstawy walca to pole koła o promieniu 5.

$$P = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$$

Przykład 3.

Przekrój osiowy walca jest prostokątem o bokach 8 i 15 (zobacz rysunek). Oblicz:
a) objętość walca,
b) pole powierzchni bocznej tego walca.

Rozwiązanie

a) Wysokość walca jest równa 15, a promień jego podstawy wynosi $\frac{1}{2} \cdot 8 = 4$. Obliczamy objętość walca.

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 15 = 240\pi$$

b) $P_b = 2\pi \cdot 4 \cdot 15 = 120\pi$

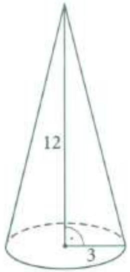
Przykład 4.

Dany jest stożek, którego promień podstawy wynosi 3, a wysokość jest równa 12. Oblicz:

a) długość tworzącej stożka,

b) pole powierzchni całkowitej tego stożka,

c) objętość stożka.



Rozwiązanie

a) Obliczamy długość tworzącej stożka, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$l^2 = 3^2 + 12^2$$

$$l^2 = 153$$

$$l = 3\sqrt{17}$$

b) $P_c = \pi r(r + l) = \pi \cdot 3\left(3 + 3\sqrt{17}\right) = 9\pi\left(1 + \sqrt{17}\right)$

c) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 12 = 36\pi$

Przykład 5.

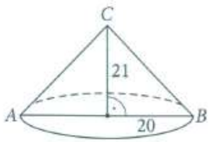
Stożek powstał w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół dłuższej przyprostokątnej. Długości jego przyprostokątnych to 20 i 21.

a) Oblicz objętość stożka.

b) Podaj długości boków trójkąta, który jest przekrojem osiowym stożka.

Rozwiązanie

Rysujemy stożek i nanosimy dane.



a) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot 21 = 2800\pi$

b) **Krok 1.** Obliczamy długość tworzącej stożka, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$|BC|^2 = 20^2 + 21^2$$

$$|BC|^2 = 841$$

$$|BC| = 29$$

Krok 2. Podajemy długości boków trójkąta ABC.

$$40, 29, 29$$

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M41672

1. Dany jest walec, którego średnica podstawy jest równa 22, a wysokość wynosi 30. Oblicz:

a) objętość walca,

b) pole powierzchni bocznej tej bryły.

2. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku 10. Oblicz:

a) pole podstawy walca,

b) pole powierzchni całkowitej tej bryły,

c) objętość walca.

3. Dany jest stożek, którego promień podstawy wynosi 20, a wysokość jest równa 15. Oblicz:

a) objętość stożka,

b) pole powierzchni całkowitej tego stożka.

4. Stożek powstał w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół krótszej przyprostokątnej. Długości przyprostokątnych tego trójkąta to 18 i 24. Oblicz:

a) objętość stożka,

b) pole powierzchni bocznej tego stożka.

5. Objętość stożka wynosi 270π, a średnica jego podstawy jest równa 18. Oblicz wysokość tego stożka.

TEST 33

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Objętość walca, którego promień podstawy wynosi 9, a wysokość jest równa 10, to

A. 270π B. 810π C. 1620π D. 3240π

2. Przekrój osiowy walca jest prostokątem o bokach 20 i 40. Krótszy bok tego prostokąta jest średnicą podstawy walca. Pole powierzchni bocznej walca jest równe

A. 800π B. 1000π C. 1600π D. 2000π

3. Promień podstawy walca jest równy jego wysokości i wynosi $3\sqrt{3}$. Pole powierzchni całkowitej tego walca jest równe

A. $36\sqrt{3}\pi$ B. 54π C. 81π D. 108π

4. Wysokość stożka jest równa 12, a jego objętość wynosi 144π. Promień podstawy tego stożka jest równy

A. $2\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{2}$ C. 6 D. 12

5. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 11 i 15 obracamy wokół krótszej przyprostokątnej. Pole podstawy tak powstałego stożka jest równe

A. $30\frac{1}{4}\pi$ B. $56\frac{1}{4}\pi$ C. 121π D. 225π

6. Trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długość 9, obracamy wokół jednej z nich. Objętość tak powstałej bryły jest równa

A. 243π B. 729π C. 972π D. 2916π

TO BYŁO NA MATURZE 33

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – maj 2011
Objętość stożka o wysokości 8 i średnicy podstawy 12 jest równa

A. 124π B. 96π C. 64π D. 32π

Zadanie 2. (1 pkt) – czerwiec 2012
Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 4 i 6 obracamy wokół dłuższej przyprostokątnej. Objętość powstałego stożka jest równa

A. 96π B. 48π C. 32π D. 8π

Zadanie 3. (1 pkt) – sierpień 2013
Objętość walca o wysokości 8 jest równa 72π. Promień podstawy tego walca jest równy

A. 9 B. 8 C. 6 D. 3

Zadanie 4. (1 pkt) – maj 2014
Stożek i walec mają takie same podstawy i równe pola powierzchni bocznych. Wtedy tworząca stożka jest

A. sześć razy dłuższa od wysokości walca.

B. trzy razy dłuższa od wysokości walca.

C. dwa razy dłuższa od wysokości walca.

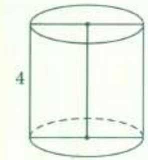
D. równa wysokości walca.

Zadanie 5. (1 pkt) – czerwiec 2014
Objętość walca o promieniu podstawy 4 jest równa 96π. Pole powierzchni bocznej tego walca jest równe

A. 16π B. 24π C. 32π D. 48π

Zadanie 6. (1 pkt) – sierpień 2014
Pole powierzchni całkowitej walca, którego przekrojem osiowym jest kwadrat o boku długości 4, jest równe

A. 256π B. 128π C. 48π D. 24π



Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 33

1. a) 3630π b) 660π **2.** a) 25π b) 150π c) 250π **3.** a) 2000π b) 900π
4. a) 3456π b) 720π **5.** 10

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 33

1	2	3	4	5	6
B	A	D	C	D	A

1. $V = \pi \cdot 9^2 \cdot 10 = 810\pi$

2. Promień podstawy jest równy $r = \frac{20}{2} = 10$, wysokość $h = 40$, więc
$P_b = 2\pi rh = 2\pi \cdot 10 \cdot 40 = 800\pi$.

3. $r = h = 3\sqrt{3}$, stąd
$P_c = 2\pi r(r + h) = 2\pi \cdot 3\sqrt{3} \cdot (3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}\pi \cdot 6\sqrt{3} = 108\pi$.

4. Niech r oznacza promień podstawy walca. Otrzymujemy:
$144\pi = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot 12$, stąd $r^2 = 36$, więc $r = 6$.

5. Obracamy trójkąt wokół krótszej przyprostokątnej, więc promień podstawy stożka wynosi 15. Pole podstawy stożka jest równe: $\pi \cdot 15^2 = 225\pi$.

6. Otrzymujemy stożek, w którym $h = r = 9$. Jego objętość jest równa:
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 9^2 \cdot 9 = 243\pi$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 33

1	2	3	4	5	6
B	C	D	C	D	D

34. Kombinatoryka

1. Przypomnij sobie

Reguła mnożenia

Jeżeli pewien wybór polega na podjęciu n decyzji, przy czym pierwszą decyzję można podjąć na m_1 sposobów, drugą – na m_2 sposobów, ..., n-tą – na m_n sposobów, to można go dokonać na $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ sposobów.

Reguła mnożenia służy do zliczania wyników doświadczenia.

Uwaga
W prostych sytuacjach możesz zliczyć wyniki, wypisując wszystkie możliwości.

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Ile jest czterocyfrowych kodów, w których:
a) cyfry mogą się powtarzać,
b) cyfry nie mogą się powtarzać,
c) wszystkie cyfry są parzyste i nie mogą się powtarzać?

Rozwiązanie

a) Wybór polega na podjęciu czterech decyzji. Cyfry mogą się powtarzać, więc każda z decyzji może być podjęta na 10 sposobów – na każdym miejscu może stać jedna z dziesięciu cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Liczba wszystkich kodów jest równa: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10\,000$.

b) Cyfry nie mogą się powtarzać, więc:
- pierwszą cyfrę możemy wybrać na 10 sposobów,
- drugą cyfrę możemy wybrać na 9 sposobów,
- trzecią cyfrę możemy wybrać na 8 sposobów,
- czwartą cyfrę możemy wybrać na 7 sposobów.

Wszystkich kodów jest: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

c) Mamy pięć cyfr: 0, 2, 4, 6, 8, które nie mogą się powtarzać, więc:
- pierwszą cyfrę możemy wybrać na 5 sposobów,
- drugą cyfrę możemy wybrać na 4 sposoby,
- trzecią cyfrę możemy wybrać na 3 sposoby,
- czwartą cyfrę możemy wybrać na 2 sposoby.

Wszystkich kodów jest: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

Przykład 2.

Grupa przyjaciół chce kupić prezent koledze na urodziny. Dowiedzieli się, że marzą mu się album o parkach narodowych Polski, przewodnik turystyczny po Hiszpanii i pióro wieczne. Na ile sposobów mogą skompletować prezent, jeśli mają do wyboru: 8 albumów, 12 przewodników i 5 piór?

Rozwiązanie

Wybór polega na podjęciu 3 decyzji. Pierwszą z nich można podjąć na 8 sposobów, drugą – na 12, a trzecią – na 5, więc wszystkich możliwości jest: $8 \cdot 12 \cdot 5 = 480$.

Przykład 3.

Ile jest naturalnych liczb dwucyfrowych:

a) w których zapisie nie występuje 9,

b) podzielnych przez 2,

c) w których suma cyfr jedności i dziesiątek wynosi 4?

Rozwiązanie

a) Cyfrę dziesiątek wybieramy spośród cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 – mamy 8 możliwości. Cyfrę jedności wybieramy spośród cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 – mamy 9 możliwości.
Szukanych liczb dwucyfrowych jest: $8 \cdot 9 = 72$.

b) Cyfra dziesiątek należy do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – mamy więc 9 możliwości. Cyfra jedności ma być parzysta, więc należy do zbioru $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ – mamy 5 możliwości.
Szukanych liczb jest: $9 \cdot 5 = 45$.

c) Wypisujemy wszystkie możliwości: 13, 22, 31, 40. Są 4 takie liczby.

Przykład 4.

Rzucamy trzy razy monetą. Wynik doświadczenia zapisujemy jako trzyliterowy ciąg liter O i R, gdzie O oznacza wyrzucenie orła, a R – reszki. Ustal, ile jest wszystkich możliwych wyników.

Rozwiązanie

W wyniku rzutu monetą możemy otrzymać orła lub reszkę, czyli mamy 2 możliwości. Po trzykrotnym rzucie monetą możemy otrzymać: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ wyników.

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M42031

1. Ile jest pięciocyfrowych kodów, w których:

a) cyfry mogą się powtarzać,

b) trzy pierwsze cyfry są nieparzyste, a dwie kolejne – parzyste, i cyfry nie mogą się powtarzać,

c) pierwsza i ostatnia cyfra nie mogą być zerami, a pozostałe cyfry są parzyste, i cyfry mogą się powtarzać?

2. Ze zbiorów $A = \{1, 3, 5, 8\}$ i $B = \{2, 4, 6, 7\}$ losujemy po jednej liczbie. Otrzymujemy pary (a, b), gdzie $a \in A$ i $b \in B$.

a) Ile par można otrzymać?

b) Ile jest par (a, b) takich, że suma $a + b$ jest podzielna przez 3?

c) Ile jest par (a, b) takich, że różnica $a - b$ jest większa od 3?

3. Ania chce kupić odzież narciarską: kurtkę, spodnie, czapkę i rękawiczki. Każdy z tych artykułów jest dostępny w 6 różnych kolorach.

a) Na ile sposobów Ania może skompletować odzież?

b) Ile jest zestawów kolorystycznych, w których czapka i rękawice są w jednym z 6 kolorów, a kurtka i spodnie – w dowolnych kolorach spośród 5 pozostałych?

TEST 34

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Doświadczenie losowe polega na jednoczesnym rzucie symetryczną sześcienną kostką i dwiema monetami. Ile wyników można uzyskać w tym doświadczeniu?

A. 1 B. 10 C. 12 D. 24

2. Grafik projektuje okładkę magazynu. Wybiera kolory: tła, tytułu i głównego tematu pisma. Na ile sposobów może to zrobić, jeśli dysponuje 32 kolorami pisma i 5 kolorami tła, a tytuł pisma i temat mają mieć odmienne barwy?

A. 68 B. 1147 C. 4960 D. 5120

3. Ile jest czterocyfrowych kodów składających się z niezerowych cyfr takich, że dwie pierwsze są podzielne przez 4, a pozostałe – przez 2?

A. 64 B. 32 C. 16 D. 12

4. Ile jest trzycyfrowych liczb nieparzystych nie większych od 500?

A. 200 B. 201 C. 250 D. 251

5. Talia składa się z 52 kart. Losujemy dwie karty. Ile może być takich par, w których pierwszą kartą jest karo, a druga to kier?

A. 156 B. 169 C. 2652 D. 2704

TO BYŁO NA MATURZE 34

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – listopad 2009
Wybieramy liczbę a ze zbioru $A = \{2, 3, 4, 5\}$ oraz liczbę b ze zbioru $B = \{1, 4\}$. Ile jest takich par (a, b), że iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą nieparzystą?

A. 2 B. 3 C. 5 D. 20

Zadanie 2. (1 pkt) – listopad 2010
W karcie dań jest 5 zup i 4 drugie dania. Na ile sposobów można zamówić obiad składający się z jednej zupy i jednego drugiego dania?

A. 25 B. 20 C. 16 D. 9

Zadanie 3. (1 pkt) – sierpień 2011
Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych o sumie cyfr równej 2?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Zadanie 4. (1 pkt) – maj 2012
Flagę, taką jak pokazano na rysunku, należy zszyć z trzech jednakowej szerokości pasów kolorowej tkaniny. Oba pasy zewnętrzne mają być tego samego koloru, a pas znajdujący się między nimi ma być innego koloru. Liczba różnych takich flag, które można uszyć, mając do dyspozycji tkaniny w 10 kolorach, jest równa

A. 100 B. 99 C. 90 D. 19

Zadanie 5. (1 pkt) – sierpień 2013
Ile jest wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 5?

A. 90 B. 100 C. 180 D. 200

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 34

1. a) 10^5 b) 1200 c) 10 125 **2.** a) 16 b) 6 c) 2 **3.** a) 6^4 b) 150

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 34

1	2	3	4	5
D	C	A	A	B

1. Po rzucie kostką można otrzymać 6 wyników, a po rzucie monetą – 2 wyniki. Doświadczenie może mieć $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ wyniki.

2. Kolor tytułu może być wybrany na 32 sposoby, kolor tematu – na 31 sposobów, a kolor tła – na 5 sposobów. Wszystkich możliwości jest: $32 \cdot 31 \cdot 5 = 4960$.

3. Każdą z dwóch pierwszych cyfr kodu możemy wybrać na 2 sposoby (4 lub 8), a każdą z pozostałych – na 4 sposoby (2, 4, 6 lub 8). Liczba wszystkich możliwości to: $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

4. Na miejscu setek stoi cyfra ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$, na miejscu dziesiątek – jedna z 10 cyfr, a na miejscu jedności – cyfra ze zbioru $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Jest $4 \cdot 10 \cdot 5 = 200$ takich liczb.

5. W talii jest po 13 kart kier i kart karo, więc szukanych par jest $13 \cdot 13 = 169$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 34

1	2	3	4	5
A	B	D	C	C

35. Prawdopodobieństwo

1. Przypomnij sobie

Poszczególne wyniki doświadczenia losowego to **zdarzenia elementarne**, a ich zbiór to **przestrzeń zdarzeń elementarnych**. Oznaczamy ją literą Ω. Na przykład przestrzeń zdarzeń elementarnych rzutu kostką sześcienną to $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Elementy zdarzenia $A \subset \Omega$ to **wyniki sprzyjające zdarzeniu** A. Na przykład jeśli A oznacza wyrzucenie parzystej liczby oczek na kostce sześciennej, to $A = \{2, 4, 6\}$.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwem zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{\text{liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu } A}{\text{liczba wszystkich zdarzeń elementarnych}}.$$

Własności prawdopodobieństwa

- $P(\Omega) = 1$, zbiór Ω jest zdarzeniem **pewnym**.
- $P(\varnothing) = 0$, zbiór $\varnothing$ jest zdarzeniem **niemożliwym**.
- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$.

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Rzucamy trzykrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia.

a) A – wypadły dwie reszki i jeden orzeł.

b) B – wypadły co najmniej dwa orły.

c) C – w rzutach pierwszym i trzecim wypadło to samo.

Które z tych zdarzeń jest najbardziej prawdopodobne?

Rozwiązanie

Zbiór zdarzeń elementarnych w każdym z wymienionych przypadków jest taki sam. W każdym z trzech rzutów można uzyskać dwa wyniki, orła lub reszkę, więc $\overline{\overline{\Omega}} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

a) **Krok 1.** Wypisujemy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, gdzie O – wypadł orzeł, R – wypadła reszka, i zapisujemy ich liczbę.

$$(R, R, O), (R, O, R), (O, R, R), \overline{\overline{A}} = 3$$

Krok 2. Obliczamy szukane prawdopodobieństwo.

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{3}{8}$$

b) Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu B to: (O, O, R), (O, R, O), (R, O, O), (O, O, O). Obliczamy $P(B)$.

$$P(B) = \frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

c) Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu C to: (R, O, R), (O, R, O), (R, R, R), (O, O, O). Obliczamy $P(C)$.

$$P(C) = \frac{\overline{\overline{C}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Najbardziej prawdopodobne są dwa zdarzenia: B i C.

Przykład 2.

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia.

a) A – w pierwszym rzucie wypadła parzysta liczba oczek, a w drugim nieparzysta.

b) B – suma wylosowanych oczek jest podzielna przez 2.

c) C – iloczyn wylosowanych oczek jest podzielny przez 3.

Rozwiązanie

Wyznaczamy liczbę zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu. W wyniku każdego z dwóch rzutów można otrzymać 6 wyników, więc $\overline{\overline{\Omega}} = 6 \cdot 6 = 36$.

a) W wyniku rzutu kostką można otrzymać 3 nieparzyste wyniki: 1, 3, 5 lub trzy parzyste: 2, 4, 6, więc liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A jest równa: $\overline{\overline{A}} = 3 \cdot 3 = 9$. Obliczamy $P(A)$.

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

b) Aby suma wylosowanych oczek była podzielna przez dwa, obydwa uzyskane wyniki muszą być jednocześnie albo parzyste, albo nieparzyste. Parzystych par jest: $3 \cdot 3 = 9$, nieparzystych tyle samo: $3 \cdot 3 = 9$. Łącznie jest 18 wyników sprzyjających zdarzeniu B.

$$P(B) = \frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

c) Iloczyn otrzymanych oczek jest podzielny przez trzy, gdy:

- na dokładnie jednej kostce wypadną 3 oczka – takich par jest 8,
- na dokładnie jednej kostce wypadnie 6 oczek – takich par jest 8,
- wypadnie jedna z par: $(3, 3)$, $(3, 6)$, $(6, 3)$, $(6, 6)$.

$$P(C) = \frac{8+8+4}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Przykład 3.

Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 21\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia.

a) A – wylosowano liczbę podzielną przez 6.

b) B – wylosowano liczbę parzystą większą niż 10.

c) C – wylosowano liczbę, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3.

d) D – wylosowano liczbę, której druga potęga jest mniejsza od 21.

Które ze zdarzeń jest najmniej prawdopodobne?

Rozwiązanie

Wyznaczamy liczbę zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu. Losujemy jedną z 21 liczb, więc $\overline{\overline{\Omega}} = 21$.

a) W rozpatrywanym zbiorze są trzy liczby podzielne przez 6: 6, 12, 18. Stąd $\overline{\overline{A}} = 3$.

$$P(A) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

b) Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu B: 12, 14, 16, 18, 20. Stąd $\overline{\overline{B}} = 5$.

$$P(B) = \frac{5}{21}$$

c) Liczba, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3, jest o 1 mniejsza od wielokrotności 4, więc wyniki sprzyjające zdarzeniu C to: 3, 7, 11, 15, 19. Stąd $\overline{\overline{C}} = 5$.

$$P(C) = \frac{5}{21}$$

d) Mniejsze od 21 są kwadraty liczb: 1, 2, 3, 4, więc $\overline{\overline{D}} = 4$.

$$P(D) = \frac{4}{21}$$

Najmniej prawdopodobne jest zdarzenie A.

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M42073

1. Rzucamy trzykrotnie monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania:
a) dokładnie jednej reszki,
b) nie więcej niż dwóch reszek,
c) w pierwszym i drugim rzucie takiego samego wyniku?

2. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo:
a) otrzymania w drugim rzucie liczby oczek o 1 mniejszej niż w pierwszym rzucie,
b) wyrzucenia liczb oczek, których suma wynosi 9,
c) otrzymania w pierwszym i drugim rzucie parzystej, ale nie takiej samej liczby oczek.

3. Ze zbioru $\{1, 2, 11, 12, 21, 22, 111, 112, 121\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia.
a) A – wylosowano liczbę nieparzystą.
b) B – wylosowano liczbę podzielną przez 3.
c) C – wylosowano liczbę, której suma cyfr wynosi 4.

TEST 35

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

1. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo, że liczba oczek wyrzucona za drugim razem jest dwa razy większa niż za pierwszym razem, wynosi

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{1}{18}$

2. Rzucamy trzykrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że skrajne wyniki wyniosły 2, a środkowy wynik był nieparzysty?

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{24}$ C. $\frac{1}{36}$ D. $\frac{1}{72}$

3. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy kolejno dwie liczby ze zwracaniem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma wylosowanych liczb jest większa od 13?

A. $\frac{3}{64}$ B. $\frac{1}{16}$ C. $\frac{3}{32}$ D. $\frac{5}{32}$

4. Ze zbioru $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ losujemy dwie liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ich iloczyn jest liczbą ujemną?

A. $\frac{8}{21}$ B. $\frac{3}{7}$ C. $\frac{9}{49}$ D. $\frac{16}{49}$

5. Ze zbioru dodatnich liczb naturalnych mniejszych od 100 losujemy jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania liczby, której suma cyfr wynosi 5?

A. $\frac{6}{99}$ B. $\frac{5}{99}$ C. $\frac{4}{99}$ D. $\frac{3}{99}$

TO BYŁO NA MATURZE 35

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – maj 2011
Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej trzy wynosi

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{1}{18}$

Zadanie 2. (1 pkt) – sierpień 2011
Ze zbioru dwucyfrowych liczb naturalnych wybieramy losowo jedną liczbę. Prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 30 jest równe

A. $\frac{1}{90}$ B. $\frac{2}{90}$ C. $\frac{3}{90}$ D. $\frac{10}{90}$

Zadanie 3. (1 pkt) – maj 2013
Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Niech p oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest równy 5. Wtedy

A. $p = \frac{1}{36}$ B. $p = \frac{1}{18}$ C. $p = \frac{1}{12}$ D. $p = \frac{1}{9}$

Zadanie 4. (1 pkt) – czerwiec 2013
Rzucamy trzykrotnie symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo, że w trzecim rzucie wypadnie orzeł, jest równe

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

Zadanie 5. (1 pkt) – czerwiec 2014
Ze zbioru kolejnych liczb naturalnych $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 30\}$ losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba jest kwadratem liczby całkowitej, jest równe

A. $\frac{4}{30}$ B. $\frac{5}{30}$ C. $\frac{6}{30}$ D. $\frac{10}{30}$

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 35

1. a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{1}{2}$ **2.** a) $\frac{5}{36}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{6}$ **3.** a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 35

1	2	3	4	5
C	D	C	B	A

1. $\overline{\overline{\Omega}} = 6^2 = 36$. Wyniki sprzyjające opisanemu zdarzeniu to: $(1,2)$, $(2,4)$, $(3,6)$. Obliczamy szukane prawdopodobieństwo: $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

2. $\overline{\overline{\Omega}} = 6^3 = 216$. Wyniki sprzyjające opisanemu zdarzeniu to: $(2,1,2)$, $(2,3,2)$, $(2,5,2)$. Obliczamy szukane prawdopodobieństwo: $\frac{3}{216} = \frac{1}{72}$.

3. $\overline{\overline{\Omega}} = 8^2 = 64$. Wyniki sprzyjające opisanemu zdarzeniu to: $(6,8)$, $(7,7)$, $(7,8)$, $(8,6)$, $(8,7)$, $(8,8)$. Obliczamy szukane prawdopodobieństwo: $\frac{6}{64} = \frac{3}{32}$.

4. $\overline{\overline{\Omega}} = 7 \cdot 6 = 42$. Aby iloczyn liczb był ujemny, pierwsza wylosowana liczba musi być dodatnia, a druga ujemna – mamy $3 \cdot 3 = 9$ możliwości, lub odwrotnie – również mamy 9 możliwości. Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{9+9}{42} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$.

5. $\Omega = \{1, 2, \ldots, 99\}$, $\overline{\overline{\Omega}} = 99$. Liczby spełniające podany warunek to: 5, 14, 23, 32, 41, 50. Szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{6}{99}$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 35

1	2	3	4	5
D	C	B	C	B

36. Średnia arytmetyczna i mediana

1. Przypomnij sobie

Średnia arytmetyczna n liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ to liczba:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Mediana uporządkowanych niemalejąco liczb $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ to:

- wyraz środkowy dla n nieparzystych,
- średnia arytmetyczna dwóch wyrazów środkowych dla n parzystych.

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Oblicz średnią arytmetyczną i medianę zestawu liczb: 3, −5, 11, 17, −2, 6.

Rozwiązanie

Krok 1. Obliczamy średnią.

$$\overline{x} = \frac{3+(-5)+11+17+(-2)+6}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

Krok 2. Porządkujemy liczby od najmniejszej do największej.

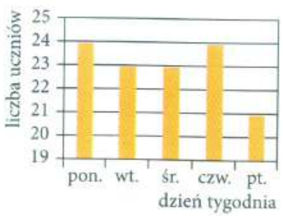
$$-5, -2, 3, 6, 11, 17$$

Krok 3. Obliczamy medianę.

Mamy parzystą liczbę danych, więc mediana tych liczb jest średnią arytmetyczną dwóch liczb środkowych: $\frac{3+6}{2} = 4{,}5$.

Przykład 2.

Na wykresie przedstawiono liczbę uczniów klasy IIId obecnych w szkole w poszczególnych dniach pewnego tygodnia. Na podstawie wykresu oblicz średnią liczbę uczniów obecnych w szkole jednego dnia i medianę tych danych.



Rozwiązanie

Krok 1. Obliczamy średnią.

$$\overline{x} = \frac{24+23+23+24+21}{5} = \frac{115}{5} = 23$$

Krok 2. Porządkujemy otrzymane wyniki w kolejności niemalejącej.

$$21, 23, 23, 24, 24$$

Krok 3. Wyznaczamy medianę.

Mamy nieparzystą liczbę danych, więc ich mediana jest środkową liczbą i wynosi 23.

Przykład 3.

Janek uprawia jogging. Od poniedziałku do niedzieli przebiegł odpowiednio: 5, 8, 6, 11, 12, 4 i x kilometrów. Ile kilometrów pokonał w niedzielę, jeśli średnio przebiegał 8 kilometrów dziennie?

Rozwiązanie

Krok 1. Stosujemy wzór na średnią arytmetyczną.

$$\frac{5+8+6+11+12+4+x}{7} = 8$$

Krok 2. Rozwiązujemy otrzymane równanie.

$$\frac{46+x}{7} = 8, \text{ stąd } 46 + x = 56, \text{ więc } x = 10$$

3. Rozwiąż samodzielnie

Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M42845

1. Wyznacz średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych: 7, 9, 11, 4, 2, 4, 5, 11, 6, 2.

2. Średnia arytmetyczna zestawu liczb: x, 10, 20, 25, 18, 26 jest równa 24. Wyznacz x i medianę.

3. W tabeli przedstawiono liczbę nieobecności jednego z uczniów klasy IIIa w pierwszym semestrze roku szkolnego.

Wrzesień	Październik	Listopad	Grudzień	Styczeń
22h	18h	14h	19h	27h

Oblicz średnią liczbę nieobecności tego ucznia oraz medianę zestawu danych.

TEST 36

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

Informacja do zadań 1.–2.
W tabeli przedstawiono wyniki pomiarów temperatury w ciągu tygodnia, o godzinie 12^{00}.

Poniedziałek	Wtorek	Środa	Czwartek	Piątek	Sobota	Niedziela
−4,8°C	−1,5°C	0,1°C	3,3°C	3,8°C	0,7°C	−2,3°C

1. Jaka była średnia temperatura w tym tygodniu?

A. −0,7°C B. −0,6°C C. −0,1°C D. 0,1°C

2. Wskaż medianę otrzymanych wyników.

A. −1,5°C B. 0,1°C C. 0,7°C D. 3,3°C

3. Średnia arytmetyczna liczb $5, 10, 3x, 6, 11, 12, 0, 2, x, 1$ jest równa 5,5. Liczba $3x$ wynosi

A. 0,625 B. 1,875 C. 2 D. 6

4. Arek otrzymał z matematyki trzy trójki i po jednej: dwójce, czwórce i piątce. Wskaż medianę jego ocen.

A. 3 B. 3,3 C. 3,5 D. 4

5. Średnia arytmetyczna zamówień złożonych w kwietniu w pewnym sklepie internetowym jest równa 16,4. Do 28 kwietnia włącznie składano średnio 16 zamówień na dzień. W dniach 29 i 30 kwietnia było tyle samo zamówień. Ile zamówień złożono w tym sklepie 30 kwietnia?

A. 19 B. 22 C. 23 D. 44

TO BYŁO NA MATURZE 36

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt) – maj 2010
Średnia arytmetyczna dziesięciu liczb $x, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 4, 1, 5$ jest równa 3. Wtedy

A. $x = 2$ B. $x = 3$ C. $x = 4$ D. $x = 5$

Zadanie 2. (1 pkt) – czerwiec 2012
W kolejnych sześciu rzutach kostką otrzymano następujące wyniki: 6, 3, 1, 2, 5, 5. Mediana tych wyników jest równa

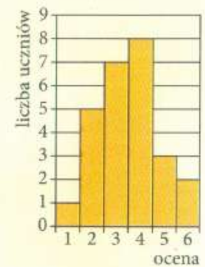
A. 3 B. 3,5 C. 4 D. 5

Zadanie 3. (1 pkt) – maj 2013
Mediana uporządkowanego niemalejąco zestawu sześciu liczb: $1, 2, 3, x, 5, 8$ jest równa 4. Wtedy

A. $x = 2$ B. $x = 3$ C. $x = 4$ D. $x = 5$

Zadanie 4. (1 pkt) – czerwiec 2013
Wyniki sprawdzianu z matematyki są przedstawione na diagramie. Średnia ocen uzyskanych przez uczniów z tego sprawdzianu jest równa

A. 2 B. 3 C. 3,5 D. 4



Zadanie 5. (1 pkt) – maj 2014
Mediana zestawu danych $2, 12, a, 10, 5, 3$ jest równa 7. Wówczas

A. $a = 4$ B. $a = 6$ C. $a = 7$ D. $a = 9$

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 36

1. średnia: 6,1, mediana: 5,5 **2.** $x = 45$, mediana: 22,5
3. średnia: 20, mediana: 19

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 36

1	2	3	4	5
C	B	D	A	B

1. $\overline{x} = \frac{-4{,}8°C+(-1{,}5°C)+0{,}1°C+3{,}3°C+3{,}8°C+0{,}7°C+(-2{,}3°C)}{7} = -0{,}1°C$

2. Porządkujemy wyniki w kolejności niemalejącej: $-4{,}8°C, -2{,}3°C, -1{,}5°C, 0{,}1°C, 0{,}7°C, 3{,}3°C, 3{,}8°C$. Mamy nieparzystą liczbę wyników, więc medianą jest środkowa wartość temperatury, czyli $0{,}1°C$.

3. Stosujemy wzór na średnią arytmetyczną: $5{,}5 = \frac{5+10+3x+6+11+12+0+2+x+1}{10}$. Obliczamy x: $\frac{47+4x}{10} = 5{,}5$, stąd $x = 2$. Wobec tego $3x = 6$.

4. Oceny Arka uporządkowane niemalejąco to: 2, 3, 3, 3, 4, 5. Liczba ocen jest parzysta, więc mediana jest średnią arytmetyczną dwóch ocen środkowych i wynosi $\frac{3+3}{2} = 3$.

5. Niech x oznacza liczbę zamówień złożoną 30 kwietnia. Do 28 kwietnia średnia zamówień była równa 16, więc wszystkich zamówień w tym okresie było $28 \cdot 16 = 448$. Zapisujemy równanie na średnią zamówień w kwietniu: $\frac{448+2x}{30} = 16{,}4$. Stąd $x = 22$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 36

1	2	3	4	5
D	C	D	C	D

36. ŚREDNIA ARYTMETYCZNA I MEDIANA

$\alpha[°]$	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\beta[°]$
0	**0,0000**	**0,0000**	**90**
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	**0,1736**	**0,1763**	**80**
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	**0,3420**	**0,3640**	**70**
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
30	**0,5000**	**0,5774**	**60**

TABLICA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

$\alpha[°]$	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\beta[°]$
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
40	**0,6428**	**0,8391**	**50**
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	**0,7660**	**1,1918**	**40**
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
60	**0,8660**	**1,7321**	**30**

$\alpha[°]$	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\beta[°]$
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
70	**0,9397**	**2,7475**	**20**
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13
78	0,9781	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
80	**0,9848**	**5,6713**	**10**
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
90	**1,0000**	–	**0**

teraz matura

Wszystko, czego potrzebujesz, by zdać nową maturę!

Wyjątkowa oferta przygotowana przez ekspertów. Z Nową Erą skutecznie i bez obaw przygotujesz się do nowego egzaminu maturalnego.

Vademecum

Porządkujesz wiedzę i poznajesz sposoby rozwiązywania zadań typu maturalnego.

Zbiór zadań i zestawów maturalnych

Poznajesz zadania typu maturalnego i ćwiczysz umiejętności sprawdzane na maturze.

Arkusze maturalne

Oswajasz się z formą egzaminu i sprawdzasz swoje przygotowanie do matury.

Tuż przed egzaminem

Powtarzasz i utrwalasz najważniejsze wiadomości i umiejętności tuż przed maturą.

Wejdź na **terazmatura.pl** »

Informacje o wszystkich przedmiotach w jednym miejscu

terazmatura.pl

Najważniejsze wiadomości dotyczące nowej matury

Zadania egzaminacyjne z rozwiązaniami i wskazówkami

nowa era

www.nowaera.pl

matematyka@nowaera.pl

infolinia: 801 88 10 10, 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-2283-7

9 788326 722837