Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 11

1. a) $x = 1$ b) $x = 10$ c) $x = -\frac{2}{9}$ d) $x = -5$ **2.** a) $x = 1$ b) $x = -3$ lub $x = 3$ c) brak rozwiązań d) $x = -7$ **3.** a) $x = -5$ lub $x = \frac{1}{2}$ b) $x = -4$ lub $x = \frac{1}{2}$ c) $x = \frac{1}{3}$ d) $x = \frac{-5-\sqrt{57}}{2}$ lub $x = \frac{-5+\sqrt{57}}{2}$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 11

1	2	3	4	5	6	7
B	D	C	A	C	B	D

1. Wyznaczamy dziedzinę równania: $x - 9 \neq 0$, stąd $x \neq 9$. Mnożymy „na krzyż" i otrzymujemy równanie $3(3 - x) = 4(x - 9)$, którego rozwiązaniem jest $x = \frac{45}{7}$. Poprawna jest odpowiedź B.

2. Wyznaczamy dziedzinę: $2 - x \neq 0$, stąd $x \neq 2$. Mnożymy „na krzyż" i otrzymujemy równanie $8(2 - x) = 4 - x$. Stąd $x = \frac{12}{7}$.

3. Wyznaczamy dziedzinę: $(x - 1)(x + 1) \neq 0$, stąd $x \neq -1$ i $x \neq 1$. Rozwiązujemy równanie $x^2 - 2 = 0$ i otrzymujemy: $x = \sqrt{2}$ i $x = -\sqrt{2}$. Poprawna jest odpowiedź C.

4. Wyznaczamy dziedzinę: $2x - 2 \neq 0$, stąd $x \neq 1$. Po przekształceniu otrzymujemy równanie $2(5 - x) = 2x - 2$. Jego rozwiązaniem jest liczba 3.

5. Wyznaczamy dziedzinę $4 - 7x \neq 0$, stąd $x \neq \frac{4}{7}$. Po przekształceniu otrzymujemy równanie $6(4 - 7x) = 2x - 3$, którego rozwiązaniem jest $x = \frac{27}{44}$. Jest to liczba wymierna, więc poprawna jest odpowiedź C.

6. Wyznaczamy dziedzinę: $x - 1 \neq 0$, stąd $x \neq 1$. Przekształcamy równanie do postaci: $-3 \cdot 2(x - 1) = 5 - 3(x - 1)$, stąd $x = -\frac{2}{3}$.

7. Wyznaczamy dziedzinę: $x + 3 \neq 0$, stąd $x \neq -3$. Przekształcamy równanie do postaci: $3x = (x + 3)(6 - x)$. Otrzymujemy równanie kwadratowe: $x^2 = 18$, którego rozwiązaniami są liczby $3\sqrt{2}$ i $-3\sqrt{2}$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 11

1	2	3	4	5
A	D	C	A	B

6. $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$ **7.** $x = \frac{5}{8}$

12. Funkcja i jej własności

1. Przypomnij sobie

Funkcją nazywamy przyporządkowanie f, w którym każdemu elementowi x ze zbioru X odpowiada dokładnie jeden element y ze zbioru Y:

$$f : X \to Y.$$

Do zbioru X należą elementy, dla których funkcja jest określona. Zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji, a jego elementy – **argumentami**. Dziedzinę oznaczamy literą D.

Wartości funkcji f to elementy zbioru Y, które są przyporządkowane jakimś elementom zbioru X. Zbiór wartości oznaczamy Z_W.

Miejscem zerowym funkcji $y = f(x)$ nazywamy taki argument x, dla którego wartość funkcji jest równa zero: $f(x) = 0$.

Przypomnienie

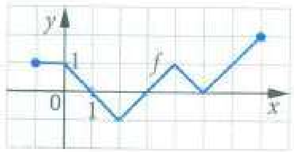
Zapis $f(x) = y$ oznacza, że funkcja f przyporządkowuje argumentowi x wartość y.

Jeżeli punkt $P = (x_P, y_P)$ należy do wykresu funkcji f, to $f(x_P) = y_P$.

2. Przeanalizuj przykład

Przykład 1.

Określ własności funkcji $y = f(x)$ na podstawie jej wykresu i podaj wartość przyjmowaną przez tę funkcję dla argumentu 4.



Rozwiązanie

Krok 1. Określamy własności funkcji.

- **Dziedzina**

  Odczytujemy z osi Ox argumenty, dla których istnieje wykres funkcji: $D = \langle -1, 7 \rangle$.

- **Zbiór wartości**

  Odczytujemy z osi Oy wartości, dla których istnieje wykres funkcji: $Z_W = \langle -1, 2 \rangle$.

- **Wartość największa**

  Odczytujemy z osi Oy wartość, dla której wykres funkcji jest położony najwyżej: 2.

- **Wartość najmniejsza**

  Odczytujemy z osi Oy wartość, dla której wykres funkcji jest położony najniżej: -1.

- **Miejsce zerowe**

  Odczytujemy z osi Ox argumenty, dla których wykres funkcji przecina oś Ox: $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$.

- **Przedziały monotoniczności**

  Określamy przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca lub stała.

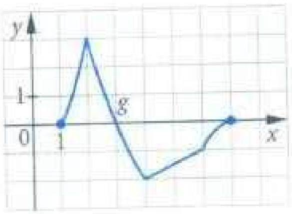
> **Uwaga**
>
> **Przedziały monotoniczności** to przedziały maksymalnej długości, w których funkcja jest rosnąca, malejąca lub stała.

1. Funkcja rosnąca – przesuwamy się zgodnie ze zwrotem osi Ox i szukamy fragmentów wykresu biegnących do góry, odczytujemy z osi Ox przedziały: $\langle 2, 4\rangle$, $\langle 5, 7\rangle$.
2. Funkcja malejąca – przesuwamy się zgodnie ze zwrotem osi Ox i szukamy fragmentów wykresu biegnących do dołu, odczytujemy z osi Ox przedziały: $\langle 0, 2\rangle$, $\langle 4, 5\rangle$.
3. Funkcja stała – szukamy równoległych do osi Ox fragmentów wykresu i odczytujemy z niej przedział: $\langle -1, 0\rangle$.

Krok 2. Odczytujemy, że funkcja f dla argumentu 4 przyjmuje wartość 1, czyli $f(4) = 1$.

Przykład 2.

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = g(x)$. Na jego podstawie podaj rozwiązania nierówności: $g(x) > 0$, $g(x) < 0$, $g(x) \geqslant 0$, $g(x) \leqslant 0$.



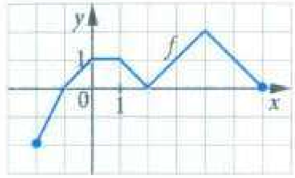
Rozwiązanie

- $g(x) > 0$. Odczytujemy z osi Ox argumenty, dla których wykres funkcji leży powyżej osi Ox: $x \in (1, 3)$.
- $g(x) < 0$. Odczytujemy z osi Ox argumenty, dla których wykres funkcji leży poniżej osi Ox: $x \in (3, 7)$.
- $g(x) \geqslant 0$. Odczytujemy z osi Ox argumenty, dla których wykres funkcji leży powyżej osi Ox lub ją przecina: $x \in \langle 1, 3\rangle \cup \{7\}$.
- $g(x) \leqslant 0$. Odczytujemy z osi Ox argumenty, dla których wykres funkcji leży poniżej osi Ox lub ją przecina: $x \in \{1\} \cup \langle 3, 7\rangle$.

3. Rozwiąż samodzielnie

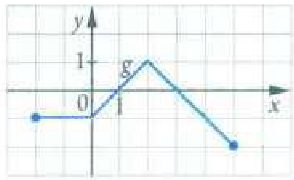
Rozwiąż zadanie
terazmatura.pl
Kod: M12011

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Na jego podstawie podaj:



   a) dziedzinę i zbiór wartości funkcji,
   b) wartość największą funkcji,
   c) wartość najmniejszą funkcji,
   d) miejsca zerowe funkcji w przedziale $\left\langle -\frac{1}{2}, 3\right\rangle$,
   e) argumenty, dla których spełniona jest nierówność $f(x) < 0$,
   f) wartość, jaką funkcja osiąga dla argumentu $x = 0$,
   g) przedziały maksymalnej długości, w których funkcja jest rosnąca.

2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji g. Na jego podstawie podaj:

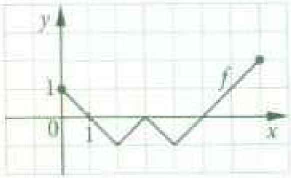


   a) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja jest malejąca,
   b) liczbę miejsc zerowych funkcji g,
   c) argumenty, dla których $g(x) > 0$,
   d) argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość największą,
   e) wartość, jaką ta funkcja przyjmuje dla $x = 4$.

TEST 12

W poniższych zadaniach wskaż poprawną odpowiedź.
Za każde zadanie możesz uzyskać 1 punkt.

Wykres do zadań 1.–3.



1. Funkcja f osiąga wartość największą dla

A. $x = 0$ B. $x = 2$ C. $x = 3$ D. $x = 7$

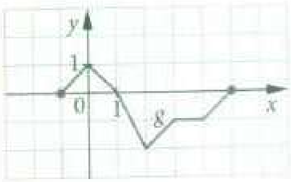
2. Która z liczb nie jest miejscem zerowym funkcji f?

A. 0 B. 1 C. 3 D. 5

3. Zbiorem wartości funkcji f jest

A. $\langle -1, 2\rangle$ B. $\langle 0, 7\rangle$ C. $\langle 1, 5\rangle$ D. $\langle 4, 7\rangle$

Wykres do zadań 4.–5.



4. Funkcja g jest malejąca w przedziale

A. $\langle -1, 1\rangle$ B. $\langle 3, 4\rangle$ C. $\langle 0, 2\rangle$ D. $\langle 1, 5\rangle$

5. Wskaż przedział, w którym $g(x) > 0$.

A. $(-1, 5)$ B. $(-1, 1)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, 5)$

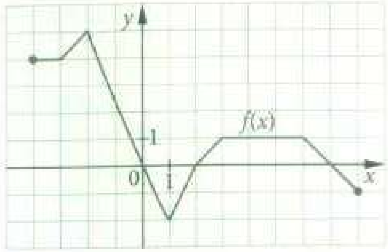
12. FUNKCJA I JEJ WŁASNOŚCI

TO BYŁO NA MATURZE 12

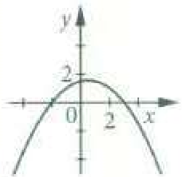
W zadaniach 1.–3. wskaż poprawną odpowiedź.

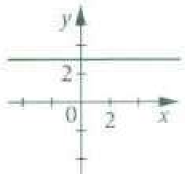
Zadanie 1. (1 pkt) – listopad 2010
Korzystając z wykresu funkcji f, wskaż nierówność prawdziwą.

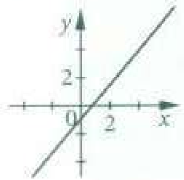
A. $f(-1) < f(1)$
B. $f(1) < f(3)$
C. $f(-1) < f(3)$
D. $f(3) < f(0)$

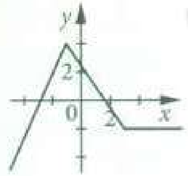


Zadanie 2. (1 pkt) – maj 2012
Wskaż wykres funkcji, która w przedziale $\langle -4, 4\rangle$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

A.


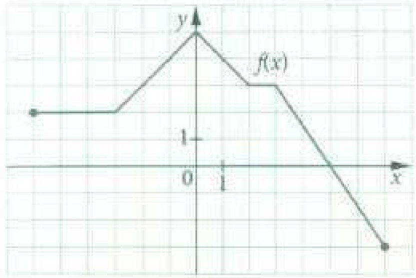
B.


C.


D.


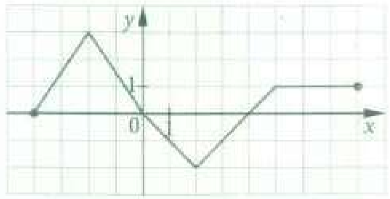
Zadanie 3. (1 pkt) – czerwiec 2013
Zbiorem wartości funkcji f jest przedział

A. $\langle -3, 5\rangle$ C. $\langle 0, 6\rangle$
B. $\langle -6, 7\rangle$ D. $\langle -5, 8\rangle$



Zadanie 4. (2 pkt) – maj 2011
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu i zapisz:

a) zbiór wartości funkcji f,
b) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca.



12. FUNKCJA I JEJ WŁASNOŚCI

Odpowiedzi do ROZWIĄŻ SAMODZIELNIE 12

1. a) $D = \langle -2, 6 \rangle$, $Z_w = \langle -2, 2 \rangle$ b) 2 c) -2 d) 2 e) $x \in \langle -2, -1)$
f) $f(0) = 1$ g) $(-2, 0)$, $(2, 4)$

2. a) $\langle 2, 5 \rangle$ b) dwa miejsca zerowe c) $x \in (1, 3)$ d) $x = 2$ e) $g(4) = -1$

Odpowiedzi i rozwiązania do TESTU 12

1	2	3	4	5
D	A	A	C	B

1. Na wykresie funkcji znajdujemy punkt położony najwyżej. Następnie z osi Ox odczytujemy argument, dla którego funkcja osiąga wartość największą – jest to $x = 7$.

2. Funkcja przyjmuje wartość zero dla $x \in \{1, 3, 5\}$, więc $x = 0$ nie jest jej miejscem zerowym.

3. Odczytujemy z osi Oy zbiór wartości: $\langle -1, 2 \rangle$.

4. Odczytujemy z wykresu, że funkcja jest malejąca w przedziale $\langle 0, 2 \rangle$. Poprawna jest odpowiedź C.

5. Odczytujemy z osi Ox argumenty, dla których wykres funkcji leży powyżej osi Ox: $x \in (-1, 1)$.

Odpowiedzi do TO BYŁO NA MATURZE 12

1	2	3
B	C	A

4. a) $\langle -2, 3 \rangle$ b) $\langle -2, 2 \rangle$

13. Funkcja liniowa

1. Przypomnij sobie

Funkcja liniowa to funkcja określona wzorem:

$$f(x) = ax + b,$$

gdzie $a, b \in \mathbf{R}$.

Przypomnienie

Współczynnik a nazywamy współczynnikiem kierunkowym.

Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór liczb rzeczywistych.

Współczynniki a i b we wzorze funkcji liniowej

Funkcja liniowa $y = ax + b$ jest:

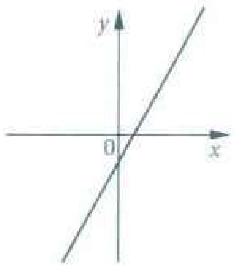
- rosnąca dla $a > 0$,
- malejąca dla $a < 0$,
- stała dla $a = 0$.

Uwaga

Prosta $x = c$, gdzie $c \in \mathbf{R}$, nie jest wykresem funkcji.

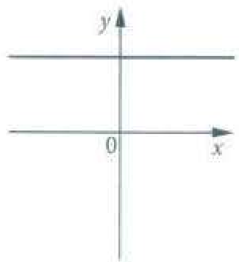
Prosta o równaniu $y = ax + b$ przecina oś Oy w punkcie o współrzędnych $(0, b)$.

Znaki współczynników funkcji liniowej $y = ax + b$ na podstawie jej wykresu



$a > 0$, bo funkcja jest rosnąca.
$b < 0$, bo punkt przecięcia z osią Oy leży poniżej osi Ox.

$a < 0$, bo funkcja jest malejąca.
$b = 0$, bo punkt przecięcia z osią Oy leży w początku układu współrzędnych.



$a = 0$, bo funkcja jest stała.
$b > 0$, bo punkt przecięcia z osią Oy leży powyżej osi Ox.

Miejsce zerowe funkcji liniowej $y = ax + b$ dla $a \neq 0$ jest równe $-\frac{b}{a}$.