Заменяя в числителе этой дроби 0 единицей, а в знаменателе нулем, увеличим дробь и можем поэтому сказать, что ошибка вычисленного значения $\log_{10} 101$ меньше

$$\frac{M}{100^2} = 0,00004\ \ldots$$

Перепишем формулу Лагранжа в виде:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \qquad (a < c < b).$$

Обращаясь к графику функции $y = f(x)$ (рис. 71), заметим, что отношение

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \operatorname{tg} \angle\, CAB$$

дает угловой коэффициент хорды AB, а $f'(c)$ дает угловой коэффициент касательной в некоторой точке M дуги AB кривой. Таким образом, формула Лагранжа равносильна следующему утверждению: *на дуге кривой имеется такая точка, в которой касательная параллельна хорде.* Частным случаем этого утверждения, когда хорда параллельна оси OX, т.е. $f(a) = f(b)$, является теорема Ролля.

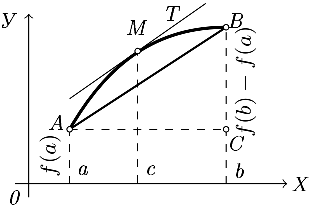

Рис. 71.

З а м е ч а н и е. Из формулы Лагранжа непосредственно вытекают те признаки возрастания и убывания, которые были установлены нами выше из чертежа. Действительно, положим, что внутри некоторого промежутка первая производная $f'(x)$ положительна и пусть x и $x+h$ — две точки из этого промежутка. Из формулы Лагранжа:

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h) \qquad (0 < \theta < 1)$$

видно, что при положительных h разность, стоящая слева, будет величиной положительной, так как оба множителя в произведении, стоящем справа, в этом случае положительны. Таким образом, предполагая положительность производной в некотором промежутке, мы получили

$$f(x+h) - f(x) > 0,$$

т. е. функция возрастает в этом промежутке. Точно так же из написанной выше формулы непосредственно вытекает и признак убывания.

Заметим здесь же, что рассуждения, приведенные нами при доказательстве теореме Ферма, остаются вполне применимыми и для того случая, когда в рассматриваемой точке функция достигает не обязательно наибольшего или наименьшего значения, а только лишь максимума или минимума. Эти рассуждения докажут, что в таких точках первая производная должна быть равна нулю, если она существует.