Практикум по линейной алгебре часть 1: матрицы, определители, СЛАУ

Н. В. Филимоненкова

Содержание

1. Действия с матрицами **2**

2. Определитель **9**

3. Обратная матрица. СЛАУ с обратимой матрицей коэффициентов **12**

4. Ранг матрицы. СЛАУ общего вида **19**

1. Действия с матрицами

Задачи к параграфу 1 конспекта лекций.

Задача 1. Дана матрица и столбец:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Выполнить следующие операции:

1. $(A - 3I)^2$
2. $X^T A X$

Решение.

1. $(A - 3I)^2$

   Чтобы данная операция была возможна, единичная матрица I должна иметь такой же размер, как и матрица A, т.е.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Сначала выполним вычитание внутри скобок:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Затем выполним возведение в квадрат как умножение матрицы на себя:

$$(A - 3I)^2 = (A - 3I)(A - 3I) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\cdot(-2) + 2\cdot 0 + 0\cdot(-2) & -2\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 1 & -2\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 1 \\ 0\cdot(-2) - 1\cdot 0 - 1\cdot(-2) & 0\cdot 2 - 1\cdot(-1) - 1\cdot 1 & 0\cdot 0 - 1\cdot(-1) - 1\cdot 1 \\ -2\cdot(-2) + 1\cdot 0 + 1\cdot(-2) & -2\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 & -2\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

2. X^TAX

   Три множителя можно сгруппировать разным способом: $X^TAX = (X^TA)X = X^T(AX)$. Выберем последний способ:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 1 + 0\cdot 3 \\ 0\cdot 5 + 2\cdot 1 - 1\cdot 3 \\ -2\cdot 5 + 1\cdot 1 + 4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X^T(AX) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5\cdot 7 + 1\cdot(-1) + 3\cdot 3 = 43$$

   В результате получилось число, т.е. матрица размера 1×1. Этот результат можно было предугадать по размерам исходных матриц: $\underset{1\times 3}{X}^T \underset{3\times 3}{A} \underset{3\times 1}{X} = \underset{1\times 1}{B}$.

Задача 2. Для матриц A размера 4×4, B размера 6×4, X размера 4×1 выбрать среди следующих операций возможные и невозможные:

$$2A,\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}X,\quad A+B,\quad AB,\quad BA,\quad A^T,\quad B^T,\quad B^{-1},\quad A^{-1},\quad A^2,\quad B^2,$$

$$AX,\quad XA,\quad X^TA,\quad X^TX,\quad XX^T,\quad BB^T - A,\quad (B^TB - A)^2.$$

Для возможных определить размер матрицы, которая получится в результате.
(Сам результат вычислять не нужно.)

Решение. Возможность реализации тех или иных матричных операций зависит от размера матриц. Некоторые матричные операции возможны для матриц любого размера, другие - нет.

$2\underset{4\times 4}{A}$ можно вычислить, результат – матрица 4×4;

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\underset{4\times 1}{X}$ можно вычислить, результат – матрица 4×1;

$\underset{4\times 4}{A} + \underset{6\times 4}{B}$ нельзя вычислить, так как матрицы разного размера;

$\underset{4\times 4}{A} \cdot \underset{6\times 4}{B}$ нельзя вычислить, так как размеры матриц не согласованы;

$\underset{6\times 4}{B} \cdot \underset{4\times 4}{A}$ можно вычислить, результат – матрица 6×4;

$\underset{4\times4}{A}^T$ можно вычислить, результат – матрица 4×4;

$\underset{6\times4}{B}^T$ можно вычислить, результат – матрица 4×6;

$\underset{6\times4}{B}^{-1}$ нельзя вычислить, понятие обратной матрицы – только для квадратных матриц;

$\underset{4\times4}{A}^{-1}$ неизвестно, так как не любая квадратная матрица обратима (возможность вычисления обратной матрицы зависит от конкретного вида A);

$A^2 = \underset{4\times4}{A}\cdot\underset{4\times4}{A}$ можно вычислить, результат – матрица 4×4;

$B^2 = \underset{6\times4}{B}\cdot\underset{6\times4}{B}$ нельзя вычислить, так как размеры множителей не согласованы;

$\underset{4\times4}{A}\cdot\underset{4\times1}{X}$ можно вычислить, результат – матрица 4×1 (матрица $\cdot$ столбец $=$ столбец);

$\underset{4\times1}{X}\cdot\underset{4\times4}{A}$ нельзя вычислить, так как размеры множителей не согласованы;

$\underset{1\times4}{X}^T\cdot\underset{4\times4}{A}$ можно вычислить, результат – матрица 1×4 (строка $\cdot$ матрица $=$ строка);

$\underset{1\times4}{X}^T\cdot\underset{4\times1}{X}$ можно вычислить, результат – матрица 1×1 (строка $\cdot$ столбец $=$ число);

$\underset{4\times1}{X}\cdot\underset{1\times4}{X}^T$ можно вычислить, результат – матрица 4×4 (столбец$\cdot$ строка $=$ матрица);

$\underset{6\times4}{B}\cdot\underset{4\times6}{B}^T-\underset{4\times4}{A}$ нельзя вычислить, так как матрицы BB^T и A имеют разные размеры;

$\left(\underset{4\times6}{B}^T\cdot\underset{6\times4}{B}-\underset{4\times4}{A}\right)^2$ можно вычислить, результат – матрица размера 4×4.

Задача 3. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 6\\ 2 & -1 & 8 & 1\\ -4 & 6 & 3 & -3\\ 7 & 10 & 3 & 0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2\\ -3 & 0 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 5\\ 3 & -4 & -2 & 6\\ 0 & -8 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

1. Найти элемент, стоящий в 1 строке, 3 столбце матрицы BA.
2. Найти элемент, стоящий в 4 строке, 2 столбце матрицы $(B^T B - A)^2$.

Решение. Согласно размерам матриц A и B операции в каждом пункте задачи возможны. Для ответа на вопросы задачи можно было бы вычислить эти операции, но это технически сложно, так как матрицы достаточно большого размера. Ответить на вопросы можно более простым способом – вычислить только искомый элемент указанных операций.

1. Найдем элемент, стоящий в 1 строке, 3 столбце матрицы BA.

   Обозначим $BA = C$. Элемент c_{13} равен сумме попарных произведений элементов 1-й строки матрицы B на элементы 3-го столбца матрицы A:

$$c_{13} = \sum_{k=1}^{4} b_{1k} a_{k3} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 8 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 1$$

2. Найдем элемент, стоящий в 4 строке, 2 столбце матрицы $(B^T B - A)^2$.

   Обозначим $B^T B - A = C$, $(B^T B - A)^2 = D$. Тогда $D = C \cdot C$.

   Элемент d_{42} равен сумме попарных произведений элементов 4-й строки матрицы C на элементы 2-го столбца матрицы C:

$$d_{42} = \sum_{k=1}^{4} c_{4k} c_{k2}$$

   Элемент c_{ij} равен сумме попарных произведений элементов i-й строки матрицы B^T ($= i$-й столбец матрицы B) на элементы j-го столбца матрицы B, из которой затем вычли элемент a_{ij}:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{6} b_{ki} b_{kj} - a_{ij}$$

   Например,

$$c_{41} = \sum_{k=1}^{6} b_{k4} b_{k1} - a_{41} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 3 + 1 \cdot 0 - 7 = 16$$

$$c_{42} = \sum_{k=1}^{6} b_{k4} b_{k2} - a_{42} = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot (-4) + 1 \cdot (-8) - 10 = -44$$

   После всех расчетов получаем 4-ю строку и 2-й столбец матрицы C:

$$C = \begin{pmatrix} \bullet & -8 & \bullet & \bullet \\ \bullet & 83 & \bullet & \bullet \\ \bullet & 7 & \bullet & \bullet \\ 16 & -44 & 11 & 67 \end{pmatrix}$$

Подставляем в формулу для d_{42}:

$$d_{42} = \sum_{k=1}^{4} c_{4k}c_{k2} = 16 \cdot (-8) - 44 \cdot 83 + 11 \cdot 7 + 67 \cdot (-44) = -6651$$

Задача 4. Пусть A, B, X – невырожденные $n \times n$-матрицы, I – единичная $n \times n$-матрица. Выразить матрицу X из уравнения и упростить итоговую формулу при необходимости.

1. $AX + B = I$
2. $(BX - X)A^{-1} = A$
3. $X^T(AB^{-1})^T = A^T + I$
4. $(A^T)^{-1}B^TX^T = (BA^{-1})^T$

Решение. Решение матричного уравнения аналогично решению числового уравнения. Но следует учитывать некоторые особенности матричных операций.

1. $AX + B = I$

   Вычтем из обеих частей равенства матрицу B:

   $$AX = I - B$$

   Поделить обе части равенства на матрицу A нельзя, так как операция деления для матриц не определена. Вместо этого можно умножить обе части равенства на матрицу A^{-1}. Причем следует выбрать – умножаем справа или слева, так как эти действия дают разный результат, матричное умножение не обладает коммутативностью. Рассмотрим оба варианта.

   Умножение обеих частей равенства на A^{-1} справа в данном случае бесполезно:

   $$AXA^{-1} = (I - B)A^{-1}$$

   Умножение обеих частей равенства на A^{-1} слева и последующее упрощение приводит к ответу:

   $$\underbrace{A^{-1}A}_{I}X = A^{-1}(I - B) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{IX}_{X} = A^{-1}(I - B) \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}(I - B)$$

2. $(BX - X)A^{-1} = A$

   Умножим обе части равенства справа на матрицу A, вынесем за скобки матрицу X (вынесем за скобки справа) и умножим обе части равенства слева на матрицу $(B - I)^{-1}$:

   $$(BX-X)A^{-1} = A \quad \Leftrightarrow \quad BX-X = A^2 \quad \Leftrightarrow \quad (B-I)X = A^2 \quad \Leftrightarrow \quad X = (B-I)^{-1}A^2$$

3. $X^T(AB^{-1})^T = A^T + I$

   В этом и следующем примере используем свойства транспонирования и обратной матрицы: $(AB)^T = B^TA^T$, $(A+B)^T = A^T+B^T$, $(A^T)^T = A$, $I^T = I$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^{-1})^{-1} = A$, $I^{-1} = I$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. При этом $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.

   Выразим матрицу X из данного уравнения:

   $$X^T(AB^{-1})^T = A^T + I \quad \Leftrightarrow \quad (AB^{-1}X)^T = (A+I)^T \quad \Leftrightarrow \quad AB^{-1}X = A+I \quad \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \quad B^{-1}X = A^{-1}(A+I) \quad \Leftrightarrow \quad X = BA^{-1}(A+I) = B(I + A^{-1})$$

4. $(A^T)^{-1}B^TX^T = (BA^{-1})^T$

   Выразим матрицу X из данного уравнения:

   $$(A^T)^{-1}B^TX^T = (BA^{-1})^T \quad \Leftrightarrow \quad B^TX^T = A^T(BA^{-1})^T \quad \Leftrightarrow \quad (XB)^T = (B\underbrace{A^{-1}A}_{I})^T \quad \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \quad (XB)^T = B^T \quad \Leftrightarrow \quad XB = B \quad \Leftrightarrow \quad X = BB^{-1} = I$$

Задача 5. При помощи элементарных преобразований над строками привести матрицы к ступенчатому виду.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 11 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -6 & -7 \\ -2 & 1 & -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Решение. Для приведения матриц к ступенчатому виду используем метод Гаусса. Элементарные преобразования конкретных строк записываем условно римскими цифрами.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{II+2I \\ III+I \\ IV+I}]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III+II \\ IV-3II}]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -6 & -7 \\ -2 & 1 & -1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[I \leftrightarrow II]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -6 & -7 \\ -2 & 1 & -1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{II-2I \\ III+I \\ IV+2I}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 7 & -3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[II+III]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 7 & -3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III+4II \\ IV+7II}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & -16 & -24 \\ 0 & 0 & 11 & -22 & -33 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III/8 \\ IV/11 \\ IV-III}]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Определитель

Задачи к параграфу 2 конспекта лекций.

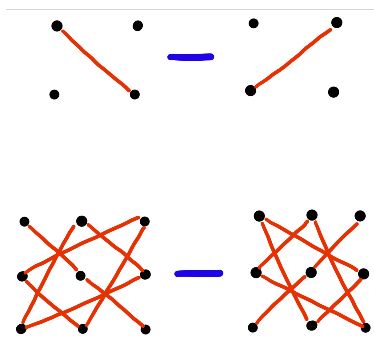
Задача 6. Вычислить определители 2×2 и 3×3 по известным расчетным формулам:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Решение. Напомним расчетные формулы для определителей 2×2 и 3×3, а также схемы для запоминания этих формул:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$



Вычисляем:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - (-6)\cdot(-2) = -10$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot 7\cdot 4 + 2\cdot(-1)\cdot(-2) + 0\cdot 3\cdot 1 - 5\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot 4 - 0\cdot 7\cdot(-2) = 125$$

Задача 7. Вычислить определители 4×4 и 5×5, используя разложение по строке/столбцу и элементарные преобразования строк/столбцов (с целью "размножения нулей"):

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ -5 & 0 & 10 & 10 & 10 \\ -5 & -5 & 0 & 10 & 10 \\ -5 & -5 & -5 & 0 & 10 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

Решение.

1. Первый из определителей вычислим при помощи разложения по второму столбцу (второй выбран потому, что в нем больше всего нулей). Полученные после этого определители 3×3 вычислим по расчетным формулам:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = a_{12}\mathcal{A}_{12} + \underset{=0}{a_{22}}\mathcal{A}_{22} + a_{32}\mathcal{A}_{32} + \underset{=0}{a_{42}}\mathcal{A}_{42} =$$

$$= 4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -4(15-9+6+3) + (1+2+45+6-3+5) = -4$$

2. Во втором определителе вычтем из каждой строки, начиная со второй, первую строку. Это третье элементарное преобразование строк, определитель при этом не изменится:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{II-I \\ III-I \\ IV-I \\ V-I}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$$

   Полученный после преобразований определитель равен произведению диагональных элементов, так как это определитель матрицы с нулевыми элементами под главной диагональю.

3. В третьем определителе все элементы целые числа, кратные 5. Упростим вычисление определителя, используя его линейность по строке: вынесем пять раз за знак определителя множитель 5 (из каждой строки). Затем "размножим нули" в первой строке,

используя третье элементарное преобразование столбцов. И разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 0 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ -5 & 0 & 10 & 10 & 10 \\ -5 & -5 & 0 & 10 & 10 \\ -5 & -5 & -5 & 0 & 10 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 5^5 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{II-V\\III-V\\IV-V}}{=}$$

$$= 5^5 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & -3 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5^5 \cdot 2(-1)^{1+5} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Вынесем четыре раза за знак определителя множитель -1 (из каждой строки). Затем снова “размножим нули” в первой строке, используя третье элементарное преобразование столбцов, и разложим определитель по первой строке. Оставшийся определитель 3×3 вычислим по расчетной формуле.

$$5^5 \cdot 2 \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5^5 \cdot 2 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{II-2I}{=} 5^5 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5^5 \cdot 2 \cdot 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5^5 \cdot 2(3 - 4 - 2 - 2) = -31250$$

3. Обратная матрица. СЛАУ с обратимой матрицей коэффициентов

Задачи к параграфу 3 конспекта лекций.

Задача 8. Вычислить обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение. Вычислим определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

Поскольку $|A| \neq 0$, то существует обратная матрица.

Обратную матрицу можно вычислить по расчетной формуле через союзную матрицу и методом Гаусса. Используем расчетную формулу. Для этого найдем все алгебраические дополнения матрицы A:

$$\mathcal{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3,\ \mathcal{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 8,\ \mathcal{A}_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = 13,$$

$$\mathcal{A}_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2,\ \mathcal{A}_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 4,\ \mathcal{A}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = 8,$$

$$\mathcal{A}_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,\ \mathcal{A}_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2,\ \mathcal{A}_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Составим матрицу алгебраических дополнений и союзную матрицу A^*:

$$(\mathcal{A}_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 13 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^* = (\mathcal{A}_{ij})^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 13 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Вычисляем обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 13 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку обратной матрицы:

$$A^{-1}A = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 13 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$AA^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 13 & 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Задача 9. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) тремя разными способами.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -5 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -6x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

Решение. Запишем СЛАУ в матричной форме записи:

$$AX = B, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

Поскольку $|A| \neq 0$, то СЛАУ имеет единственное решение и его можно найти тремя способами.

1. Решение при помощи обратной матрицы.

   Обратная матрица для данной матрицы A уже построена в решении задачи 8:

   $$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 13 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

   Найдем решение СЛАУ:

   $$X = A^{-1}B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 13 & 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$.

2. Решение методом Крамера.

С учетом того, что $\Delta = |A| = -2$, вычисляем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 9 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ -6 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \\ -6 & -1 & 9 \end{vmatrix} = -6$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2}{-2} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{-2} = 3, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-6}{-2} = 3.$$

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$.

3. Решение методом Гаусса.

Запишем расширенную матрицу системы и при помощи элементарных преобразований над строками приведем ее к ступенчатому виду:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -5 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & 9 \end{array}\right) \underset{I \leftrightarrow II}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & -5 \\ -6 & -1 & 2 & 9 \end{array}\right) \underset{\substack{II+2I \\ III-6I}}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -13 & 8 & -15 \end{array}\right) \underset{\substack{III+4II \\ II \leftrightarrow III}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right) \underset{III+3II}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

Запишем СЛАУ, соответствующую полученной ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 4 \\ -x_2 & = & -3 \\ -2x_3 & = & -6 \end{cases}$$

Теперь последовательно выразим неизвестные из уравнений.

Из третьего уравнения находим: $x_3 = 3$.

Из второго уравнения находим: $x_2 = 3$.

Из первого уравнения находим: $x_1 = 2x_2 - x_3 - 4 = -1$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$.

Все три способа решения СЛАУ дают одинаковый ответ. Сделаем его проверку подстановкой значений x_1, x_2, x_3 в уравнения исходной СЛАУ. Получаем верные равенства:

$$\begin{cases} 2 \cdot (-1) - 3 = -5 \\ 1 + 2 \cdot 3 - 3 = 4 \\ -6 \cdot (-1) - 3 + 2 \cdot 3 = 9 \end{cases}$$

Задача 10. Решить три системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с одинаковой матрицей коэффициентов и разными столбцами правых частей.

$$(I)\quad \begin{cases} -x_1+x_2+x_3+x_4 &= -3 \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4 &= 9 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4 &= 11 \\ 4x_1-3x_2-2x_3-x_4 &= 14 \end{cases}$$

$$(II)\quad \begin{cases} -y_1+y_2+y_3+y_4 &= 2 \\ 2y_1-y_2+y_3+y_4 &= 4 \\ 3y_1-2y_2-y_3+y_4 &= 2 \\ 4y_1-3y_2-2y_3-y_4 &= -1 \end{cases}$$

$$(III)\quad \begin{cases} -z_1+z_2+z_3+z_4 &= 0 \\ 2z_1-z_2+z_3+z_4 &= 0 \\ 3z_1-2z_2-z_3+z_4 &= 0 \\ 4z_1-3z_2-2z_3-z_4 &= 0 \end{cases}$$

Решение. Введем матрицу коэффициентов этих СЛАУ:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Вычислим определитель матрицы A:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Поскольку $|A|\neq 0$, то каждая СЛАУ имеет единственное решение.

Заметим сразу, что решение СЛАУ (III) можно просто угадать – оно нулевое: $z_1=z_2=z_3=z_4=0$ (других, ненулевых решений у СЛАУ (III) нет, так как решение единственно).

Запишем первые две СЛАУ в матричной форме записи:

$$(I)\quad AX=B,\quad \text{где,}\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

$$(II) \quad AY = C, \quad \text{где}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Решение СЛАУ (I), (II) можно реализовать разными методами: при помощи обратной матрицы, методом Крамера и методом Гаусса.

Метод Крамера наиболее простой в использовании, но не учитывает сходство систем (одинаковая матрица коэффициентов A). Методом Крамера придется решать СЛАУ (I), (II) по-отдельности.

Методом Гаусса можно организовать частично совместное решение (I) и (II). Вычисление обратной матрицы дает одновременное решение (I) и (II). Протестируем эти два метода.

1. Решение методом Гаусса.

   Первый этап метода Гаусса: приведение расширенной матрицы СЛАУ к ступенчатой форме – можно организовать для СЛАУ (I), (II) одновременно. Составим для них общую расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк:

$$(A|B|C) = \left(\begin{array}{cccc|c|c} -1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 9 & 4 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 11 & 2 \\ 4 & -3 & -2 & -1 & 14 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{II+2I \\ III+3I \\ IV+4I}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c|c} -1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 7 \end{array}\right) \underset{\substack{III-II \\ IV-II}}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} -1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{IV-III}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c|c} -1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

   Второй этап метода Гаусса: выражение неизвестных из преобразованной СЛАУ – проводим для СЛАУ (I) и (II) по-отдельности, т.е. разделяем общую ступенчатую матрицу на две СЛАУ.

$$(I) \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ -x_3 + x_4 = -1 \\ -x_4 = 0 \end{cases} \qquad (II) \quad \begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 2 \\ y_2 + 3y_3 + 3y_4 = 8 \\ -y_3 + y_4 = 0 \\ -y_3 = -1 \end{cases}$$

   Последовательно выразим неизвестные из уравнений (I).

   Из четвертого уравнения находим: $x_4 = 0$.

Из третьего уравнения находим: $x_3 = 1 + x_4 = 1$.

Из второго уравнения находим: $x_2 = 3 - 3x_3 - 3x_4 = 0$.

Из первого уравнения находим: $x_1 = 3 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$.

Последовательно выразим неизвестные из уравнений (II).

Из четвертого уравнения находим: $y_3 = 1$.

Из третьего уравнения находим: $y_4 = y_3 = 1$.

Из второго уравнения находим: $y_2 = 8 - 3y_3 - 3y_4 = 2$.

Из первого уравнения находим: $y_1 = -2 + y_2 + y_3 + y_4 = 2$.

Ответ: $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$; $y_1 = 2$, $y_2 = 2$, $y_3 = 1$, $y_4 = 1$.

2. Решение при помощи обратной матрицы.

   Необходимо вычислить для матрицы A обратную матрицу A^{-1}, после чего выразить неизвестные столбцы X, Y из (I), (II):

$$(I) \quad AX = B \qquad \Leftrightarrow \qquad X = A^{-1}B$$

$$(II) \quad AY = C \qquad \Leftrightarrow \qquad Y = A^{-1}C$$

   Кроме того, СЛАУ (I), (II) равносильны одному матричному уравнению (III):

$$(III) \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 9 & 4 \\ 11 & 2 \\ 14 & -1 \end{pmatrix}$$

   Это альтернативный способ записи для (I), (II).

   Уравнение (III) также решается при помощи обратной матрицы.

   Обратную матрицу можно построить по расчетной формуле через союзную матрицу и методом Гаусса. Поскольку размер 4×4 достаточно велик, то проще использовать метод Гаусса:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{II+2I \\ III+3I \\ IV+4I}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{III-II \\ IV-II}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[IV-III]{}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{I+IV \\ II+3IV \\ III+IV}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} -1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{I+III \\ II+3III}}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} -1 & 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 11 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{I-II}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} -1 & 0 & 0 & 0 & -7 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 11 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{-I \\ -III \\ -IV}}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 11 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 & 4 \\ 11 & -2 & -3 & 6 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Выразим матрицу неизвестных из равенства (III):

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 & 4 \\ 11 & -2 & -3 & 6 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 9 & 4 \\ 11 & 2 \\ 14 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$; $y_1 = 2$, $y_2 = 2$, $y_3 = 1$, $y_4 = 1$.

Таким образом, решение двух (и вообще нескольких) СЛАУ с одинаковой матрицей коэффициентов целесообразно проводить методом Гаусса или при помощи обратной матрицы. Заметим, что в данном случае метод Гаусса все же короче, вычисление обратной матрицы требует больше времени. Зато построенная обратная матрица в перспективе позволит решить не только СЛАУ (I), (II), но и любую СЛАУ с матрицей коэффициентов A.

4. Ранг матрицы. СЛАУ общего вида

Задачи к параграфам 4, 5 конспекта лекций.

Задача 11. В каждом пункте задачи вычислить ранг матрицы A.

Решение. Ранг матрицы равен наибольшему количеству линейно независимых строк (столбцов), которое можно выделить в этой матрице. Если матрица A имеет размер $m \times n$, то $\mathrm{rank} A \leqslant \min\{m, n\}$.

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

   Эта матрица размера 4×4, в задаче 10 вычислен ее определитель – он ненулевой. Следовательно, строки (столбцы) матрицы A образуют линейно независимую систему, ранг матрицы максимально возможный, т.е. $\mathrm{rank} A = 4$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & -11 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

   Матрица имеет размер 4×5. Приведем ее к ступенчатому виду путем элементарных преобразований строк:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & -11 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[I \leftrightarrow II]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & -11 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{II-2I \\ III-3I \\ IV-I}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & -10 & -9 \\ 0 & 10 & 2 & -20 & -18 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III-2II \\ III \leftrightarrow IV}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Элементарные преобразования строк (столбцов) не меняют ранг матрицы. Ранг ступенчатой матрицы, очевидно, равен количеству ее ненулевых строк (эти строки образуют максимальную линейно независимую подсистему). Таким образом, $\mathrm{rank} A = 3$.

Задача 12. Решить три системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с одинаковой матрицей коэффициентов и разными столбцами правых частей.

$$(I)\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 11x_4 - 3x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 0 \end{cases}$$

$$(II)\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 &= 9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 6 \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 11x_4 - 3x_5 &= 12 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 8 \end{cases}$$

$$(III)\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= -1 \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 11x_4 - 3x_5 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 2 \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим матричные формы записей этих СЛАУ:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & -11 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(I)\quad AX = \mathbf{0}, \qquad (II)\quad AX = B, \qquad (III)\quad AX = C$$

В задаче 11 вычислен ранг матрицы A: $r = \mathrm{rank}A = 3$. Количество неизвестных каждой СЛАУ (= количество столбцов матрицы A) $n = 5$.

Проведем предварительный анализ наличия и количества решений каждой СЛАУ. Поскольку $n > r$, то однородная СЛАУ (I) имеет бесконечно много решений, образующих в пространстве $\mathbb{R}^5$ линейное подпространство размерности $(n - r) = 2$. СЛАУ (II) и (III) неоднородные. Так как $n > r$, то каждая из них имеет либо бесконечно много решений, либо не имеет решений вообще.

Для построения решений используем метод Гаусса. Для СЛАУ (I), (II), (III) составим единую расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований над строками (можно использовать ту же последовательность преобразований, что и в задаче 11):

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r|r|r} 2 & 3 & 5 & -4 & 1 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 5 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 7 & 8 & -11 & -3 & 0 & 12 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 & 0 & 8 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[I \leftrightarrow II]{} \left(\begin{array}{rrrrr|r|r|r} 1 & -1 & 2 & 3 & 5 & 0 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -4 & 1 & 0 & 9 & 3 \\ 3 & 7 & 8 & -11 & -3 & 0 & 12 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 & 0 & 8 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{II-2I \\ III-3I \\ IV-I}]{}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r|r|r} 1 & -1 & 2 & 3 & 5 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -10 & -9 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 10 & 2 & -20 & -18 & 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -2 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{III-2II \\ III \leftrightarrow IV}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrrrr|r|r|r} 1 & -1 & 2 & 3 & 5 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -10 & -9 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Второй этап метода Гаусса: построение решений СЛАУ – проводим для (I), (II), (III) по-отдельности. Для каждой СЛАУ обозначим символом $\bar{r}$ ранг соответствующей расширенной матрицы.

(I) $AX = \mathbf{0}$

Рассмотрим ступенчатую форму расширенной матрицы однородной СЛАУ и ее ранг:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -10 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \bar{r} = 3$$

Повторим еще раз отмеченный выше факт: поскольку $\bar{r} = r < n$, то однородная СЛАУ имеет бесконечно много решений, которые образуют в пространстве $\mathbb{R}^5$ линейное подпространство размерности $(n - r) = 2$.

Для построения всех решений надо какие-то 2 неизвестные принять за произвольные постоянные $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, а оставшиеся 3 неизвестные последовательно выразить из уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ \quad 5x_2 + x_3 - 10x_4 - 9x_5 = 0 \\ \quad\quad -x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & x_4 := c_1 \\ & x_5 := c_2 \\ & x_3 = -5c_1 - 2c_2 \\ & x_2 = 3c_1 + \tfrac{11}{5}c_2 \\ & x_1 = 10c_1 + \tfrac{6}{5}c_2 \end{aligned}$$

Запишем общее решение однородной СЛАУ в каноническом виде:

$$X = \begin{pmatrix} 10c_1 + 1,2c_2 \\ 3c_1 + 2,2c_2 \\ -5c_1 - 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1,2 \\ 2,2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Поскольку постоянная c_2 произвольна, то столбец, на который она умножается, можно увеличить в пять раз, чтобы получить в нем целые значения:

$$X = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_1} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}}_{X_2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Столбцы X_1, X_2 – фундаментальная система решений данной однородной СЛАУ, образующая базис в пространстве всех решений.

Сделаем проверку общего решения подстановкой в исходную СЛАУ $AX = \mathbf{0}$. Получаем верное равенство:

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & -11 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \left[c_1 \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & -11 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & -11 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Заметим, что достаточно было проверить $AX_1 = \mathbf{0}$, $AX_2 = \mathbf{0}$. Тогда и $AX = A(c_1X_1 + c_2X_2) = c_1AX_1 + c_2AX_2 = \mathbf{0}$.

(II) $AX = B$

Рассмотрим ступенчатую форму расширенной матрицы неоднородной СЛАУ и ее ранг:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & -10 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \bar{r} = 3$$

Поскольку $\bar{r} = r < n$, то данная неоднородная СЛАУ имеет бесконечно много решений в пространстве $\mathbb{R}^5$ (линейное подпространство они не образуют).

Решения строятся по аналогии с однородным случаем (I):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 6 \\ 5x_2 + x_3 - 10x_4 - 9x_5 = -3 \\ -x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_4 := c_1 \\ x_5 := c_2 \\ x_3 = -2 - 5c_1 - 2c_2 \\ x_2 = -\frac{1}{5} + 3c_1 + \frac{11}{5}c_2 \\ x_1 = \frac{49}{5} + 10c_1 + \frac{6}{5}c_2 \end{array}$$

Запишем общее решение неоднородной СЛАУ в каноническом виде:

$$X = \begin{pmatrix} 9,8+10c_1+1,2c_2 \\ -0,2+3c_1+2,2c_2 \\ -2-5c_1-2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,8 \\ -0,2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1,2 \\ 2,2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Поскольку постоянная c_2 произвольна, то столбец, на который она умножается, можно увеличить в пять раз, чтобы получить в нем целые значения (однако с первым столбцом, не имеющим свободного коэффициента, то же самое сделать нельзя):

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} 9,8 \\ -0,2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_0} + c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_1} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}}_{X_2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Столбцы X_1, X_2 – фундаментальная система решений данной однородной СЛАУ $AX = \mathbf{0}$. Столбец X_0 – одно из решений (частное решение) неоднородной СЛАУ $AX = B$.

Сделаем проверку общего решения.

Поскольку $AX = A(X_0 + c_1X_1 + c_2X_2) = AX_0 + A(c_1X_1 + c_2X_2)$ и в пункте (I) уже было проверено, что $A(c_1X_1 + c_2X_2) = \mathbf{0}$, то достаточно проверить $AX_0 = B$:

$$AX_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & -11 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9,8 \\ -0,2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = B$$

(III) $AX = C$

Рассмотрим ступенчатую форму расширенной матрицы неоднородной СЛАУ и ее ранг:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -10 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \quad \bar{r} = 4$$

Поскольку $\bar{r} > r$, то данная неоднородная СЛАУ не имеет решений.

Стратегические замечания к решению задачи 12, к пунктам (I) и (II):

- Формулы, задающие бесконечное множество решений СЛАУ (I) и (II), могут быть записаны по-разному, а именно: в зависимости от конкретных шагов по реализации метода Гаусса, может быть получена разная фундаментальная система решений однородной СЛАУ и разное частное решение неоднородной СЛАУ.

- Конструкция общего решения неоднородной СЛАУ включает и общее решение однородной СЛАУ. Поэтому целесообразнее было бы рассматривать сразу (II), а затем просто выделить в полученном ответе решение (I).

- С другой стороны, если бы после получения общего решения (I) удалось просто угадать какое-либо частное решение (II), то отсюда сразу получилось бы и общее решение (II). Например, очевидно значения $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$, $x_5 = 1$ удовлетворяют (II), т.е. являются частным решением (II). Тогда с учетом (I) получаем общее решение (II):

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

  Эта формула дает точно такое же множество векторов $X \in \mathbb{R}^5$, как и формула общего решения из пункта (II) задачи 12, несмотря на то, что в них использованы различные частные решения X_0 неоднородной СЛАУ.