Практикум по линейной алгебре часть 2: линейные пространства и линейные операторы

Н. В. Филимоненкова

Содержание

В решениях задач опущены тривиальные технические действия: вычисление определителей, обратной матрицы, приведение матрицы к ступенчатой форме, решение простейших СЛАУ. Приводятся сразу результаты этих действий.

1. Базис линейного пространства

Если $\dim U = n$, то базисом линейного пространства U является любая линейно независимая система в U, состоящая из n векторов.

Особый случай: если $U = \{\mathbf{0}\}$, то $\dim U = 0$ и базиса нет.

Разложением вектора $u \in U$ по базису $\{e_i\}_{i=1}^n$ называется равенство

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Числа x_i называются координатами вектора u в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$. Следует отличать вектор u и набор его координат в данном базисе. В общем случае между ними есть взаимно однозначное соответствие, но не равенство:

$$u \in U \xleftrightarrow{e} (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Равенство между вектором u и набором его координат возможно только в случае, когда $U = \mathbb{R}^n$ и $\{e_i\}_{i=1}^n$ – стандартный базис $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{ccccccc}
e_1 & = & (1, & 0, & 0, & \ldots, & 0) \\
e_2 & = & (0, & 1, & 0, & \ldots, & 0) \\
e_3 & = & (0, & 0, & 1, & \ldots, & 0) \\
. & . & . & . & . & . & . \\
e_n & = & (0, & 0, & 0, & \ldots, & 1)
\end{array}$$

Действительно,

$$u = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + ... + x_ne_n$$

$$u = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n) \xleftrightarrow{e} (x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n).$$

Матрицей перехода от базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ к базису $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^n$ называется такая $n\times n$-матрица A, что ее j-й столбец – это столбец координат вектора $\tilde{e}_j$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$.
Матрица перехода позволяет выразить координаты любого вектора u в новом базисе, если известны его координаты в старом базисе, или наоборот. Формула связи координат:

$$\underset{e\to\tilde{e}}{A}\tilde{X} = X. \tag{1.1}$$

Здесь X – столбец координат вектора u в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\tilde{X}$ – столбец координат вектора u в базисе $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^n$:

$$u \overset{e}{\longleftrightarrow} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad u \overset{\tilde{e}}{\longleftrightarrow} \tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ ... \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода обратима и $B = A^{-1}$ – это матрица перехода от базиса $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^n$ к базису $\{e_i\}_{i=1}^n$. При этом

$$\underset{\tilde{e}\to e}{B} X = \tilde{X}.$$

Задача 1. Дана система векторов в пространстве $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{rcrrrr} e_1 & = & (-1, & 1, & 1, & 1) \\ e_2 & = & (2, & -1, & 1, & 1) \\ e_3 & = & (3, & -2, & -1, & 1) \\ e_4 & = & (4, & -3, & -2, & -1) \end{array}$$

a) Доказать, что система $\{e_i\}_{i=1}^4$ является базисом в пространстве $\mathbb{R}^4$.

b) Разложить вектор $u = (-1,\ 2,\ 0,\ 1)$ по этому базису. Выписать координаты вектора u в этом базисе. Сделать проверку, что разложение и координаты найдены верно.

Решение.

(a) Базисом пространства $\mathbb{R}^4$ является любая система из четырех линейно независимых векторов. Следовательно, достаточно проверить, что система $\{e_i\}_{i=1}^4$ линейно независима. Для этого достаточно составить определитель из векторов этой системы: если он ненулевой, то система линейно независима. Причем неважно, записать векторы e_i столбцами или строками определителя.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Определитель ненулевой – система $\{e_i\}_{i=1}^4$ линейно независима, является базисом.

(b) Разложить вектор u по базису $\{e_i\}_{i=1}^4$ – значит, найти коэффициенты x_i разложения

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4.$$

Запишем в это разложение векторы u и e_i в виде столбцов:

$$x_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Таким образом, задача разложения вектора по базису сводится к решению СЛАУ с квадратной матрицей, в которой векторы базиса записаны столбцами:

$$AX = B, \tag{1.2}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \scriptstyle e_1 & \scriptstyle e_2 & \scriptstyle e_3 & \scriptstyle e_4 \end{matrix} \end{array}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

СЛАУ (1.2) имеет единственное решение, так как $|A| \neq 0$. После вычисления получаем:

$$x_1 = 14, \ \ x_2 = -3, \ \ x_3 = -3, \ \ x_4 = 7.$$

Искомое разложение вектора u по базису $\{e_i\}_{i=1}^4$:

$$u = 14e_1 - 3e_2 - 3e_3 + 7e_4.$$

Координаты вектора u в базисе $\{e_i\}_{i=1}^4$:

$$u \xleftrightarrow{e} (14, \ -3, \ -3, \ 7).$$

Сделаем проверку правильности разложения:

$$u = 14e_1 - 3e_2 - 3e_3 + 7e_4 =$$
$$= 14(-1,\ 1,\ 1,\ 1) - 3(2,\ -1,\ 1,\ 1) - 3(3,\ -2,\ -1,\ 1) + 7(4,\ -3,\ -2,\ -1) =$$
$$= (-1,\ 2,\ 0,\ 1) \text{ – верно.}$$

Задача 2. В пространстве $\mathbb{R}^3$ выбран базис $\{e_i\}_{i=1}^3$:

$$e_1 = (1,\ -1,\ 0), \quad e_2 = (0,\ -1,\ 1), \quad e_3 = (1,\ 0,\ 1).$$

Указана матрица перехода к новому базису $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^3$:

$$\underset{e\to\tilde{e}}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти

a) Векторы нового базиса $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^3$.

b) Координаты вектора u в базисе $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^3$, если даны его координаты в базисе $\{e_i\}_{i=1}^3$:

$$(4,\ -1,\ 2).$$

c) Координаты вектора v в базисе $\{e_i\}_{i=1}^3$, если даны его координаты в базисе $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^3$:

$$(1,\ 3,\ 1).$$

Решение.

(a) Столбцы матрицы перехода задают коэффициенты разложения векторов нового базиса через старый:

$\tilde{e}_1 = 2e_1 + 3e_3 = 2(1,\ -1,\ 0) + 3(1,\ 0,\ 1) = (5,\ -2,\ 3)$;

$\tilde{e}_2 = e_1 + 2e_2 + e_3 = (1,\ -1,\ 0) + 2(0,\ -1,\ 1) + (1,\ 0,\ 1) = (2,\ -3,\ 3)$;

$\tilde{e}_3 = e_1 + e_2 + 2e_3 = (1,\ -1,\ 0) + (0,\ -1,\ 1) + 2(1,\ 0,\ 1) = (3,\ -2,\ 3)$.

(b) Данные и вопрос этого пункта можно записать так:

$$u \xleftrightarrow{e} X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u \xleftrightarrow{\tilde{e}} \tilde{X} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}.$$

Столбцы X и $\tilde{X}$ связаны равенством (1.1). Тогда столбец $\tilde{X}$ вычисляется путем решения СЛАУ $A\tilde{X} = X$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tilde{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} 11/3 \\ 7/3 \\ -17/3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, координаты вектора u в базисе $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^3$:

$$(11/3,\ 7/3,\ -17/3).$$

(c) Данные и вопрос этого пункта можно записать так:

$$v \xleftrightarrow{e} Y = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}, \quad v \xleftrightarrow{\tilde{e}} \tilde{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Столбцы Y и $\tilde{Y}$ связаны равенством $A\tilde{Y} = Y$. Тогда столбец Y вычисляется просто умножением матрицы A на столбец $\tilde{Y}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = Y.$$

Таким образом, координаты вектора v в базисе $\{e_i\}_{i=1}^3$:

$$(6,\ 7,\ 8).$$

Замечание 1. После осмысления задачи 2 укажем альтернативный способ рассуждения в пункте (b) задачи 1. Заметим, что все известные в задаче векторы: u и e_1, e_2, e_3, e_4 – совпадают с наборами своих координат в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^4$. Тогда матрица A со столбцами e_i – это в точности матрица перехода от стандартного базиса к базису $\{e_i\}_{i=1}^4$. Задача сводится к вычислению столбца X координат вектора u в новом базисе $\{e_i\}_{i=1}^4$, если известен столбец B его координат в старом (стандартном) базисе. Формула связи (1.1) в данных обозначениях выглядит как $AX = B$. И снова приходим к СЛАУ (1.2). Таким образом, в пространстве $\mathbb{R}^n$ задача разложения вектора по базису является частным случаем задачи перехода между базисами.

Задача 3. Найти матрицу перехода от базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ к базису $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^n$ в каждом из следующих случаев. В случае 5 сделать проверку найденной матрицы перехода.

1. Векторы $\tilde{e}_i \in U$ выражены через $e_i \in U$:
$$\tilde{e}_1 = 2e_1 + e_2 - e_3, \quad \tilde{e}_2 = 2e_1 + e_2 + 2e_3, \quad \tilde{e}_3 = 3e_1 + e_3;$$
2. Векторы $e_i \in U$ выражены через $\tilde{e}_i \in U$:
$$e_1 = 2\tilde{e}_1 + 5\tilde{e}_2 + \tilde{e}_3, \quad e_2 = 3\tilde{e}_2 - \tilde{e}_1 - 2\tilde{e}_3, \quad e_3 = 3\tilde{e}_3 - 6\tilde{e}_2;$$
3. Векторы e_i, $\tilde{e}_i \in \mathbb{R}^2$ заданы в явном виде:
$$e_1 = (1,\ 0),\ e_2 = (0,\ 1);$$
$$\tilde{e}_1 = (5,\ -7),\ \tilde{e}_2 = (4,\ 2).$$
4. Векторы e_i, $\tilde{e}_i \in \mathbb{R}^2$ заданы в явном виде:
$$e_1 = (2,\ 8),\ e_2 = (-1,\ 4);$$
$$\tilde{e}_1 = (4,\ 0),\ \tilde{e}_2 = (-5,\ 4).$$
5. Векторы e_i, $\tilde{e}_i \in \mathbb{R}^3$ заданы в явном виде:
$$e_1 = (-1,\ 0,\ 1),\ e_2 = (0,\ 0,\ -1),\ e_3 = (1,\ 1,\ 1);$$
$$\tilde{e}_1 = (1,\ 0,\ 4),\ \tilde{e}_2 = (-7,\ 6,\ -1),\ \tilde{e}_3 = (2,\ -2,\ 3).$$
6. Известны координаты двух векторов u, $v \in U$ в каждом базисе:
$$u \overset{e}{\longleftrightarrow} (2,\ -1),\ v \overset{e}{\longleftrightarrow} (-2,\ -4);$$
$$u \overset{\tilde{e}}{\longleftrightarrow} (7,\ 3),\ \ v \overset{\tilde{e}}{\longleftrightarrow} (4,\ 2).$$

Решение.

1. Матрица перехода от $\{e_i\}$ к $\{\tilde{e}_j\}$ составляется прямо по определению:
$$\underset{e\to\tilde{e}}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Сначала составим матрицу перехода от $\{\tilde{e}_j\}$ к $\{e_i\}$:

$$\underset{\tilde{e}\to e}{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от $\{e_i\}$ к $\{\tilde{e}_j\}$ вычисляется как обратная матрица:

$$\underset{e\to\tilde{e}}{B} = A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -21 & 6 & 12 \\ -13 & 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

3. Поскольку с данном случае очевидно, что

$$\tilde{e}_1 = 5e_1 - 7e_2, \quad \tilde{e}_2 = 4e_1 + 2e_2,$$

то матрица перехода от $\{e_i\}$ к $\{\tilde{e}_j\}$ составляется просто из столбцов $\tilde{e}_j$:

$$\underset{e\to\tilde{e}}{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Этот пример можно обобщить на общий случай: матрица перехода от стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^n$ к новому базису состоит из векторов-столбцов нового базиса.

4. Разложим векторы $\tilde{e}_j$ по базису $\{e_i\}$. В данном случае коэффициенты разложения можно просто подобрать:

$$\tilde{e}_1 = e_1 - 2e_2, \quad \tilde{e}_2 = -e_1 + 3e_2.$$

Тогда матрица перехода от $\{e_i\}$ к $\{\tilde{e}_j\}$:

$$\underset{e\to\tilde{e}}{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Как и в предыдущем пункте, для составления матрицы перехода необходимо разложить каждый из векторов $\tilde{e}_j$ по базису $\{e_i\}$:

$$\begin{array}{l} \tilde{e}_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 \\ \tilde{e}_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 \\ \tilde{e}_3 = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \underset{e\to\tilde{e}}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

В данном случае подбирать коэффициенты a_{ij} каждого разложения долго, поэтому используем общий подход к разложению вектора по базису, описанный в задаче 1. Необходимо решить три СЛАУ.

1) Для разложения $\tilde{e}_1$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) Для разложения $\tilde{e}_2$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$.

3) Для разложения $\tilde{e}_3$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Отсюда матрица перехода:

$$\underset{e\to\tilde{e}}{A} = \begin{pmatrix} -1 & 13 & -4 \\ -5 & 20 & -9 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку того, что матрица перехода найдена верно, т.е. ее столбцы действительно являются координатами векторов $\tilde{e}_j$ в базисе $\{e_i\}$:

$\tilde{e}_1 = -e_1 - 5e_2 = -(-1,\ 0,\ 1) - 5(0,\ 0,\ -1) = (1,\ 0,\ 4)$ – верно;

$\tilde{e}_2 = 13e_1 + 20e_2 + 6e_3 = 13(-1,\ 0,\ 1) + 20(0,\ 0,\ -1) + 6(1,\ 1,\ 1) = (-7,\ 6,\ -1)$ – верно;

$\tilde{e}_3 = -4e_1 - 9e_2 - 2e_3 = -4(-1,\ 0,\ 1) - 9(0,\ 0,\ -1) - 2(1,\ 1,\ 1) = (2,\ -2,\ 3)$ – верно.

Замечание 2. Решение трех СЛАУ 1), 2), 3) с одинаковой матрицей коэффициентов можно провести одновременно, если использовать метод Гаусса или обратную матрицу. Кроме того, СЛАУ 1), 2), 3) равносильны одному матричному уравнению:

$$EA = \tilde{E}, \quad \text{где} \quad E = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \end{array}, \quad \tilde{E} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \tilde{e}_1 & \tilde{e}_2 & \tilde{e}_3 \end{matrix} \end{array}.$$

Тогда

$$\underset{e\to\tilde{e}}{A} = E^{-1}\tilde{E} = \begin{pmatrix} -1 & 13 & -4 \\ -5 & 20 & -9 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычисление матрицы $E^{-1}\tilde{E}$ можно провести последовательно (сначала найти E^{-1}, затем умножить на $\tilde{E}$), а можно – в одно действие, если модифицировать метод Гаусса вычисления обратной матрицы:

$$(E|\tilde{E}) \longrightarrow (I|E^{-1}\tilde{E}).$$

6. Поскольку для каждого вектора u, v даны две координаты, то линейное пространство U двумерное и его базисы состоят из двух векторов: $\{e_1, e_2\}$, $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$. Тогда искомая матрица перехода A – это 2×2-матрица:

$$\underset{e \to \tilde{e}}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Перепишем координаты векторов u, v в виде столбцов:

$$u \overset{e}{\longleftrightarrow} X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v \overset{e}{\longleftrightarrow} Y = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$u \overset{\tilde{e}}{\longleftrightarrow} \tilde{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v \overset{\tilde{e}}{\longleftrightarrow} \tilde{Y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица A удовлетворяет двум равенствам:

$$1)\ A\tilde{X} = X, \qquad 2)\ A\tilde{Y} = Y.$$

Подставив сюда известные координаты столбцов, получим две системы уравнений:

$$1)\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 7a_{11} + 3a_{12} = 2 \\ 7a_{21} + 3a_{22} = -1 \end{cases}$$

$$2)\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 4a_{11} + 2a_{12} = -2 \\ 4a_{21} + 2a_{22} = -4 \end{cases}$$

Решать эти системы по-отдельности нет смысла, так как в каждой из них два уравнения и четыре неизвестные $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$. Лучше объединить их в одну СЛАУ размера 4×4:

$$\begin{cases} 7a_{11} + 3a_{12} + 0a_{21} + 0a_{22} = 2 \\ 0a_{11} + 0a_{12} + 7a_{21} + 3a_{22} = -1 \\ 4a_{11} + 2a_{12} + 0a_{21} + 0a_{22} = -2 \\ 0a_{11} + 0a_{12} + 4a_{21} + 2a_{22} = -4 \end{cases}$$

Решение СЛАУ:

$$a_{11} = 5,\ a_{12} = -11,\ a_{21} = 5,\ a_{22} = -12 \quad \Rightarrow \quad \underset{e \to \tilde{e}}{A} = \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}.$$

Замечание 3. Имеется второй, более короткий, способ рассуждения. Равенства $1) A\tilde{X} = X$, $2) A\tilde{Y} = Y$ равносильны одному матричному уравнению:

$$A \underset{\tilde{X} \quad \tilde{Y}}{\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}} = \underset{X \quad Y}{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}}.$$

Тогда

$$\underset{e\to\tilde{e}}{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}.$$

В этой формуле обратная матрица существует, только если заданные в условии задачи векторы u, v линейно независимы. В противном случае матрицу перехода между базисами найти невозможно.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4. Даны несколько векторов в пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$(4,\ 0,\ -1),\quad (2,\ 1,\ -1),\quad (-2,\ 1,\ 0),\quad (1,\ -1,\ 1),$$

$$(0,\ 1,\ 2),\quad (4,\ -2,\ 0),\quad (0,\ -3,\ 0),\quad (-1,\ 2,\ 0).$$

a) Из данных векторов выбрать два разных базиса пространства $\mathbb{R}^3$ (желательно из разных векторов).

b) Составить матрицу перехода между этими базисами и сделать проверку, что она найдена правильно.

c) Разложить вектор $u = (3,\ -2,\ -4)$ по каждому базису и сделать проверку, что разложения составлены правильно.

Задача 5. Даны векторы $u, v, w \in \mathbb{R}^3$:

$$u = (-1,\ 2,\ 4),\quad v = (1,\ -1,\ 0),\quad w = (-2,\ -1,\ 0).$$

a) Найти базис $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^3$ пространства $\mathbb{R}^3$, в котором эти векторы имеют координаты

$$u \overset{\tilde{e}}{\longleftrightarrow} (1,\ 2,\ 0),\quad v \overset{\tilde{e}}{\longleftrightarrow} (6,\ 3,\ 4),\quad w \overset{\tilde{e}}{\longleftrightarrow} (3,\ 1,\ 2).$$

И сделать проверку, что базис найден верно.

b) Найти вектор $s \in \mathbb{R}^3$ по известным координатам в базисе $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^3$: $s \overset{\tilde{e}}{\longleftrightarrow} (1,\ 1,\ 1)$.

Задача 6. Базисы $\{e_i\}_{i=1}^4, \{\tilde{e}_j\}_{j=1}^4$ линейного пространства U связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} &e_1 = \tilde{e}_1 + \tilde{e}_2, \\ &e_2 = \tilde{e}_1 + \tilde{e}_3, \\ &e_3 = \tilde{e}_1 + \tilde{e}_4, \\ &e_4 = \tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + \tilde{e}_3 + \tilde{e}_4. \end{aligned}$$

a) Найти матрицу перехода от базиса $\{e_i\}_{i=1}^4$ к базису $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^4$.

b) Найти все векторы $u \in U$, имеющие одинаковые координаты в базисах $\{e_i\}_{i=1}^4$ и $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^4$. Сделать проверку, что векторы найдены правильно.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

Задача 4.

a) Базисы $\{e_i\}_{i=1}^3$ и $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^3$ можно выбрать из следующих векторов (а можно и из других, выбор неоднозначен; главное, чтобы векторы базиса были линейно независимы):

$$e_1 = (4,\ 0,\ -1), \quad e_2 = (2,\ 1,\ -1), \quad e_3 = (1,\ -1,\ 1);$$

$$\tilde{e}_1 = (-2,\ 1,\ 0), \quad \tilde{e}_2 = (0,\ 1,\ 2), \quad \tilde{e}_3 = (0,\ -3,\ 0).$$

b) $\underset{e \to \tilde{e}}{A} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & 13/3 & -5 \\ 0 & 10/3 & -2 \end{pmatrix};$

c) $u = 6e_1 - \dfrac{23}{3}e_2 - \dfrac{17}{3}e_3 = -\dfrac{3}{2}\tilde{e}_1 - 2\tilde{e}_2 - \dfrac{1}{2}\tilde{e}_3.$

Задача 5

a) $\tilde{e}_1 = (-11,\ 0,\ 4), \quad \tilde{e}_2 = (5,\ 1,\ 0), \quad \tilde{e}_3 = (13,\ -1,\ -6);$

b) $s = (7,\ 0,\ -2).$

Подсказка к пункту a) задачи 5. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^3$ – стандартный базис пространства $\mathbb{R}^3$. Как известно, все векторы пространства $\mathbb{R}^3$ совпадают с наборами своих координат в стандартном базисе $\{e_i\}_{i=1}^3$:

$$u \overset{e}{\longleftrightarrow} (-1,\ 2,\ 4), \quad v \overset{e}{\longleftrightarrow} (1,\ -1,\ 0), \quad w \overset{e}{\longleftrightarrow} (-2,\ -1,\ 0).$$

Ситуацию, описанную в задаче, удобно интерпретировать как переход от стандартного базиса $\{e_i\}_{i=1}^3$ к новому базису $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^3$. Действуя по аналогии с пунктом 6 задачи 3, можно найти матрицу перехода от базиса $\{e_i\}_{i=1}^3$ к $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^3$. Затем, как в пункте а) задачи 2, найти векторы базиса $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^3$.

Задача 6.

a) $\underset{e\to\tilde{e}}{A} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $u \overset{e,\tilde{e}}{\longleftrightarrow} (-2,\ -1,\ 0,\ 1)c,\ c \in \mathbb{R}$.

Подсказка к пункту b) задачи 6. Если вектор u имеет одинаковый столбец координат в базисах $\{e_i\}_{i=1}^4$ и $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^4$, то этот столбец X удовлетворяет равенству $AX = X$, где A – матрица перехода между базисами. Это равенство равносильно однородной СЛАУ $(A - I)X = \mathbf{0}$. Как известно, однородная СЛАУ имеет либо только нулевое решение, либо бесконечно много решений. В данном случае получается бесконечное семейство векторов u.

2. Размерность и базис линейного подпространства

Пусть U – линейное пространство. Стандартный способ задать в нем линейное подпространство – в виде линейной оболочки системы векторов $\{u_i\}_{i=1}^m \subset U$:

$$U' = \mathrm{Lin}\{u_i\}_{i=1}^m. \tag{2.1}$$

Линейное подпространство (2.1) называется *натянутым* на векторы u_i. Размерность U' равна рангу r системы $\{u_i\}_{i=1}^m$, $r \leqslant m$. В качестве базиса U' можно взять любую из максимальных линейно независимых подсистем системы $\{u_i\}_{i=1}^m$ или любой другой набор из r линейно независимых векторов, принадлежащих подпространству U'.

Пусть $U = \mathbb{R}^n$ и векторы u_i заданы явно (наборами своих координат в стандартном базисе). Тогда для анализа подпространства (2.1) надо

- Составить из строк u_i матрицу.
- При помощи элементарных преобразований строк привести эту матрицу к ступенчатой форме. При этом строки матрицы изменятся с u_i на $\tilde{u}_i$, но линейная оболочка и ранг системы строк останутся прежними.
- Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк $\tilde{u}_i$ – отсюда размерность подпространства (2.1).
- Ненулевые строки $\tilde{u}_i$ можно взять в качестве базиса подпространства (2.1). Если же требуется выбрать базис из первоначальных векторов u_i, то надо взять векторы с номерами, соответствующими ненулевым строкам $\tilde{u}_i$ (если строки матрицы не переставлялись).

Пусть U – произвольное линейное пространство, в котором выбран базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, и известны координаты векторов u_i в этом базисе:

$$u_i \overset{e}{\longleftrightarrow} v_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in}), \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Тогда анализ подпространства (2.1) можно перенести из пространства U в $\mathbb{R}^n$:

$$U' = \mathrm{Lin}\{u_i\}_{i=1}^m \subset U \quad \leftrightarrow \quad V' = \mathrm{Lin}\{v_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n.$$

Задача 7. Дана система векторов в пространстве $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{rcrrrr} v_1 & = & (3, & 8, & -9, & -5) \\ v_2 & = & (5, & -3, & -1, & 8) \\ v_3 & = & (1, & -2, & 1, & 3) \\ v_4 & = & (2, & 3, & -4, & -1) \end{array}$$

a) Найти размерность линейного подпространства $V \subset \mathbb{R}^4$, натянутого на данную систему векторов.

b) Выбрать <u>в этой системе</u> базис V, а оставшиеся векторы системы разложить по этому базису и сделать проверку, что разложения составлены правильно.

Решение.

(a) Размерность линейного подпространства

$$V = \mathrm{Lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

равна рангу системы векторов $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Чтобы найти ранг, запишем векторы строками матрицы и приведем ее к ступенчатой форме путем элементарных преобразований над строками[1]:

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & -9 & -5 \\ 5 & -3 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \xrightarrow[I \leftrightarrow III]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 & 8 \\ 3 & 8 & -9 & -5 \\ 2 & 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_3 \\ v_2 \\ v_1 \\ v_4 \end{matrix} \xrightarrow[\substack{II-5I \\ III-3I \\ IV-2I}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -6 & -7 \\ 0 & 14 & -12 & -14 \\ 0 & 7 & -6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III-2II \\ IV-II}]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда ранг системы векторов равен 2 и $\dim V = 2$.

(b) Базисом V является любая линейно независимая подсистема в $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, состоящая из двух векторов. Приведение матрицы к ступенчатой форме в предыдущем пункте подсказывает один из возможных выборов базиса:

$$V = \mathrm{Lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \mathrm{Lin}\{v_2, v_3\}, \quad \{v_2, v_3\} \text{ – базис } V.$$

[1]Для вычисления ранга не имеет значения: записать векторы строками или столбцами матрицы – но для последующего выделения базиса удобнее строками. Причем будем фиксировать, если придется менять строки местами.

Разложим оставшиеся векторы v_1, v_4 по базису $\{v_2, v_3\}$. Согласно методу разложения вектора по базису, описанному в задаче 1, необходимо решить две СЛАУ.

1) Для разложения v_1: $\quad v_1 = av_2 + bv_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & -2 \\ -1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}$.

2) Для разложения v_4: $\quad v_4 = cv_2 + dv_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & -2 \\ -1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

СЛАУ 1), 2) можно решать только методом Гаусса, поскольку матрица коэффициентов не квадратная. Поскольку СЛАУ имеют одинаковую матрицу коэффициентов, то организуем их одновременное решение методом Гаусса:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{rr|r|r} 5 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & 8 & 3 \\ -1 & 1 & -9 & -4 \\ 8 & 3 & -5 & -1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} \scriptstyle v_2 & \scriptstyle v_3 & \scriptstyle v_1 & \scriptstyle v_4 \end{array} \end{array} \xrightarrow[I \leftrightarrow III]{} \left(\begin{array}{rr|r|r} -1 & 1 & -9 & -4 \\ -3 & -2 & 8 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 8 & 3 & -5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{II-3I \\ III+5I \\ IV+8I}]{}$$

$$\left(\begin{array}{rr|r|r} -1 & 1 & -9 & -4 \\ 0 & -5 & 35 & 15 \\ 0 & 6 & -42 & -18 \\ 0 & 11 & -77 & -33 \end{array}\right) \xrightarrow[II:(-5)]{} \left(\begin{array}{rr|r|r} -1 & 1 & -9 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 6 & -42 & -18 \\ 0 & 11 & -77 & -33 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{III-6II \\ IV-11II}]{}$$

$$\left(\begin{array}{rr|r|r} -1 & 1 & -9 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

1) $\begin{cases} -a + b = -9 \\ b = -7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2v_2 - 7v_3.$

2) $\begin{cases} -c + d = -4 \\ d = -3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v_4 = v_2 - 3v_3.$

Проверим, что разложения составлены правильно:

$v_1 = 2v_2 - 7v_3 = 2(5,\ -3,\ -1,\ 8) - 7(1,\ -2,\ 1,\ 3) = (3,\ 8,\ -9,\ -5)$ – верно;

$v_4 = v_2 - 3v_3 = (5,\ -3,\ -1,\ 8) - 3(1,\ -2,\ 1,\ 3) = (2,\ 3,\ -4,\ -1)$ – верно.

Задача 8. В линейном пространстве U с базисом $\{e_i\}_{i=1}^4$ дано линейное подпространство:

$$U' = \mathrm{Lin}\{e_1 + 5e_2 - 3e_3 + e_4,\ 2e_1 + e_2 + 3e_3 - e_4,\ 2e_1 + 7e_2 - 3e_3,\ 3e_1 + 6e_2 - e_4\}.$$

a) Найти размерность подпространства U' и выделить в нем базис (не обязательно из первоначальных векторов).

b) Среди следующих векторов указать те, которые принадлежат U', и те, которые не принадлежат U':

$\mathbf{0}$	$6e_1 - 2e_3 + 4e_4$	$e_1 + e_2 + e_3$
$2e_4$	$4e_1 + 5e_2 + e_3 - 2e_4$	$-2e_1 - e_2 - 3e_3 - e_4$

Решение.

(a) Линейное подпространство U' натянуто на систему четырех векторов линейного пространства U. Введем обозначения для наборов координат этих векторов в базисе $\{e_i\}_{i=1}^4$:

$$\begin{array}{lcl} e_1 + 5e_2 - 3e_3 + e_4 & \overset{e}{\longleftrightarrow} & (1,\ 5,\ -3,\ 1) = v_1 \\ 2e_1 + e_2 + 3e_3 - e_4 & \overset{e}{\longleftrightarrow} & (2,\ 1,\ 3,\ -1) = v_2 \\ 2e_1 + 7e_2 - 3e_3 & \overset{e}{\longleftrightarrow} & (2,\ 7,\ -3,\ 0) = v_3 \\ 3e_1 + 6e_2 - e_4 & \overset{e}{\longleftrightarrow} & (3,\ 6,\ 0,\ -1) = v_4 \end{array}$$

Тогда анализ подпространства $U' \subset U$ равносилен анализу подпространства

$$V' = \mathrm{Lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Следующие действия аналогичны решению задачи 7.

Найдем ранг системы векторов $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, записав их строками матрицы и приведя матрицу к ступенчатому виду путем элементарных преобразований строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{II-2I \\ III-2I \\ IV-3I}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & -9 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 9 & -4 \end{pmatrix} \underset{II:(-3)}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 9 & -4 \end{pmatrix} \underset{\substack{III+II \\ IV+3II}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{IV-III}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Отсюда $\dim V' = \mathrm{rank}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = 3$.

В качестве базиса V' можно взять первую, вторую, третью строки матрицы A. Причем чтобы базис был проще, строки матрицы можно еще немного преобразовать:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{I+III \\ II+III \\ III\cdot(-1)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{I-II \\ II:3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, выбираем базис подпространства V' из следующих векторов:

$$\begin{aligned} g_1 &= (1,\ 2,\ 0,\ 0) \\ g_2 &= (0,\ 1,\ -1,\ 0) \\ g_3 &= (0,\ 0,\ 0,\ 1) \end{aligned}$$

Запишем результаты пункта (a) для первоначального подпространства U':

$$\dim U' = 3, \quad \{e_1 + 2e_2,\ e_2 - e_3,\ e_4\} \text{ – базис } U'.$$

(b) Очевидно, что

$$\mathbf{0},\ \ 2e_4,\ \ e_1 + e_2 + e_3 \in U'.$$

Действительно, нулевой вектор содержится в любом линейном подпространстве; $2e_4$ – удвоенный базисный вектор U'; $e_1+e_2+e_3 = (e_1+2e_2)-(e_2-e_3)$ линейно выражается через базисные векторы U'.

Анализ остальных векторов перенесем опять из пространства U в $\mathbb{R}^4$ путем рассмотрения их координат в базисе $\{e_i\}_{i=1}^4$:

$$\begin{aligned} &4e_1 + 5e_2 + e_3 - 2e_4 && \overset{e}{\longleftrightarrow} && (4,\ 5,\ 1,\ -2) = w_1 \\ &-2e_1 - e_2 - 3e_3 - e_4 && \overset{e}{\longleftrightarrow} && (-2,\ -1,\ -3,\ -1) = w_2 \\ &6e_1 - 2e_3 + 4e_4 && \overset{e}{\longleftrightarrow} && (6,\ 0,\ -2,\ 4) = w_3 \end{aligned}$$

Вектор w_j принадлежит линейному подпространству $V' \subset \mathbb{R}^4$, если его можно разложить по базису V', выбранному нами из векторов g_1, g_2, g_3. Следовательно, надо рассмотреть три СЛАУ (см. задачу 1):

1) Разложение w_1: $w_1 = x_1g_1 + x_2g_2 + x_3g_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

2) Разложение w_2: $w_2 = y_1g_1 + y_2g_2 + y_3g_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$

3) Разложение w_3: $w_3 = z_1 g_1 + z_2 g_2 + z_3 g_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Заметим, что решать СЛАУ 1), 2), 3) не обязательно, достаточно выяснить, имеют ли они решения. Для этого используем теорему Кронекера – Капелли.

Поскольку СЛАУ 1), 2), 3) имеют одинаковую матрицу коэффициентов, то составим для них единую расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 4 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} g_1 & g_2 & g_3 & w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \end{array} \underset{\substack{II-2I \\ III+II \\ III \leftrightarrow IV}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -14 \end{array}\right)$$

Вернемся к раздельному анализу СЛАУ 1), 2), 3). Ранг матрицы коэффициентов этих СЛАУ равен 3.

Ранг матрицы, расширенной столбцом w_1, равен 4. Значит, СЛАУ 1) не имеет решения и $w_1 \notin V'$. Аналогично $w_3 \notin V'$. Ранг матрицы, расширенной столбцом w_2, равен 3. Значит, СЛАУ 2) имеет решение и $w_2 \in V'$.

Для подпространства U' справедливы такие же выводы. Окончательный ответ в (b):

$\mathbf{0} \in U'$	$6e_1 - 2e_3 + 4e_4 \notin U'$	$e_1 + e_2 + e_3 \in U'$
$2e_4 \in U'$	$4e_1 + 5e_2 + e_3 - 2e_4 \notin U'$	$-2e_1 - e_2 - 3e_3 - e_4 \in U'$

Замечание 4. Для ответа на вопрос пункта b) задачи 8 информация о размерности и о базисе подпространства $V' \subset \mathbb{R}^4$, вообще-то, не обязательна. Заданный вектор принадлежит линейному подпространству $V' = \mathrm{Lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, если его можно разложить по системе векторов v_1, v_2, v_3, v_4 (не обязательно единственным образом, если система линейно зависима). Отсюда следует анализ совместности СЛАУ с матрицей столбцов v_1, v_2, v_3, v_4. Польза от выделения базиса g_1, g_2, g_3 в V' заключается только в том, что тогда $V' = \mathrm{Lin}\{g_1, g_2, g_3\}$ и матрица коэффициентов СЛАУ содержит на один столбец меньше.

Задача 9. Даны две системы векторов в пространстве $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{lcl} u_1 &=& (1,\ 1,\ 1,\ 0) \\ u_2 &=& (1,\ 1,\ 0,\ 1) \\ u_3 &=& (1,\ 0,\ 1,\ 1) \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} v_1 &=& (1,\ 1,\ -1,\ -1) \\ v_2 &=& (1,\ -1,\ 1,\ -1) \\ v_3 &=& (1,\ -1,\ -1,\ 1) \end{array}$$

Найти размерность и базис пересечения линейных подпространств $U = \mathrm{Lin}\{u_1, u_2, u_3\}$ и $V = \mathrm{Lin}\{v_1, v_2, v_3\}$.

Решение. Обозначим $W = U \cap V$. Достаточно очевидно, что пересечение двух линейных подпространств $\mathbb{R}^4$ также является линейным подпространством в $\mathbb{R}^4$.

Подпространство W состоит из векторов $w \in \mathbb{R}^4$, которые являются одновременно линейной комбинацией векторов u_1, u_2, u_3 и линейной комбинацией векторов v_1, v_2, v_3. Для нахождения всех таких векторов w надо найти все числовые коэффициенты α_i, β_i, удовлетворяющие равенству:

$$\underbrace{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3}_{w} = \underbrace{\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3}_{w}. \tag{2.2}$$

Запишем сюда известные векторы в виде столбцов:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, числа α_i, β_i являются решением однородной СЛАУ:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \scriptstyle u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad -v_1 \quad -v_2 \quad -v_3 \end{array} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Используем метод Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{II-I \\ III-I}]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[II \leftrightarrow IV]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[III+II]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(IV+III):3]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ранг матрицы коэффициентов СЛАУ $r = 4$ равен рангу расширенной матрицы – значит, СЛАУ совместна (на самом деле любая однородная СЛАУ совместна). Число неизвестных СЛАУ $n = 6$ – значит, СЛАУ имеет бесконечно много решений, и все неизвестные можно выразить из уравнений, если присвоить двум из них произвольные значения $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} \alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & = 0 \\ & \alpha_2 & +\alpha_3 & +\beta_1 & +\beta_2 & -\beta_3 & = 0 \\ & & \alpha_3 & +3\beta_1 & +\beta_2 & +\beta_3 & = 0 \\ & & & \beta_1 & +\beta_2 & +\beta_3 & = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \beta_3 := c_1 \\ \beta_2 := c_2 \\ \beta_1 = -(c_1 + c_2) \\ \alpha_3 = 2(c_1 + c_2) \\ \alpha_2 = -2c_2 \\ \alpha_1 = -2c_1 \end{array}$$

Все векторы $w \in W$ можно получить как линейные комбинации (2.2). При этом неважно, подставлять α_i в левую часть равенства (2.2) или поставлять β_i в правую часть равенства (2.2) – результат будет одинаковым:

$$w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 = -(c_1 + c_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{c}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tilde{c}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, в качестве базиса подпространства W можно взять два линейно независимых вектора w_1, w_2:

$$W = \mathrm{Lin}\{w_1, w_2\}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dim W = 2.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 10. Дана система векторов в пространстве $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{array}{rcrrrrr} v_1 & = & (2, & 3, & 5, & -4, & 1) \\ v_2 & = & (1, & -1, & 2, & 3, & 5) \\ v_3 & = & (3, & 7, & 8, & -11, & -3) \\ v_4 & = & (1, & -1, & 1, & -2, & 3) \end{array}$$

a) Найти размерность линейного подпространства $V \subset \mathbb{R}^5$, натянутого на данную систему векторов.

b) Выбрать в этой системе базис V, а оставшиеся векторы системы разложить по этому базису и сделать проверку, что разложения составлены правильно.

c) Среди следующих векторов указать те, которые принадлежат V, и те, которые не принадлежат V:

$$\begin{array}{rcrrrrr} w_1 & = & (0, & 0, & 0, & 0, & 0) \\ w_2 & = & (1, & 0, & 0, & 0, & 0) \\ w_3 & = & (2, & 3, & 3, & -14, & -3) \\ w_4 & = & (4, & 0, & 10, & -1, & 8) \end{array}$$

Задача 11. В линейном пространстве U с базисом $\{e_i\}_{i=1}^5$ даны векторы:

$$\begin{array}{l} u_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 \\ u_2 = e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5 \\ u_3 = 2e_1 + e_2 - e_3 + e_4 + 2e_5 \\ u_4 = -e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4 \\ u_5 = e_1 + 4e_3 + e_5 \end{array}$$

Найти состав, размерность и базис пересечения линейных подпространств $U' = \mathrm{Lin}\{u_1, u_2, u_3\}$ и $U'' = \mathrm{Lin}\{u_4, u_5\}$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

Задача 10.

a) $\dim V = 3$;

b) базис V можно выбрать из векторов v_1, v_2, v_4, тогда $v_3 = 2v_1 - v_2$ (возможен и другой выбор базиса, например: v_2, v_3, v_4 или v_1, v_3, v_4);

c) $w_1, w_3 \in V$, $w_2, w_4 \notin V$.

Задача 11. $U' \cap U'' = \mathrm{Lin}\{u_5\}, \dim(U' \cap U'') = 1$, базис состоит из одного вектора u_5.

3. Линейные операторы

Пусть U, V – линейные пространства. Отображение $\mathbb{A} : U \to V$ называется *линейным оператором*, если

$$\mathbb{A}(\alpha u) = \alpha \mathbb{A}(u) \quad \forall u \in U, \alpha \in \mathbb{R};$$

$$\mathbb{A}(u_1 + u_2) = \mathbb{A}(u_1) + \mathbb{A}(u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in U.$$

Любой линейный оператор обладает свойством $\mathbb{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Пусть в пространстве U выбран базис $\{e_j\}_{j=1}^n$, в пространстве V – базис $\{g_i\}_{i=1}^m$. Матрицей линейного оператора $\mathbb{A}$ в данных базисах называется такая $m \times n$-матрица A, что ее j-й столбец – это столбец координат вектора $\mathbb{A}(e_j)$ в базисе $\{g_i\}_{i=1}^m$.

Матрица оператора позволяет вычислить в координатной форме значение оператора $\mathbb{A}$ на любом векторе. Пусть $\mathbb{A}(u) = v$ и векторы u и v имеют следующие координаты:

$$u \overset{e}{\longleftrightarrow} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad v \overset{g}{\longleftrightarrow} Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Тогда столбцы X и Y связаны соотношением

$$AX = Y.$$

Во всех задачах этого параграфа $U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$ <u>со стандартными базисами</u>:

$$\mathbb{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m. \tag{3.1}$$

В этом случае X и Y – это сами векторы u и v, записанные в форме столбцов.

Между векторной записью $\mathbb{A}(u) = v$ и координатной $AX = Y$ почти нет разницы, и можно просто считать, что $\mathbb{A}(u) = AX$.

При этом A – это $m \times n$-матрица, столбцами которой являются значения оператора $\mathbb{A}$ на векторах стандартного базиса $\mathbb{R}^n$.

Обозначим ранг этой матрицы $r = \mathrm{rank} A$.

Основные понятия и характеристики линейного оператора
на примере оператора (3.1)

Образ вектора u – это значение оператора $\mathbb{A}$ на векторе $u \in \mathbb{R}^n$: $\quad \mathbb{A}(u) = AX \in \mathbb{R}^m$.

Образ оператора $\mathbb{A}$ – это множество всех значений оператора:

$$\mathrm{Im}\mathbb{A} = \{\mathbb{A}(u),\ u \in \mathbb{R}^n\} = \{AX,\ X \in \mathbb{R}^n\} = \mathrm{Lin}\{A_j\}_{j=1}^n$$

Образ оператора $\mathbb{A}$ совпадает с линейной оболочкой столбцов A_j матрицы A, является линейным подпространством в $\mathbb{R}^m$: $\dim \mathrm{Im}\mathbb{A} = r$.

Ядро оператора $\mathbb{A}$ – это множество всех векторов $u \in \mathbb{R}^n$, которые отображаются в $\mathbf{0}$:

$$\mathrm{Ker}\mathbb{A} = \{u \in \mathbb{R}^n :\ \mathbb{A}(u) = \mathbf{0}\} = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = \mathbf{0}\} =$$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{n-r} c_k X_k, c_k \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Lin}\{X_k\}_{k=1}^{n-r}$$

Ядро оператора $\mathbb{A}$ является линейным подпространством в $\mathbb{R}^n$: $\dim \mathrm{Ker}\mathbb{A} = n - r$.

Ядро совпадает с множеством решений однородной СЛАУ $AX = \mathbf{0}$.
Любая однородная СЛАУ имеет решения: либо только нулевое решение (в этом случае $\mathrm{Ker}\mathbb{A} = \{\mathbf{0}\}$), либо бесконечно много решений (в этом случае $\mathrm{Ker}\mathbb{A}$ совпадает с линейной оболочкой фундаментальной системы решений $X_1, X_2, ..., X_{n-r}$ этой СЛАУ, которые образуют базис ядра).

Полный прообраз вектора $v \in \mathrm{Im}\mathbb{A}$ – это множество всех векторов $u \in \mathbb{R}^n$, которые отображаются в v:

$$\{u \in \mathbb{R}^n : \mathbb{A}(u) = v\} = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = Y\} = \left\{X_0 + \sum_{k=1}^{n-r} c_k X_k, c_k \in \mathbb{R}\right\}$$

В частности, ядро оператора – это полный прообраз вектора $\mathbf{0}$.

Полный прообраз ненулевого вектора v совпадает с множеством решений неоднородной СЛАУ $AX = Y$, которые отличаются от решения соответствующей однородной СЛАУ на сдвиг X_0 – какое-либо частное решение $AX = Y$.
Из-за этого сдвига полный прообраз ненулевого вектора v не является линейным подпространством в $\mathbb{R}^n$.

Если СЛАУ $AX = Y$ вообще не имеет решений, то это значит, что $v \notin \mathrm{Im}\mathbb{A}$ и полный прообраз v – пустое множество.

Сюръекция, инъекция, биекция и обратимость оператора $\mathbb{A}$:

1. $\mathbb{A}$ сюръективный $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\mathbb{A} = \mathbb{R}^m$ $\Leftrightarrow$ $r = m$;
2. $\mathbb{A}$ инъективный $\Leftrightarrow$ $\mathbb{A}(u_1) \neq \mathbb{A}(u_2)$ при $u_1 \neq u_2$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\mathbb{A} = \{\mathbf{0}\}$ $\Leftrightarrow$ $r = n$;
3. $\mathbb{A}$ биективный $\Leftrightarrow$ $\mathbb{A}$ сюръективный и инъективный $\Leftrightarrow$ $r = m = n$ $\Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow$ матрица A обратима $\Leftrightarrow$ $\mathbb{A}$ обратим, $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ с матрицей A^{-1}.

Задача 12. Составить матрицу линейного оператора $\mathbb{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ со стандартными базисами) в каждом из следующих случаев:

a) $\mathbb{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, известны образы векторов стандартного базиса $\{e_i\}_{i=1}^3 \subset \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(e_1) &= (3,\ -1,\ 1) \\ \mathbb{A}(e_2) &= (-6,\ 1,\ 0) \\ \mathbb{A}(e_3) &= (-2,\ 8,\ 4) \end{aligned}$$

b) $\mathbb{A} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, известна общая формула оператора:

$$u = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{A}(u) = (x_2+2x_3-3x_4,\ 4x_1+2x_2-x_5,\ x_1+x_2-2x_3+5x_4).$$

c) $\mathbb{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, известны образы трех конкретных векторов:

$$\begin{aligned} u_1 &= (2,\ 3,\ 0) &\Rightarrow\ \ \mathbb{A}(u_1) &= (-1,\ 3,\ 5,\ 3) \\ u_2 &= (0,\ 1,\ 2) &\Rightarrow\ \ \mathbb{A}(u_2) &= (-1,\ -1,\ 1,\ 3) \\ u_3 &= (-1,\ 0,\ 1) &\Rightarrow\ \ \mathbb{A}(u_3) &= (-1,\ -1,\ -1,\ 1) \end{aligned}$$

Решение.

a) Поскольку $\mathbb{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, то матрица оператора имеет размер 3×3. Матрица A составляется прямо по определению, см. описание оператора (3.1):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -1 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) Поскольку $\mathbb{A} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, то матрица оператора имеет размер 3×5. По условию известно значение $\mathbb{A}(u) = v$ любого вектора $u \in \mathbb{R}^5$. Тогда матрица A однозначно задается равенством $AX = Y$, где X и Y – это векторы u и v, записанные в форме столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + 2x_3 - 3x_4 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_5 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы A подбираются устно:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

В данном случае есть и другой способ рассуждений: в общую формулу $\mathbb{A}(u)$ можно подставить $u = e_i$ – векторы стандартного базиса $\mathbb{R}^5$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. После этого матрица оператора составляется просто по определению – так же, как в пункте (a).

c) Обозначим образы векторов u символами v:

$$\begin{array}{lcl} u_1 = (2,\ 3,\ 0) & \Rightarrow & \mathbb{A}(u_1) = (-1,\ 3,\ 5,\ 3) = v_1 \\ u_2 = (0,\ 1,\ 2) & \Rightarrow & \mathbb{A}(u_2) = (-1,\ -1,\ 1,\ 3) = v_2 \\ u_3 = (-1,\ 0,\ 1) & \Rightarrow & \mathbb{A}(u_3) = (-1,\ -1,\ -1,\ 1) = v_3 \end{array}$$

Поскольку $\mathbb{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, то матрица оператора имеет размер 4×3.

По условию матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

должна удовлетворять трем равенствам типа $AX = Y$, где X и Y – это векторы u и v, записанные в форме столбцов:

1) $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$3)\qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Равенства 1), 2), 3) равносильны одному матричному уравнению:

$$A\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\\ \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix}\end{array} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\\ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix}\end{array} \quad \Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 13. Линейный оператор $\mathbb{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ в стандартных базисах пространств $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Найти образ вектора $u = (2,\ 0,\ 3,\ 1)$.

b) Найти полные прообразы вектора $v_1 = (4,\ -3,\ 1,\ -3,\ 1)$ и вектора $v_2 = (0,\ 4,\ -1,\ 0,\ 4)$. В случае непустого прообраза сделать его проверку.

Решение.

(a) Образ вектора $u \in \mathbb{R}^4$ под действием оператора $\mathbb{A}$ – результат умножения матрицы A на вектор u, записанный в форме столбца:

$$\mathbb{A}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\mathbb{A}(u) = (7,\ -2,\ -1,\ 10,\ 5)$.

(b) Полный прообраз вектора $v \in \mathbb{R}^5$ – это множество всех таких векторов $u \in \mathbb{R}^4$, что $\mathbb{A}(u) = v$, т.е. это множество всех решений СЛАУ $AX = Y$, в которую искомый вектор u и заданный вектор v входят в виде столбцов X и Y.

1) Для вектора $v_1 = (4,\ -3,\ 1,\ -3,\ 1)$: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Для вектора $v_2 = (0,\ 4,\ -1,\ 0,\ 4)$: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Поскольку СЛАУ 1), 2) имеют одинаковую матрицу коэффициентов, то организуем их одновременное решение методом Гаусса:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right)}_{A \qquad\qquad v_1 \quad v_2} \to \left(\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Вернемся к раздельному анализу СЛАУ:

1) Ранги матрицы A и матрицы, расширенной столбцом v_1, совпадают: $\text{rank}A = \text{rank}\bar{A} = 3$ – значит, СЛАУ совместна. Число неизвестных $n = 4$. Значит, СЛАУ имеет бесконечно много решений. Все неизвестные можно выразить из уравнений, если присвоить одной из них произвольное значение $c \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ 2x_3 - 4x_4 &= 12 \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & x_4 := c \\ & x_3 = 6 + 2c \\ & x_2 = 3 + c \\ & x_1 = -8 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: полный прообраз вектора $v_1 = (4,\ -3,\ 1,\ -3,\ 1)$ – это следующее множество векторов u:

$$\{\, (-8,\ 3,\ 6,\ 0) + c(0,\ 1,\ 2,\ 1),\ c \in \mathbb{R}\}\,.$$

Проверим, что $\mathbb{A}(u) = v_1$:

$$\mathbb{A}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1.$$

2) Ранги матрицы A и матрицы, расширенной столбцом v_2, не совпадают: $\mathrm{rank} A = 3$, $\mathrm{rank} \bar{A} = 4$ – значит, СЛАУ не совместна.

Ответ: полный прообраз вектора $v_2 = (0,\ 4,\ -1,\ 0,\ 4)$ – пустое множество.

Задача 14. Линейный оператор $\mathbb{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ в стандартных базисах пространств $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 11 \end{pmatrix}.$$

a) Определить, является ли этот оператор сюръекцией, инъекцией, биекцией и обратим ли он.

b) Найти ядро оператора $\mathbb{A}$ (с указанием размерности и базиса).

c) Найти образ оператора $\mathbb{A}$ (с указанием размерности и базиса).

Решение.

(a) Для вычисления ранга r матрицы A приведем ее к ступенчатой форме путем элементарных преобразований над строками:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сопоставим ключевые параметры матрицы A: $m = 3$, $n = 4$, $r = 2$.

Поскольку не выполняется $n = m = r$, то оператор не является биекцией и не обратим.

Поскольку $\dim \mathrm{Im}\mathbb{A} = r = 2$, то $\mathrm{Im}\mathbb{A} \neq \mathbb{R}^3$ и оператор не является сюръекцией.

Поскольку $\dim \mathrm{Ker}\mathbb{A} = n - r = 2$, то $\mathrm{Ker}\mathbb{A} \neq \{\mathbf{0}\}$ и оператор не является инъекцией.

(b) Выше уже установлено, что $\mathrm{Ker}\mathbb{A}$ – двумерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^4$. Ядро совпадает с множеством решений однородной СЛАУ $AX = \mathbf{0}$. Решим ее методом Гаусса:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 11 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$\left\{\begin{array}{r} -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} x_4 := c_1 \in \mathbb{R} \\ x_3 := c_2 \in \mathbb{R} \\ x_2 = -5c_1 + 3c_2 \\ x_1 = -3c_1 + c_2 \end{array} \Rightarrow X = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $u_1 = (-3,\ -5,\ 0,\ 1)$, $u_2 = (1,\ 3,\ 1,\ 0)$ – базис ядра оператора:

$$\mathrm{Ker}\mathbb{A} = \mathrm{Lin}\{u_1, u_2\}.$$

(c) Выше уже установлено, что $\mathrm{Im}\mathbb{A}$ – двумерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^3$. Образ линейного оператора $\mathbb{A}$ совпадает с линейной оболочкой столбцов матрицы A. В качестве базиса в $\mathrm{Im}\mathbb{A}$ можно выбрать любые два линейно независимых столбца матрицы A. Два вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда их координаты не пропорциональны. Поэтому в данном случае годятся любые два столбца.

Возьмем $v_1 = (2,\ -1,\ 2)$, $v_2 = (-1,\ 1,\ 1)$ – базис образа оператора:

$$\mathrm{Im}\mathbb{A} = \mathrm{Lin}\{v_1, v_2\}.$$

Замечание 5. Обсудим выбор базиса в $\mathrm{Im}\mathbb{A}$ для разных ситуаций. Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Если $\dim \mathrm{Im}\mathbb{A} = 1$, то в качестве базиса можно взять любой ненулевой столбец A.

Если $\dim \mathrm{Im}\mathbb{A} = 2$, то, как в задаче 14, в качестве базиса можно взять два любых ненулевых и непропорциональных столбца A.

Если $\dim \mathrm{Im}\mathbb{A} = m$, то $\mathrm{Im}\mathbb{A} = \mathbb{R}^m$ и в качестве базиса можно взять любой базис $\mathbb{R}^m$, например стандартный базис.

В других, более сложных, ситуациях надо применять такие же методы поиска базиса в линейной оболочке векторов, как в параграфе 2.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 15. Для линейного оператора $\mathbb{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ известны образы трех векторов:

$$\begin{aligned}
u_1 &= (1,\ -1,\ 0) \;\Rightarrow\; \mathbb{A}(u_1) = (2,\ 0,\ 4)\\
u_2 &= (0,\ 2,\ -1) \;\Rightarrow\; \mathbb{A}(u_2) = (0,\ -1,\ 2)\\
u_3 &= (0,\ 3,\ -1) \;\Rightarrow\; \mathbb{A}(u_3) = (1,\ 0,\ 0)
\end{aligned}$$

a) Найти матрицу A этого линейного оператора в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

b) Найти образ вектора $u = (4,\ -4,\ -1)$.

c) Найти полный прообраз вектора $v = (4,\ 0,\ 6)$.

d) Найти $\mathrm{Im}\mathbb{A}$ и $\mathrm{Ker}\mathbb{A}$ (с указанием размерности и базиса).

e) Установить обратимость или необратимость оператора $\mathbb{A}$.

Задача 16. Даны формулы четырех отображений $\mathbb{A}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$: $\quad u = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$

$\mathbb{A}(u) = (\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2},\ \ x_2,\ \ x_3,\ \ x_4)$;

$\mathbb{A}(u) = (x_1-x_3,\ \ x_1-x_2-2x_4,\ \ 2x_2+4x_3-x_4,\ \ 2x_1+4x_2+3x_4)$;

$\mathbb{A}(u) = (1+x_1,\ \ 2+x_2,\ \ 3+x_3,\ \ 0)$;

$\mathbb{A}(u) = (x_1+x_2^2,\ \ x_1x_2+x_4,\ \ x_2+x_3^2x_4,\ \ x_1-x_2+x_3-x_4)$.

a) Найти среди них линейный оператор, составить его матрицу (в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^4$).

b) Найти образ вектора $w = (0,\ -1,\ 1,\ 0)$.

c) Найти полный прообраз вектора $v = (0,\ 0,\ 1,\ 1)$.

d) Найти $\mathrm{Im}\mathbb{A}$ и $\mathrm{Ker}\mathbb{A}$ (с указанием размерности и базиса).

e) Установить обратимость или необратимость оператора $\mathbb{A}$.

Задача 17. Каждая из следующих матриц задает линейный оператор $\mathbb{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ (пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ со стандартными базисами):

$$\text{a)}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} \qquad \text{b)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{c)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Для каждого такого оператора

- Указать конкретные пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, в которых он действует.
- Определить, является ли он сюръекцией, инъекцией, биекцией.
- Построить обратный оператор, если он существует (построить оператор = указать пространства, в которых он действует, и его матрицу).

Задача 18. Для линейного оператора $\mathbb{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ известны образы трех векторов

$$(1,\ 0,\ 0) \to (-6,\ -6,\ 12), \quad (0,\ 1,\ 0) \to (-1,\ -5,\ 4), \quad (0,\ 0,\ 1) \to (-2,\ -4,\ 5).$$

Найти следующие множества векторов в пространстве $\mathbb{R}^3$:

U_0 – множество всех векторов, которые оператор $\mathbb{A}$ отображает в вектор $(0,\ 0,\ 0)$;

U_1 – множество всех векторов, которые оператор $\mathbb{A}$ отображает в вектор $(1,\ 3,\ 1)$;

U_2 – множество всех векторов, которые оператор $\mathbb{A}$ отображает в вектор $(-1,\ 1,\ 1)$;

U_3 – множество всех векторов, которые под действием оператора $\mathbb{A}$ не меняются;

U_4 – множество всех векторов, которые под действием оператора $\mathbb{A}$ меняют направление на противоположное и растягиваются по длине в 3 раза.

Для каждого множества определить, является ли оно линейным подпространством в $\mathbb{R}^3$, и если да, то указать его размерность и базис.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

Задача 15.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

b) $(6,\ -3,\ 22)$;

c) $(3/2,\ 3/2,\ -1)$;

d) $\mathrm{Im}\mathbb{A} = \mathbb{R}^3$, $\dim \mathrm{Im}\mathbb{A} = 3$, базисом $\mathrm{Im}\mathbb{A}$ является любой базис $\mathbb{R}^3$;

$\mathrm{Ker}\mathbb{A} = \{\mathbf{0}\}$, $\dim \mathrm{Ker}\mathbb{A} = 0$, базиса нет;

e) оператор обратим.

Задача 16.

a) Отображение $\mathbb{A}(x) = (x_1 - x_3,\ \ x_1 - x_2 - 2x_4,\ \ 2x_2 + 4x_3 - x_4,\ \ 2x_1 + 4x_2 + 3x_4)$ является линейным оператором, его матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $(-1,\ 1,\ 2,\ -4)$;

c) $\left\{\dfrac{1}{6}(1,\ 1,\ 1,\ 0) + c(5,\ -7,\ 5,\ 6),\ c \in \mathbb{R}\right\}$;

d) $\mathrm{Im}\mathbb{A} = \mathrm{Lin}\{v_1, v_2, v_3\}$, где $v_1 = (1,\ 1,\ 0,\ 2)$, $v_2 = (0,\ -1,\ 2,\ 4)$, $v_3 = (-1,\ 0,\ 4,\ 0)$ – базис, $\dim \mathrm{Im}\mathbb{A} = 3$;

$\mathrm{Ker}\mathbb{A} = \mathrm{Lin}\{v\}$, где $v = (5,\ -7,\ 5,\ 6)$ – базис, $\dim \mathrm{Ker}\mathbb{A} = 1$;

e) оператор не обратим.

Задача 17.

a) $\mathbb{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, сюръекция, инъекция, биекция, обратим, $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ с матрицей $A^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\mathbb{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, сюръекция, не инъекция, не биекция, не обратим;

c) $\mathbb{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, не сюръекция, инъекция, не биекция, не обратим;

d) $\mathbb{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, не сюръекция, не инъекция, не биекция, не обратим;

e) $\mathbb{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, сюръекция, инъекция, биекция, обратим, $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ с матрицей $A^{-1} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\mathbb{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, не сюръекция, не инъекция, не биекция, не обратим.

Задача 18.

$U_0 = \{c(1,\ 2,\ -4),\ c \in \mathbb{R}\}$ – линейное подпространство в $\mathbb{R}^3$, $\dim U_0 = 1$, базис: $(1,\ 2,\ -4)$;
$U_1 = \varnothing$ не является линейным подпространством в $\mathbb{R}^3$;
$U_2 = \{(1/2,\ 0,\ -1) + c(1,\ 2,\ -4),\ c \in \mathbb{R}\}$ не является линейным подпространством в $\mathbb{R}^3$;
$U_3 = \{\mathbf{0}\}$ – линейное подпространство в $\mathbb{R}^3$, $\dim U_3 = 0$, базиса нет;
$U_4 = \{c_1(-2,\ 0,\ 3) + c_2(-1,\ 3,\ 0),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ – линейное подпространство в $\mathbb{R}^3$, $\dim U_4 = 2$, базис: $(-2,\ 0,\ 3)$, $(-1,\ 3,\ 0)$.

Подсказки к задаче 18. Поиск множеств U_3, U_4 сводится к решению однородных СЛАУ:

$$U_3 = \{u \in \mathbb{R}^3 :\ \mathbb{A}(u) = u\} = \{X \in \mathbb{R}^3 :\ AX = X\} = \{X \in \mathbb{R}^3 :\ (A - I)X = \mathbf{0}\};$$

$$U_4 = \{u \in \mathbb{R}^3 :\ \mathbb{A}(u) = -3u\} = \{X \in \mathbb{R}^3 :\ AX = -3X\} = \{X \in \mathbb{R}^3 :\ (A + 3I)X = \mathbf{0}\};$$

Проверить, является ли данное множество U линейным подпространством в $\mathbb{R}^3$, можно двумя способами.

Первый способ – непосредственно по определению линейного подпространства: линейным пространством (а также подпространством) называется непустое множество U, в котором можно складывать векторы и умножать векторы на число, не выходя за пределы этого множества, т.е.

$$u, v \in U \quad \Rightarrow \quad u + v \in U,$$
$$u \in U, \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha u \in U.$$

Множества U_1, U_2 не удовлетворяет этому определению, множества U_0, U_3 и U_4 удовлетворяют.

Второй способ: множество U является линейным пространством (подпространством), если оно может быть выражено в виде линейной оболочки некоторой системы векторов (см. параграф 2). На примере множеств U_0, U_3 и U_4:

$U_0 = \mathrm{Lin}\{(1,\ 2,\ -4)\}$;

$U_3 = \mathrm{Lin}\{\mathbf{0}\}$;

$U_4 = \mathrm{Lin}\{(-2,\ 0,\ 3),\ (-1,\ 3,\ 0)\}$.

4. Собственные числа и векторы линейного оператора

Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – линейный оператор с матрицей A в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^n$. В этом случае можно считать, что понятия собственного числа, собственного вектора, собственного подпространства и характеристического многочлена для линейного оператора $\mathbb{A}$ и для матрицы A совпадают.

Число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется собственным числом оператора $\mathbb{A}$ (матрицы A), если уравнение

$$\mathbb{A}(u) = \lambda u \ \ (AX = \lambda X)$$

имеет <u>не только нулевое</u> решение. <u>Ненулевые</u> решения называются собственными векторами оператора $\mathbb{A}$ (матрицы A), соответствующими собственному числу λ.

Одному и тому же собственному числу λ соответствует бесконечное множество собственных векторов. Если дополнить это множество нулевым вектором, то получим собственное подпространство $V_\lambda \subset \mathbb{R}^n$.

Методы вычисления:

1. Собственные числа – вещественные корни характеристического многочлена

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I|.$$

   Кратность собственного числа λ – его кратность как корня $P_A(\lambda)$, обозначим $\sigma(\lambda)$.

2. Для каждого собственного числа λ собственное подпространство V_λ – это множество всех решений $X \in \mathbb{R}^n$ однородной СЛАУ

$$(A - \lambda I)X = \mathbf{0}.$$

   Собственные векторы – ненулевые решения этой СЛАУ.

Про устройство собственных подпространств известно, что

- собственные векторы, взятые из различных собственных подпространств, линейно независимы;
- $1 \leqslant \mathrm{dim} V_\lambda \leqslant \sigma(\lambda)$, размерность собственного подпространства V_λ показывает, сколько линейно независимых собственных векторов можно из него выбрать.

Оператор $\mathbb{A}$ имеет диагональную матрицу в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда этот базис состоит из собственных векторов оператора $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{A}(e_i) = \lambda_i e_i.$$

При этом диагональная матрица оператора состоит из собственных чисел λ_i, записанных в том же порядке, что и собственные векторы в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Из собственных векторов оператора $\mathbb{A}$ можно выбрать базис в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

(i) все корни характеристического многочлена вещественные (нет комплексных корней), т.е. имеется всего n собственных чисел, если считать каждое собственное число λ столько раз, какова его кратность $\sigma(\lambda)$;

(ii) для каждого собственного числа λ размерность собственного подпространства V_λ максимально возможная, т.е. $\dim V_\lambda = \sigma(\lambda)$.

Если хотя бы одно из условий (i), (ii) не выполнено, то линейно независимых собственных векторов недостаточно для выбора базиса в $\mathbb{R}^n$ и оператор $\mathbb{A}$ не имеет диагональной матрицы ни в одном из базисов $\mathbb{R}^n$.

Заметим, что если $\sigma(\lambda) = 1$, то условие (ii) обязательно выполнено. Оно может не выполняться только при $\sigma(\lambda) > 1$.

Задача 19. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора $\mathbb{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, если его матрица в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^4$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Найдем собственные числа оператора $\mathbb{A}$ ($=$ матрицы A).

Составим, вычислим, разложим на множители характеристический многочлен и найдем его вещественные корни:

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2)^3.$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda = -2 \text{ – собственное число кратности 1,} \\ \lambda = 2 \text{ – собственное число кратности 3.} \end{array}$$

<u>Найдем собственные векторы оператора $\mathbb{A}$ (= матрицы A).</u>

Для каждого собственного числа найдем ненулевые столбцы $X \in \mathbb{R}^4$, удовлетворяющие однородной СЛАУ $(A - \lambda I)X = \mathbf{0}$.

1) Для собственного числа $\lambda = -2$. Решим $(A + 2I)X = \mathbf{0}$ методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ранг матрицы $r = 3$ (такой же ранг расширенной матрицы), количество неизвестных $n = 4$ – значит, однородная СЛАУ имеет бесконечно много решений, образующих линейное подпространство размерности 1 (собственное подпространство).

Все ненулевые векторы из этого подпространства являются собственными векторами, соответствующими собственному числу $\lambda = -2$:

$$\begin{array}{l} x_4 := c \\ x_3 = c \\ x_2 = c \\ x_1 = -c \end{array} \quad \Rightarrow \quad X = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{R},\ c \neq 0.$$

2) Для собственного числа $\lambda = 2$. Решим $(A - 2I)X = \mathbf{0}$ методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ранг матрицы $r = 1$ (такой же ранг расширенной матрицы), количество неизвестных $n = 4$ – значит, однородная СЛАУ имеет бесконечно много решений, образующих линейное подпространство размерности 3 (собственное подпространство).

Все ненулевые векторы из этого подпространства являются собственными векторами, соответствующими собственному числу $\lambda = 2$:

$$\begin{array}{l} x_1 := c_1 \\ x_2 := c_2 \\ x_3 := c_3 \\ x_4 = c_1 - c_2 - c_3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{c} c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \neq 0 \end{array}.$$

Замечание 6. Условие $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \neq 0$ означает, что произвольные постоянные c_1, c_2, c_3 не обращаются одновременно в ноль. Это условие необходимо, чтобы исключить из собственных векторов нулевой вектор X.

Задача 20. Каждая из следующих матриц задает линейный оператор $\mathbb{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$:

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Для каждого оператора $\mathbb{A}$ выяснить, существует ли базис в пространстве $\mathbb{R}^3$, в котором оператор имеет диагональную матрицу. Если да, то указать этот базис и эту диагональную матрицу.

Решение.

Оператор $\mathbb{A}$ имеет диагональную матрицу в некотором базисе пространства $\mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда этот базис состоит из собственных векторов оператора $\mathbb{A}$. Надо выяснить, достаточно ли у оператора $\mathbb{A}$ линейно независимых собственных векторов для выбора базиса в $\mathbb{R}^3$. Будем проверять условия (i), (ii) (см. начало параграфа).

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Составим, вычислим и разложим на множители характеристический многочлен:

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 3)(\lambda - 5)^2.$$

Найдем корни характеристического многочлена и собственные числа оператора $\mathbb{A}$ (=матрицы A):

$$\lambda = 3 \text{ – собственное число кратности } 1,$$
$$\lambda = 5 \text{ – собственное число кратности } 2.$$

Все корни характеристического многочлена вещественны – условие (i) выполнено.

Для каждого собственного числа λ найдем собственное подпространство V_λ как множество всех решений однородной СЛАУ $(A - \lambda I)X = \mathbf{0}$, $X \in \mathbb{R}^3$.

1) Для собственного числа $\lambda = 3$ решим $(A - 3I)X = \mathbf{0}$ методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad X = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{R}.$$

Запишем соответствующее собственное подпространство:

$$V_{\lambda=3} = \mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \dim V_{\lambda=3} = 1.$$

Условие (ii) для этого собственного подпространства выполнено.

2) Для собственного числа $\lambda = 5$ решим $(A - 5I)X = \mathbf{0}$ методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow X = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Запишем соответствующее собственное подпространство:

$$V_{\lambda=5} = \mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \dim V_{\lambda=5} = 2.$$

Условие (ii) для этого собственного подпространства выполнено.

Таким образом, выполнены оба условия (i), (ii). Значит, из собственных векторов оператора $\mathbb{A}$ можно выбрать базис пространства $\mathbb{R}^3$. Для этого достаточно из одномерного подпространства $V_{\lambda=3}$ взять один собственный вектор, из двумерного подпространства $V_{\lambda=5}$ взять два линейно независимых собственных вектора:

$$e_1 = (1,\ 1,\ 1), \quad e_2 = (1,\ 0,\ 0), \quad e_3 = (0,\ -1,\ 1).$$

В этом базисе линейный оператор $\mathbb{A}$ имеет диагональную матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Составим, вычислим и разложим на множители характеристический многочлен:

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda^2+1).$$

Найдем корни характеристического многочлена и собственные числа оператора $\mathbb{A}$ (=матрицы A):

$\lambda = -1$ – собственное число кратности 1,
$\lambda = \pm i$ – комплексные корни.

Не все корни характеристического многочлена вещественны – условие (i) не выполнено. Значит, из собственных векторов оператора $\mathbb{A}$ нельзя выбрать базис пространства $\mathbb{R}^3$, матрица оператора $\mathbb{A}$ не является диагональной ни в одном базисе $\mathbb{R}^3$.

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Составим, вычислим и разложим на множители характеристический многочлен:

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

Найдем корни характеристического многочлена и собственные числа оператора $\mathbb{A}$ (=матрицы A):

$\lambda = 1$ – собственное число кратности 2,
$\lambda = -2$ – собственное число кратности 1.

Все корни характеристического многочлена вещественны – условие (i) выполнено.

Для каждого собственного числа λ найдем собственное подпространство V_λ как множество всех решений однородной СЛАУ $(A - \lambda I)X = \mathbf{0}$, $X \in \mathbb{R}^3$.

Для собственного числа $\lambda = 1$ решим $(A - I)X = \mathbf{0}$ методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad X = c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{R}.$$

Запишем соответствующее собственное подпространство:

$$V_{\lambda=1} = \mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathrm{dim} V_{\lambda=1} = 1.$$

Условие (ii) для собственного подпространства $V_{\lambda=1}$ не выполнено.

В таком случае собственное подпространство $V_{\lambda=-2}$ можно уже не искать.

Из собственных векторов оператора $\mathbb{A}$ нельзя выбрать базис пространства $\mathbb{R}^3$, матрица оператора $\mathbb{A}$ не является диагональной ни в одном базисе $\mathbb{R}^3$.

Задача 21. Линейный оператор $\mathbb{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ имеет следующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Найти

a) все векторы пространства $\mathbb{R}^3$, которые под действием оператора $\mathbb{A}$ не меняются;

b) все векторы пространства $\mathbb{R}^3$, которые под действием оператора $\mathbb{A}$ сохраняют направление, но растягиваются в 5 раз.

Решение. Каждый из вопросов задачи равносилен поиску всех столбцов (или ненулевых столбцов) $X \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих равенству $AX = \lambda X$ с конкретным значением λ:

(a) все векторы, которые под действием оператора $\mathbb{A}$ не меняются:

$$\mathbb{A}(u) = u \quad \Leftrightarrow \quad AX = X;$$

(b) все векторы, которые под действием оператора $\mathbb{A}$ сохраняют направление, но растягиваются в 5 раз:

$$\mathbb{A}(u) = 5u,\ u \neq \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad AX = 5X,\ X \neq \mathbf{0}.$$

Замечание 7. Поясним, почему в пункте (b) исключили нулевой вектор. Нулевой вектор имеет нулевую длину и произвольное направление. Под действием любого линейного оператора нулевой вектор остается нулевым, а значит, у него по-прежнему произвольное направление (можно, в частности, сказать, что он сохранил направление или что он поменял направление на противоположное) и по-прежнему нулевая длина. Таким образом, в пункте (b) нулевой вектор исключен, так как он под действием оператора не растягивается в 5 раз (его длина не увеличивается в 5 раз).

Равенства (a), (b) сводятся к однородным СЛАУ, решив которые, получим ответы.

Однако ответы можно получить и при помощи анализа собственных чисел и собственных подпространств матрицы A:

- Если λ является собственным числом матрицы A, то множество всех столбцов X, удовлетворяющих равенству $AX = \lambda X$, – это собственное подпространство V_λ; множество всех ненулевых столбцов, удовлетворяющих равенству $AX = \lambda X$, – это множество собственных векторов, т.е. собственное подпространство V_λ без нулевого вектора;

- Если λ не является собственным числом матрицы A, то равенству $AX = \lambda X$ удовлетворяет только нулевой столбец.

Заметим, что собственные числа и собственные подпространства той матрицы A, которая дана в условии этой задачи, уже найдены в задаче 20, пункт 1.

(a) Поскольку $\lambda = 1$ не является собственным числом данной матрицы A, то $\mathbf{0}$ – это единственный вектор, который под действием оператора $\mathbb{A}$ не меняется.

(b) Поскольку $\lambda = 5$ является собственным числом данной матрицы A, то векторы, которые под действием оператора $\mathbb{A}$ сохраняют направление и растягиваются в 5 раз, – это векторы $X \in V_{\lambda=5}$, кроме нулевого вектора. Они задаются формулой

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \ c_1^2 + c_2^2 \neq 0.$$

Проверим, что это действительно так:

$$AX = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 5X.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 22. Линейный оператор $\mathbb{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 8 & 2 & 6 \\ 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Определить, является ли оператор $\mathbb{A}$ сюръекцией, инъекцией, биекцией и является ли обратимым.

b) Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbb{A}$ (матрицы A). Сделать проверку по определению собственных чисел и собственных векторов.

c) Выяснить, существует ли в пространстве $\mathbb{R}^3$ базис, в котором оператор имеет диагональную матрицу. Если да, то указать этот базис и эту диагональную матрицу. Если нет, то объяснить причину.

d) Найти все векторы пространства $\mathbb{R}^3$, которые под действием оператора $\mathbb{A}$ обращаются в нулевой вектор.

e) Найти все векторы пространства $\mathbb{R}^3$, которые под действием оператора $\mathbb{A}$ сохраняют направление, но растягиваются в 2 раза.

Задача 23. Для линейного оператора $\mathbb{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ известны образы стандартного базиса:

$$\begin{aligned}
&(1,\ 0,\ 0,\ 0) \to (1,\ -1,\ 2,\ 0),\\
&(0,\ 1,\ 0,\ 0) \to (-2,\ 0,\ -2,\ 0),\\
&(0,\ 0,\ 1,\ 0) \to (-1,\ 0,\ -1,\ -1),\\
&(0,\ 0,\ 0,\ 1) \to (-2,\ 1,\ -2,\ -1).
\end{aligned}$$

a) Составить матрицу A линейного оператора $\mathbb{A}$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^4$.

b) Определить, является ли оператор $\mathbb{A}$ сюръекцией, инъекцией, биекцией и является ли обратимым.

c) Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbb{A}$ (матрицы A). Сделать проверку по определению собственных чисел и собственных векторов.

d) Выяснить, существует ли в пространстве $\mathbb{R}^4$ базис, в котором оператор имеет диагональную матрицу. Если да, то указать этот базис и эту диагональную матрицу. Если нет, то объяснить причину.

e) Найти все векторы пространства $\mathbb{R}^4$, которые под действием оператора $\mathbb{A}$ сохраняют направление, но меняют направление на противоположное.

Ответ к задачам для самостоятельного решения

Задача 22.

a) Оператор $\mathbb{A}$ не является сюръекцией, инъекцией, биекцией, не обратим.

b) Три различных собственных числа λ, каждому соответствует множество собственных векторов X:

$$\lambda = 4 \quad \Rightarrow \quad X = c\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{R},\ c \neq 0.$$

$$\lambda = 3 \quad \Rightarrow \quad X = c\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{R},\ c \neq 0.$$

$$\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad X = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{R},\ c \neq 0.$$

c) Оператор $\mathbb{A}$ имеет диагональную матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в следующем базисе пространства $\mathbb{R}^3$, составленном из собственных векторов:

$$e_1 = (0,\ 3,\ 1), \quad e_2 = (-1,\ -2,\ 1), \quad e_3 = (-1,\ 1,\ 1).$$

d) Все векторы собственного подпространства $V_{\lambda=0}$:

$$c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{R}$$

e) Таких векторов нет.

Задача 23.

a) Матрица линейного оператора $\mathbb{A}$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Оператор $\mathbb{A}$ является сюръекцией, инъекцией, биекцией и обратим.

c) Два различных собственных числа λ, каждому соответствует множество собственных векторов X:

$$\lambda = -1 \quad \Rightarrow \quad X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ c_1^2 + c_2^2 \neq 0.$$

$$\lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad X = c \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{R},\ c \neq 0.$$

d) В пространстве $\mathbb{R}^4$ нет базиса, в котором оператор $\mathbb{A}$ имел бы диагональную матрицу, так как кратность собственного числа $\lambda = -1$ равна 3, а $\dim V_{\lambda=-1} = 2 < 3$.

e) Все векторы собственного подпространства $V_{\lambda=-1}$:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Подсказка задачам 22, 23. Основной пункт этих задач – тот, в котором надо найти собственные числа и собственные векторы. Ответы во всех остальных пунктах задач вытекают из этого. В том числе свойства оператора: сюръективность, инъективность, биективность, обратимость.

Заметим, что линейный оператор $\mathbb{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет квадратную матрицу. Отсюда следует, что если он не обратим (не биекция), то он не может быть также ни сюръекцией, ни инъекцией. Критерием обратимости является нулевое собственное число: линейный оператор $\mathbb{A}$ обратим тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$ не является его собственным числом. Таким образом, если $\lambda = 0$ не является собственным числом оператора $\mathbb{A}$, то он обратим (биекция, сюръекция, инъекция), а если $\lambda = 0$ является собственным числом оператора $\mathbb{A}$, то он не обратим (не биекция, причем и не сюъекция, и не инъекция).