Potencia de punto y eje radical

Adonay Rafaelano

September 2024

1 Definiciones

1. Se define la potencia del punto P respecto a una circunferencia Γ como $PA \cdot PB$, donde A y B son puntos en Γ tal que P, A y B son colineales.

2. Se define como el eje radical entre las circunferencias Γ_1 y Γ_2 al sector geometrico que cumple que cada punto tiene igual potencia de punto hacia Γ_1 que hacia Γ_2 y viceversa.

2 Propiedades

1. Para un punto P y una circunferencia Γ de centro O y radio r, la potencia de punto de P respecto a Γ es constante, y es $|PO^2 - r^2|$.

2. Si l es una recta tangente a Γ en A, entonces, para todo punto $P \in l$ se tiene que la potencia de punto de P respecto a Γ es PA^2.

3. ABCD es un cuadrilátero ciclico sí, y solo si, $PA \cdot PC = PB \cdot PD$, siendo P la interseccion de AC y BD.

4. El eje radical de dos circunferencias es una recta perpendicular a la recta que pasa por ambos centros. Si las rectas se intersectan en dos puntos entonces el eje radical es la recta que une esos dos puntos de intersección; si las circunstancias son tangentes, entonces es la recta tangente a ambas por ese punto de tangencia.

5. Los tres ejes radicales que podemos formar con tres circunstancias siempre concurren.

6. El eje radical biseca la tangente común.

3 Problemas

1. Demuestre el teorema de Pitágoras usando potencia de punto.

2. $DB = 8$ Es una cuerda de un círculo de centro O y E un punto en ella tal que $DE = 3$. Sea C la intersección del rayo OE con la circunferencia y supongamos que $EC = 1$. Encuentre el radio de, círculo.

3. Sean AB y CD dos cuerdas de las circunferencias S_1 y S_2 que se cortan en X e Y. Si los puntos A, B, C y D son concíclicos, entonces las rectas AB y CD se cortan sobre XY.

4. Sea H el ortocentro de un triángulo acutángulo ABC. La circunferencia de centro en el punto medio de BC que pasa por H corta a BC en A_1 y A_2. Análogamente se definen los puntos B_1, B_2 en CA, y C_1, C_2 en AB. Demuestre que los puntos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 y C_2 son concíclicos.

5. Sea P un punto al interior del triángulo ABC, con $CA \neq CB$. Las rectas AP, BP y CP cortan al circuncírculo de ABC en K, L y M respectivamente. La tangente por C al circuncírculo de ABC corta AB en S. Pruebe que si $SC = SP$, entonces $MK = ML$.

6. Dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 se cortan en A y B. Se traza Γ_3, una circunferencia tangente internamente a Γ_1 y Γ_2 en E y D respectivamente. Sea C uno de los puntos de corte de la recta AB con Γ_3, F y G son las intersecciones de CE con Γ_1 y de CD con Γ_2. Si H e I son los puntos de intersección de DE con Γ_1 y Γ_2, demuestre que los puntos F, G, I, H están sobre una misma circunferencias.