چهارمین دوره المپیاد ترکیبیات ایران

سطوح پیشرفته و آزاد
آبان ماه ۱۴۰۳

مسئله‌ی ۱.

۱۰۰ جعبه داریم که در آن‌ها به ترتیب ۱, ۲, . . . , ۱۰۰ سکه قرار دارند. جوزف جعبه ها را به ترتیب دلخواه در یک ستون روی هم چیده است. مرتضی طی ۱۰ مرحله سکه‌های بعضی از جعبه‌ها را جمع‌آوری می‌کند، به این ترتیب که در هر مرحله ۱۰ جعبه‌ی جدید بالای ستون را از روی بقیه برمی‌دارد، آن‌ها را باز می‌کند، و سپس همه سکه‌های موجود در یکی از جعبه‌هایی که تا الان باز شده (شامل جعبه‌های جدید و جعبه‌هایی که قبلاً باز شده) را جمع می‌کند. بیشترین تعداد سکه که مرتضی همواره می‌تواند جمع کند چندتاست؟

مسئله‌ی ۲.

۶ نقطه در صفحه داده شده است که هیچ سه‌تایی از آن‌ها هم‌خط نیستند. حداکثر به چند طریق می‌توان این ۶ نقطه را به دو دسته‌ی سه‌تایی تقسیم کرد به طوری که اضلاع مثلث متشکل از نقاط هر دسته، اضلاع مثلث متشکل از نقاط دسته‌ی دیگر را قطع نکند؟ دقت کنید که یک مثلث می‌تواند به طور کامل درون دیگری قرار بگیرد بدون این که اضلاع آن را قطع کند.

مسئله‌ی ۳.

به چند طریق می‌توان در هر خانه از یک جدول ۸ × ۸ یکی از عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ را قرار داد به طوری که

- اعداد هر سطر از چپ به راست به صورت صعودی باشند؛
- اعداد هر ستون از بالا به پایین به صورت صعودی باشند؛
- هیچ مستطیل ۲ × ۱ (افقی یا عمودی) وجود نداشته باشد به طوری که در یک خانه از آن عدد ۲ و در خانه‌ی دیگر عدد ۳ قرار داشته باشد؟

مسئله‌ی ۴.

مرتضی و متین با هم بازی می‌کنند. در ابتدا گرافی تهی و ۱۰۰ رأسی داریم. هر مرحله متین یک رأس (که حداقل یک یال آن رسم نشده) انتخاب می‌کند و مرتضی یک یال رسم نشده از آن رأس انتخاب کرده و رسم می‌کند. به محض این که گراف دارای دوری به طول زوج شود، بازی تمام می‌شود. متین می‌خواهد تعداد یال‌های گراف نهایی بیشینه شود و مرتضی می‌خواهد این مقدار کمینه شود. اگر هر دو نفر به شکل بهینه بازی کنند، گراف نهایی چند یال دارد؟

مسئله‌ی ۵.

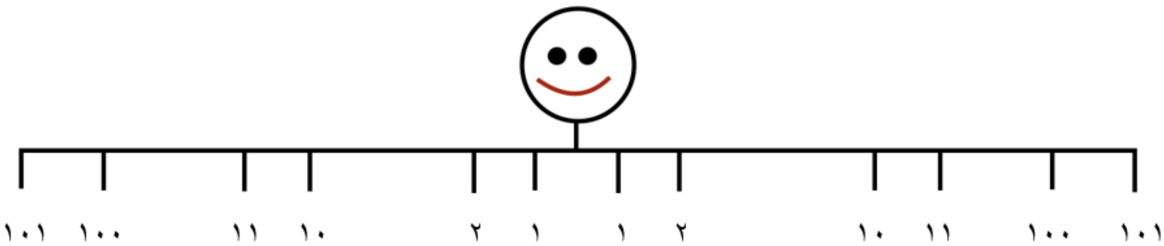
یک رنگ‌آمیزی از یک جدول $n \times n$ را «زیبا» می‌نامیم اگر

- هر خانه از جدول با یکی از دو رنگ قرمز یا آبی رنگ شده باشد؛
- و هر خانه از جدول (چه قرمز و چه آبی) دقیقاً با یک خانه قرمز مجاور قطری باشد.

دو خانه از یک جدول را مجاور قطری می‌گوییم، اگر دقیقاً یک رأس مشترک داشته باشند. برای مثال، هر یک از چهار گوشه‌ی جدول دقیقاً با یک خانه مجاور قطری است. یک جدول ۷×۷ چند رنگ‌آمیزی زیبا دارد؟

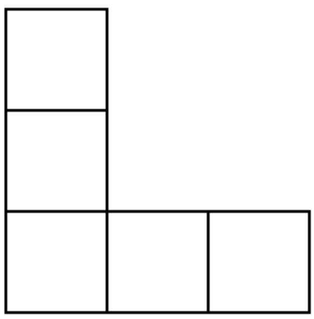
مسئله‌ی ۶.

عنکبوتی به شکل زیر ۱۲ پا در یک محور دارد. فواصل پاها از سر عنکبوت نوشته شده است. عنکبوت به هنگام خوابیدن روی تارش، می‌تواند تعدادی از پاهایش را روی تارها بگذارد و تعدادی را برای استراحت، بالا نگه دارد. او به شرطی تعادل خواهد داشت که اولا حداقل یک پایش روی تار باشد و ثانیا مرکز ثقل پاهای روی تار صفر باشد. مرکز ثقل پاها زمانی صفر است که مجموع فاصله‌ی پاهایی که در سمت راست سر عنکبوت قرار دارند و روی تار هستند برابر باشد با مجموع فاصله‌ی پاهایی که در سمت چپ سر عنکبوت قرار دارند و روی تار هستند. عنکبوت به چند طریق می‌تواند به صورت متعادل روی تارش بخوابد؟



مسئله‌ی ۷.

همه‌ی خانه‌های یک جدول $n \times n$ در ابتدا به رنگ سفید هستند. هر بار می‌توانیم ۵ خانه به شکل زیر (یا دوران‌های آن) انتخاب کنیم و این ۵ خانه را تغییر رنگ دهیم (از سفید به سیاه و برعکس). با تکرار این عمل حداکثر چند خانه از جدول ۷×۷ را می‌توانیم به رنگ سیاه درآوریم؟



مسئله‌ی ۸.

در یک دنباله‌ی $S =< a_1, \ldots, a_n >$ از اعداد، تعداد نابجایی‌ها برابر است با تعداد جفت اعداد a_i و a_j به طوری که $1 \leqslant i < j \leqslant n$ و $a_i > a_j$. فرض کنید $Z =< a_1, \ldots, a_{20} >$ یک دنباله از اعداد باشد به طوری که $a_1, \ldots, a_{10}$ یک جایگشت از اعداد $\{1, \ldots, 10\}$ باشد و برای هر $1 \leqslant i \leqslant 10$ داشته باشیم $a_{10+i} = 11 - a_i$. اگر A کمترین تعداد نابجایی ممکن و B بیشترین تعداد نابجایی ممکن برای Z باشد، مقدار $A + B$ را بیابید.

مسئله‌ی ۹.

عمل xor بر روی دو عدد صحیح و نامنفی x و y به این صورت تعریف می‌شود:

- فرض کنید $(\overline{x_1, x_2, \ldots, x_k})_2$ و $(\overline{y_1, y_2, \ldots, y_t})_2$ به ترتیب نمایش اعداد x و y در مبنای ۲ باشند.
- فرض کنید $t \leqslant k$. تعریف می‌کنیم $y_{t+1} = \ldots = y_k = 0$.
- اگر $(\overline{z_1, z_2, \ldots, z_k})_2$ مقدار xor دو عدد x و y در مبنای ۲ باشد، داریم $z_i = 0$ اگر و تنها اگر $x_i = y_i$.

برای مثال اگر $x = 49 = (110001)_2$ و $y = 101 = (1100101)_2$ باشد، مقدار xor این دو عدد برابر است با $z = (1010100)_2 = 84$.

رستم می‌خواهد دنباله اعداد $a_1, \ldots, a_{2025}$ را انتخاب کند و آن‌ها را به همین ترتیب دور یک دایره قرار دهد به طوری که برای هر $1 \leqslant i \leqslant 2025$ داشته باشیم $0 \leqslant a_i \leqslant 1023$ و مقدار هر عدد برابر xor دو عدد کناری‌اش روی دایره باشد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد؟

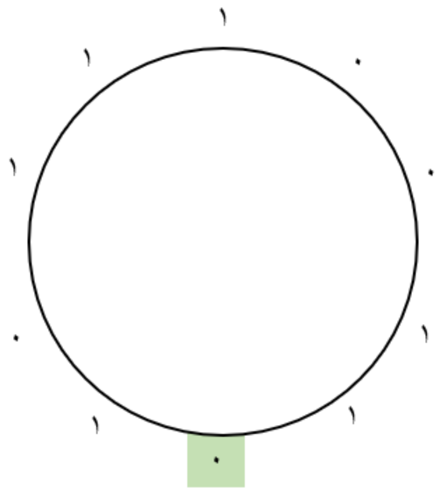
مسئله‌ی ۱۰.

بهمن یک جدول 8×8 دارد. او ابتدا خانه‌های آن را با اعداد ۱ تا ۴ پر می‌کند. سپس دو عدد صحیح a و b را انتخاب می‌کند به طوری که $1 \leqslant a < b \leqslant 4$ و تمام خانه‌هایی از جدول را که یکی از این دو عدد را دارند، رنگ می‌کند. اگر تعداد سطرهای تمام رنگی جدول t باشد، ارزش جدول $t \times 64$ تعریف می‌شود. برای مثال در جدول زیر اگر اعداد ۲ و ۳ انتخاب شوند، ارزش جدول برابر است با $3 \times 64 = 192$. میانگین ارزش جدول‌ها برای تمام روش‌های پر کردن جدول و انتخاب دو عدد a و b را به دست آورید.

۱	۲	۱	۳	۲	۳	۳	۴
۱	۳	۳	۳	۲	۱	۲	۱
۴	۲	۴	۱	۴	۳	۴	۴
۲	۲	۲	۳	۳	۲	۳	۲
۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴
۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲
۳	۲	۳	۳	۳	۲	۳	۲
۳	۴	۴	۲	۲	۱	۱	۱

مسئله‌ی ۱۱.

دور دایره ۱۰ خانه قرار دارد که در هر خانه یکی از دو عدد ۰ و ۱ نوشته شده است. فرایند ساخت رشته از یک خانه دور دایره به این صورت است که در ابتدا رشته‌ی خالی S داریم و روی یک خانه قرار گرفته‌ایم؛ در هر مرحله از روی خانه‌ای که هستیم به یکی از خانه‌های مجاور میرویم و عدد نوشته شده در آن خانه را در سمت راست S می‌نویسیم.
اگر $S = ۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱$ باشد، به چند روش می‌توان خانه‌های دور دایره را مقداردهی کرد به طوری که رشته S با شروع از تمامی خانه‌ها قابل ساختن باشد. برای مثال، ساختن رشته S از خانه‌ی رنگی در دایره‌ی زیر ممکن نیست اما رشته $S' = ۱۰۱۰۱۰۱۰$ یک رشته‌ی قابل ساخت از این خانه است. دو مقداردهی متفاوت هستند اگر با چرخش دایره به یکدیگر تبدیل نشوند.



مسئله‌ی ۱۲.

فرض کنید S_n مجموعه‌ی همه‌ی nتایی‌های مرتب از ۰ و ۱ باشد و $A_۱, A_۲, \ldots, A_{۳۲}$ جایگشتی از اعضای $S_۵$ باشد. فرض کنید $f(A_۱) = ۱$ و به ازای $۲ \leqslant i \leqslant ۳۲$، مقدار $f(A_i)$ برابر با کوچک‌ترین عدد طبیعی ممکن باشد به طوری که برای هر $۱ \leqslant j < i$، اگر A_i و A_j دقیقاً در یک مؤلفه اختلاف داشته باشند، آنگاه $f(A_i) \neq f(A_j)$. برای مثال، اگر $A_i = (۰, ۱, ۱, ۰, ۱)$ و $A_j = (۰, ۱, ۰, ۰, ۱)$ باشند، آنگاه A_i و A_j فقط در مؤلفه‌ی سوم اختلاف دارند. فرض کنید $t = max\{f(A_۱), f(A_۲), \ldots, f(A_{۳۲})\}$ باشد. حداکثر مقدار t را، بین همه‌ی جایگشت‌های ممکن از اعضای $S_۵$، تعیین کنید.

یک گراف را «درخت» می‌نامیم اگر همبند باشد و دور نداشته باشد. «قطر» یک درخت برابر است با تعداد یال‌های طولانی‌ترین مسیر درخت. عمل «پیچش» روی یک درخت به این صورت تعریف می‌شود که یک یال از درخت حذف می‌کنیم و یال دیگری بین دو رأس از درخت می‌کشیم تا درخت جدیدی ساخته شود.

مسئله‌ی ۱۳.

از میان تمام درخت‌های ۲۰۲۴ رأسی با قطر ۱۰۰، پس از انجام یک مرحله عمل پیچش، کم‌ترین مقداری را که برای قطر جدید می‌توان به دست آورد چند است؟

مسئله‌ی ۱۴.

از میان تمام درخت‌های ۲۰۲۴ رأسی با قطر ۱۰۰، پس از انجام یک مرحله عمل پیچش، بیشترین مقداری را که برای قطر جدید می‌توان به دست آورد چند است؟

مسئله‌ی ۱۵.

کمترین مقدار k را به دست آورید به طوری که برای هر درخت ۲۰۲۴ رأسی با قطر ۱۰۰، با انجام حداکثر k عمل پیچش بتوان به درختی با قطر کمتر از ۱۰۰ دست یافت.