浙江大学

《量子计算理论基础与软件系统》
实验报告

实验名称：	Lab3 Shor and Grover Algorithm
姓　　名：	王晓宇
学　　号：	3220104364
电子邮箱：	3220104364@zju.edu.cn
联系电话：	19550222634
授课教师：	卢丽强/尹建伟
助　　教：	储天尧

2024 年 11 月 24 日

Lab 3 Shor and Grover Algorithm

Lab 3 Shor and Grover Algorithm

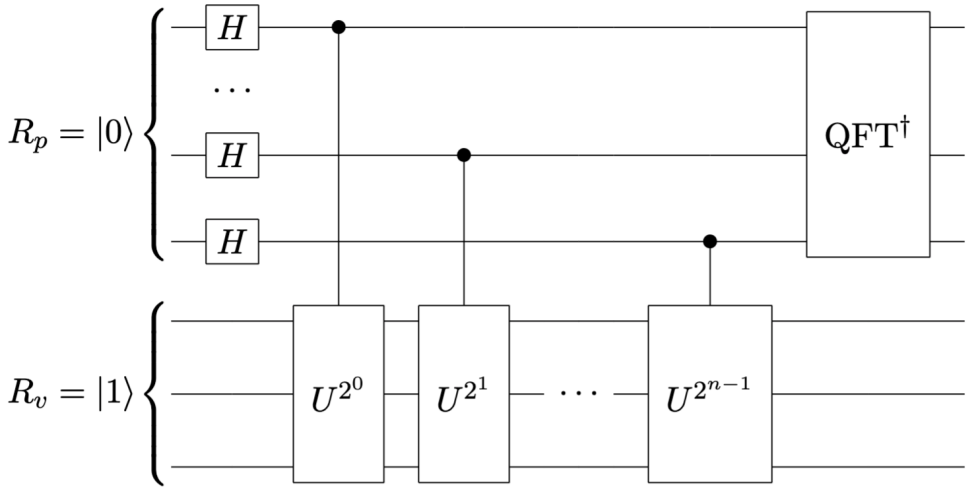
1 实验简介

本次实验中，我们将使用 `qiskit` 框架实现 **Shor** 算法 和 **Grover** 算法，并通过量子电路的模拟运行加深对这两个核心量子算法的理解。

1.1 Shor 算法

Shor 算法是一种用于大整数分解的量子算法，通过量子相位估计算法来找到周期性，从而分解大整数。它是量子计算最具革命性的算法之一，展示了量子计算在解决经典计算难题中的优势。

Shor 算法通过将大整数分解问题转化为计算阶问题，从而实现量子加速。假设 N 是待分解的大整数，$N = pq$，其中 p 和 q 是两个素数。任意选取整数 a，使得 a 和 N 互质，使用量子过程计算 a 的阶 r，使得 $a^r \equiv 1 \mod N$。根据小端规则，基于 `qiskit` 的量子电路实现如下图所示：



其中

$U|u_s\rangle = e^{\frac{2\pi i s}{r}}|u_s\rangle$

$\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{s=0}^{r-1}|u_s\rangle = |1\rangle$

1.2 Grover 算法

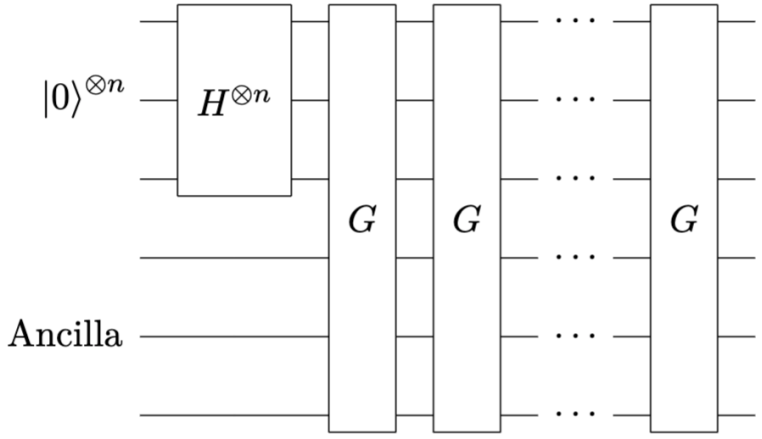
Grover 算法是量子计算中用于搜索未排序数据库的量子算法，其具有平方加速，能够在 $O(\sqrt{N})$ 的时间内找到目标项。

待搜索的数据库由 Oracle 实现：

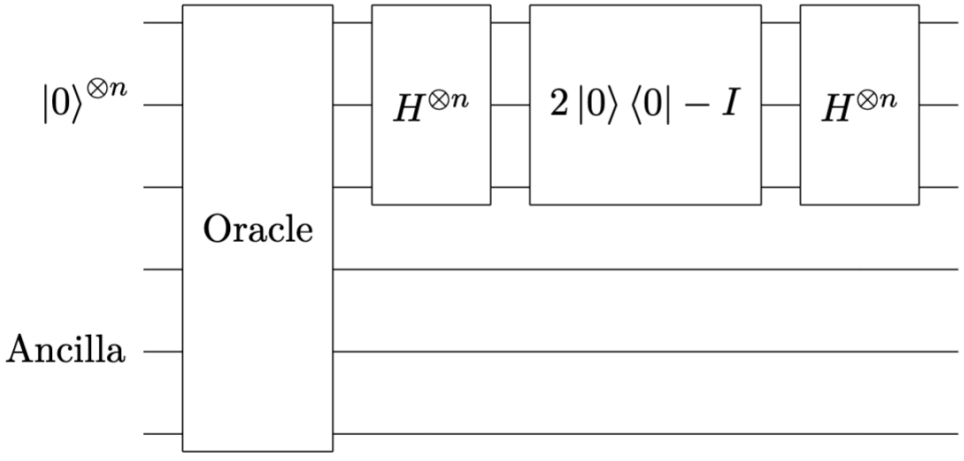
$$\text{Oracle}|x\rangle = (-1)^{f(x)}|x\rangle$$

其中 x 为目标项时 $f(x) = 1$ ，否则 $f(x) = 0$。

Grover 算法通过反复作用 Grover 算子来增加目标项的振幅，从而实现搜索。其量子电路如下图所示：



其中 Grover 算子 G 如下图所示：



其中 Ancilla 为实现 Oracle 可能使用的辅助量子比特。

2 实验要求

1. Shor 算法

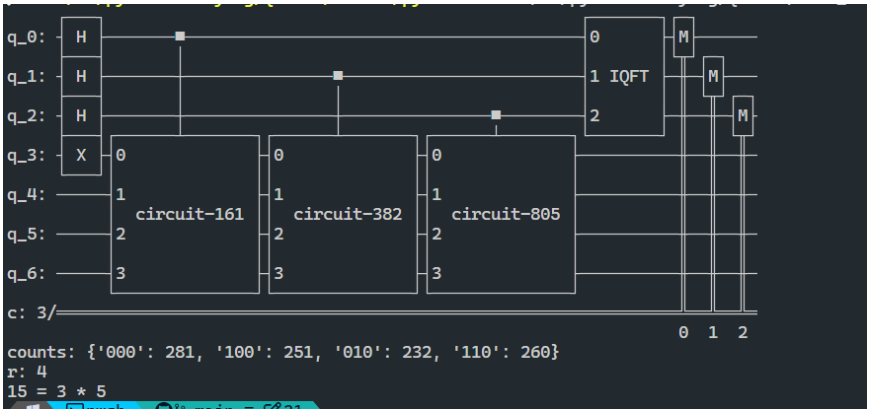
```python
import numpy as np
from qiskit import QuantumCircuit, transpile
from qiskit.circuit.library import UnitaryGate, QFT
from qiskit.providers.basic_provider import BasicSimulator


def shor_circuit(N, a, n_p, n_v):
    qc = QuantumCircuit(n_p + n_v, n_p)

    for q in range(n_p):
        qc.h(q)
    qc.x(n_p)

    for q in range(n_p):
        exponent = 2 ** q
        ctrl_mod = mod_exp_circuit(a, exponent, N,
n_v).to_gate().control(1)
        qc.append(ctrl_mod, [q] + list(range(n_p, n_p + n_v)))

    qc.append(QFT(n_p, inverse=True), range(n_p))

    qc.measure(range(n_p), range(n_p))
    return qc

def mod_exp_circuit(a, power, N, n_v):
    qc = QuantumCircuit(n_v)
    for _ in range(power):
        qc.append(mod_circuit(a, N, n_v), range(n_v))
    return qc

def mod_circuit(a, N, n_v):
    matrix = np.zeros((2 ** n_v, 2 ** n_v), dtype=int)
    for i in range(2 ** n_v):
```

```
        matrix[i][(a * i) % N] = 1
    U, S, V_dagger = np.linalg.svd(matrix)
    matrix = U
    return UnitaryGate(matrix)


N = 15
a = 7
n_p = 3 # number of qubits in period register
n_v = 4 # number of qubits in value register
qc = shor_circuit(N, a, n_p, n_v)
print(qc.draw())

backend = BasicSimulator()
tqc = transpile(qc, backend)
result = backend.run(tqc).result()
counts = result.get_counts()
print("counts:", counts)

r = len(counts)
print(f"r: {r}")

if r % 2 == 0 and pow(a, r // 2, N) != N - 1:
    factor1 = np.gcd(pow(a, r // 2) - 1, N)
    factor2 = np.gcd(pow(a, r // 2) + 1, N)
    print(f"{N} = {factor1} * {factor2}")
else:
    print("Invalid a!")
```

- 以上代码使用 `qiskit` 部分实现了 Shor 算法，请补全 `mod_circuit` 函数中量子门 U 对应的酉矩阵定义，以构造量子门 $U|y\rangle = |ay (\mathrm{mod}\ n)\rangle$。

```python
def mod_circuit(a, N, n_v):
    matrix = np.zeros((2 ** n_v, 2 ** n_v), dtype=int)
    for i in range(2 ** n_v):
        matrix[i][(a * i) % N] = 1
    U, S, V_dagger = np.linalg.svd(matrix)
    matrix = U
    return UnitaryGate(matrix)
```

- 运行补全的代码，取 $a = 7$，分解整数 $N = 15$，观察输出的计数结果，验证分解结果是否正确。



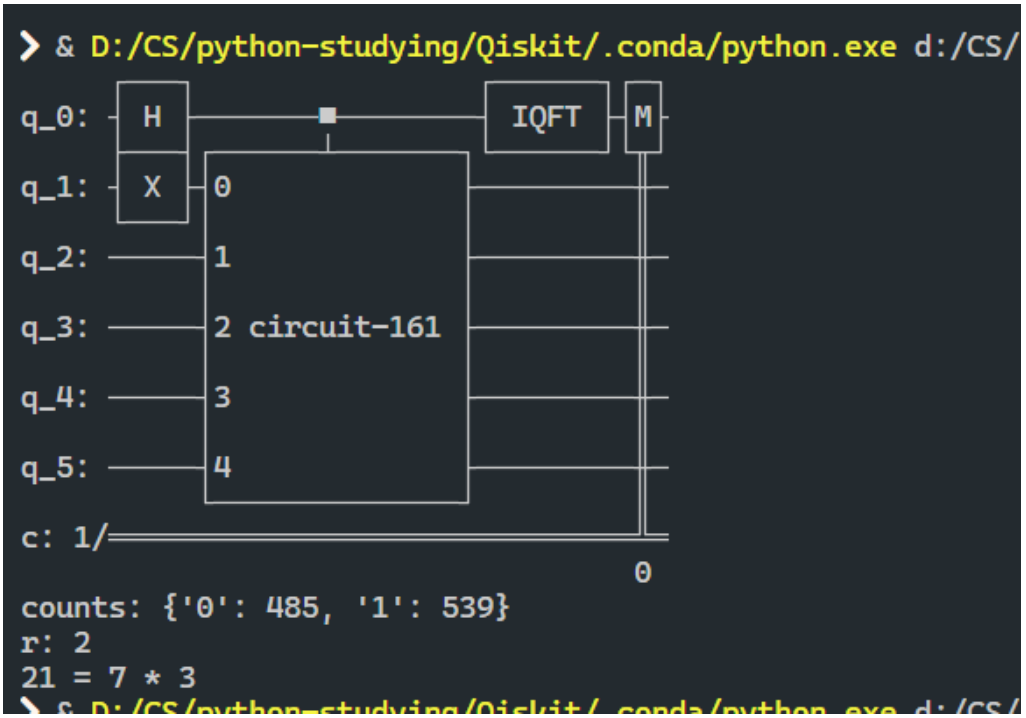
可以看到阶数为4.符合我们用7分解15的阶数，最终得到15=3*5，结果正确。

- 修改代码中的部分参数，选取合适的 a，分解整数 $N = 21$。

  修改参数如下：

```python
N = 21
a = 8
n_p = 1 # number of qubits in period register
n_v = 5 # number of qubits in value register
```

由$8^2 mod 21 = 1$可以知道此时的阶数为2，由此即可算出两个质因数7、3



2. **Grover 算法（选做 Bonus）**

```python
def oracle():
    qc = QuantumCircuit(4)
    qc.cz(0, 3)
    return qc
```

- 以上代码定义了一个四量子比特的 **Oracle** 电路，分析该函数标记的目标态。

  由Z门的酉矩阵：

  $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

  我们可以得知仅将$|1\rangle$的相位翻转，结合受控Z门`qc.cz(0, 3)`我们可以得知，它将$|1xx1\rangle$即：$|1001\rangle$、$|1011\rangle$、$|1101\rangle$、$|1111\rangle$相位翻转(这里用了小端排序，与Qiskit一致)，即标记的目标态$|9\rangle$、$|11\rangle$、$|13\rangle$、$|15\rangle$进行了相位翻转，我们也可以推算出，这个Oracle算子的作用其实是将0-15中筛选出9、11、13、15。

- 根据实验简介中的量子电路图，基于 `qiskit` 实现 **Grover** 算法，完成该 **Oracle** 目标项的搜索。

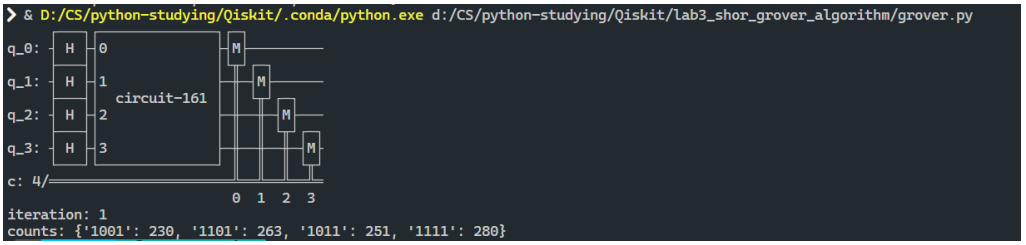
  这里给出代码实现：

```python
import numpy as np
```

```python
from qiskit import QuantumCircuit, transpile
from qiskit.circuit.library import UnitaryGate
from qiskit.providers.basic_provider import BasicSimulator


def grover(n,times):
    qc = QuantumCircuit(n,n)
    qc.h(range(n))

    for _ in range(times):
        qc.append(G(n),range(n))

    qc.measure(range(0,n), range(n))
    return qc

def G(n):
    qc = QuantumCircuit(n)
    qc.append(oracle(),range(n))
    qc.h(range(n))

    qc.append(rotate(n),range(n))

    qc.h(range(n))
    return qc

def rotate(n):
    matrix = np.zeros((2 ** n, 2 ** n), dtype=int)
    for i in range(2**n):
        matrix[i][i] = -1
    matrix[0][0] = 1
    return UnitaryGate(matrix)

def oracle():
    # Q2.2
    qc = QuantumCircuit(4)
    qc.cz(0, 3)
```

```
    return qc

N = 4
times = 1
qc = grover(N,oracle,times)
print(qc.draw())
print("iteration:",times)

backend = BasicSimulator()
tqc = transpile(qc, backend)
result = backend.run(tqc).result()
counts = result.get_counts()
print("counts:", counts)
```

这里设置了迭代次数为1，得到正解$|1001\rangle$、$|1011\rangle$、$|1101\rangle$、$|1111\rangle$，关于迭代次数的选择解释在后文。



我们先逐步解释代码：

先解释主函数`grover`：

`grover`函数接受两个参数：`n`表示量子比特的数量，`times`表示Grover算法的迭代次数。

- 函数首先创建一个包含`n`个量子比特和`n`个经典比特的量子电路`qc`。然后，对所有量子比特应用 Hadamard 门，初始化为叠加态。
- 接下来，函数进入一个循环，迭代`times`次。在每次迭代中，调用辅助函数 `G`，`G`函数生成 Grover 算法的扩散操作。
- 在循环结束后，`grover`函数对前`n`个量子比特进行测量，并将测量结果存储在相应的经典比特中。

接下来是主函数调用的辅助函数：

`oracle` 函数创建一个包含 4 个量子比特的量子电路 `qc`，并在第 0 个和第 3 个量子比特之间添加一个受控 Z 门（CZ 门）。

- 我们探讨过这里的作用是标记了$|1001\rangle$、$|1011\rangle$、$|1101\rangle$、$|1111\rangle$四个状态

`G`函数接受一个参数 `n`，表示量子比特的数量。

- 函数首先创建一个包含 `n` 个量子比特的量子电路 `qc`。
- 调用 `oracle` 函数应用 `Oracle` 电路。
- 接着$H^{\otimes}$我们使用了`qc.h(range(n))`对所有量子比特应用 `Hadamard` 门。
- 调用`rotate` 函数生成$2|0\rangle\langle 0| - I$酉矩阵后直接应用。
- 再次对所有量子比特应用 `Hadamard` 门。

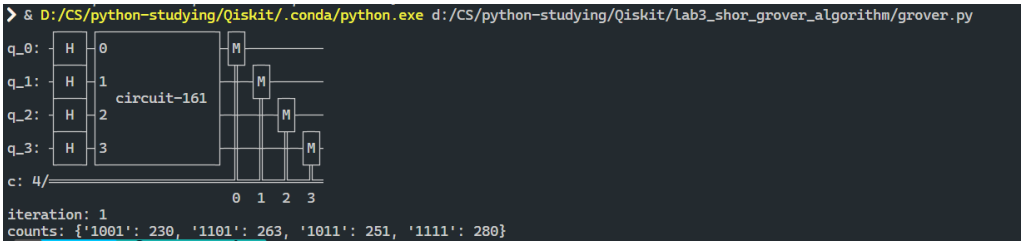
`rotate` 函数接受一个参数 `n`，表示量子比特的数量。

- 函数首先创建一个大小为 2^n x 2^n 的零矩阵`matrix`。
- 因为这里的酉矩阵比较简单，直接对矩阵进行填充即可。将矩阵的对角线元素设置为 `-1`，特别地将第一个元素设置为 `1`。
- 将酉矩阵转换为n比特量子电路后返回。

- 根据 `Oracle` 目标态和待搜索态的数量，选取合适的 `G` 算子迭代次数，观察 `Grover` 算法的搜索结果。

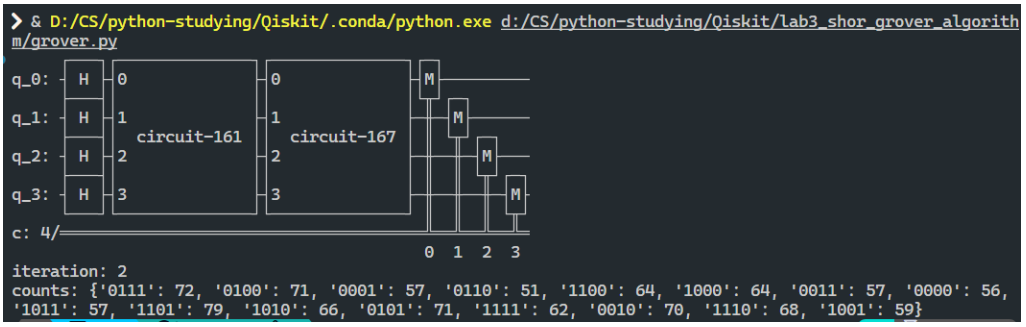
  有$sin\theta = \frac{2\sqrt{M(N-M)}}{N} = \frac{2\times\sqrt{4\times(16-4)}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$我们可以得知$\theta = \frac{\pi}{3}$，每一次应用G算子旋转固定角度即为$\frac{\pi}{3}$，由于初始状态是$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6}$，因此我们的迭代次数只需要一次便可以逼近正解状态$\frac{\pi}{6} + (\frac{\pi}{3} \times n) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow n = 1$

  我们应用**1次**迭代次数：



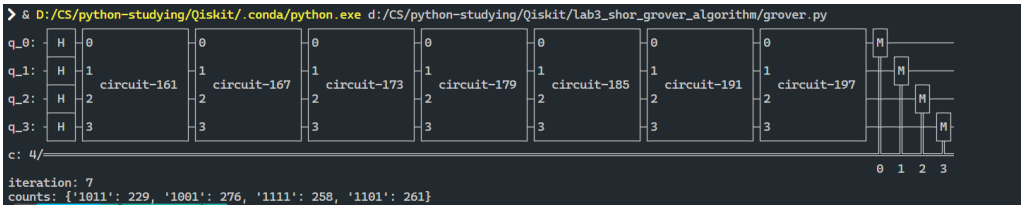
  得到正解$|1001\rangle$、$|1011\rangle$、$|1101\rangle$、$|1111\rangle$

  而进行**2次**迭代后：



可以看到偏离了正解集合$|\beta\rangle$

根据几何关系我们可以计算让其旋转$\frac{\pi}{6}+(\frac{\pi}{3}\times n)=\frac{\pi}{2}+2\pi\Rightarrow n=7$，即7次之后仍然得到正解相位$|1001\rangle$、$|1011\rangle$、$|1101\rangle$、$|1111\rangle$



得到正解$|1001\rangle$、$|1011\rangle$、$|1101\rangle$、$|1111\rangle$

- 修改 `Oracle` 改变目标态的数量，尝试不同的 `G` 算子迭代次数，观察 `Grover` 算法的搜索结果。

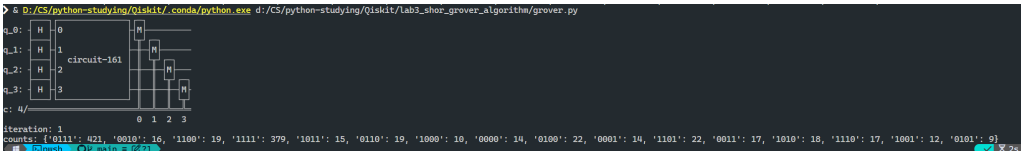
我们修改`Oracle`如下：

```
def oracle():
    qc = QuantumCircuit(4)
    qc.ccz(0,1,2)
    return qc
```

这里应用`ccz`门，即当量子比特`0`，`1`位同时为`1`时，将第`2`位应用`Z`门，这样标记的目标态只有$|0111\rangle$、$|1111\rangle$两个，即正解个数$M=2$，此时所有解个数为$N=2^4=16$,根据`Grover`算法的迭代次数公式

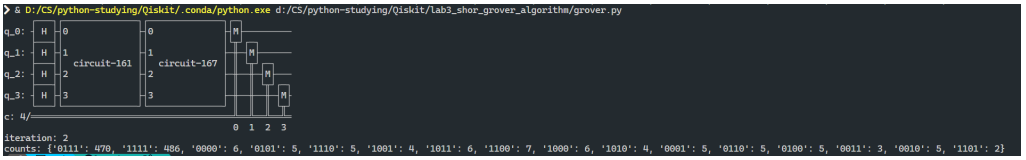
$k\approx\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{N}{M}}-\frac{1}{2}=1.72\approx2$

当迭代次数为`1`时：



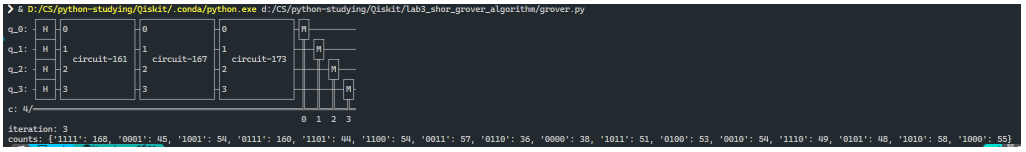
可以看到测量的量子态向正解靠近，$|0111\rangle$、$|1111\rangle$的测量概率显著地排在前两位。

当迭代次数为`2`时：



此时测量结果则更接近正解，错解出现的概率变得很小，1000次测量只有个位数次出现，$|0111\rangle$、$|1111\rangle$比例最大验证了Grover算法的正确性

当迭代次数为3时：



可以看到输出结果又向错解方向靠近，正解的概率有所下降，证明理论的迭代次数$1.72 \approx 2$是正确的