

# 理论作业一 量子比特与量子门

王晓宇 3220104364

2024 年 10 月 16 日

---

1. 已知双量子比特系统的量子态如下  $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & x & 3x & \frac{i}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^4$ ，求该系统处于  $|01\rangle$  态的概率。

由归一化条件可知：

$$\left| \frac{1}{2} \right|^2 + |x|^2 + |3x|^2 + \left| \frac{i}{2\sqrt{2}} \right|^2 = 1$$

$$\therefore |x|^2 = 1/16$$

$$p = \alpha_{01}^2 = |x|^2 = \frac{1}{16}$$

2. 已知单量子比特的态矢量为  $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$ ，求该量子比特的 Bloch 球坐标。

$$|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

$$\therefore \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \theta = \pm 2\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\because 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\therefore \theta = 2\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\because \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0 \text{ and } \alpha_1 \text{ is a real}$$

$$\therefore \phi = 0$$

因此,Bloch 球坐标为:

$$(\theta, \phi) = \left( 2 \arccos\left(\frac{3}{5}\right), 0 \right)$$

**3. Bell 态**指双量子比特系统的四个特殊量子态，他们是双量子比特系统中纠缠度最高的量子态，因此也称为最大纠缠态，在量子隐形传态、量子算法中有着广泛的应用。一般而言，Bell 态定义如下：

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|0y\rangle + (-1)^x |1\bar{y}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad x, y \in \{0, 1\}, \quad \bar{y} = 1 - y \quad (1)$$

a. 证明 Bell 态是纠缠态。

When  $x = 0 \& y = 0$ :

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

假设这个双量子比特系统可以分解成两个单量子比特的张量积：

$$|\beta_{xy}\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\therefore ad = 0 \& bc = 0$$

说明 a 和 c 必有一个为零，b 和 d 必有一个为零，那么 ac 和 bd 必为 0，与得到的 Bell 态不符，所以 Bell 态不可分。

同理可证以下三个 Bell 态也是纠缠态。

When  $x = 0 \& y = 1$ :

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

When  $x = 1 \& y = 0$ :

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

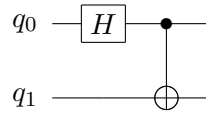
When  $x = 1 \& y = 1$ :

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

b. 用 H、X、Z 和 CNOT 门设计四个量子电路，使得初态为  $|00\rangle$  的双量子比特系统经这些量子电路作用后分别演化为四个 Bell 态。

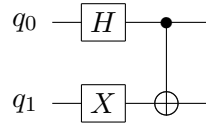
When  $x = 0 \& y = 0$ :

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$



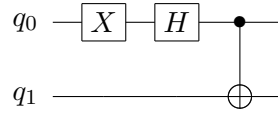
When  $x = 0$  &  $y = 1$ :

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$



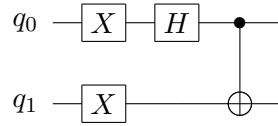
When  $x = 1$  &  $y = 0$ :

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

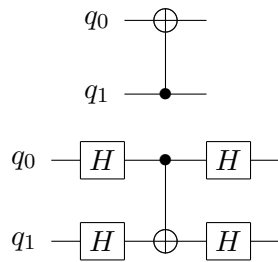


When  $x = 1$  &  $y = 1$ :

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$$



4. 证明下图中的两个量子电路等价。(提示：计算两个量子电路对应的酉矩阵)



Answer: For the first circuit:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

For the second circuit:

$$\begin{aligned}
& (H \otimes H)CNOT(H \otimes H) = \\
& \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) = \\
& \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Since of the two matrices are equal, the two circuits are equivalent.

**5.** 证明厄米算符  $A$  的任一本征值均为实数，且不同本征值对应的本征态正交。

a. 先证明厄米算符  $A$  的任一本征值均为实数:

假设  $A$  是厄米算符，即

$$A = A^\dagger \quad (2)$$

我们任取  $A$  的本征值  $\lambda$ ，有

$$A|\phi\rangle = \lambda|\phi\rangle \quad (3)$$

取共轭转置我们有

$$\langle\phi|A^\dagger = \lambda^*\langle\phi|$$

由 (2) 式我们有

$$\langle\phi|A = \lambda^*\langle\phi|$$

同时右乘  $|\phi\rangle$  得到

$$\langle\phi|A|\phi\rangle = \lambda^*\langle\phi|\phi\rangle \quad (4)$$

由 (3) 式我们代换 (4) 式中的  $A|\phi\rangle$  得到

$$\lambda\langle\phi|\phi\rangle = \lambda^*\langle\phi|\phi\rangle$$

由于  $\langle\phi|\phi\rangle \neq 0$

$$\therefore \lambda = \lambda^*$$

说明本征值为实数

b. 我们接着证明不同本征值对应的本征态正交：

任取  $A$  的两个本征值  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ ，对应的本征态分别为  $|\phi_1\rangle$  和  $|\phi_2\rangle$ ，有

$$A|\phi_1\rangle = \lambda_1|\phi_1\rangle \quad (5)$$

$$A|\phi_2\rangle = \lambda_2|\phi_2\rangle \quad (6)$$

取 (5) 式，左乘  $\langle\phi_2|$ ，(6) 式左乘  $\langle\phi_1|$  得到：

$$\langle\phi_2|A|\phi_1\rangle = \lambda_1\langle\phi_2|\phi_1\rangle \quad (7)$$

$$\langle\phi_1|A|\phi_2\rangle = \lambda_2\langle\phi_1|\phi_2\rangle \quad (8)$$

(7) 式取共轭转置得到：

$$\langle\phi_1|A|\phi_2\rangle = \langle\phi_1|A^\dagger|\phi_2\rangle = \lambda_1^*\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \lambda_1\langle\phi_1|\phi_2\rangle \quad (9)$$

由 (8) 和 (9) 式我们有：

$$\lambda_1\langle\phi_2|\phi_1\rangle = \lambda_2\langle\phi_1|\phi_2\rangle$$

即：

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0$$

$$\because \lambda_1 \neq \lambda_2$$

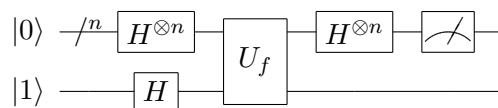
$$\therefore \langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0$$

即不同本征值对应的本征态正交。

**6. Deutsch 算法**展示了量子计算机强大的并行计算能力。Deutsch-Jozsa 算法是其推广形式，将可分类的函数推广至多比特情形。

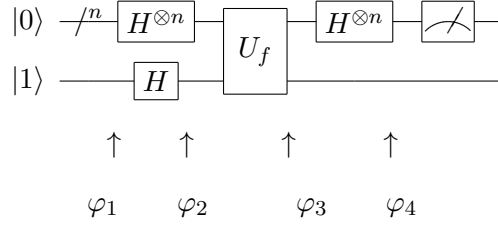
已知函数  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ ，该函数是常数函数（对所有输入均输出 0，或对所有输入均输出 1）或平衡函数（对恰好一半的输入输出 0，对另一半输入输出 1）。Deutsch-Jozsa 算法只需对实现函数  $f$  的结构进行一次查询，即可判断  $f$  是常数函数还是平衡函数。

下图是实现 Deutsch-Jozsa 算法的量子线路。其中， $U_f : |x, y\rangle \rightarrow |x, y \oplus f(x)\rangle$  是实现函数  $f$  的  $n+1$  比特的量子门。



推导该量子电路中量子态的演化过程，并说明如何基于测量结果判断  $f$  是常数函数还是平衡函数。（提示：计算  $f$  为常数函数或平衡函数时的测量结果）

先标注量子电路时间：



假设  $f$  为常数函数时的测量结果：

1.  $\varphi_1$  时刻我们引入了  $n+1$  位 bit 的量子电路，其中除最低位外，均为  $|0\rangle$  态，我们这里暂叫这  $n$  位量子比特为  $x_{\varphi_1}^{\otimes n}$
2.  $\varphi_2$  时刻

$$|x^{\otimes n}\rangle \xrightarrow{H^{\otimes n}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \right)^{\otimes n}$$

$$\therefore |x_{\varphi_2}^{\otimes n}\rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \right)^{\otimes n}$$

$$|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$$

3.  $\varphi_3$  时刻，在完成  $U_f$  的函数处理后：

$$|x_{\varphi_3}^{\otimes n}y\rangle = |x_{\varphi_2}^{\otimes n}\rangle |y \oplus f(x_{\varphi_2}^{\otimes n})\rangle = (-1)^{f(x_{\varphi_2}^{\otimes n})} |x_{\varphi_2}^{\otimes n}y\rangle$$

$\therefore f$  为常数函数，分类讨论可以得到：

(a)  $f(x) = 0$

$$|x_{\varphi_3}^{\otimes n}y\rangle = |x_{\varphi_2}^{\otimes n}y\rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \right)^{\otimes n} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \right)$$

(b)  $f(x) = 1$

$$|x_{\varphi_3}^{\otimes n}y\rangle = -|x_{\varphi_2}^{\otimes n}y\rangle = - \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \right)^{\otimes n} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \right)$$

$$\therefore |x_{\varphi_3}^{\otimes n}y\rangle = \pm \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \right)^{\otimes n} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \right)$$

4.  $\varphi_4$  时刻，我们先不看系数以及  $|y\rangle$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \right)^{\otimes n} \xrightarrow{H^{\otimes n}} |0\rangle^{\otimes n} \\ & \therefore |x_{\varphi_4}^{\otimes n} y\rangle = |0\rangle^{\otimes n} \\ & \therefore |x_{\varphi_4}^{\otimes n} y\rangle = \pm |0\rangle^{\otimes n} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \right) \end{aligned}$$

所以我们可以通过测量  $n$  位比特是否全为  $|0\rangle$  来判断  $f$  是常数函数还是平衡函数，如果全为 0，则  $f$  为常数函数，否则为平衡函数。