浙江大学 2024-2025 学年秋冬学期

《量子计算理论基础与软件系统》课程期中考试试卷

姓名 ________　　学号 ________　　院系 ________

2024 年 11 月 12 日

说明：本卷试题共 120 分，任意正确作答 100 分即为满分，超出部分不计入成绩。

一、判断题（共 5 小题，每小题 2 分）

1. $\frac{3}{5}|+\rangle+\frac{4}{5}|-\rangle$ 是正确的量子态表示。

解答. 正确。$|+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)$ 和 $|-\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)$ 同样是一组完备正交基。

2. Hadamard 门可以表示为 $H=e^{i\varphi}R_z(\varphi)R_x(\varphi)R_z(\varphi)$，其中 $\varphi=\frac{\pi}{4}$。

解答. 错误。Hadamard 门的矩阵表示为 $H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$，代入等式右侧计算可知不相等。

3. CNOT 门可以分解为两个单比特门的张量积形式。

解答. 错误。CNOT 门的矩阵表示为 $CNOT=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&0\\0&X\end{bmatrix}$，不是两个单比特门的张量积形式。

4. 投影算符 P 满足 $PP^\dagger=P^2=P$。

解答. 正确。见讲义二定义。

5. 厄米算符 A 的任一本征值均为实数，且不同本征值对应的本征态正交。

解答. 正确。见作业一证明。

二、单项选择题（共 5 小题，每小题 4 分）

6. 酉算符 $H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$ 的本征值和本征态分别是

A. $\begin{cases}\lambda_1=1 & |\psi_1\rangle=\frac{|0\rangle+(-\sqrt{2}-1)|1\rangle}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\\ \lambda_2=-1 & |\psi_2\rangle=\frac{|0\rangle+(\sqrt{2}-1)|1\rangle}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\end{cases}$

B. $\begin{cases}\lambda_1=i & |\psi_1\rangle=\frac{|0\rangle+(-\sqrt{2}-1)|1\rangle}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\\ \lambda_2=-i & |\psi_2\rangle=\frac{|0\rangle+(\sqrt{2}-1)|1\rangle}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\end{cases}$

C. $\begin{cases} \lambda_1 = 1 & |\psi_1\rangle = \frac{|0\rangle+(\sqrt{2}-1)|1\rangle}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \lambda_2 = -1 & |\psi_2\rangle = \frac{|0\rangle+(-\sqrt{2}-1)|1\rangle}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{cases}$ D. $\begin{cases} \lambda_1 = i & |\psi_1\rangle = \frac{|0\rangle+(\sqrt{2}-1)|1\rangle}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \lambda_2 = -i & |\psi_2\rangle = \frac{|0\rangle+(-\sqrt{2}-1)|1\rangle}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{cases}$

解答. 选 C。验证 $H|\psi_1\rangle = \lambda_1|\psi_1\rangle$ 和 $H|\psi_2\rangle = \lambda_2|\psi_2\rangle$ 即可。

7. 以下不是酉矩阵的矩阵是

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

解答. 选 D。酉矩阵满足 $U^\dagger U = I$。

8. 任意一个单量子比特酉算符可以使用 $U = e^{i\alpha}R_{\vec{n}}(\theta)$ 的形式表示，其中 $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$，$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{R}^3$，$\vec{n}$ 为单位向量，$R_{\vec{n}}(\theta) = \cos(\frac{\theta}{2}) \cdot I - i\sin(\frac{\theta}{2}) \cdot (n_x X + n_y Y + n_z Z)$ 是绕 $\vec{n}$ 方向的旋转算符。则如下 Hadamard 门 H 和相位门 S 对应的 $\alpha, \theta, \vec{n}$ 分别是

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

A. $H : \alpha = \frac{\pi}{2}, \theta = \pi, \vec{n} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$； $S : \alpha = \frac{\pi}{4}, \theta = \frac{\pi}{2}, \vec{n} = (0, 0, 1)$

B. $H : \alpha = \frac{\pi}{2}, \theta = \pi, \vec{n} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$； $S : \alpha = \frac{\pi}{4}, \theta = \pi, \vec{n} = (0, 0, 1)$

C. $H : \alpha = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{2}, \vec{n} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$； $S : \alpha = \frac{\pi}{4}, \theta = \frac{\pi}{2}, \vec{n} = (0, 0, 1)$

D. $H : \alpha = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{2}, \vec{n} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$； $S : \alpha = \frac{\pi}{4}, \theta = \pi, \vec{n} = (0, 0, 1)$

解答. 选 A。验证 $H = e^{i\frac{\pi}{2}}R_{\vec{n}}(\pi)$ 和 $S = e^{i\frac{\pi}{4}}R_{\vec{n}}(\frac{\pi}{2})$ 即可。参考讲义一：Hadamard 门可以理解为绕 X-Z 轴中轴线旋转 π，S 门可以理解为绕 Z 轴旋转 $\frac{\pi}{2}$。

9. 考虑如下的投影算符 M，给定量子态 $|\psi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle - \frac{1}{2}|11\rangle$，测量量子态坍缩为 M 对应本征态矢的概率为

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 & 1 \\ i & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ B. $\frac{2+\sqrt{2}}{6}$ C. $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

解答. 选 C。由于 $M^2 = 3M$，利用投影算符性质对 M 进行归一化处理，$M' = \frac{1}{3}M$，然后计算 $\langle\psi|M'|\psi\rangle$。

10. 已知量子门 $X=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$，$H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$，$T=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & e^{i\frac{\pi}{4}}\end{bmatrix}$，可以实现如下单量子门的组合是

$$U=\begin{bmatrix}1+e^{i\frac{\pi}{4}} & e^{i\frac{\pi}{4}}-i\\1-e^{i\frac{\pi}{4}} & e^{i\frac{\pi}{4}}+i\end{bmatrix}$$

A. $THTH$

B. $HTHTX$

C. $XHTHT$

D. $HTHT$

解答. 选 D。由于酉矩阵需要满足 $U^\dagger U=I$，对 U 进行归一化处理为 $U'=\frac{1}{2}U$，可以验证 $U'=HTHT$。

三、填空题（共 5 小题，每小题 4 分）

11. 量子态 $|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle+\frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$ 的 Bloch 球坐标表示中 $\theta=$ ______，$\phi=$ ______。

解答. 由 $|\psi\rangle=\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle+e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$，可得 $\theta=\frac{\pi}{2}$，$\phi=\frac{\pi}{2}$。

12. 已知量子态 $|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle+\frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$ 和 $|\phi\rangle=\frac{3}{5}|0\rangle-\frac{4}{5}|1\rangle$，则 $\langle\psi|\phi\rangle=$ ______，$|\psi\rangle\langle\phi|=$ ______。

解答.

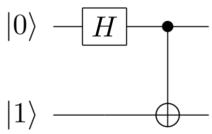
$$\begin{aligned}\langle\psi|\phi\rangle&=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\-\frac{4}{5}\end{bmatrix}\\&=\frac{3}{5\sqrt{2}}+\frac{4i}{5\sqrt{2}}\\&=\frac{3+4i}{5\sqrt{2}}\\|\psi\rangle\langle\phi|&=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{i}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\\frac{3i}{5} & -\frac{4i}{5}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

13. 已知双比特量子门 SWAP 的作用是交换两个量子比特的量子态，则其对应的酉矩阵表示为 ______。

解答. $\mathrm{SWAP}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$。

14. 给定两个独立的量子比特，初态分别为 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$，为使这两个量子比特演化为 Bell 态 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle+|10\rangle)$，使用基础量子门设计一个量子电路 ______。

解答.



15. 量子近似优化算法（QAOA）可以解决许多组合优化问题，基本思路是将每个二值变量 $x \in \{0,1\}$ 转化为一个量子比特，将目标函数转化为哈密顿量的本征值。由于 $\langle 0|Z|0\rangle = 1, \langle 1|Z|1\rangle = -1$，因此可以将任意二值变量 x 的各个取值转化为哈密顿量 $\frac{I-Z}{2}$ 的各个本征态对应的本征值。那么，逻辑语句 $x_1 \vee x_2$ 对应的哈密顿量为 ______。

解答. $x_1 \to \frac{I-Z_1}{2}, x_2 \to \frac{I-Z_2}{2}$，则有

$$\begin{aligned} x_1 \vee x_2 &= x_1 + x_2 - x_1 x_2 \\ &\to \frac{I-Z_1}{2} + \frac{I-Z_2}{2} - \frac{I-Z_1}{2}\frac{I-Z_2}{2} \\ &= \frac{3I - Z_1 - Z_2 - Z_1 Z_2}{4} \end{aligned}$$

四、简答题（共 70 分）

16. 量子态与量子门（20 分）

GHZ 态是一种 n 比特量子态，其形式为 $|\mathrm{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle^{\otimes n} + |1\rangle^{\otimes n})$，即所有量子比特处于相同的 $|0\rangle$ 态或 $|1\rangle$ 态。请回答以下问题：

a. 证明 GHZ 态是纠缠态。（10 分）

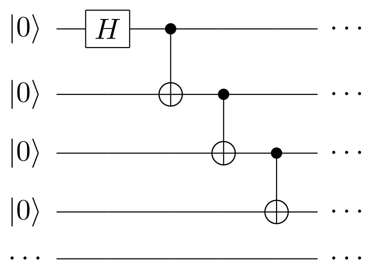
b. 使用单比特量子门和双比特量子门设计一个量子电路，将 n 个量子比特由初态 $|0\rangle^{\otimes n}$ 变换为 GHZ 态。（5 分）

c. 若对初态为 $|0110\rangle$ 的 4 量子比特系统施加上述电路，给出测量末态可能得到的量子态。（5 分）

解答.

a. 若 GHZ 态为非纠缠态，不失一般性地，假设 GHZ 态可以分解为前 m 个比特和后 $n-m$ 个比特的张量积形式，显然有 $|\mathrm{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a|0\rangle^{\otimes m} + b|1\rangle^{\otimes m}) \otimes (c|0\rangle^{\otimes n-m} + d|1\rangle^{\otimes n-m})$，则有 $ac = bd = 1, ad = bc = 0$。矛盾，即 GHZ 态不可分解，是纠缠态。

b. 设计电路图如下：



c. 经过上述电路变换后，

$$
\begin{aligned}
|0110\rangle &\xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0110\rangle + |1110\rangle) \\
&\xrightarrow{CNOT} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0110\rangle + |1010\rangle) \\
&\xrightarrow{CNOT} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0100\rangle + |1010\rangle) \\
&\xrightarrow{CNOT} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0100\rangle + |1011\rangle)
\end{aligned}
$$

可能测得的量子态为 $|0100\rangle$ 和 $|1011\rangle$。（其他合理答案均可）

17. 量子测量（20 分）

考虑多比特量子系统 $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|000\rangle + \frac{i}{2}|010\rangle + \frac{1}{2}|101\rangle + \frac{i}{2}|111\rangle$，若对其中部分量子比特进行测量，其余量子比特的量子态会发生变化。请回答以下问题：

a. 若对最高位比特使用标准基 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 进行测量，给出所有可能的测量结果和测量后剩余两个量子比特的态。（10 分）

b. 若对最高位和最低位两个量子比特使用 Bell 基 $\{|\beta_{xy}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0y\rangle + (-1)^x|1\bar{y}\rangle)\}$ 进行部分测量，给出所有可能的测量结果和测量后剩余一个量子比特的态。（10 分）

解答.

a. 对最高位比特使用标准基进行测量，有 p_i 的概率测得 $|i\rangle$，测量后系统态为 $|\psi_i\rangle$，其中

$$
\begin{aligned}
M_0 &= \sum_{j\in\{00,01,10,11\}} M_{0j} \\
p_0 &= \langle\psi|M_0|\psi\rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\
|\psi_0\rangle &= \frac{M_0|\psi\rangle}{\sqrt{p_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + i|10\rangle) \\
M_1 &= \sum_{j\in\{00,01,10,11\}} M_{1j} \\
p_1 &= \langle\psi|M_1|\psi\rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\
|\psi_1\rangle &= \frac{M_1|\psi\rangle}{\sqrt{p_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + i|11\rangle)
\end{aligned}
$$

b. 将最高位和最低位两个量子比特记在左侧，变换量子态形式有

$$\begin{aligned}|\psi'\rangle &= \frac{1}{2}|000\rangle + \frac{i}{2}|001\rangle + \frac{1}{2}|110\rangle + \frac{i}{2}|111\rangle \\ &= \frac{1}{2}|00\rangle(|0\rangle + i|1\rangle) + \frac{1}{2}|11\rangle(|0\rangle + i|1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) \\ &= |\beta_{00}\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)\end{aligned}$$

因此，对最高位和最低位两个量子比特使用 Bell 基进行测量，一定测得 $|\beta_{00}\rangle$，测量后剩余量子比特的态为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$。

18. 量子算法（30 分）

量子相位估计（QPE）算法用于估计酉算符 U 的本征态 $|\psi\rangle$ 对应本征值的相位 ϕ，其中 $U|\psi\rangle = e^{2\pi i\phi}|\psi\rangle$。假设酉算符 $U = \begin{bmatrix} e^{i\frac{3}{4}\pi} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{5}{4}\pi} \end{bmatrix}$，其本征态为 $|\psi_0\rangle = |0\rangle$ 和 $|\psi_1\rangle = |1\rangle$。请回答以下问题：

a. 在 QPE 算法中逆量子傅立叶变换的作用是什么？请写出 $\mathrm{QFT}^\dagger$ 的具体形式。（10 分）

b. 若对量子态 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_0\rangle + |\psi_1\rangle)$ 执行 3 比特精度的 QPE 算法，推导测量获得的相位估计值的概率分布。（10 分）

c. 若对上一小问中的量子态执行 2 比特精度的 QPE 算法，推导测量获得的相位估计值的概率分布。（10 分）

解答.

a. 逆量子傅立叶变换的作用是将振幅中的相位信息转换为可测量的计算基信息。$\mathrm{QFT}^\dagger$ 的具体形式为

$$\mathrm{QFT}^\dagger\left[\frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i\overline{0.j_n}}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + e^{2\pi i\overline{0.j_{n-1}j_n}}|1\rangle\right)\cdots\left(|0\rangle + e^{2\pi i\overline{0.j_1j_2\cdots j_n}}|1\rangle\right)\right] = |j\rangle$$

b. $|\psi_0\rangle$ 和 $|\psi_1\rangle$ 对应的本征值分别为 $e^{i\frac{3}{4}\pi}$ 和 $e^{i\frac{5}{4}\pi}$，对应的相位分别为 $\phi_0 = \frac{3}{8} = \overline{0.011}$ 和 $\phi_1 = \frac{5}{8} = \overline{0.101}$。因此，对量子态 $|\psi\rangle$ 执行 3 比特精度的 QPE 算法，测量获得各相位估计值的概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{0.011}) &= \frac{1}{2} \\ P(\overline{0.101}) &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

c. 若执行 2 比特精度的 QPE 算法，则无法精确估计 ϕ_0 和 ϕ_1。因此与两者相近的相位估计值出现概率较高。对于 $\phi_0 = \overline{0.011}$，分别约有 $\frac{1}{2}$ 的概率估计得 $\overline{0.01}$ 和 $\overline{0.10}$；对于 $\phi_1 = \overline{0.101}$，分别约有 $\frac{1}{2}$ 的概率测得 $\overline{0.10}$ 和 $\overline{0.11}$。因此，对量子态 $|\psi\rangle$ 执行 2 比特精度的 QPE 算法，测量获得各相位估计值的概率约为

$$
\begin{aligned}
P(\overline{0.01}) &\approx \frac{1}{4} \\
P(\overline{0.10}) &\approx \frac{1}{2} \\
P(\overline{0.11}) &\approx \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$