理论作业三　量子编译与量子纠错

王晓宇　3220104364

2024 年 12 月 12 日

---

1. 已知双量子比特电路对应矩阵如下：

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. 证明矩阵 U 是一个合法的酉矩阵。

酉矩阵是指满足 $U^\dagger U = UU^\dagger = I$ 的矩阵.

由于 U 是实矩阵，$U^\dagger = U^T$，即：

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

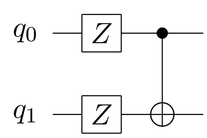
$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \tag{1}$$

$$UU^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \tag{2}$$

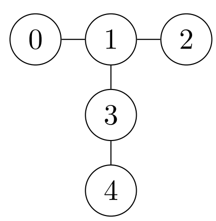
由 (1) 和 (2) 可知，矩阵 U 是一个合法的酉矩阵。

b. 将酉矩阵 U 分解为尽可能少的基础量子门（CNOT、X、Y、Z）组合，并画出相应的量子电路图。

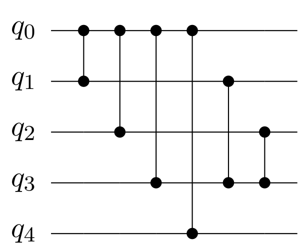
$$CNOT(Z \otimes Z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$



2. 给定一包含 5 个物理量子比特的量子处理器，其量子比特间的耦合连接关系如下：

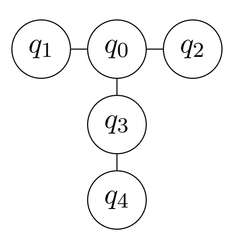


现有一包含 5 个逻辑量子比特的量子电路如下：



给出将这个逻辑量子电路部署至量子处理器时的量子比特映射关系，以插入最少的 SWAP 门使得每个双量子比特门都能直接在相连的物理量子比特间执行。

逻辑量子比特 q_0 对应量子处理器位置 1，q_1 对应 0，q_2 对应 2，q_3 对应 3，q_4 对应 4，则逻辑量子电路部署至量子处理器的量子比特映射关系如下：



前三个双量子比特门运行正常，当运行到第四个双量子比特门时，利用 SWAP 门交换 q_0、q_3 的信息以达到硬件相连以正常运行，之后的双量子比特门也能够正常执行，这样，我们就只通过 1 个 SWAP 门实现了逻辑量子电路的部署。

3. 量子纠错码是量子计算中的重要技术，能够保护量子信息免受噪声和错误的影响。三量子比特的比特翻转纠错码是最简单的量子纠错码之一，旨在纠正单量子比特发生的比特翻转错误（即意外施加的 X 门），下面是该量子纠错码的工作过程。

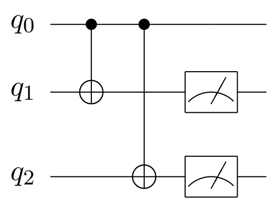
给定一个单量子比特的量子态：

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

经量子纠错码编码后的量子态为：

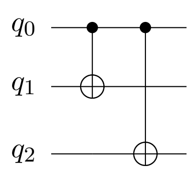
$$|\psi'\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$$

若编码后的量子态经过比特翻转噪声信道后只有至多一个量子比特发生比特翻转错误，可使用如下量子电路进行错误探测：

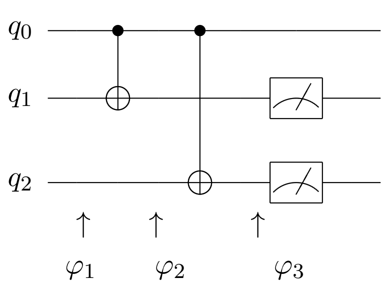


a. 设计量子电路将初始态 $|\psi\rangle$ 编码为 $|\psi'\rangle$，并画出相应的量子电路图。

我们仅需要两个 CNOT 门即可实现编码，其中 q_0 是我们的初始态 $|\psi\rangle$ 对应的单量子比特，q_1、q_2 初始态为 $|0\rangle$，如下：



b. 根据错误探测的结果，分析发生的错误征状，并给出相应的纠错方法，使得 q_0 恢复为初始的量子态（提示：分析每种错误发生时，错误探测后的测量结果）。



我们根据以上错误探测电路，分析发生的错误征状分类讨论如下：

(a) 无错误发生，$|\psi'\rangle$ 保持原始态。

$$\begin{cases} \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle & t = \varphi_1 \\ \alpha|000\rangle + \beta|101\rangle & t = \varphi_2 \\ \alpha|000\rangle + \beta|100\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|00\rangle & t = \varphi_3 \end{cases}$$

测量比特显示 $|00\rangle$ 即无错误发生。

(b) q_0 发生比特翻转错误。

$$\begin{cases} \alpha|100\rangle + \beta|011\rangle & t = \varphi_1 \\ \alpha|110\rangle + \beta|011\rangle & t = \varphi_2 \\ \alpha|111\rangle + \beta|011\rangle = (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)|11\rangle & t = \varphi_3 \end{cases}$$

测量比特显示 $|11\rangle$ 即说明 q_0 发生比特翻转错误，只需将利用 Z 门对 q_0 进行翻转纠错即可。

(c) q_1 发生比特翻转错误。

$$\begin{cases} \alpha|010\rangle + \beta|101\rangle & t = \varphi_1 \\ \alpha|010\rangle + \beta|111\rangle & t = \varphi_2 \\ \alpha|010\rangle + \beta|110\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|10\rangle & t = \varphi_3 \end{cases}$$

测量比特显示 $|10\rangle$ 即说明 q_1 发生比特翻转错误，只需将利用 Z 门对 q_1 进行翻转纠错即可。

(d) q_2 发生比特翻转错误。

$$\begin{cases} \alpha|001\rangle + \beta|110\rangle & t = \varphi_1 \\ \alpha|001\rangle + \beta|100\rangle & t = \varphi_2 \\ \alpha|001\rangle + \beta|101\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|01\rangle & t = \varphi_3 \end{cases}$$

测量比特显示 $|01\rangle$ 即说明 q_2 发生比特翻转错误，只需将利用 Z 门对 q_2 进行翻转纠错即可。

c. 若每个量子比特发生错误的概率为 p，且各量子比特相互独立，求该量子纠错码能够正确纠错的概率，并说明该量子纠错码的有效性（提示：验证量子纠错码正确纠错的概率与量子比特原始错误概率的关系）。

$$\text{正确纠错概率} = P_{\text{correct}} = (1-p)^3 + \left(C_3^2 \times p(1-p)^2\right) = 2p^3 - 3p^2 + 1$$

$$\text{原始出错概率} P_{error} = p$$

我们纠错的概率为 P_{correct}，我们希望增加了纠错码之后的出错概率变小，即认为是有效的。即当 $1 - P_{\text{correct}} < P_{error}$ 时，该量子纠错码是有效的。

$$\therefore 1 - (2p^3 - 3p^2 + 1) < p \Rightarrow p < \frac{1}{2}$$

可以看到当 $p < \frac{1}{2}$ 时 (大部分情况下，单量子比特的出错率并没有 1/2 这么大)，所以该量子纠错码可以降低原始出错概率，说明该量子纠错码是有效的。