理论作业一　量子比特与量子门

王晓宇　3220104364

2024 年 10 月 17 日

---

1. 已知双量子比特系统的量子态如下 $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & x & 3x & \frac{i}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}^{\intercal} \in \mathbb{C}^4$ ，求该系统处于 $|01\rangle$ 态的概率。

由归一化条件可知:

$$\left|\frac{1}{2}\right|^2 + |x|^2 + |3x|^2 + \left|\frac{i}{2\sqrt{2}}\right|^2 = 1$$

$$\therefore |x|^2 = 1/16$$

$$p = \alpha_{01}^2 = |x|^2 = \frac{1}{16}$$

2. 已知单量子比特的态矢量为 $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$ ，求该量子比特的 Bloch 球坐标。

$$|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle = cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

$$\therefore cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \theta = \pm 2arccos(\frac{3}{5})$$

$$\because 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\therefore \theta = 2arccos(\frac{3}{5})$$

$$\because sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0 \; and \; \alpha_1 \; is \; a \; real$$

$$\therefore \phi = 0$$

因此,Bloch 球坐标为:

$$(\theta, \phi) = \left(2\arccos\left(\frac{3}{5}\right), 0\right)$$

3. Bell 态指双量子比特系统的四个特殊量子态，他们是双量子比特系统中纠缠度最高的量子态，因此也称为最大纠缠态，在量子隐形传态、量子算法中有着广泛的应用。一般而言，Bell 态定义如下：

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|0y\rangle + (-1)^x|1\bar{y}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad x, y \in \{0, 1\}, \quad \bar{y} = 1 - y \tag{1}$$

a. 证明 Bell 态是纠缠态。

When $x = 0 \& y = 0$:

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

假设这个双量子比特系统可以分解成两个单量子比特的张量积：

$$|\beta_{xy}\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$\because ad = 0 \& bc = 0$

说明 a 和 c 必有一个为零，b 和 d 必有一个为零，那么 ac 和 bd 必为 0，与得到的 Bell 态不符，所以 Bell 态不可分。

同理可证以下三个 Bell 态也是纠缠态。

When $x = 0 \& y = 1$:

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

When $x = 1 \& y = 0$:

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

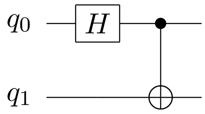
When $x = 1 \& y = 1$:

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

b. 用 H、X、Z 和 CNOT 门设计四个量子电路，使得初态为 $|00\rangle$ 的双量子比特系统经这些量子电路作用后分别演化为四个 Bell 态。

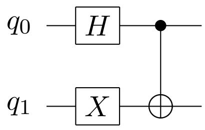
When $x = 0 \& y = 0$:

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$



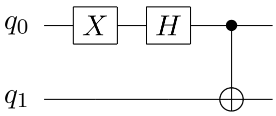
When $x = 0\&y = 1$:

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$



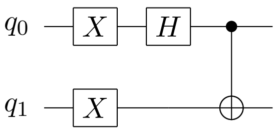
When $x = 1\&y = 0$:

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

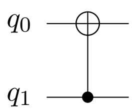


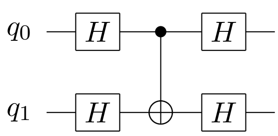
When $x = 1\&y = 1$:

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$$



4. 证明下图中的两个量子电路等价。（提示：计算两个量子电路对应的酉矩阵）





Answer: For the first circuit:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

For the second circuit:

$$(H \otimes H)CNOT(H \otimes H) =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Since of the two matrices are equal, the two circuits are equivalent.

5. 证明厄米算符 A 的任一本征值均为实数，且不同本征值对应的本征态正交。

a. 先证明厄米算符 A 的任一本征值均为实数:

假设 A 是厄米算符，即

$$A = A^{\dagger} \tag{2}$$

我们任取 A 的本征值 λ，有

$$A|\phi\rangle = \lambda|\phi\rangle \tag{3}$$

取共轭转置我们有

$$\langle\phi|A^{\dagger} = \lambda^{*}\langle\phi|$$

由（2）式我们有

$$\langle\phi|A = \lambda^{*}\langle\phi|$$

同时右乘 $|\phi\rangle$ 得到

$$\langle\phi|A|\phi\rangle = \lambda^{*}\langle\phi|\phi\rangle \tag{4}$$

由（3）式我们代换（4）式中的 $A|\phi\rangle$ 得到

$$\lambda\langle\phi|\phi\rangle = \lambda^{*}\langle\phi|\phi\rangle$$

由于 $\langle\phi|\phi\rangle \neq 0$

$$\therefore \lambda = \lambda^{*}$$

说明本征值为实数

b. 我们接着证明不同本征值对应的本征态正交：

任取 A 的两个本征值 λ_1 和 λ_2，对应的本征态分别为 $|\phi_1\rangle$ 和 $|\phi_2\rangle$，有

$$A|\phi_1\rangle = \lambda_1|\phi_1\rangle \tag{5}$$

$$A|\phi_2\rangle = \lambda_2|\phi_2\rangle \tag{6}$$

取（5）式，左乘 $\langle\phi_2|$，（6）式左乘 $\langle\phi_1|$ 得到：

$$\langle\phi_2|A|\phi_1\rangle = \lambda_1\langle\phi_2|\phi_1\rangle \tag{7}$$

$$\langle\phi_1|A|\phi_2\rangle = \lambda_2\langle\phi_1|\phi_2\rangle \tag{8}$$

（7）式取共轭转置得到：

$$\langle\phi_1|A|\phi_2\rangle = \langle\phi_1|A^\dagger|\phi_2\rangle = \lambda_1^*\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \lambda_1\langle\phi_1|\phi_2\rangle \tag{9}$$

由（8）和（9）式我们有：

$$\lambda_1\langle\phi_2|\phi_1\rangle = \lambda_2\langle\phi_1|\phi_2\rangle$$

即：

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0$$

$$\because \lambda_1 \neq \lambda_2$$

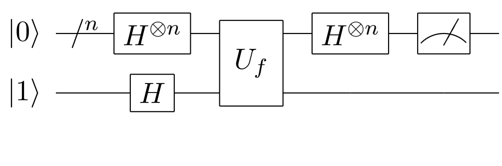
$$\therefore \langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0$$

即不同本征值对应的本征态正交。

6. Deutsch 算法展示了量子计算机强大的并行计算能力。Deutsch-Jozsa 算法是其推广形式，将可分类的函数推广至多比特情形。

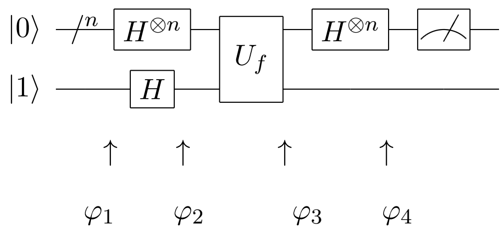
已知函数 $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$，该函数是常数函数（对所有输入均输出 0 ，或对所有输入均输出 1）或平衡函数 (对恰好一半的输入输出 0 ，对另一半输入输出 1)。Deutsch-Jozsa 算法只需对实现函数 f 的结构进行一次查询，即可判断 f 是常数函数还是平衡函数。

下图是实现 Deutsch-Jozsa 算法的量子线路。其中，$U_f:|x,y\rangle \to |x,y\oplus f(x)\rangle$ 是实现函数 f 的 $n+1$ 比特的量子门。



推导该量子电路中量子态的演化过程，并说明如何基于测量结果判断 f 是常数函数还是平衡函数。（提示：计算 f 为常数函数或平衡函数时的测量结果）

先标注量子电路时间:



假设 f 为常数函数时的测量结果：

1. φ_1 时刻我们引入了 $n+1$ 位 bit 的量子电路，其中除最低位外，均为 $|0\rangle$ 态，我们这里暂叫这 n 位量子比特为 $x_{\varphi_1}^{\otimes n}$

2. φ_2 时刻

$$|x^{\otimes n}\rangle \xrightarrow{H^{\otimes n}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)\right)^{\otimes n}$$

$$\therefore |x_{\varphi_2}^{\otimes n}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)\right)^{\otimes n}$$

$$|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)$$

3. φ_3 时刻，在完成 U_f 的函数处理后：

$$|x_{\varphi_3}^{\otimes n}y\rangle = |x_{\varphi_2}^{\otimes n}\rangle|\left(y\oplus f\left(x_{\varphi_2}^{\otimes n}\right)\right)\rangle = (-1)^{f\left(x_{\varphi_2}^{\otimes n}\right)}|x_{\varphi_2}^{\otimes n}y\rangle$$

$\because$ f 为常数函数, 分类讨论可以得到:

(a) $f(x)=0$

$$|x_{\varphi_3}^{\otimes n}y\rangle = |x_{\varphi_2}^{\otimes n}y\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)\right)^{\otimes n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)\right)$$

(b) $f(x)=1$

$$|x_{\varphi_3}^{\otimes n}y\rangle = -|x_{\varphi_2}^{\otimes n}y\rangle = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)\right)^{\otimes n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)\right)$$

$$\therefore |x_{\varphi_3}^{\otimes n}y\rangle = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)\right)^{\otimes n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)\right)$$

4. φ_4 时刻，我们先不看系数以及 $|y\rangle$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)\right)^{\otimes n}\xrightarrow{H^{\otimes n}}|0\rangle^{\otimes n}$$

$$\therefore |x_{\varphi_4}^{\otimes n}y\rangle=|0\rangle^{\otimes n}$$

$$\therefore |x_{\varphi_4}^{\otimes n}y\rangle=\pm|0\rangle^{\otimes n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)\right)$$

所以我们可以通过测量 n 位比特是否全为 $|0\rangle$ 来判断 f 是常数函数还是平衡函数，如果全为 0，则 f 为常数函数，否则为平衡函数。