UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESTRUCTURAS DISCRETAS

LÓGICA PROPOSICIONAL Y CÁLCULO DE PREDICADOS

CUADERNO DE EJERCICIOS

Orlando Zaldívar Esquivel
Orlando Zaldívar Zamorategui

2019

ZALDÍVAR ESQUIVEL, Orlando y Orlando Zaldívar Zamorategui. *Estructuras discretas. Lógica proposicional y cálculo de predicados. Cuaderno de ejercicios.* 3ª. ed. México, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, 2019.

Estructuras discretas. Lógica proposicional y cálculo de predicados. Cuaderno de ejercicios.

Primera edición, agosto de 2011
Segunda edición, octubre de 2014
Tercera edición, agosto de 2019

Av. Universidad 3000
Col. Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria
Delegación Coyoacán, 04510, México, Cd. Mx.

FACULTAD DE INGENIERÍA

http://www.ingenieria,unam.mx

Impreso y hecho en México

Presentación

La lógica proposicional y el cálculo de predicados dentro de las Estructuras Discretas constituyen un área importante de las Ciencias de la Computación. Su dominio teórico y metodológico está orientado hacia la demostración de la validez del razonamiento.

Si consideramos que uno de los objetivos de la lógica es el de proporcionar reglas de inferencia que permitan demostrar la validez del razonamiento, entonces debemos generar el dominio de la teoría y de las metodologías más adecuadas para tal fin.

Este Cuaderno de ejercicios tiene como objetivo principal que Usted, como alumno, realice de manera metódica y programada una serie de ejercicios que le permitirá el dominio de los conceptos relacionados con la lógica proposicional y el cálculo de predicados.

Se presenta una metodología para la solución de problemas. Trate de seguirla. Recuerde que el orden le garantiza el éxito en su trabajo. Siga un método. La probabilidad de éxito es mayor. La metodología desarrollada integra el enfoque del alumno y del docente.

Para cada tipo de ejercicio se presenta una forma de solución. Siga el procedimiento y genere dudas o cuestionamientos. Busque respuestas. Entienda el proceso. Cuando haya entendido el ejercicio busque otro camino para llegar a la solución. Ensaye, practique, no importa que cometa errores; si no lo intenta no hay nada que hacer. Finalmente, dominará los métodos de solución.

El orden de los ejercicios coincide con el temario de la asignatura.

Al principio del cuaderno aparecen cinco tablas, las cuales se usan de acuerdo con el problema de que se trate.

Tabla I. Formalización de la lógica proposicional
Contiene las expresiones más usadas en el lenguaje natural y su traducción a la lógica simbólica.

Tabla II. Leyes y propiedades
Presenta las equivalencias, leyes y propiedades fundamentales para el desarrollo de diversos ejercicios que involucran operaciones de la lógica.

Tabla III. Implicaciones tautológicas
Contiene las catorce implicaciones más usadas. A través de la práctica se podrán eliminar algunas. Primero entiéndalas, después busque algunas simplificaciones. La tabla es indispensable para el Método de Deducción Paso a Paso, MDPP.

Tabla IV. Reglas para Prueba Automática de Teoremas, PAT
Especifica las diez reglas usadas en el método PAT.

Tabla V. Reglas específicas para el cálculo de predicados
Contiene las reglas para el manejo de cuantificadores.

Se recomienda desprender las tablas para su manejo.

Revise las tablas y reafirme los aspectos teóricos necesarios. De todas maneras su aplicación se especifica en la solución de los ejercicios.

Por otra parte, al final de cada ejercicio aparece un comentario, el cual tiene varios objetivos a saber:

1. Aclarar aquellos aspectos teóricos necesarios para la solución del ejercicio.
2. Presentar un resumen o recordatorio de los aspectos teóricos que el alumno debe conocer.
3. Permitir reafirmar el concepto mediante el enfoque de los autores.
4. Promover la actitud creadora del alumno, orientada hacia la solución de los problemas.

La profundidad del comentario está en función del ejercicio y de su complejidad. El cuaderno es de ejercicios, lo cual presupone que el alumno tiene algunos antecedentes teóricos.

Estudie, practique, enfréntese a los problemas; lo están esperando. Usted puede con ellos. Adelante. Para comprobar su dominio, busque otros ejercicios y resuélvalos.

Cualquier comentario, crítica o sugerencia es bienvenida por parte de los autores. No dude en escribir a la dirección zazor1@fi-b.unam.mx

Los autores

Orlando Zaldívar Esquivel
Orlando Zaldívar Zamorategui

Índice

Contenido Pág.

Tablas

Conectivo	Expresión en lenguaje natural	Formalización	Tabla de verdad
Negación	No P No ocurre que P No es cierto que P No es el caso que P Es falso que P Ni P etc.	7P	P | 7P T | F F | T
Conjunción	P y Q P pero Q P aunque Q P sin embargo Q P no obstante Q P a pesar de Q etc.	$P \wedge Q$	P Q | $P \wedge Q$ T T | T T F | F F T | F F F | F
Disyunción	P o Q o ambos O bien P o bien Q Al menos P o Q P a menos que Q Como mínimo P o Q etc.	$P \vee Q$	P Q | $P \vee Q$ T T | T T F | T F T | T F F | F
Condicional	Si P entonces Q P sólo si Q P es suficiente para Q No P a menos que Q No P o Q Q si P Sólo si Q entonces P Q es necesario para P etc.	$P \rightarrow Q$	P Q | $P \rightarrow Q$ T T | T T F | F F T | T F F | T
Bicondicional	P si y sólo si Q P es necesario y suficiente para Q etc.	$P \rightleftarrows Q$	P Q | $P \rightleftarrows Q$ T T | T T F | F F T | F F F | T

Tabla I. Formalización de la lógica proposicional

Expresión	**Equivalencia, ley o propiedad**
$77P \Leftrightarrow P$	Doble negación
$P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$	Idempotencia
$PvQ \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	Conmutativa
$Pv(QvR) \Leftrightarrow (PvQ)vR$ $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$	Asociativa
$Pv(Q \wedge R) \Leftrightarrow (PvQ) \wedge (PvR)$ $P \wedge (QvR) \Leftrightarrow (P \wedge Q)v(P \wedge R)$	Distributiva
$P \vee 7P \Leftrightarrow \mathbf{T}$	Tercero excluido Complemento Tautología
$P \wedge 7P \Leftrightarrow \mathbf{F}$	Tercero excluido Complemento Contradicción
$P \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow P$ $P \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow P$	Identidad
$P \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$ $P \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$	Dominancia o Dominante
$7(PvQ) \Leftrightarrow 7P \wedge 7Q$ $7(P \wedge Q) \Leftrightarrow 7Pv7Q$	De Morgan
$Pv(P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ $P \wedge (PvQ) \Leftrightarrow P$	Absorción
$P \rightarrow Q \Leftrightarrow 7P \vee Q$	Condicional-Disyunción (Con-Dis), (Dis-Con)
$P \rightleftarrows Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	Bicondicional-Condicional (Bi-Con), (Con-Bi)
$7A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow A^*(7P_1, 7P_2, \ldots, 7P_n)$	1ª. Ley de dualidad
$A(7P_1, 7P_2, \ldots, 7P_n) \Leftrightarrow 7A^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$	2ª. Ley de dualidad
Si $A \Leftrightarrow B$ entonces $A^* \Leftrightarrow B^*$	3ª. Ley de dualidad

Tabla II. Leyes y propiedades

T corresponde a True

F corresponde a False

No.	Implicación tautológica	Nombre
I_1	$P \wedge Q \Rightarrow P$	Simplificación
I_2	$P \wedge Q \Rightarrow Q$	Simplificación
I_3	$P \Rightarrow P \vee Q$	Adición
I_4	$Q \Rightarrow P \vee Q$	Adición
I_5	$7P \Rightarrow P \rightarrow Q$	Adición
I_6	$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$	Adición
I_7	$7(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$	Simplificación
I_8	$7(P \rightarrow Q) \Rightarrow 7Q$	Simplificación
I_9	$P, Q \Rightarrow P \wedge Q$	Conjuntividad
I_{10}	$7P, P \vee Q \Rightarrow Q$	Modus Tollendo Ponens, MTP, Silogismo Disyuntivo
I_{11}	$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$	Modus Ponendo Ponens, MPP, Modus Ponens, MP
I_{12}	$7Q, P \rightarrow Q \Rightarrow 7P$	Modus Tollendo Tollens, MTT, Modus Tollens, MT
I_{13}	$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$	Transitividad de la condicional, Silogismo Hipotético
I_{14}	$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$	Dilema

Tabla III. Implicaciones tautológicas

Reglas del antecedente
Regla $7 \Rightarrow$: Si $\alpha, \beta \Rightarrow X, \gamma$, entonces $\alpha, 7X, \beta \Rightarrow \gamma$.
Regla $\wedge \Rightarrow$: Si $X, Y, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma$, entonces $\alpha, X \wedge Y, \beta \Rightarrow \gamma$.
Regla $\vee \Rightarrow$: Si $X, \alpha; \beta \Rightarrow \gamma$ y $Y, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma$, entonces $\alpha, X \vee Y, \beta \Rightarrow \gamma$.
Regla $\rightarrow \Rightarrow$: Si $Y, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma$ y $\alpha, \beta \Rightarrow X, \gamma$, entonces $\alpha, X \rightarrow Y, \beta \Rightarrow \gamma$.
Regla $\rightleftarrows \Rightarrow$: Si $X, Y, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma$ y $\alpha, \beta \Rightarrow X, Y, \gamma$, entonces $\alpha, X \rightleftarrows Y, \beta \Rightarrow \gamma$.
Reglas del consecuente
Regla $\Rightarrow 7$: Si $X, \alpha \Rightarrow \beta, \gamma$, entonces $\alpha \Rightarrow \beta, 7X, \gamma$.
Regla $\Rightarrow \wedge$: Si $\alpha \Rightarrow X, \beta, \gamma$ y $\alpha \Rightarrow Y, \beta, \gamma$, entonces $\alpha \Rightarrow \beta, X \wedge Y, \gamma$.
Regla $\Rightarrow \vee$: Si $\alpha \Rightarrow X, Y, \beta, \gamma$, entonces $\alpha \Rightarrow \beta, X \vee Y, \gamma$.
Regla $\Rightarrow \rightarrow$: Si $X, \alpha \Rightarrow Y, \beta, \gamma$, entonces $\alpha \Rightarrow \beta, X \rightarrow Y, \gamma$.
Regla $\Rightarrow \rightleftarrows$: Si $X, \alpha \Rightarrow Y, \beta, \gamma$ y $Y, \alpha \Rightarrow X, \beta, \gamma$ entonces $\alpha \Rightarrow \beta, X \rightleftarrows Y, \gamma$.

Tabla IV. Reglas para Prueba Automática de Teoremas, PAT

Nombre	Expresión
Negación del Cuantificador, NC	$7(\forall x)\ P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\ 7P(x)$
Negación del Cuantificador, NC	$7(\exists x)\ P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\ 7P(x)$
Especificación Universal, EU	$(\forall x)\ P(x) \Rightarrow P(y)$ (y arbitraria)
Especificación Existencial, EE	$(\exists x)\ P(x) \Rightarrow P(a)$ (a específica)
Generalización Universal, GU	$P(x)$ (x arbitraria) $\Rightarrow (\forall x)\ P(x)$
Generalización Existencial, GE	$P(a)$ (a específica) $\Rightarrow (\exists x)\ P(x)$

Tabla V. Reglas específicas para el cálculo de predicados

1. Fórmulas proposicionales y tablas de verdad

1.1 Conceptos

1.2 Conectores lógicos

1.3 Tablas de verdad

1. A partir de las siguientes expresiones, subraye las que correspondan a proposiciones válidas.

a) María juega basquetbol

b) ¿Cómo te llamas?

c) $2 + 6 = 8$

d) Cancún tiene playas hermosas

e) ¿Cuántos hermanos tienes?

f) La casa es roja

g) ¡Comes y te vas!

h) Hugo

i) Carlos no tiene dinero

j) ¡Cuidado con el perro!

Comentarios:

Recuerde: La proposición es un enunciado declarativo, que puede adquirir el valor de falso o verdadero.

Analizando las expresiones, tenemos lo siguiente:

a) Es una proposición
b) No es proposición, porque es un enunciado interrogativo
c) Es una proposición
d) Es una proposición
e) No es proposición, porque es un enunciado interrogativo
f) Es una proposición
g) No es proposición, porque es un enunciado imperativo
h) No es proposición, porque es una frase
i) Es una proposición
j) No es proposición, porque es un enunciado exclamativo

A partir de este momento a la proposición válida la vamos a nombrar simplemente como proposición.

2. Analice las siguientes expresiones. Subraye las que correspondan a proposiciones.

a) x + 1 = y

b) ¿Estudias o trabajas?

c) ¿Todo quedó claro?

d) ¡Parece que fue ayer!

e) a + b = c

f) ¿Dónde vives?

g) Lety estudia Estructuras Discretas

h) Manuel no aprueba el curso

i) ¡No es posible!

j) ¡Camina siempre adelante!

Comentarios:

Recuerde: La proposición cumple con dos características: es un enunciado declarativo, que puede adquirir el valor de falso o verdadero.

Analizando las expresiones, tenemos lo siguiente:

a) Es una proposición, es verdadera o falsa dependiendo de los valores de x y y
b) No es proposición, porque es un enunciado interrogativo
c) No es proposición, porque es un enunciado interrogativo
d) No es proposición, porque es un enunciado exclamativo
e) Es una proposición, su valor de verdad depende de los valores de a, b y c
f) No es proposición, porque es un enunciado interrogativo
g) Es una proposición
h) Es una proposición
i) No es proposición, porque es un enunciado exclamativo
j) No es proposición, porque es un enunciado imperativo

3. A partir de las siguientes proposiciones, determine cuáles son atómicas y cuáles son moleculares. Hecho lo anterior, obtenga su notación simbólica.

a) Arturo juega fútbol
Sol:
La proposición es atómica, su notación es A, dada por:
A: Arturo juega fútbol

b) Beatriz estudia Ingeniería en computación
Sol:
La proposición es atómica, su notación es B, dada por:
B: Beatriz estudia Ingeniería en computación

c) Carlos no va a la fiesta
Sol:
La proposición es molecular, su notación es 7C, dada por:
C: Carlos va a la fiesta

d) Si Daniel aprueba el examen entonces se va a España de paseo
Sol:
La proposición es molecular, su notación es $D \rightarrow E$, dada por:
D: Daniel aprueba el examen
E: Se va a España de paseo

e) La novia de Francisco se llama Gaby
Sol:
La proposición es atómica, su notación es F, dada por:
F: La novia de Francisco se llama Gaby

f) No como alimentos chatarra, mantengo un peso adecuado
Sol:
La proposición es molecular, su notación es $7G \rightarrow H$, dada por:
G: Como alimentos chatarra
H: Mantengo un peso adecuado

Comentarios:
La proposición atómica no contiene conectivos. También se le conoce como primaria, básica, etc. La proposición molecular si contiene conectivos. También se le conoce como secundaria, compuesta, etc. Una fórmula proposicional puede ser una proposición atómica o molecular.

4. Obtenga la notación simbólica de las siguientes proposiciones.

a) La pelota es amarilla y el balón es verde
Sol:
A: La pelota es amarilla
B: El balón es verde
$A \wedge B$

b) Juan no estudia Cálculo
Sol:
C: Juan estudia Cálculo
$\neg C$

c) Si Lucy come fruta entonces Lucy se mantiene delgada
Sol:
D: Lucy come fruta
E: Lucy se mantiene delgada
$D \rightarrow E$

d) Arturo juega con la pelota y Carolina escucha la radio
Sol:
G: Arturo juega con la pelota
H: Carolina escucha la radio
$G \wedge H$

e) La mesa es de caoba o la silla es tubular
Sol:
I: La mesa es de caoba
J: La silla es tubular
$I \vee J$

f) Te quiero mucho pero no me caso
Sol:
Q: Te quiero mucho
J: Me caso
$Q \wedge \neg J$

Comentarios:
Si tiene alguna duda, repase la Tabla I. Formalización de la lógica proposicional. Proponga otros ejercicios.

5. Simbolice lógicamente las siguientes proposiciones.

a) Se detectó un virus y se aplicó un tratamiento
Sol:
A: Se detectó un virus
B: Se aplicó un tratamiento

$A \wedge B$

b) Ni se detectó un virus ni se aplicó un tratamiento
Sol:
A: Se detectó un virus
B: Se aplicó un tratamiento

$7A \wedge 7B$

c) Se detectó un virus y no se aplicó un tratamiento
Sol:
A: Se detectó un virus
B: Se aplicó un tratamiento

$A \wedge 7B$

d) No se detectó un virus pero se aplicó un tratamiento
Sol:
A: Se detectó un virus
B: Se aplicó un tratamiento

$7A \wedge B$

e) Si no se detectó un virus entonces no se aplicó un tratamiento
Sol:
A: Se detectó un virus
B: Se aplicó un tratamiento

$7A \rightarrow 7B$

Comentarios:
Revise la Tabla I. Formalización de la lógica proposicional. Maneje adecuadamente los conectivos.

6. Determine la notación simbólica de las proposiciones que aparecen a continuación:

a) Me voy de vacaciones si y sólo si apruebo el examen
A: Me voy de vacaciones
B: Apruebo el examen

$A \rightleftarrows B$

b) No me voy de vacaciones a menos que apruebe el examen
Sol:
A: Me voy de vacaciones
B: Apruebo el examen

$7A \vee B$ o también $A \rightarrow B$

c) Me voy de vacaciones aunque no apruebe el examen
Sol:
A: Me voy de vacaciones
B: Apruebo el examen

$A \wedge 7B$

d) Apruebo el examen si me voy de vacaciones
Sol:
A: Me voy de vacaciones
B: Apruebo el examen

$A \rightarrow B$

e) Me voy de vacaciones y apruebo el examen
Sol:
A: Me voy de vacaciones
B: Apruebo el examen

$A \wedge B$

Comentarios:
Parece que todo está claro. Si tiene alguna duda, repase los conceptos. Adelante. Reafirme sus conocimientos.

7. Obtenga la tabla de verdad de la siguiente fórmula proposicional. Indique si es una tautología, contradicción o contingencia.

$(P \rightarrow Q) \vee (P \vee Q)$

Solución:

Se construye la tabla de verdad:

P	Q	$(P \rightarrow Q)$	$\vee$	$(P \vee Q)$
T	T	T	**T**	T
T	F	F	**T**	T
F	T	T	**T**	T
F	F	T	**T**	F

La columna resultante contiene únicamente valores verdaderos.
Por lo tanto, la fórmula proposicional es una tautología.

Comentarios:

Una fórmula proposicional es una tautología, si al obtener su tabla de verdad la columna resultante contiene únicamente valores verdaderos.

Aclaración: La disyunción que estamos usando corresponde a la disyunción inclusiva, ya que si dos proposiciones tienen el valor de verdad T entonces a aplicar el conectivo obtenemos como resultado T.

Por otra parte, el número de renglones de la tabla de verdad está en función de 2^n, donde n es el número de proposiciones atómicas que contiene la fórmula proposicional.

8. Elabore la tabla de verdad de la siguiente fórmula proposicional. Indique el tipo de fórmula proposicional que corresponda.

$(P \vee 7Q) \wedge (P \rightarrow Q)$

Solución:

Se construye la tabla de verdad:

P	Q	(P ∨ 7Q)	∧	(P → Q)
T	T	T	**T**	T
T	F	T	**F**	F
F	T	F	**F**	T
F	F	T	**T**	T

La columna resultante contiene valores verdaderos y falsos.
Por lo tanto, la fórmula proposicional es una contingencia.

Comentarios:

Una fórmula proposicional es una contingencia, si la columna resultante de la tabla de verdad contiene valores verdaderos y falsos.

9. Construya la tabla de verdad de la siguiente proposición, indicando si es tautología, contradicción o contingencia.

$(P \wedge Q) \vee 7(P \wedge Q)$

Solución:

Se construye la tabla de verdad:

P	Q	$(P \wedge Q)$	$\vee$	$7(P \wedge Q)$
T	T	T	**T**	F
T	F	F	**T**	T
F	T	F	**T**	T
F	F	F	**T**	T

La columna resultante contiene únicamente valores verdaderos.
Por lo tanto, la fórmula proposicional es una tautología.

Comentarios:

La fórmula proposicional es una tautología, si la columna resultante de la tabla de verdad contiene únicamente valores verdaderos.

10. Obtenga la tabla de verdad de la siguiente fórmula proposicional. Indique el tipo de fórmula proposicional.

$$P \vee (\neg P \rightarrow (Q \vee (\neg Q \rightarrow R)))$$

Solución:

Se construye la tabla de verdad:

P	Q	R	P	v	(7P → (Q v (7Q → R)))
T	T	T	T	**T**	T
T	T	F	T	**T**	T
T	F	T	T	**T**	T
T	F	F	T	**T**	T
F	T	T	F	**T**	T
F	T	F	F	**T**	T
F	F	T	F	**T**	T
F	F	F	F	**F**	F

La columna resultante contiene valores verdaderos y un falso.
Por lo tanto, la fórmula proposicional es una contingencia.

Comentarios:

Una fórmula proposicional es una contingencia, si al obtener su tabla de verdad la columna resultante contiene valores verdaderos y falsos, aun cuando sólo tenga un valor falso, como en este caso.

11. Obtenga la tabla de verdad de la siguiente fórmula proposicional. Indique el tipo de fórmula proposicional.

$(P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge (7P \rightarrow (7Q \wedge 7R))$

Solución:

Se construye la tabla de verdad:

P	Q	R	$(P \rightarrow (Q \wedge R))$	$\wedge$	$(7P \rightarrow (7Q \wedge 7R))$
T	T	T	T	**T**	T
T	T	F	F	**F**	T
T	F	T	F	**F**	T
T	F	F	F	**F**	T
F	T	T	T	**F**	F
F	T	F	T	**F**	F
F	F	T	T	**F**	F
F	F	F	T	**T**	T

La columna resultante contiene valores verdaderos y falsos.
Por lo tanto, la fórmula proposicional es una contingencia.

Comentarios:

Una fórmula proposicional es una contingencia, si al obtener su tabla de verdad la columna resultante contiene valores verdaderos y falsos.

12. Usando tabla de verdad y el método algebraico, demuestre que la siguiente fórmula proposicional es una tautología:

$$P \vee 7(P \wedge Q)$$

Solución:

Por tabla de verdad:

P	Q	P	v	7(P ∧ Q)
T	T		**T**	
T	F		**T**	
F	T		**T**	
F	F		**T**	

La columna resultante contiene únicamente valores verdaderos.
Por lo tanto, la fórmula proposicional es una tautología.

Por el método algebraico:

Procedimiento	Ley o propiedad
$P \vee 7(P \wedge Q) \Leftrightarrow P \vee (7P \vee 7Q)$	De Morgan
$\Leftrightarrow (P \vee 7P) \vee 7Q$	Asociativa
$\Leftrightarrow (\ \mathbf{T}\ ) \vee 7Q$	Tautología
$\Leftrightarrow \mathbf{T}$	Dominancia
Ahora, resuelva el problema siguiendo otro camino.	

Comentarios:

Para demostrar que una fórmula es tautología, lo hacemos por tabla de verdad o usando el método algebraico.
En el método algebraico debemos manejar la Tabla II. Leyes y propiedades.
Para simplificar el uso de propiedades, cuando aparezca el caso $P \vee 7P$, corresponderá a una tautología **T**.

13. Compruebe que la siguiente fórmula proposicional es una contradicción. Use tablas de verdad y el método algebraico.

$(P \wedge Q) \wedge 7(P \vee Q)$

Solución:

Por tabla de verdad:

P	Q	$(P \wedge Q)$	$\wedge$	$7(P \vee Q)$
T	T		**F**	
T	F		**F**	
F	T		**F**	
F	F		**F**	

La columna resultante contiene únicamente valores falsos.
Por lo tanto, la fórmula proposicional es una contradicción.

Por el método algebraico:	
Procedimiento	Ley o propiedad
$(P \wedge Q) \wedge 7(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge (7P \wedge 7Q)$	De Morgan
$\Leftrightarrow (P \wedge 7P) \wedge (Q \wedge 7Q)$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow (\ \mathbf{F}\ ) \wedge (\ \mathbf{F}\ )$	Contradicción
$\Leftrightarrow \mathbf{F}$	Idempotencia
Busque otro camino.	

Comentarios:
Para demostrar que una fórmula proposicional es una contradicción, lo hacemos por tabla de verdad. La columna resultante contiene únicamente valores falsos.
En el método algebraico debemos usar las leyes y propiedades de la Tabla II.
Para simplificar el uso de propiedades, cuando aparezca el caso $P \wedge 7P$, corresponderá a una contradicción **F**.

14. A partir de la siguiente expresión condicional obtenga la conversa, inversa y contrapositiva. Demuestra cuáles son equivalentes entre sí. Hágalo por tabla de verdad y por el método algebraico.

Si estudio Estructuras Discretas entonces apruebo el examen

Solución:

Encuentro las proposiciones atómicas:

P: Estudio Estructuras Discretas
Q: Apruebo el examen

Anotación en lógica simbólica   Condicional $P \rightarrow Q$

A partir de esta expresión obtengo las restantes

Conversa $Q \rightarrow P$

En lenguaje natural:

Si apruebo el examen entonces estudio Estructuras Discretas

Inversa $7P \rightarrow 7Q$

En lenguaje natural:

Si no estudio Estructuras Discretas entonces no apruebo el examen

Contrapositiva $7Q \rightarrow 7P$

En lenguaje natural:

Si no apruebo el examen entonces no estudio Estructuras Discretas

Resumiendo, tenemos lo siguiente:

Condicional $P \rightarrow Q$

Conversa $Q \rightarrow P$

Inversa $7P \rightarrow 7Q$

Contrapositiva: $7Q \rightarrow 7P$

Por tabla de verdad:

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$7P \rightarrow 7Q$	$7Q \rightarrow 7P$
T	T	**T**	**T**	**T**	**T**
T	F	**F**	**T**	**T**	**F**
F	T	**T**	**F**	**F**	**T**
F	F	**T**	**T**	**T**	**T**

Comparando las columnas resultantes se observa que:

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow 7Q \rightarrow 7P$$

y que

$$Q \rightarrow P \Leftrightarrow 7P \rightarrow 7Q$$

Por el método algebraico:	
Se demuestra la primera equivalencia.	
Procedimiento	Ley o propiedad
P→Q ⇔ 7P v Q	Con-Dis
⇔ Q v 7P	Conmutativa
⇔ 7Q → 7P	Dis-Con
De esta manera se demuestra que:	
La condicional es equivalente a la contrapositiva	
Se demuestra la segunda equivalencia.	
Procedimiento	Ley o propiedad
Q→P ⇔ 7Q v P	Con-Dis
⇔ P v 7Q	Conmutativa
⇔ 7P → 7Q	Dis-Con
De esta manera se demuestra que:	
La conversa es equivalente a la inversa	

Comentarios:

A partir de una condicional se obtienen varias expresiones, como las siguientes:

Condicional **P→Q**

Conversa **Q→P** también llamada **Recíproca**

Inversa **7P→7Q** también llamada **Contraria**

Contrapositiva: **7Q→7P** también llamada **Contrarrecíproca**

Se cumplen las equivalencias:

P→Q ⇔ 7Q→7P

Q→P ⇔ 7P→7Q

15. Demuestre que la siguiente fórmula proposicional es una tautología. Hágalo por tabla de verdad y por el método algebraico.

$((P \rightleftarrows Q) \wedge Q) \rightarrow P$

Solución:

Por tabla de verdad:

P	Q	$((P \rightleftarrows Q) \wedge Q) \rightarrow P$
T	T	**T**
T	F	**T**
F	T	**T**
F	F	**T**

La columna resultante está llena de valores verdaderos.
Por lo tanto, la fórmula proposicional es una tautología.

Por el método algebraico:

Procedimiento	Ley o propiedad
$((P \rightleftarrows Q) \wedge Q) \rightarrow P \Leftrightarrow [((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)) \wedge Q] \rightarrow P$	Bi-Con
$\Leftrightarrow [((7P \vee Q) \wedge (7Q \vee P)) \wedge Q] \rightarrow P$	Con-Dis
$\Leftrightarrow [((7P \vee Q) \wedge Q) \wedge ((7Q \vee P) \wedge Q)] \rightarrow P$	Distributiva
$\Leftrightarrow [\quad Q \quad \wedge (7Q \vee P) \wedge Q \ ] \rightarrow P$	Absorción
$\Leftrightarrow [\quad Q \quad \wedge (7Q \vee P) \quad] \rightarrow P$	Idempotencia
$\Leftrightarrow [\ (Q \wedge 7Q) \vee (Q \wedge P) \quad] \rightarrow P$	Distributiva
$\Leftrightarrow [\ (\ \mathbf{F} \ ) \vee (Q \wedge P) \quad] \rightarrow P$	Contradicción
$\Leftrightarrow [\quad (Q \wedge P) \quad] \rightarrow P$	Identidad
$\Leftrightarrow [\quad (P \wedge Q) \quad] \rightarrow P$	Conmutativa
$\Leftrightarrow 7(P \wedge Q) \vee P$	Con-Dis
$\Leftrightarrow 7P \vee 7Q \vee P$	De Morgan
$\Leftrightarrow (7P \vee P) \vee 7Q$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow (\ \mathbf{T} \ ) \vee 7Q$	Tautología
$\Leftrightarrow \mathbf{T}$	Dominancia

Comentarios: Busque otro camino o procedimiento. Repase los conceptos.

16. Demuestre que la siguiente fórmula proposicional es una tautología:

$P\to(P\wedge(Q\to P))$

Solución:

Por tabla de verdad:

P	Q	$P\to(P\wedge(Q\to P))$
T	T	**T**
T	F	**T**
F	T	**T**
F	F	**T**

La columna resultante está llena de valores verdaderos. Por lo tanto, la fórmula proposicional es una tautología.

Por el método algebraico:

Procedimiento	Ley o propiedad
$P\to(P\wedge(Q\to P)) \Leftrightarrow 7P \vee (P\wedge(7Q \vee P))$	Con-Dis
$\Leftrightarrow 7P \vee (\quad P \quad)$	Absorción
$\Leftrightarrow 7P \vee P$	Asociativa
$\Leftrightarrow$ **T**	Tautología

Otro procedimiento	Ley o propiedad
$P\to(P\wedge(Q\to P)) \Leftrightarrow 7P \vee (P\wedge(7Q \vee P))$	Con-Dis
$\Leftrightarrow 7P \vee ((P\wedge 7Q) \vee (P \wedge P))$	Distributiva
$\Leftrightarrow 7P \vee ((P\wedge 7Q) \vee \ (P))$	Idempotencia
$\Leftrightarrow (7P \vee P) \vee (P\wedge 7Q)$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow (\ \mathbf{T}\ ) \vee (P\wedge 7Q)$	Tautología
$\Leftrightarrow \quad \mathbf{T}$	Dominancia

Comentarios:
Recuerde: Cualquier proposición en disyunción con una tautología nos da como resultado una tautología.

17. Demuestre que la siguiente fórmula proposicional es una contradicción:

$(Q \to P) \wedge (7P \wedge Q)$

Solución:

Por tabla de verdad:

P	Q	$(Q \to P) \wedge (7P \wedge Q)$
T	T	**F**
T	F	**F**
F	T	**F**
F	F	**F**

La columna resultante está llena de valores falsos. Por lo tanto, la fórmula proposicional es una contradicción.

Segunda solución: Método algebraico	
Procedimiento	Ley o propiedad
$(Q \to P) \wedge (7P \wedge Q) \Leftrightarrow (7Q \vee P) \wedge (7P \wedge Q)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow ((7Q \vee P) \wedge 7P) \wedge Q$	Asociativa
$\Leftrightarrow ((7Q \wedge 7P) \vee (P \wedge 7P)) \wedge Q$	Distributiva
$\Leftrightarrow ((7Q \wedge 7P) \vee (\ \mathbf{F}\ )) \wedge Q$	Contradicción
$\Leftrightarrow (7Q \wedge 7P) \wedge Q$	Identidad
$\Leftrightarrow 7P \wedge (7Q \wedge Q)$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow 7P \wedge (\ \mathbf{F}\ )$	Contradicción
$\Leftrightarrow \mathbf{F}$	Dominancia
Busque otro camino.	

Comentarios:

Recuerde: Cualquier proposición en conjunción con una contradicción nos da como resultado una contradicción. No se confunda.

Resuelva los ejercicios siguiendo otro camino, procedimiento o manera.

18. Demuestre que la siguiente fórmula proposicional es una contradicción:

$P \rightleftarrows 7P$

Solución:	
Procedimiento	Ley o propiedad
$P \rightleftarrows 7P \Leftrightarrow (P \rightarrow 7P) \wedge (7P \rightarrow P)$	Bi-Con
$\Leftrightarrow (7P \vee 7P) \wedge (77P \vee P)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (7P \vee 7P) \wedge (P \vee P)$	Doble negación
$\Leftrightarrow 7P \wedge P$	Idempotencia
$\Leftrightarrow$ **F**	Contradicción
Inténtelo de otra manera.	

Comentarios:

Recuerde: Por el método algebraico, usando la Tabla II. Leyes y propiedades, a partir de la fórmula inicial se puede llegar a una contradicción, es decir, a una constante falsa F.

19. Demuestre que la siguiente fórmula proposicional es una tautología:

$(P \rightarrow 7Q) \vee P$

Solución:	
Procedimiento	Ley o propiedad
$(P \rightarrow 7Q) \vee P \Leftrightarrow (7P \vee 7Q) \vee P$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (7P \vee P) \vee 7Q$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow (\ \mathbf{T}\ ) \vee 7Q$	Tautología
$\Leftrightarrow \mathbf{T}$	Dominancia
Ahora, resuelva el problema a su manera.	

Comentarios:

Recuerde: Por el método algebraico, usando la Tabla II. Leyes y propiedades, a partir de la fórmula inicial se puede llegar a una tautología, es decir, a una constante verdadera T.

20. Demuestre que la siguiente fórmula proposicional es una tautología:

$(P \rightarrow Q) \rightleftarrows (7Q \rightarrow 7P)$

Solución:	
Procedimiento	Ley o propiedad
$(P\rightarrow Q)\rightleftarrows(7Q\rightarrow 7P)\Leftrightarrow$	
$\Leftrightarrow ((P\rightarrow Q)\rightarrow(7Q\rightarrow 7P)) \wedge ((7Q\rightarrow 7P)\rightarrow(P\rightarrow Q))$	Bi-Con
$\Leftrightarrow ((7PvQ)\rightarrow(77Qv7P)) \wedge ((77Qv7P)\rightarrow(7P\ v\ Q))$	Con-Dis
$\Leftrightarrow ((7PvQ)\rightarrow(\ Qv7P))\ \wedge ((Q\ v7P)\ \rightarrow (7P\ v\ Q))$	Doble negación
$\Leftrightarrow (7(7PvQ)v\ (\ Qv7P))\ \wedge (7(Qv7P)\ \ v\ \ (7P\ v\ Q))$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (7(7PvQ)v\ (7Pv\ Q))\ \wedge (7(7PvQ)\ \ v\ \ (7P\ v\ Q))$	Conmutativa
$\Leftrightarrow (\quad \mathbf{T} \quad) \wedge (\quad \mathbf{T} \quad)$	Tautología
$\Leftrightarrow \quad \mathbf{T}$	Idempotencia
Siga otro camino.	

Comentarios:

Los ejercicios se empiezan a complicar. Aquí fue indispensable tener presente que

$(P\rightleftarrows Q) \Leftrightarrow (P\rightarrow Q) \wedge (Q\rightarrow P)$ corresponde a Bi-Con

Por el método algebraico, usando la Tabla II. Leyes y propiedades, a partir de la fórmula inicial es factible llegar a una tautología, es decir, a una constante verdadera T.

21. Usando el método algebraico, determine el tipo de fórmula proposicional:

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$$

Solución:

Procedimiento	Ley o propiedad
$(P \rightarrow (Q \vee R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)) \Leftrightarrow$	
$\Leftrightarrow (7P \vee (Q \vee R)) \rightarrow ((7P \vee Q) \vee (7P \vee R))$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (7P \vee (Q \vee R)) \rightarrow ((7P \vee 7P) \vee (Q \vee R))$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow (7P \vee Q \vee R) \rightarrow (7P \vee Q \vee R)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow 7(7P \vee Q \vee R) \vee (7P \vee Q \vee R)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow$ T	Tautología
Corresponde a una tautología.	
Busque otro camino para resolver el problema.	

Comentarios:

El paso en el cual se usaron las propiedades conmutativa y asociativa, para después aplicar idempotencia, fue posible debido a que, dentro del paréntesis en cuestión, sólo contiene un tipo de conectivo binario (en este caso disyunción)

Recuerde: Por el método algebraico, usando la Tabla II. Leyes y propiedades, a partir de la fórmula inicial es posible llegar a una tautología, es decir, a una constante verdadera T.

22. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(\neg P \vee P) \wedge (P \wedge (P \wedge Q)) \Leftrightarrow (P \wedge Q)$$

Primera solución: Por tabla de verdad

P	Q	$(\neg P \vee P) \wedge (P \wedge (P \wedge Q))$	$\rightleftarrows$	$(P \wedge Q)$
T	T	T	**T**	T
T	F	F	**T**	F
F	T	F	**T**	F
F	F	F	**T**	F

Se sustituye el símbolo $\Leftrightarrow$ por el conectivo $\rightleftarrows$ para poder construir la tabla de verdad. Para que se cumpla la equivalencia, la columna resultante debe contener únicamente valores verdaderos (tautología). En cualquier otro caso, significa que no se cumple la equivalencia.

Segunda solución: Por método algebraico

Procedimiento	Ley o propiedad
$(\neg P \vee P) \wedge (P \wedge (P \wedge Q)) \Leftrightarrow (\ T\ ) \wedge (P \wedge (P \wedge Q))$	Tautología
$\Leftrightarrow (P \wedge (P \wedge Q))$	Identidad
$\Leftrightarrow (P \wedge P) \wedge Q$	Asociativa
$\Leftrightarrow P \wedge Q$	Idempotencia

Intente otro camino.

Comentarios:

El símbolo de equivalencia tiene varias representaciones. Así, la equivalencia de dos proposiciones P y Q se indica como $P \Leftrightarrow Q$ o $P \equiv Q$, pero no debemos olvidar que son símbolos, no conectivos. En consecuencia, para obtener la tabla de verdad, se debe sustituir el símbolo $\Leftrightarrow$ por el conectivo bicondicional $\rightleftarrows$.

Para demostrar equivalencias usaremos principalmente el método algebraico.

25. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q) \vee (7P \wedge Q)$$

Solución:

Procedimiento	Ley o propiedad
$(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \wedge \mathbf{T}) \vee (Q \wedge \mathbf{T})$	Identidad
$\Leftrightarrow (P \wedge (Q \vee 7Q)) \vee (Q \wedge (P \vee 7P))$	Tautología
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q) \vee (P \wedge Q) \vee (7P \wedge Q)$	Distr. y conm.
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q) \vee (7P \wedge Q)$	Idempotencia
Trate de hacerlo de derecha a izquierda.	

Comentarios:

Domine un procedimiento. Primero vaya de la expresión que aparece del lado izquierdo para llegar a la expresión que se encuentra en el lado derecho. Después inténtelo de derecha a izquierda.

Para no confundirse, le recomiendo ir de izquierda a derecha, aun cuando la equivalencia es conmutativa.

Para introducir atómicas faltantes, use tautologías. La tautología debe estar en función de la atómica que se requiera.

No es necesario utilizar notación totalmente parentizada.

24. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$P \rightarrow (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow 7P \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

Solución:	
Procedimiento	Ley o propiedad
$P \rightarrow (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow 7P \vee (7Q \vee P)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (7P \vee P) \vee 7Q$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow \mathbf{T} \vee 7Q$	Tautología
$\Leftrightarrow \mathbf{T}$	Dominancia
$\Leftrightarrow \mathbf{T} \vee Q$	Dominancia
$\Leftrightarrow (7P \vee P) \vee Q$	Tautología
$\Leftrightarrow P \vee (7P \vee Q)$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow P \vee (P \rightarrow Q)$	Dis-Con
$\Leftrightarrow 7P \rightarrow (P \rightarrow Q)$	Dis-Con
Ahora vaya de derecha a izquierda.	
Inténtelo, Usted puede.	

Comentarios:

Recuerde: Cualquier fórmula proposicional en disyunción con una tautología da como resultado una tautología.

La clave de este ejercicio se encuentra en el tercero, cuarto y quinto paso.

25. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(R \vee 7R) \wedge S \Leftrightarrow (R \rightarrow ((R \wedge Q) \vee R)) \rightarrow S$$

Solución:	
Procedimiento	Ley o propiedad
$(R \vee 7R) \wedge S \Leftrightarrow (\mathbf{T}) \wedge S$	Tautología
$\Leftrightarrow S$	Identidad
$\Leftrightarrow \mathbf{F} \vee S$	Identidad
$\Leftrightarrow 7\mathbf{F} \rightarrow S$	Dis-Con
$\Leftrightarrow \mathbf{T} \rightarrow S$	Negación
$\Leftrightarrow (7R \vee R) \rightarrow S$	Tautología
$\Leftrightarrow (R \rightarrow R) \rightarrow S$	Dis-Con
$\Leftrightarrow (R \rightarrow ((R \wedge Q) \vee R)) \rightarrow S$	Absorción
Ya domina el método. Busque otro camino.	

Comentarios:

La absorción es una propiedad muy importante; así como nos permite eliminar atómicas, también nos permite insertar atómicas. Piense y actúe.

En este caso, a partir de R se introdujo $(\mathbf{R} \wedge \mathbf{Q}) \vee \mathbf{R}$, es decir $\mathbf{R} \Leftrightarrow (\mathbf{R} \wedge \mathbf{Q}) \vee \mathbf{R}$.

26. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$7P \vee (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \rightarrow Q$$

Solución:	
Procedimiento	Ley o propiedad
$7P \vee (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow 7P \vee (7P \vee Q)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (7P \vee 7P) \vee Q$	Asociativa
$\Leftrightarrow 7P \vee Q$	Idempotencia
$\Leftrightarrow P \rightarrow Q$	Dis-Con
Intente varios caminos. Usted si puede.	

Comentarios:

La idempotencia es una propiedad muy importante. Así como nos permite eliminar proposiciones, también nos permite insertar proposiciones. Piense y actúe.

27. Demuestre la siguiente equivalencia:

$P \vee (7P \rightarrow (Q \vee (7Q \rightarrow R))) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$

Solución:	
Procedimiento	Ley o propiedad
$P \vee (7P \rightarrow (Q \vee (7Q \rightarrow R))) \Leftrightarrow P \vee (77P \vee (Q \vee (77Q \vee R)))$	Con-Dis
$\Leftrightarrow P \vee (P \vee (Q \vee (Q \vee R)))$	Doble negación
$\Leftrightarrow (P \vee P) \vee (Q \vee Q) \vee R$	Asociativa
$\Leftrightarrow P \vee Q \vee R$	Idempotencia
Trate de hacerlo de derecha a izquierda.	

Comentarios:

En este ejercicio se observa que el conectivo v aparece como conectivo único en los últimos pasos. Cuando sucede esto, se pueden eliminar los paréntesis y reagrupar las atómicas. Recuerda, esto se puede hacer porque el conectivo binario es el mismo (disyunción o conjunción únicamente, no mezclados). En caso contrario, no se pueden eliminar los paréntesis. Cuidado, debe tener mucho cuidado. Primero observe, piense y actúe. ¡Hágalo!

28. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(P \to Q) \wedge (R \to Q) \Leftrightarrow (P \vee R) \to Q$$

Solución:

Procedimiento	Ley o propiedad
$(P \to Q) \wedge (R \to Q) \Leftrightarrow (7P \vee Q) \wedge (7R \vee Q)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7R) \vee Q$	Distributiva
$\Leftrightarrow 7(P \vee R) \vee Q$	De Morgan
$\Leftrightarrow 77(P \vee R) \to Q$	Dis-Con
$\Leftrightarrow (P \vee R) \to Q$	Doble negación

Hágalo a su manera.

Comentarios:

En el segundo paso, la ley que se utilizó fue la distributiva, aun cuando en realidad lo que se hizo fue factorizar. Dicho de otra manera, se utilizó la propiedad distributiva al revés.

Por otra parte, la doble negación tiene aplicaciones importantes.

$$\mathbf{77P \Leftrightarrow P}$$

29. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(P \to Q) \wedge (R \to Q) \Leftrightarrow (7P \to R) \to Q$$

Solución:

Procedimiento	Ley o propiedad
$(P \to Q) \wedge (R \to Q) \Leftrightarrow (7P \vee Q) \wedge (7R \vee Q)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7R) \vee Q$	Distributiva
$\Leftrightarrow 7(P \vee R) \vee Q$	De Morgan
$\Leftrightarrow (P \vee R) \to Q$	Dis-Con
$\Leftrightarrow (7P \to R) \to Q$	Dis-Con
Trate de hacerlo de derecha a izquierda.	

Comentarios:

La Condicional-Disyunción (Con-Dis) tiene aplicaciones interesantes.

$$\mathbf{P \to Q \Leftrightarrow 7P \vee Q}$$

30. Demuestre la siguiente equivalencia:

$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ Restricción: No use absorción.

Solución:	
Procedimiento 1	Ley o propiedad
$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge \mathbf{T}) \vee (P \wedge Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow (P \wedge (Q \vee 7Q)) \vee (P \wedge Q)$	Tautología
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q) \vee (P \wedge Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow P \wedge (Q \vee 7Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow P \wedge (\quad \mathbf{T} \quad)$	Tautología
$\Leftrightarrow P$	Identidad
Procedimiento 2	
$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge \mathbf{T}) \vee (P \wedge Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow P \wedge (\mathbf{T} \vee Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow P \wedge (\mathbf{T})$	Dominancia
$\Leftrightarrow P$	Identidad
Procedimiento 3. Ahora por el lado derecho.	
$P \Leftrightarrow P \wedge \mathbf{T}$	Identidad
$\Leftrightarrow P \wedge (\mathbf{T} \vee Q)$	Dominancia
$\Leftrightarrow (P \wedge \mathbf{T}) \vee (P \wedge Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow P \vee (P \wedge Q)$	Identidad
Busque Usted otro camino.	

Comentarios:

Por medio de este ejercicio se comprueban varias propiedades, tales como identidad y dominancia. Observe, piense y actúe.

Como está demostrado, es posible resolver los ejercicios siguiendo otros caminos, procedimientos, formas o maneras.

31. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$P \rightarrow (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$$

Solución:	
Procedimiento	Ley o propiedad
$P \rightarrow (Q \vee R) \Leftrightarrow 7P \vee Q \vee R$	Con-Dis
$\Leftrightarrow 7P \vee 7P \vee Q \vee R$	Idempotencia
$\Leftrightarrow (7P \vee Q) \vee (7P \vee R)$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$	Dis-Con
Intente otra forma de resolver el problema.	

Comentarios:

Cuando las expresiones resultantes contienen un solo tipo de conectivo binario, en este caso disyunción, se pueden eliminar los paréntesis para reasociar, reagrupar o reordenar las fórmulas proposicionales, según convenga.

Por otra parte, idempotencia suele usarse para introducir la proposición que haga falta.

32. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$7(P \wedge Q) \rightarrow (7P \vee (7P \vee Q)) \Leftrightarrow 7P \vee Q$$

Solución:	
Procedimiento	Ley o propiedad
$7(P \wedge Q) \rightarrow (7P \vee (7P \vee Q)) \Leftrightarrow 7(P \wedge Q) \rightarrow ((7P \vee 7P) \vee Q)$	Asociativa
$\Leftrightarrow 7(P \wedge Q) \rightarrow (7P \vee Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow 77(P \wedge Q) \vee (7P \vee Q)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (7P \vee Q)$	Doble negación
$\Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee 7P) \vee Q$	Asociativa
$\Leftrightarrow ((P \vee 7P) \wedge (Q \vee 7P)) \vee Q$	Distributiva
$\Leftrightarrow (\quad \mathbf{T} \quad \wedge (Q \vee 7P)) \vee Q$	Tautología
$\Leftrightarrow (\quad \mathbf{T} \quad \wedge (7P \vee Q)) \vee Q$	Conmutativa
$\Leftrightarrow (7P \vee Q) \vee Q$	Identidad
$\Leftrightarrow 7P \vee (Q \vee Q)$	Asociativa
$\Leftrightarrow 7P \vee Q$	Idempotencia
Ahora vaya de derecha a izquierda.	

Comentarios:

Siga varios caminos para demostrar las equivalencias. Es factible que alguno sea más fácil que otros.

Practique, para dominar el método.

33. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$7(P \rightleftarrows Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge 7(P \wedge Q)$$

Solución:	
Procedimiento	Ley o propiedad
$7(P \rightleftarrows Q) \Leftrightarrow 7[(P \to Q) \wedge (Q \to P)]$	Bi-Con
$\Leftrightarrow 7(P \to Q) \vee 7(Q \to P)$	De Morgan
$\Leftrightarrow 7(7P \vee Q) \vee 7(7Q \vee P)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (P \wedge 7Q) \vee (Q \wedge 7P)$	De Morgan
$\Leftrightarrow ((P \wedge 7Q) \vee Q) \wedge ((P \wedge 7Q) \vee 7P)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (7Q \vee Q) \wedge (P \vee 7P) \wedge (7Q \vee 7P)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\quad \mathbf{T} \quad) \wedge (\quad \mathbf{T} \quad) \wedge (7Q \vee 7P)$	Tautología
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (7Q \vee 7P)$	Identidad
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (7P \vee 7Q)$	Conmutativa
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge 7(P \wedge Q)$	De Morgan
Use otras leyes o propiedades.	

Comentarios:

La práctica hace al maestro. Intente diferentes caminos.

34. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(7A \wedge (7B \wedge C)) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge C) \Leftrightarrow C$$

Solución:	
Procedimiento	Ley o propiedad
$(7A \wedge (7B \wedge C)) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge C) \Leftrightarrow$	
$\Leftrightarrow (7A \wedge (7B \wedge C)) \vee ((B \vee A) \wedge C)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (7A \wedge (7B \wedge C)) \vee ((A \vee B) \wedge C)$	Conmutativa
$\Leftrightarrow ((7A \wedge 7B) \wedge C) \vee ((A \vee B) \wedge C)$	Asociativa
$\Leftrightarrow [(7A \wedge 7B) \vee (A \vee B)] \wedge C$	Distributiva
$\Leftrightarrow [7(A \vee B) \ \ \vee (A \vee B)] \wedge C$	De Morgan
$\Leftrightarrow [\qquad T \qquad] \wedge C$	Tautología
$\Leftrightarrow C$	Identidad
Trate de hacerlo de derecha a izquierda.	

Comentarios:

Como se puede observar, no es necesario que la parte izquierda de la equivalencia contenga el mismo número de atómicas que la parte derecha.

Para el ejercicio, la propiedad distributiva se usó al revés, es decir, en realidad se factorizó la atómica común.

35. Demuestre la siguiente equivalencia:

$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$ Restricción: No use absorción.

Solución:	
Procedimiento 1	Ley o propiedad
$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow (P \vee \mathbf{F}) \wedge (P \vee Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge 7Q)) \wedge (P \vee Q)$	Contradicción
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee 7Q) \wedge (P \vee Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee 7Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow P \vee (Q \wedge 7Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow P \vee (\quad \mathbf{F} \quad)$	Contradicción
$\Leftrightarrow P$	Identidad
Procedimiento 2	
$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow (P \vee \mathbf{F}) \wedge (P \vee Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow P \vee (\mathbf{F} \wedge Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow P \vee (\quad \mathbf{F} \quad)$	Dominancia
$\Leftrightarrow P$	Identidad
Procedimiento 3. Ahora por el lado derecho:	
$P \Leftrightarrow P \vee \mathbf{F}$	Identidad
$\Leftrightarrow P \vee (\mathbf{F} \wedge Q)$	Dominancia
$\Leftrightarrow (P \vee \mathbf{F}) \wedge (P \vee Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow P \wedge (P \vee Q)$	Identidad
Busque otro camino.	

Comentarios:

Practique. Vea la utilidad de la contradicción.

La contradicción nos sirve para introducir aquella atómica que haga falta. En este caso la contradicción se escribió en función de Q.

Comprenda y maneje las propiedades.

36. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(7P \wedge (7P \wedge Q)) \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow (7P \wedge Q)$$

Solución: Procedimiento	Ley o propiedad
$(7P \wedge (7P \wedge Q)) \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow ((7P \wedge 7P) \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$	Asociativa
$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow ((7P \wedge Q) \wedge P) \vee ((7P \wedge Q) \wedge Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow ((7P \wedge P) \wedge Q) \vee (7P \wedge (Q \wedge Q))$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow ((\ \mathbf{F}\ ) \wedge Q) \vee (7P \wedge (Q \wedge Q))$	Contradicción
$\Leftrightarrow ((\ \mathbf{F}\ ) \wedge Q) \vee (7P \wedge Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow (\quad \mathbf{F} \quad) \vee (7P \wedge Q)$	Dominancia
$\Leftrightarrow 7P \wedge Q$	Identidad
Otro procedimiento	
$(7P \wedge (7P \wedge Q)) \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow ((7P \wedge 7P) \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$	Asociativa
$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow 7P \wedge (Q \wedge (P \vee Q))$	Asociativa
$\Leftrightarrow 7P \wedge (\quad Q \quad)$	Absorción
$\Leftrightarrow 7P \wedge Q$	

Comentarios:

¿Ya comprobó la utilidad de la contradicción?

La absorción tiene aplicaciones interesantes.

Recuerde que para usar la propiedad asociativa debe aplicarse sobre el mismo tipo de conectivo binario, disyunción o conjunción, para relacionar los términos que se van a reasociar, reagrupar o reordenar. Todos los conectivos binarios son disyunciones o todos los conectivos binarios son conjunciones. No se pueden mezclar.

37. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(7P \vee (7P \vee Q)) \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow (7P \vee Q)$$

Solución:		
Procedimiento		Ley o propiedad
$(7P \vee (7P \vee Q)) \vee (P \wedge Q)$	$\Leftrightarrow ((7P \vee 7P) \vee Q) \vee (P \wedge Q)$	Asociativa
	$\Leftrightarrow (7P \vee Q) \vee (P \wedge Q)$	Idempotencia
	$\Leftrightarrow 7P \vee (Q \vee (P \wedge Q))$	Asociativa
	$\Leftrightarrow 7P \vee (\quad Q \quad)$	Absorción
	$\Leftrightarrow 7P \vee Q$	
Otro procedimiento.		
$(7P \vee (7P \vee Q)) \vee (P \wedge Q)$	$\Leftrightarrow ((7P \vee 7P) \vee Q) \vee (P \wedge Q)$	Asociativa
	$\Leftrightarrow (7P \vee Q) \vee (P \wedge Q)$	Idempotencia
	$\Leftrightarrow ((7P \vee Q) \vee P) \wedge ((7P \vee Q) \vee Q)$	Distributiva
	$\Leftrightarrow ((7P \vee P) \vee Q) \wedge (7P \vee (Q \vee Q))$	Conm. y asoc.
	$\Leftrightarrow ((\quad \mathbf{T} \quad) \vee Q) \wedge (7P \vee (Q \vee Q))$	Tautología
	$\Leftrightarrow ((\quad \mathbf{T} \quad) \vee Q) \wedge (7P \vee Q)$	Idempotencia
	$\Leftrightarrow (\quad \mathbf{T} \quad) \wedge (7P \vee Q)$	Dominancia
	$\Leftrightarrow 7P \vee Q$	Identidad

Comentarios:

Compare el ejercicio 36 con el ejercicio 37.
Del ejercicio 36: $(7P \wedge (7P \wedge Q)) \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow (7P \wedge Q)$
Del ejercicio 37: $(7P \vee (7P \vee Q)) \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow (7P \vee Q)$
La expresión del lado izquierdo del ejercicio 36 y la expresión del lado izquierdo del ejercicio 37 son duales entre sí.
La expresión del lado derecho del ejercicio 36 y la expresión del lado derecho del ejercicio 37 son duales entre sí.
Por lo tanto, las leyes de dualidad sirven para demostrar equivalencias. Investigue.

38. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$((P \vee (Q \vee P)) \vee R) \wedge R \Leftrightarrow 7(R \to 7R)$$

Solución:		
Procedimiento		Ley o propiedad
$((P \vee (Q \vee P)) \vee R) \wedge R$	$\Leftrightarrow ((Q \vee (P \vee P)) \vee R) \wedge R$	Conm. y asoc.
	$\Leftrightarrow ((Q \vee P) \vee R) \wedge R$	Idempotencia
	$\Leftrightarrow R$	Absorción
	$\Leftrightarrow 7(7R)$	Doble negación
	$\Leftrightarrow 7(7R \vee 7R)$	Idempotencia
	$\Leftrightarrow 7(R \to 7R)$	Dis-Con
Hagámoslo de una forma más directa:		
$((P \vee (Q \vee P)) \vee R) \wedge R$	$\Leftrightarrow R$	Absorción
	$\Leftrightarrow 7(7R)$	Doble negación
	$\Leftrightarrow 7(7R \vee 7R)$	Idempotencia
	$\Leftrightarrow 7(R \to 7R)$	Dis-Con
Intente hacerlo usando otras leyes.		

Comentarios:

Otra vez, la absorción nos saca del apuro, así como la doble negación.

Idempotencia tiene aplicaciones valiosas. Practique.

39. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(P \rightarrow (7Q \rightarrow P)) \rightarrow Q \Leftrightarrow 7Q \rightarrow (P \wedge ((Q \wedge P) \wedge Q))$$

Solución:		
Procedimiento		Ley o propiedad
$(P \rightarrow (7Q \rightarrow P)) \rightarrow Q$	$\Leftrightarrow (P \rightarrow (Q \vee P)) \rightarrow Q$	Con-Dis
	$\Leftrightarrow (7P \vee (Q \vee P)) \rightarrow Q$	Con-Dis
	$\Leftrightarrow 7(7P \vee (Q \vee P)) \vee Q$	Con-Dis
	$\Leftrightarrow 7((7P \vee P) \vee Q) \vee Q$	Conm. y asoc.
	$\Leftrightarrow 7((\ \mathbf{T}\ ) \vee Q) \vee Q$	Tautología
	$\Leftrightarrow 7(\ \mathbf{T}\ ) \vee Q$	Dominancia
	$\Leftrightarrow \mathbf{F} \vee Q$	Negación
	$\Leftrightarrow Q$	Identidad
	$\Leftrightarrow Q \vee (P \wedge Q)$	Absorción
	$\Leftrightarrow 7Q \rightarrow (P \wedge Q)$	Dis-Con
	$\Leftrightarrow 7Q \rightarrow (P \wedge P \wedge Q \wedge Q)$	Idempotencia
	$\Leftrightarrow 7Q \rightarrow (P \wedge ((Q \wedge P) \wedge Q))$	Conm. y asoc.
Busque otro camino.		

Comentarios:

De nuevo aplicamos la absorción y nos saca del apuro. Idempotencia no se queda atrás. Piense, qué es lo que está buscando. A partir de esto, seleccione la ley o la propiedad más adecuada.

40. Demuestre la siguiente simplificación:

$$P \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (7P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (P \wedge 7S) \vee (7P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \vee Q)$$

Solución:	
Procedimiento	Ley o propiedad
$P \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (7P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (P \wedge 7S) \vee (7P \wedge Q) \Leftrightarrow$	
$\Leftrightarrow P \vee [(Q \wedge R) \wedge (P \vee 7P)] \vee ((S \vee 7S) \wedge P) \vee (7P \wedge Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow P \vee [(Q \wedge R) \wedge (\ \mathbf{T}\ )] \vee ((\ \mathbf{T}\ ) \wedge P) \vee (7P \wedge Q)$	Tautología
$\Leftrightarrow P \vee (Q \wedge R) \vee P \vee (7P \wedge Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow P \vee (7P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \vee P$	Conmutativa
$\Leftrightarrow (P \vee (7P \wedge Q)) \vee (Q \wedge R) \vee P$	Asociativa
$\Leftrightarrow ((P \vee 7P) \wedge (P \vee Q)) \vee (Q \wedge R) \vee P$	Distributiva
$\Leftrightarrow (\ \mathbf{T} \wedge (P \vee Q)) \vee (Q \wedge R) \vee P$	Tautología
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \vee (Q \wedge R) \vee P$	Identidad
$\Leftrightarrow (P \vee P) \vee Q \vee (Q \wedge R)$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow P \vee Q \vee (Q \wedge R)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow P \vee (Q \vee (Q \wedge R))$	Asociativa
$\Leftrightarrow P \vee Q$	Absorción
Repita aquellos pasos que no entienda.	

Comentarios:

Para este ejercicio, la primera aplicación de la propiedad distributiva en realidad fue una factorización.

Como se puede observar, no es necesario que la parte izquierda de la equivalencia contenga el mismo número de atómicas que la parte derecha. Por medio de tautologías, se puede eliminar alguna atómica, debido a que cualquier expresión en conjunción con una tautología, nos da como resultado la misma expresión. Trate de resolver el ejercicio de derecha a izquierda.

41. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(S\rightarrow(7P\rightarrow S))\rightarrow P \Leftrightarrow 7P\rightarrow(S\wedge(P\wedge S)\wedge S)$$

Solución:	
Procedimiento	Ley o propiedad
$(S\rightarrow(7P\rightarrow S))\rightarrow P \Leftrightarrow (7S \vee(P \vee S)) \rightarrow P$	Con-Dis
$\Leftrightarrow 7(7S \vee(P \vee S)) \vee P$	Con-Dis
$\Leftrightarrow 7((7S \vee S) \vee P) \vee P$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow 7(\quad \mathbf{T} \quad \vee P) \vee P$	Tautología
$\Leftrightarrow 7(\quad \mathbf{T} \quad) \vee P$	Dominancia
$\Leftrightarrow \quad \mathbf{F} \quad \vee P$	Negación
$\Leftrightarrow P$	Identidad
$\Leftrightarrow P \vee (S\wedge P)$	Absorción
$\Leftrightarrow 7P\rightarrow (S\wedge P)$	Dis-Con
$\Leftrightarrow 7P\rightarrow (S\wedge S\wedge S\wedge P)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow 7P\rightarrow (S\wedge (P\wedge S)\wedge S)$	Conm. y asoc.
Trate de hacerlo Usted.	

Comentarios:

Espero que comprenda la importancia de la idempotencia, la cual sirve para eliminar atómicas repetidas, pero también es útil para introducir aquello que haga falta, como es el caso que nos ocupa.

Compare este ejercicio con el ejercicio 39. ¿Encuentra alguna similitud?

Bien, vamos muy bien.

42. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$((7P \land 7Q) \lor (P \lor Q)) \land (R \rightarrow 7R) \Leftrightarrow 7R$$

Solución:	
Procedimiento	Ley o propiedad
Hagámoslo primero de derecha a izquierda:	
$7R \Leftrightarrow \;\; T \;\land 7R$	Identidad
$\Leftrightarrow (\,7(P \lor Q) \lor (P \lor Q)) \land (\quad 7R \quad)$	Tautología
$\Leftrightarrow (\,7(P \lor Q) \lor (P \lor Q)) \land (7R \lor 7R)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow (\,7(P \lor Q) \lor (P \lor Q)) \land (R \rightarrow 7R)$	Dis-Con
$\Leftrightarrow ((7P \land 7Q) \lor (P \lor Q)) \land (R \rightarrow 7R)$	De Morgan
Muy bien, ahora hagámoslo de izquierda a derecha:	
$((7P \land 7Q) \lor (P \lor Q)) \land (R \rightarrow 7R) \Leftrightarrow$	
$\Leftrightarrow (\,7(P \lor Q) \lor (P \lor Q)) \land (R \rightarrow 7R)$	De Morgan
$\Leftrightarrow (\,7(P \lor Q) \lor (P \lor Q)) \land (7R \lor 7R)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (\,7(P \lor Q) \lor (P \lor Q)) \land (\quad 7R \quad)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow (\qquad T \qquad) \land 7R$	Tautología
$\Leftrightarrow 7R$	Identidad

Comentarios:

La tautología nos sirve para introducir aquellas atómicas que se requieran. Para el ejercicio, la tautología se escribió en función de P y Q.

Si tiene dudas, realice más ejercicios.

Vea la importancia del uso de los paréntesis. En ocasiones nos aclaran algunos pasos del procedimiento.

Ya está Usted listo para pasar a otros temas. Todo lo aprendido lo va a usar. Si tiene dudas estudie y adelante.

2. Formas normales y dispositivos de dos estados

2.1 Forma normal disyuntiva principal

2.2 Forma normal conjuntiva principal

43. Obtenga las formas normales principales de la siguiente fórmula proposicional:

$$P \rightarrow Q$$

Use los siguientes métodos:

a) Por medio del método algebraico obtenga la FNDP.
b) Por medio del método algebraico obtenga la FNCP.
c) A partir de la FNDP obtenga la FNCP.
d) A partir de la FNCP obtenga la FNDP.
e) Obtenga las formas normales principales por el método de tablas de verdad.

Solución:	
Método a: Por medio del método algebraico se obtiene la FNDP	
Procedimiento	Ley o propiedad
Ahora, se trabaja para llegar a la FNDP	
$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \mathbf{T}) \vee (Q \wedge \mathbf{T})$	Identidad
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee (Q \wedge (P \vee \neg P))$	Tautología
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$	Conmutativa
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ FNDP	Conmutativa

Método b: Por medio del método algebraico se obtiene la FNCP	
Procedimiento	Ley o propiedad
Obtener la FNCP	
$P \rightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ FNCP	Con-Dis

Método c: A partir de la FNDP obtener la FNCP	
Procedimiento	Ley o propiedad
Ahora, se llega a la FNCP	
$P \rightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) v (7P \wedge Q) v (7P \wedge 7Q)$ trabaje con ella.	Con-Dis
$(P \wedge Q) v (7P \wedge Q) v (7P \wedge 7Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) v (7P \wedge (Q v 7Q))$	Distributiva
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) v (7P \wedge (\ \mathbf{T}\ ))$	Tautología
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) v (\ 7P\ )$	Identidad
$\Leftrightarrow (P v 7P) \wedge (Q v 7P)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (\ \mathbf{T}\ ) \wedge (7P v Q)$	Tautología y conm.
$\Leftrightarrow 7P v Q$ FNCP	Identidad

Método d: A partir de la FNCP obtener la FNDP	
Procedimiento	Ley o propiedad
Ahora, se llega a la FNDP	
$P \rightarrow Q \Leftrightarrow (7P \vee Q)$ ésta es la FNCP, trabaje con ella.	Con-Dis
$(7P \vee Q) \Leftrightarrow (7P \wedge \mathbf{T}) \vee (Q \wedge \mathbf{T})$	Identidad
$\Leftrightarrow (7P \wedge (Q \vee 7Q)) \vee (Q \wedge (P \vee 7P))$	Tautología
$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \vee (7P \wedge 7Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge 7P)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \vee (7P \wedge 7Q) \vee (P \wedge Q) \vee (7P \wedge Q)$	Conmutativa
$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \vee (7P \wedge 7Q) \vee (P \wedge Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (7P \wedge Q) \vee (7P \wedge 7Q)$ FNDP	Conmutativa

Método e: Obtenga las formas normales principales por el método de tablas de verdad.

Otra forma de resolver el problema consiste en el uso de la tabla de verdad.

Se construye la tabla de verdad de la fórmula dada.

P	Q	P → Q
T	T	**T**
T	F	**F**
F	T	**T**
F	F	**T**

De acuerdo con la tabla de verdad, se observa que la fórmula original, P → Q es una contingencia. Por lo tanto, tiene las dos formas normales principales: FNDP y FNCP.

Para obtener la FNDP a partir de la tabla de verdad, trabaje con los renglones que tienen valor verdadero en la columna resultante y genere las combinaciones directamente. Cada combinación es un mintérmino. El único conectivo binario que contiene cada mintérmino corresponde a la conjunción.

P	Q	P → Q	FNDP	FNCP
T	T	**T**	(P ∧ Q)	
T	F	**F**		
F	T	**T**	(7P ∧ Q)	
F	F	**T**	(7P ∧ 7Q)	

Finalmente, relacione los mintérminos obtenidos por medio de disyunciones.

Así, la FNDP está dada por:

(P ∧ Q) v (7P ∧ Q) v (7P ∧ 7Q)

Se cumple la equivalencia:

P → Q ⇔ (P ∧ Q) v (7P ∧ Q) v (7P ∧ 7Q)

Por otra parte, para obtener la FNCP a partir de la tabla de verdad, trabaje con los renglones que tienen valor falso en la columna resultante. Para generar las combinaciones correspondientes vea el valor de la atómica y cámbielo.

Cada combinación obtenida es un maxtérmino. El único conectivo binario que contiene cada maxtérmino corresponde a la disyunción. Si existe más de un maxtérmino, relaciónelos por medio de conjunciones.

P	Q	$P \rightarrow Q$	FNDP	FNCP
T	T	**T**	$(P \wedge Q)$	
T	F	**F**		$(7P \vee Q)$
F	T	**T**	$(7P \wedge Q)$	
F	F	**T**	$(7P \wedge 7Q)$	

De la tabla, obtenemos sólo un maxtérmino, por lo que no se requieren conjunciones para relacionarlo.

Así, la FNCP está dada por:

$$(7P \vee Q)$$

Se cumple la equivalencia:

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow (7P \vee Q)$$

Comentarios:

Se llama forma normal principal porque cada término contiene a todas las atómicas que aparecen en la fórmula original. La forma normal principal toma el nombre del conectivo que relaciona a los términos. Así, en el caso de los mintérminos, éstos se relacionan con disyunciones, por eso se llama Forma Normal Disyuntiva Principal, FNDP. Para el caso de los maxtérminos, éstos se relacionan con conjunciones, de ahí el nombre de Forma Normal Conjuntiva Principal, FNCP. Otro punto muy importante es que las formas normales principales son únicas. Como ve, existen diferentes modalidades para obtener las formas normales principales.

Si la fórmula original es una contingencia entonces contiene FNDP y FNCP.

La suma de términos de la FNDP ($\# t_{FNDP}$) y de la FNCP ($\# t_{FNCP}$) es igual a 2^n, donde n es el número de atómicas que contiene la fórmula original.

$$\# t_{FNDP} + \# t_{FNCP} = 2^n$$

Para el ejercicio, n = 2

$$\# t_{FNDP} + \# t_{FNCP} = 3 + 1 = 2^2 = 4$$

44. Obtenga las formas normales principales de la siguiente fórmula proposicional:

$P \vee (7P \wedge Q)$

Use los siguientes métodos:

a) Por medio del método algebraico obtenga la FNDP.
b) Por medio del método algebraico obtenga la FNCP.
c) Obtenga las formas normales principales por el método de tablas de verdad.
d) A partir de los términos faltantes de la FNDP obtenga la FNCP.
e) A partir de los términos faltantes de la FNCP obtenga la FNDP.

Solución:

Método a: Por medio del método algebraico se obtiene la FNDP

Procedimiento	Ley o propiedad
$P \vee (7P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge T) \vee (7P \wedge Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow (P \wedge (Q \vee 7Q)) \vee (7P \wedge Q)$	Tautología
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q) \vee (7P \wedge Q)$ FNDP	Distributiva

Método b: Por medio del método algebraico se obtiene la FNCP

Procedimiento	Ley o propiedad
$P \vee (7P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \vee 7P) \wedge (P \vee Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (T) \wedge (P \vee Q)$	Tautología
$\Leftrightarrow (P \vee Q)$ FNCP	Identidad

Método c: Obtenga las formas normales principales por el método de tablas de verdad.

Otra forma de resolver el problema consiste en el uso de la tabla de verdad. Se construye la tabla de verdad de la fórmula dada.

P	Q	P v (7P ∧ Q)
T	T	**T**
T	F	**T**
F	T	**T**
F	F	**F**

De acuerdo con la tabla de verdad, se observa que la fórmula original, P v (7P ∧ Q) es una contingencia. Por lo tanto, tiene las dos formas normales principales: FNDP y FNCP.

Para obtener la FNDP a partir de la tabla de verdad, trabaje con los renglones que tienen valor verdadero en la columna resultante y escriba las combinaciones directamente. Cada combinación corresponde a un mintérmino, el cual contiene conjunciones y, en su caso, negaciones.

P	Q	P v (7P ∧ Q)	FNDP	FNCP
T	T	**T**	(P ∧ Q)	
T	F	**T**	(P ∧ 7Q)	
F	T	**T**	(7P ∧ Q)	
F	F	**F**		

Finalmente, relacione lo obtenido con disyunciones.

Entonces la FNDP está dada por:

(P ∧ Q) v (P ∧ 7Q) v (7P ∧ Q)

Se cumple la equivalencia:

P v (7P ∧ Q) ⇔ (P ∧ Q) v (P ∧ 7Q) v (7P ∧ Q)

Por otra parte, para obtener la FNCP a partir de la tabla de verdad, trabaje con los renglones que tienen valor falso en la columna resultante. Para escribir las combinaciones correspondientes vea el valor de la atómica y cámbielo.

Cada combinación corresponde a un maxtérmino, el cual contiene disyunciones y, en su caso, negaciones.

P	Q	P v (7P $\wedge$ Q)	FNDP	FNCP
T	T	**T**	(P $\wedge$ Q)	
T	F	**T**	(P $\wedge$ 7Q)	
F	T	**T**	(7P $\wedge$ Q)	
F	F	**F**		(P v Q)

Relacione lo obtenido por medio de conjunciones, si existe más de un maxtérmino. En este ejercicio sólo existe un maxtérmino.

Entonces la FNCP está dada por:

(P v Q)

Se cumple la equivalencia:

P v (7P $\wedge$ Q) $\Leftrightarrow$ (P v Q)

Para la solución d y e, hacemos uso de la tabla obtenida en la solución c.

Método d: A partir de los términos faltantes de la FNDP se obtiene la FNCP.
Procedimiento
Ya se obtuvo la FNDP
$P \vee (7P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q) \vee (7P \wedge Q)$ FNDP
Ahora, a partir de la FNDP se obtiene la otra forma, ¿cómo?
Vea la tabla de verdad:
1° Los términos (las combinaciones) faltantes de la FNDP son:
$(7P \wedge 7Q)$
2° Relacione los términos faltantes con $\vee$: Como sólo es uno, no es necesario.
$(7P \wedge 7Q)$ Se deja igual
3° Encierre lo obtenido entre paréntesis cuadrados y niéguelo:
$7[(7P \wedge 7Q)]$
4° Aplique De Morgan y desarrolle:
$7[(7P \wedge 7Q)] \Leftrightarrow 77P \vee 77Q$
$\Leftrightarrow (P \vee Q)$ FNCP

Método e: A partir de los términos faltantes de la FNCP se obtiene la FNDP.
Procedimiento
Ya se obtuvo la FNCP
$P \vee (7P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \vee Q)$ FNCP
Ahora, a partir de la FNCP se obtiene la otra forma, ¿cómo?
Vea la tabla de verdad:
1° Los términos (las combinaciones) faltantes de la FNCP son:
$(P \vee 7Q)$, $(7P \vee Q)$ y $(7P \vee 7Q)$
2° Relacione los términos faltantes con $\wedge$:
$(P \vee 7Q) \wedge (7P \vee Q) \wedge (7P \vee 7Q)$
3° Encierre lo obtenido entre paréntesis cuadrados y niéguelo:
$7[(P \vee 7Q) \wedge (7P \vee Q) \wedge (7P \vee 7Q)]$
4° Aplique De Morgan y desarrolle:
$7[(P \vee 7Q) \wedge (7P \vee Q) \wedge (7P \vee 7Q)] \Leftrightarrow 7(P \vee 7Q) \vee 7(7P \vee Q) \vee 7(7P \vee 7Q)$
$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q) \vee (P \wedge Q)$
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q) \vee (7P \wedge Q)$ FNDP

Comentarios:

Se llama forma normal principal porque cada término contiene a todas las atómicas que aparecen en la fórmula original. La forma normal principal toma el nombre del conectivo que relaciona a los términos. Así, en el caso de los mintérminos, éstos se relacionan con disyunciones, por eso se llama Forma Normal Disyuntiva Principal, FNDP.

Para el caso de los maxtérminos, éstos se relacionan con conjunciones, de ahí el nombre de Forma Normal Conjuntiva Principal, FNCP.

Otro punto muy importante es que las formas normales principales son únicas.

Como ve, existen diferentes modalidades para obtener las formas normales principales. Practique.

Si la fórmula original es una contingencia entonces contiene FNDP y FNCP.

La suma de términos de la FNDP ($\# t_{FNDP}$) y de la FNCP ($\# t_{FNCP}$) es igual a 2^n, donde n es el número de atómicas que contiene la fórmula.

$$\# t_{FNDP} + \# t_{FNCP} = 2^n$$

Para el ejercicio, $n = 2$

$$\# t_{FNDP} + \# t_{FNCP} = 3 + 1 = 2^2 = 4$$

Recuerde, las formas normales principales cumplen tres condiciones:

1. El único conectivo que se permite usar fuera de los términos corresponde al nombre de la forma normal principal. El conectivo aparece cuando existe más de un término.
2. El único conectivo binario que se permite dentro de cada término es el dual del conectivo externo.
3. Dentro de cada término deben aparecer todas las atómicas que contiene la fórmula proposicional original.

Observe que en las formas normales principales, los únicos conectivos que pueden aparecer son $\vee$, $\wedge$ y $\neg$.

45. Obtenga las formas normales principales de la siguiente fórmula proposicional:

$$(7P \vee 7Q) \rightarrow (P \rightleftarrows 7Q)$$

Use los siguientes métodos:

a) Por medio del método algebraico obtenga la FNDP.
b) Por medio del método algebraico obtenga la FNCP.
c) Obtenga las formas normales principales por el método de tablas de verdad.
d) A partir de los términos faltantes de la FNCP obtenga la FNDP.
e) A partir de los términos faltantes de la FNDP obtenga la FNCP.

Solución:

Método a: Por medio del método algebraico se obtiene la FNDP

Procedimiento	Ley o propiedad
$(7Pv7Q)\rightarrow(P\rightleftarrows 7Q) \Leftrightarrow (7Pv7Q)\rightarrow((P\rightarrow 7Q)\wedge(7Q\rightarrow P))$	Bi-Con
$\Leftrightarrow (7Pv7Q)\rightarrow((7P \vee 7Q)\wedge(Qv P))$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (7Pv7Q)\rightarrow((7P \vee 7Q)\wedge(PvQ))$	Conmutativa
$\Leftrightarrow 7(7Pv7Q) \vee ((7P \vee 7Q)\wedge(PvQ))$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (P\wedge Q) \vee ((7P \vee 7Q)\wedge(PvQ))$	De Morgan
$\Leftrightarrow (P\wedge Q) \vee ((7P \vee 7Q)\wedge P)v((7P \vee 7Q)\wedge Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (P\wedge Q) \vee (7P\wedge P)v (P\wedge 7Q)v(7P\wedge Q) \vee (7Q\wedge Q)$	Dist. y conm.
$\Leftrightarrow (P\wedge Q) \vee (\ \mathbf{F} \ )v (P\wedge 7Q)v(7P\wedge Q) \vee (\ \mathbf{F} \ )$	Contradicción
$\Leftrightarrow (P\wedge Q) \vee (P\wedge 7Q) \vee (7P\wedge Q)$ FNDP	Identidad

Método b: Por medio del método algebraico se obtiene la FNCP

Procedimiento	Ley o propiedad
De la solución a) vimos que:	
$(7Pv7Q)\rightarrow(P\rightleftarrows 7Q) \Leftrightarrow (P\wedge Q) \vee (P\wedge 7Q) \vee (7P\wedge Q)$	
A partir de esta expresión se obtienen más equivalencias:	
$(P\wedge Q) \vee (P\wedge 7Q) \vee (7P\wedge Q) \Leftrightarrow (P\wedge(Q \vee 7Q)) \vee (7P\wedge Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (P\wedge(\ \mathbf{T} \ )) \vee (7P\wedge Q)$	Tautología
$\Leftrightarrow P \vee (7P\wedge Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow (P \vee 7P)\wedge(P \vee Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (\ \mathbf{T} \ )\wedge(P \vee Q)$	Tautología
$\Leftrightarrow (P \vee Q)$ FNCP	Identidad

Método c: Obtenga las formas normales principales por el método de tablas de verdad.
Otra forma de resolver el problema consiste en usar tabla de verdad.
Se construye la tabla de verdad de la fórmula dada.

P	Q	$(7P \vee 7Q) \rightarrow (P \rightleftarrows 7Q)$
T	T	**T**
T	F	**T**
F	T	**T**
F	F	**F**

De acuerdo con la tabla de verdad, se observa que la fórmula original, $(7P \vee 7Q) \rightarrow (P \rightleftarrows 7Q)$ es una contingencia. Por lo tanto, tiene las dos formas normales principales: FNDP y FNCP.

Para obtener la FNDP a partir de la tabla de verdad, trabaje con los renglones que tienen valor verdadero en la columna resultante y escriba las combinaciones directamente. Cada combinación corresponde a un mintérmino.

P	Q	$(7P \vee 7Q) \rightarrow (P \rightleftarrows 7Q)$	FNDP	FNCP
T	T	**T**	$(P \wedge Q)$	
T	F	**T**	$(P \wedge 7Q)$	
F	T	**T**	$(7P \wedge Q)$	
F	F	**F**		

Finalmente, relacione lo obtenido con disyunciones.

Entonces la FNDP está dada por:

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q) \vee (7P \wedge Q)$$

Se cumple la equivalencia:

$$(7P \vee 7Q) \rightarrow (P \rightleftarrows 7Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q) \vee (7P \wedge Q)$$

Por otra parte, para obtener la FNCP a partir de la tabla de verdad, trabaje con los renglones que tienen valor falso en la columna resultante. Para escribir las combinaciones correspondientes vea el valor de la atómica y cámbielo.

Cada combinación corresponde a un maxtérmino.

P	Q	$(7P \vee 7Q) \rightarrow (P \rightleftarrows 7Q)$	FNDP	FNCP
T	T	**T**	$(P \wedge Q)$	
T	F	**T**	$(P \wedge 7Q)$	
F	T	**T**	$(7P \wedge Q)$	
F	F	**F**		$(P \vee Q)$

Relacione lo obtenido por medio de conjunciones, si existe más de un maxtérmino. En este caso sólo existe un maxtérmino.

Entonces la FNCP está dada por:

$(P \vee Q)$

Se cumple la equivalencia:

$(7P \vee 7Q) \rightarrow (P \rightleftarrows 7Q) \Leftrightarrow (P \vee Q)$

Para la solución d y e, hacemos uso de la tabla obtenida en la solución c.

Método d: A partir de los términos faltantes de la FNCP se obtiene la FNDP.

Procedimiento

Ya se tiene la FNCP

(7Pv7Q)→(P⇄7Q) ⇔ (P v Q) FNCP

Ahora, a partir de la FNCP se obtiene la otra forma, ¿cómo?

Vea la tabla de verdad:

1° Los términos (las combinaciones) faltantes de la FNCP son:
(P v 7Q), (7P v Q) y (7P v 7Q)

2° Relacione los términos faltantes con ∧:
(P v 7Q)∧(7P v Q)∧(7P v 7Q)

3° Encierre lo obtenido entre paréntesis cuadrados y niéguelo:
7[(P v 7Q)∧(7P v Q)∧(7P v 7Q)]

4° Aplique De Morgan y desarrolle:

7[(P v 7Q)∧(7P v Q)∧(7P v 7Q)] ⇔ 7(P v 7Q) v7(7P v Q) v7(7P v 7Q)

⇔ (7P∧Q)v(P∧7Q)v(P∧Q) FNDP

Método e: A partir de los términos faltantes de la FNDP se obtiene la FNCP.

Procedimiento

Ya se tiene la FNDP

(7Pv7Q)→(P⇄7Q) ⇔ (P∧Q) v (P∧7Q) v (7P∧Q) FNDP

Ahora, a partir de la FNDP se obtiene la otra forma, ¿cómo?

Vea la tabla de verdad:

1° Los términos (las combinaciones) faltantes de la FNDP son:
(7P ∧ 7Q)

2° Relacione los términos faltantes con v: Como sólo es uno, no es necesario.
(7P ∧ 7Q)

3° Encierre lo obtenido entre paréntesis cuadrados y niéguelo:
7[(7P ∧ 7Q)]

4° Aplique De Morgan y desarrolle:

7[(7P ∧ 7Q)] ⇔ 7(7P ∧ 7Q)

⇔ (P v Q) FNCP

Comentarios:

En este ejercicio se mostraron las diferentes modalidades para obtener formas normales principales.

46. Obtenga las formas normales principales de la siguiente fórmula proposicional. Use únicamente el método algebraico.

$(Q \rightarrow P) \wedge (7P \wedge Q)$

Solución: Método algebraico.	
Procedimiento	Ley o propiedad
Primero se obtiene la FNDP	
$(Q\rightarrow P)\wedge(7P\wedge Q) \Leftrightarrow (7Q \vee P) \wedge (7P\wedge Q)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow ((7Q \vee P) \wedge 7P) \wedge Q$	Asociativa
$\Leftrightarrow ((7Q \wedge 7P) \vee (P \wedge 7P)) \wedge Q$	Distributiva
$\Leftrightarrow ((7Q \wedge 7P) \vee (\mathbf{F})) \wedge Q$	Contradicción
$\Leftrightarrow (7Q \wedge 7P) \wedge Q$	Identidad
$\Leftrightarrow (7Q \wedge Q) \wedge 7P$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow (\mathbf{F}) \wedge 7P$	Contradicción
$\Leftrightarrow$ **F** La fórmula es una contradicción	Dominancia
Como la fórmula es una contradicción no tiene FNDP.	
Siguiendo otro camino, se obtiene la FNCP:	
$(Q\rightarrow P)\wedge(7P\wedge Q) \Leftrightarrow (7Q \vee P)\wedge(7P\wedge Q)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (P \vee 7Q)\wedge(7P \vee \mathbf{F})\wedge(Q \vee \mathbf{F})$	Conm. e identidad
$\Leftrightarrow (P \vee 7Q)\wedge(7P \vee (Q\wedge 7Q))\wedge(Q \vee (P\wedge 7P))$	Contradicción
$\Leftrightarrow (P \vee 7Q)\wedge(7P \vee Q)\wedge (7P \vee 7Q)\wedge(Q \vee P)\wedge(Q \vee 7P)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (P \vee 7Q)\wedge(7P \vee Q)\wedge (7P \vee 7Q)\wedge(P \vee Q)\wedge(7P \vee Q)$	Conmutativa
$\Leftrightarrow (P \vee 7Q)\wedge(7P \vee Q)\wedge(7P \vee 7Q)\wedge(P \vee Q)$ FNCP	Idempotencia
Como la fórmula es una contradicción únicamente tiene FNCP.	

Comentarios:

Si la fórmula proposicional es una tautología, entonces únicamente contiene FNDP.
Si la fórmula proposicional es una contradicción, entonces únicamente contiene FNCP.
En cada término de las formas normales principales aparecen, en estricto orden alfabético, todas las atómicas contenidas en la fórmula proposicional original.
Compruebe su resultado usando el método de tabla de verdad.
Cuidado, no se confunda.

47. Obtenga las formas normales principales de la siguiente fórmula proposicional:

$(Q \rightarrow P) \vee (7P \wedge Q)$

Solución:	
Usando el método algebraico.	
Procedimiento	Ley o propiedad
Primero se obtiene la FNCP	
$(Q \rightarrow P) \vee (7P \wedge Q) \Leftrightarrow (7Q \vee P) \vee (7P \wedge Q)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow ((7Q \vee P) \vee 7P) \wedge ((7Q \vee P) \vee Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (7Q \vee (P \vee 7P)) \wedge ((7Q \vee Q) \vee P)$	Asoc. y conm.
$\Leftrightarrow (7Q \vee \mathbf{T}) \wedge (\mathbf{T} \vee P)$	Tautología
$\Leftrightarrow (\mathbf{T}) \wedge (\mathbf{T})$	Dominancia
$\Leftrightarrow \mathbf{T}$	Idemp. o domi.
De acuerdo con el desarrollo, la fórmula corresponde a	
una tautología. Por lo tanto, la fórmula no tiene FNCP.	
Obtengamos la FNDP.	
$(Q \rightarrow P) \vee (7P \wedge Q) \Leftrightarrow (7Q \vee P) \vee (7P \wedge Q)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \vee (7Q \vee P)$	Conmutativa
$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \vee (7Q \wedge \mathbf{T}) \vee (P \wedge \mathbf{T})$	Identidad
$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \vee (7Q \wedge (P \vee 7P)) \vee (P \wedge (Q \vee 7Q))$	Tautología
$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \vee (7Q \wedge P) \vee (7Q \wedge 7P) \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q) \vee (7P \wedge 7Q) \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q)$	Conmutativa
$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q) \vee (7P \wedge 7Q) \vee (P \wedge Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q) \vee (7P \wedge Q) \vee (7P \wedge 7Q)$	Conmutativa
Como la fórmula es una tautología, únicamente tiene	
FNDP.	

Comentarios:

Si la fórmula original es una tautología, entonces únicamente tiene FNDP.
No se confunda con el ejercicio 46.

48. Obtenga, por separado, las formas normales principales de la siguiente fórmula proposicional:

$$Q \wedge (P \vee 7Q)$$

Solución:	
Usando el método algebraico.	
Procedimiento	Ley o propiedad
Por separado, primero se obtiene la FNDP	
$Q \wedge (P \vee 7Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P) \vee (Q \wedge 7Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (Q \wedge P) \vee \mathbf{F}$	Contradicción
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee \mathbf{F}$	Conmutativa
$\Leftrightarrow (P \wedge Q)$	Identidad
Ahora se obtiene la FNCP	
$Q \wedge (P \vee 7Q) \Leftrightarrow (Q \vee \mathbf{F}) \wedge (P \vee 7Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow (Q \vee (P \wedge 7P)) \wedge (P \vee 7Q)$	Contradicción
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (7P \vee Q) \wedge (P \vee 7Q)$	Distributiva y conmutativa
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee 7Q) \wedge (7P \vee Q)$	Conmutativa

Comentarios:

Si la fórmula original es una contingencia, entonces contiene FNDP y FNCP.
La suma de términos de la FNDP ($\# t_{FNDP}$) y de la FNCP ($\# t_{FNCP}$) es igual a 2^n, donde n es el número de atómicas que contiene la fórmula.

$$\# t_{FNDP} + \# t_{FNCP} = 2^n$$

Para el ejercicio, n = 2

$$\# t_{FNDP} + \# t_{FNCP} = 1 + 3 = 2^2 = 4$$

49. Obtenga, a partir de cada una de ellas, las formas normales principales de la siguiente fórmula proposicional:

$Q \wedge (P \vee 7Q)$

Solución:	
Usando el método algebraico.	
Procedimiento.	Ley o propiedad
Si ya tenemos (del ejercicio 48)	
$Q \wedge (P \vee 7Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q)$ FNDP	
Tomamos la parte derecha y obtenemos la FNCP	
$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \vee \mathbf{F}) \wedge (Q \vee \mathbf{F})$	Identidad
$\Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge 7Q)) \wedge (Q \vee (P \wedge 7P))$	Contradicción
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee 7Q) \wedge (Q \vee P) \wedge (Q \vee 7P)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee 7Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (7P \vee Q)$	Conmutativa
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee 7Q) \wedge (7P \vee Q)$ FNCP	Idempotencia
Si ya tenemos	
$Q \wedge (P \vee 7Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee 7Q) \wedge (7P \vee Q)$ FNCP	
Tomamos la parte derecha y obtenemos la FNDP	
$(P \vee Q) \wedge (P \vee 7Q) \wedge (7P \vee Q) \Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge 7Q)) \wedge (7P \vee Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (P \vee \mathbf{F}) \wedge (7P \vee Q)$	Contradicción
$\Leftrightarrow P \wedge (7P \vee Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow (P \wedge 7P) \vee (P \wedge Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (\mathbf{F}) \vee (P \wedge Q)$	Contradicción
$\Leftrightarrow (P \wedge Q)$ FNDP	Identidad

Comentarios:

Recuerde:

Si la fórmula original es una contingencia, entonces contiene FNDP y FNCP.

La suma de términos de la FNDP y la FNCP es igual a 2^n, donde n es el número de atómicas que contiene la fórmula.

50. Obtenga, a partir de términos faltantes de cada una de ellas, las formas normales principales de la siguiente fórmula proposicional:

$Q \wedge (P \vee 7Q)$

Solución:
Por el método algebraico.
Procedimiento
Si ya tenemos (del ejercicio 48)
$Q \wedge (P \vee 7Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q)$ FNDP
A partir de esta equivalencia obtenemos la FNCP.
1° Los términos faltantes son:
$(P \wedge 7Q)$, $(7P \wedge Q)$ y $(7P \wedge 7Q)$
2° Relacione los términos faltantes con v:
$(P \wedge 7Q) \vee (7P \wedge Q) \vee (7P \wedge 7Q)$
3° Encierre todo entre paréntesis cuadrados y niéguelo:
$7[(P \wedge 7Q) \vee (7P \wedge Q) \vee (7P \wedge 7Q)]$
4° Aplique De Morgan y desarrolle:
$7[(P \wedge 7Q) \vee (7P \wedge Q) \vee (7P \wedge 7Q)] \Leftrightarrow 7(P \wedge 7Q) \wedge 7(7P \wedge Q) \wedge 7(7P \wedge 7Q)$
$\Leftrightarrow (7P \vee Q) \wedge (P \vee 7Q) \wedge (P \vee Q)$
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee 7Q) \wedge (7P \vee Q)$ FNCP
Por otra parte, si ya tenemos la FNCP
$Q \wedge (P \vee 7Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee 7Q) \wedge (7P \vee Q)$ obtenemos la FNDP
1° El término faltante es:
$(7P \vee 7Q)$
2° Relacione los términos faltantes con $\wedge$: Como sólo es uno, no es necesario.
$(7P \vee 7Q)$
3° Encierre todo entre paréntesis cuadrados y niéguelo:
$7[(7P \vee 7Q)]$
4° Aplique De Morgan y desarrolle:
$7[(7P \vee 7Q)] \Leftrightarrow (P \wedge Q)$ FNDP

Comentarios:

Este método es muy sencillo. Pero debe estar seguro de que la forma normal principal de la cual se parte esté correcta. En caso contrario, la otra forma estará incorrecta.

Para este ejercicio, Usted debe identificar las reglas, leyes o propiedades que se usaron.

51. Obtenga las formas normales principales de la siguiente fórmula proposicional:

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$$

Use los siguientes métodos:

a) Por medio del método algebraico obtenga la FNDP.
b) Por medio del método algebraico obtenga la FNCP.
c) A partir de la FNDP obtener la FNCP.
d) A partir de la FNCP obtener la FNDP.
e) Por tablas de verdad obtener la FNDP.
f) Por tablas de verdad obtener la FNCP.
g) A partir de los términos faltantes de la FNDP obtenga la FNCP.
h) A partir de los términos faltantes de la FNCP obtenga la FNDP.

Solución:

Método a: Por medio del método algebraico se obtiene la FNDP

Procedimiento	Ley o propiedad
$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (7P \vee Q) \wedge (7Q \vee R)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow ((7P \vee Q) \wedge 7Q) \vee ((7P \vee Q) \wedge R)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q) \vee (Q \wedge 7Q) \vee (7P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q) \vee (\ \mathbf{F}\ ) \vee (7P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	Contradicción
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q) \vee (7P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	Identidad
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q \wedge \mathbf{T}) \vee (7P \wedge R \wedge \mathbf{T}) \vee (Q \wedge R \wedge \mathbf{T})$	Identidad
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q \wedge (R \vee 7R)) \vee (7P \wedge R \wedge (Q \vee 7Q)) \vee (Q \wedge R \wedge (P \vee 7P))$	Tautología
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q \wedge R) \vee (7P \wedge 7Q \wedge 7R) \vee (7P \wedge R \wedge Q) \vee (7P \wedge R \wedge 7Q) \vee (Q \wedge R \wedge P) \vee (Q \wedge R \wedge 7P)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q \wedge R) \vee (7P \wedge 7Q \wedge 7R) \vee (7P \wedge Q \wedge R) \vee (7P \wedge 7Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (7P \wedge Q \wedge R)$	Conmutativa
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q \wedge R) \vee (7P \wedge 7Q \wedge 7R) \vee (7P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$ FNDP	Idempotencia

Método b: Por medio del método algebraico se obtiene la FNCP	
Procedimiento	**Ley o propiedad**
(P→Q)∧(Q→R) ⇔ (7PvQ)∧(7QvR)	Con-Dis
⇔ (7PvQv**F**) ∧ (7QvRv**F**)	Identidad
⇔ (7PvQv(R∧7R)) ∧ (7QvRv(P∧7P))	Contradicción
⇔ (7PvQvR)∧(7PvQv7R)∧(7QvRvP)∧(7QvRv7P)	Distributiva
⇔ (7PvQvR)∧(7PvQv7R)∧(Pv7QvR)∧(7Pv7QvR)	Conmutativa
FNCP	

Método c: Si ya tenemos la FNDP obtenemos la FNCP	
Procedimiento	**Ley o propiedad**
(7P∧7Q∧R)v(7P∧7Q∧7R)v(7P∧Q∧R)v(P∧Q∧R) ⇔	
⇔ (7P∧7Q∧(Rv7R)) v (Q∧R∧(Pv7P))	Distributiva
⇔ (7P∧7Q∧(**T**)) v (Q∧R∧(**T**))	Tautología
⇔ (7P∧7Q) v (Q∧R)	Identidad
⇔ ((7P∧7Q)vQ)∧((7P∧7Q)vR)	Distributiva
⇔ (7PvQ)∧(7QvQ)∧(7PvR)∧(7QvR)	Distributiva
⇔ (7PvQ)∧(**T**)∧(7PvR)∧(7QvR)	Tautología
⇔ (7PvQ)∧(7PvR)∧(7QvR)	Identidad
⇔ (7PvQv**F**)∧(7PvRv**F**)∧(7QvRv**F**)	Identidad
⇔ (7PvQv(R∧7R))∧(7PvRv(Q∧7Q))∧ (7QvRv(P∧7P))	Contradicción
⇔ (7PvQvR)∧(7PvQv7R)∧(7PvRvQ)∧ (7PvRv7Q)∧(7QvRvP)∧(7QvRv7P)	Distributiva
⇔ (7PvQvR)∧(7PvQv7R)∧(7PvQvR)∧ (7Pv7QvR)∧(Pv7QvR)∧(7Pv7QvR)	Conmutativa
⇔ (7PvQvR)∧(7PvQv7R)∧(7Pv7QvR)∧(Pv7QvR)	Idempotencia
⇔ (7PvQvR)∧(7PvQv7R)∧(Pv7QvR)∧(7Pv7QvR)	Conmutativa
FNCP	

Método d: Si ya tenemos la FNCP obtenemos la FNDP	
Procedimiento	**Ley o propiedad**
(7PvQvR)∧(7PvQv7R)∧(Pv7QvR)∧(7Pv7QvR) ⇔	
⇔ ((7PvQ)v(R∧7R)) ∧ ((7QvR) v(P∧7P))	Distributiva
⇔ ((7PvQ)v(**F**)) ∧ ((7QvR) v(**F**))	Contradicción
⇔ (7PvQ) ∧ (7QvR)	Identidad
⇔ ((7PvQ)∧7Q) v ((7PvQ)∧R)	Distributiva
⇔ (7P∧7Q) v (Q∧7Q) v (7P∧R) v (Q∧R)	Distributiva
⇔ (7P∧7Q) v (**F**) v (7P∧R) v (Q∧R)	Contradicción
⇔ (7P∧7Q) v (7P∧R) v (Q∧R)	Identidad
⇔ (7P∧7Q∧**T**) v (7P∧R∧**T**) v (Q∧R∧**T**)	Identidad
⇔ (7P∧7Q∧(Rv7R)) v (7P∧R∧(Qv7Q)) v (Q∧R∧(Pv7P))	Tautología
⇔ (7P∧7Q∧R) v (7P∧7Q∧7R) v (7P∧R∧Q) v (7P∧R∧7Q) v (Q∧R∧P) v (Q∧R∧7P)	Distributiva
⇔ (7P∧7Q∧R) v (7P∧7Q∧7R) v (7P∧Q∧R) v (7P∧7Q∧R) v (P∧Q∧R) v (7P∧Q∧R)	Conmutativa
⇔ (7P∧7Q∧R) v (7P∧7Q∧7R) v (7P∧Q∧R) v (P∧Q∧R) FNDP	Idempotencia

Método e: Por tablas de verdad obtener la FNDP.

Método f: Por tablas de verdad obtener la FNCP.

Con una sola tabla de verdad obtenemos las dos formas.

Se construye la tabla de verdad. Únicamente nos interesa la columna resultante.

P	Q	R	(P → Q)	∧	(Q → R)
T	T	T		**T**	
T	T	F		**F**	
T	F	T		**F**	
T	F	F		**F**	
F	T	T		**T**	
F	T	F		**F**	
F	F	T		**T**	
F	F	F		**T**	

Para encontrar los términos de la FNDP, revise los renglones verdaderos de la columna resultante de la tabla de verdad.

Para encontrar los términos de la FNCP, revise los renglones falsos de la columna resultante de la tabla de verdad.

Proceda a escribir cada uno de los términos.

P	Q	R	(P → Q)	∧	(Q→R)	FNDP	FNCP
T	T	T		**T**		(P∧Q∧R)	
T	T	F		**F**			(7Pv7QvR)
T	F	T		**F**			(7PvQv7R)
T	F	F		**F**			(7PvQvR)
F	T	T		**T**		(7P∧Q∧R)	
F	T	F		**F**			(Pv7QvR)
F	F	T		**T**		(7P∧7Q∧R)	
F	F	F		**T**		(7P∧7Q∧7R)	

FNDP: (P∧Q∧R) v (7P∧Q∧R) v (7P∧7Q∧R) v (7P∧7Q∧7R)

FNCP: (7Pv7QvR) ∧ (7PvQv7R) ∧ (7PvQvR) ∧ (Pv7QvR)

Método g: A partir de los términos faltantes de la FNDP obtenga la FNCP.

Vea la tabla de verdad.
Procedimiento
1° Los términos faltantes de la FNDP son:
(P∧Q∧7R),(P∧7Q∧R),(P∧7Q∧7R),(7P∧Q∧7R)
2° Relacione los términos faltantes con v:
(P∧Q∧7R)v(P∧7Q∧R)v(P∧7Q∧7R)v(7P∧Q∧7R)
3° Encierre todo entre paréntesis cuadrados y niéguelo:
7[(P∧Q∧7R)v(P∧7Q∧R)v(P∧7Q∧7R)v(7P∧Q∧7R)]
4° Aplique De Morgan y desarrolle:
7[(P∧Q∧7R)v(P∧7Q∧R)v(P∧7Q∧7R)v(7P∧Q∧7R)] ⇔
⇔7(P∧Q∧7R)∧7(P∧7Q∧R)∧7(P∧7Q∧7R)∧7(7P∧Q∧7R)
⇔ (7Pv7QvR)∧(7PvQv7R)∧(7PvQvR)∧(Pv7QvR) FNCP

Método h: A partir de los términos faltantes de la FNCP obtenga la FNDP.

Vea la tabla de verdad.
Procedimiento
1° Los términos faltantes de la FNCP son:
(7Pv7Qv7R),(Pv7Qv7R),(PvQv7R) y (PvQvR)
2° Relacione los términos faltantes con ∧:
(7Pv7Qv7R)∧(Pv7Qv7R)∧(PvQv7R)∧(PvQvR)
3° Encierre todo entre paréntesis cuadrados y niéguelo:
7[(7Pv7Qv7R)∧(Pv7Qv7R)∧(PvQv7R)∧(PvQvR)]
4° Aplique De Morgan y simplifique:
7[(7Pv7Qv7R)∧(Pv7Qv7R)∧(PvQv7R)∧(PvQvR)] ⇔
⇔ 7(7Pv7Qv7R)v7(Pv7Qv7R)v7(PvQv7R)v7(PvQvR)
⇔ (P∧Q∧R)v(7P∧Q∧R)v(7P∧7Q∧R)v(7P∧7Q∧7R) FNDP

Comentarios:

Este ejercicio es uno de los más completos.
Usted debe dominar todos los métodos, teniendo especial cuidado de aplicar las leyes o propiedades más adecuadas.
Cada método se puede usar para comprobar los resultados obtenidos por los otros métodos.
Sin duda alguna, el método algebraico es el más interesante, ya que nos permite aplicar todo lo que ya sabemos.
Domine los métodos. Cada método tiene sus características que lo hacen especial.
Recuerde, domine todo. Usted puede con ellos.

Varios detalles:

1. Por medio de tautologías o contradicciones se pueden meter o eliminar atómicas.
2. En cada término, aparecen todas las atómicas involucradas.
3. Por cuestión de claridad, dentro de cada término deben anotarse las atómicas en estricto orden alfabético.

Practique, realice más ejercicios. Por medio del método de tabla de verdad, Usted sabe de antemano cuáles son los términos de cada forma normal principal. Así que, invente cualquier ejercicio, obtenga los términos por tabla; ahora resuelva el ejercicio por el método algebraico. Ya conoce los resultados. Un pequeño detalle: si se equivoca al obtener la tabla, entonces TODO estará mal.

52. Obtenga las formas normales principales de la siguiente fórmula proposicional, usando los métodos que se especifican:

$$(7P \rightarrow R) \wedge (Q \rightleftarrows P)$$

Use los siguientes métodos:

a) Por el método algebraico obtenga la FNDP.
b) Por el método algebraico obtenga la FNCP.
c) A partir de la FNDP obtener la FNCP.
d) A partir de la FNCP obtener la FNDP.
e) Por el método de tablas de verdad obtener la FNDP.
f) Por el método de tablas de verdad obtener la FNCP.
g) A partir de los términos faltantes de la FNDP obtenga la FNCP.
h) A partir de los términos faltantes de la FNCP obtenga la FNDP.

Solución:

Método a: Por el método algebraico obtenga la FNDP.

A partir de la fórmula original se obtiene la FNDP	Ley o propiedad
	Escriba la ley que se usó
$(7P \rightarrow R) \wedge (Q \rightleftarrows P) \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \rightleftarrows P)$	
$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge ((Q \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow Q))$	
$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge ((7Q \vee P) \wedge (7P \vee Q))$	
$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (P \vee 7Q) \wedge (7P \vee Q)$	
$\Leftrightarrow (P \vee (R \wedge 7Q)) \wedge (7P \vee Q)$	
$\Leftrightarrow ((P \vee (R \wedge 7Q)) \wedge 7P) \vee ((P \vee (R \wedge 7Q)) \wedge Q)$	
$\Leftrightarrow (P \wedge 7P) \vee (7P \wedge 7Q \wedge R) \vee (P \wedge Q) \vee (R \wedge (7Q \wedge Q))$	
$\Leftrightarrow (\ \mathbf{F}\ ) \vee (7P \wedge 7Q \wedge R) \vee (P \wedge Q) \vee (R \wedge (\ \mathbf{F}\ ))$	
$\Leftrightarrow (\ \mathbf{F}\ ) \vee (7P \wedge 7Q \wedge R) \vee (P \wedge Q) \vee (\ \mathbf{F}\ )$	
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q \wedge R) \vee (P \wedge Q)$	
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \mathbf{T})$	
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge (R \vee 7R))$	
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge 7R)$ FNDP	

Método b: Por el método algebraico obtenga la FNCP.

A partir de la fórmula original se obtiene la FNCP	Ley o propiedad
$(7P \rightarrow R) \wedge (Q \rightleftarrows P) \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \rightleftarrows P)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge ((Q \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow Q))$	Bi-Con
$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge ((7Q \vee P) \wedge (7P \vee Q))$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (P \vee R \vee \mathbf{F}) \wedge (7Q \vee P \vee \mathbf{F}) \wedge (7P \vee Q \vee \mathbf{F})$	Identidad
$\Leftrightarrow (PvRv(Q \wedge 7Q)) \wedge (7QvPv(R \wedge 7R)) \wedge (7PvQv(R \wedge 7R))$	Contradicción
$\Leftrightarrow (PvRvQ) \wedge (PvRv7Q) \wedge (7QvPvR) \wedge (7QvPv7R) \wedge (7PvQvR)$ $\wedge (7PvQv7R)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (PvQvR) \wedge (Pv7QvR) \wedge (Pv7QvR) \wedge (Pv7Qv7R) \wedge (7PvQvR)$ $\wedge (7PvQv7R)$	Conmutativa
$\Leftrightarrow (PvQvR) \wedge (Pv7QvR) \wedge (Pv7Qv7R) \wedge (7PvQvR) \wedge (7PvQv7R)$	Idempotencia
FNCP	

Método c: A partir de la FNDP obtener la FNCP.

Tomo la FNDP y trabajo con ella.	Ley o propiedad
	Escriba la ley que se usó
$(7P \wedge 7Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge 7R) \Leftrightarrow$	
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge (Rv7R))$	
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \mathbf{T})$	
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q \wedge R) \vee (P \wedge Q)$	
$\Leftrightarrow ((7P \wedge 7Q \wedge R) \vee P) \wedge ((7P \wedge 7Q \wedge R) vQ)$	
$\Leftrightarrow (7PvP) \wedge (7QvP) \wedge (RvP) \wedge (7PvQ) \wedge (7QvQ) \wedge (RvQ)$	
$\Leftrightarrow (\ \mathbf{T}\ ) \wedge (7QvP) \wedge (RvP) \wedge (7PvQ) \wedge (\ \mathbf{T}\ ) \wedge (RvQ)$	
$\Leftrightarrow (7QvP) \wedge (RvP) \wedge (7PvQ) \wedge (RvQ)$	
$\Leftrightarrow (Pv7Q) \wedge (PvR) \wedge (7PvQ) \wedge (QvR)$	
$\Leftrightarrow (Pv7Qv\mathbf{F}) \wedge (PvRv\mathbf{F}) \wedge (7PvQv\mathbf{F}) \wedge (QvRv\mathbf{F})$	
$\Leftrightarrow (Pv7Qv(R \wedge 7R)) \wedge (PvRv(Q \wedge 7Q)) \wedge (7PvQv(R \wedge 7R))$ $\wedge (QvRv(P \wedge 7P))$	
$\Leftrightarrow (Pv7QvR) \wedge (Pv7Qv7R) \wedge (PvRvQ) \wedge (PvRv7Q) \wedge$ $(7PvQvR) \wedge (7PvQv7R) \wedge (QvRvP) \wedge (QvRv7P)$	
$\Leftrightarrow (Pv7QvR) \wedge (Pv7Qv7R) \wedge (PvQvR) \wedge (Pv7QvR) \wedge$ $(7PvQvR) \wedge (7PvQv7R) \wedge (PvQvR) \wedge (7PvQvR)$	
$\Leftrightarrow (Pv7QvR) \wedge (Pv7Qv7R) \wedge (PvQvR) \wedge (7PvQvR)$ $\wedge (7PvQv7R)$ FNCP	

Método d: A partir de la FNCP obtener la FNDP.

Tomo la FNCP y trabajo con ella.	Ley o propiedad
	Escriba la ley que se usó
(PvQvR)∧(Pv7QvR)∧(Pv7Qv7R)∧(7PvQvR)∧(7PvQv7R)⇔	
⇔(PvQvR)∧(Pv7QvR)∧(Pv7QvR)∧(Pv7Qv7R)∧ (7PvQvR)∧(7PvQv7R)	
⇔(PvRv(Q∧7Q))∧(Pv7Qv(R∧7R))∧(7PvQv(R∧7R))	
⇔(PvRv(**F**))∧(Pv7Qv(**F**))∧(7PvQv(**F**))	
⇔(PvR)∧(Pv7Q)∧(7PvQ)	
⇔(7PvQ)∧(Pv7Q)∧(PvR)	
⇔((7P∧(Pv7Q)) v (Q∧(Pv7Q)))∧(PvR)	
⇔((7P∧P)v(7P∧7Q)v(Q∧P)v(Q∧7Q))∧(PvR)	
⇔((**F**)v(7P∧7Q)v(Q∧P)v(**F**))∧(PvR)	
⇔((7P∧7Q)v(Q∧P))∧(PvR)	
⇔((7P∧7Q)∧(PvR)) v ((Q∧P)∧(PvR))	
⇔(7P∧7Q ∧P) v (7P∧7Q∧R) v (Q∧P∧P) v (Q∧P∧R)	
⇔(**F**) v (7P∧7Q∧R) v (Q∧P) v (Q∧P∧R)	
⇔ (7P∧7Q∧R) v (Q∧P) v (Q∧P∧R)	
⇔ (7P∧7Q∧R) v (P∧Q) v (P∧Q∧R)	
⇔ (7P∧7Q∧R) v(P∧Q∧R) v (P∧Q)	
⇔ (7P∧7Q∧R) v(P∧Q∧R) v (P∧Q∧**T**)	
⇔ (7P∧7Q∧R) v(P∧Q∧R) v (P∧Q∧(Rv7R))	
⇔ (7P∧7Q∧R) v(P∧Q∧R) v (P∧Q∧R)v(P∧Q∧7R)	
⇔ (7P∧7Q∧R) v(P∧Q∧R) v (P∧Q∧7R) FNDP	

Método e: Por tablas de verdad obtener la FNDP.

Método f: Por tablas de verdad obtener la FNCP.

Con una sola tabla de verdad obtenemos las dos formas.

Se construye la tabla de verdad. Sólo nos interesa la columna resultante.

P	Q	R	$(7P \rightarrow R)$	$\wedge$	$(Q \rightleftharpoons P)$
T	T	T		**T**	
T	T	F		**T**	
T	F	T		**F**	
T	F	F		**F**	
F	T	T		**F**	
F	T	F		**F**	
F	F	T		**T**	
F	F	F		**F**	

Para encontrar los términos de la FNDP revise los renglones verdaderos de la columna resultante de la tabla.

Para encontrar los términos de la FNCP revise los renglones falsos de la columna resultante de la tabla.

Proceda a escribir cada uno de los términos.

P	Q	R	$(7P \rightarrow R)$	$\wedge$	$(Q \rightleftharpoons P)$	FNDP	FNCP
T	T	T		**T**		$(P \wedge Q \wedge R)$	
T	T	F		**T**		$(P \wedge Q \wedge 7R)$	
T	F	T		**F**			$(7P v Q v 7R)$
T	F	F		**F**			$(7P v Q v R)$
F	T	T		**F**			$(P v 7Q v 7R)$
F	T	F		**F**			$(P v 7Q v R)$
F	F	T		**T**		$(7P \wedge 7Q \wedge R)$	
F	F	F		**F**			$(P v Q v R)$

FNDP: $(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge 7R) \vee (7P \wedge 7Q \wedge R)$

FNCP: $(7P v Q v 7R) \wedge (7P v Q v R) \wedge (P v 7Q v 7R) \wedge (P v 7Q v R) \wedge (P v Q v R)$

Método g: A partir de los términos faltantes de la FNDP obtenga la FNCP.

Vea la tabla de verdad.

Procedimiento

1° Los términos faltantes de la FNDP son:

(P∧7Q∧R),(P∧7Q∧7R),(7P∧Q∧R),(7P∧Q∧7R)y(7P∧7Q∧7R)

2° Relacione los términos faltantes con v:

(P∧7Q∧R)v(P∧7Q∧7R)v(7P∧Q∧R)v(7P∧Q∧7R)v(7P∧7Q∧7R)

3° Encierre todo entre paréntesis cuadrados y niéguelo:

7[(P∧7Q∧R)v(P∧7Q∧7R)v(7P∧Q∧R)v(7P∧Q∧7R)v(7P∧7Q∧7R)]

4° Aplique De Morgan y desarrolle:

7[(P∧7Q∧R)v(P∧7Q∧7R)v(7P∧Q∧R)v(7P∧Q∧7R)v(7P∧7Q∧7R)]⇔

⇔7(P∧7Q∧R)∧7(P∧7Q∧7R)∧7(7P∧Q∧R)∧7(7P∧Q∧7R)∧
7(7P∧7Q∧7R)

⇔(7PvQv7R)∧(7PvQvR)∧(Pv7Qv7R)∧(Pv7QvR)∧(PvQvR) FNCP

Método h: A partir de los términos faltantes de la FNCP obtenga la FNDP.

Vea la tabla de verdad.

Procedimiento

1° Los términos faltantes de la FNCP son:

(7Pv7Qv7R),(7Pv7QvR) y (PvQv7R)

2° Relacione los términos faltantes con ∧:

(7Pv7Qv7R)∧(7Pv7QvR)∧(PvQv7R)

3° Encierre todo entre paréntesis cuadrados y niéguelo:

7[(7Pv7Qv7R)∧(7Pv7QvR)∧(PvQv7R)]

4° Aplique De Morgan y desarrolle:

7[(7Pv7Qv7R)∧(7Pv7QvR)∧(PvQv7R)] ⇔

⇔ 7(7Pv7Qv7R) v 7(7Pv7QvR) v 7(PvQv7R)

⇔ (P∧Q∧R) v (P∧Q∧7R) v (7P∧7Q∧R) FNDP

Comentarios:

Este ejercicio es uno de los más completos.
Usted debe dominar todos los métodos, teniendo especial cuidado de aplicar las leyes o propiedades más adecuadas.
Cada método se puede usar para comprobar los resultados obtenidos por los otros métodos.
Sin duda alguna, el método algebraico es el más interesante, ya que nos permite aplicar todo lo que ya sabemos.
Domine los métodos. Cada método tiene sus características que lo hacen especial.
Recuerde, domine todo. Usted puede con ellos.

Varios detalles:

1. Por medio de tautologías o contradicciones se pueden meter o eliminar atómicas.
2. En cada término, aparecen todas las atómicas involucradas.
3. Por cuestión de claridad, dentro de cada término deben anotarse las atómicas en estricto orden alfabético.

Practique, realice más ejercicios. Por medio del método de tabla de verdad, Usted sabe de antemano cuáles son los términos de cada forma normal principal. Así que, invente cualquier ejercicio, obtenga los términos por tabla; ahora resuelva el ejercicio por el método algebraico. Ya conoce los resultados. Un pequeño detalle: si se equivoca al obtener la tabla, entonces TODO estará mal.

53. Demuestre la siguiente equivalencia. Use dos procedimientos.

$$(A \vee B) \wedge (7A \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (7A \wedge B)$$

Solución:

Usando el método algebraico.

Procedimiento	Ley o propiedad
Trabajo con la parte izquierda de la expresión:	
$(A\vee B)\wedge(7A\vee C)\Leftrightarrow((A\vee B)\wedge 7A)\vee((A\vee B)\wedge C)$	Distributiva
$\Leftrightarrow(A\wedge 7A)\vee(7A\wedge B)\vee(A\wedge C)\vee(B\wedge C)$	Distributiva y conmutativa
$\Leftrightarrow(\ \mathbf{F}\ )\vee(7A\wedge B)\vee(A\wedge C)\vee(B\wedge C)$	Contradicción
$\Leftrightarrow(7A\wedge B)\vee(A\wedge C)\vee(B\wedge C)$	Identidad
$\Leftrightarrow(7A\wedge B\wedge \mathbf{T})\vee(A\wedge C\wedge \mathbf{T})\vee(B\wedge C\wedge \mathbf{T})$	Identidad
$\Leftrightarrow(7A\wedge B\wedge(C\vee 7C))\vee(A\wedge C\wedge(B\vee 7B))\vee(B\wedge C\wedge(A\vee 7A))$	Complemento
$\Leftrightarrow(7A\wedge B\wedge C)\vee(7A\wedge B\wedge 7C)\vee(A\wedge C\wedge B)\vee(A\wedge C\wedge 7B)\vee$ $(B\wedge C\wedge A)\vee(B\wedge C\wedge 7A)$	Distributiva
$\Leftrightarrow(7A\wedge B\wedge C)\vee(7A\wedge B\wedge 7C)\vee(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge 7B\wedge C)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow(7A\wedge B\wedge(C\vee 7C))\vee(A\wedge C\wedge(B\vee 7B))$	Distributiva
$\Leftrightarrow(7A\wedge B\wedge(\ \mathbf{T}\ ))\vee(A\wedge C\wedge(\ \mathbf{T}\ ))$	Tautología
$\Leftrightarrow(7A\wedge B)\vee(A\wedge C)$	Identidad
$\Leftrightarrow(A\wedge C)\vee(7A\wedge B)$	Conmutativa

Busquemos otro camino para demostrar la equivalencia.
¿Cuál será una buena opción?
Piense.

En la siguiente sección encontrará una buena sugerencia.

Segundo procedimiento, usando el método algebraico.	
Para este ejercicio, ¿servirán las formas normales principales?	
Veamos:	
Procedimiento	Ley o propiedad
Trabajo con la parte izquierda de la expresión:	
(AvB)∧(7AvC)⇔((AvB)∧7A)v((AvB)∧C)	Distributiva
⇔(A∧7A)v(7A∧B)v(A∧C)v(B∧C)	Distributiva
⇔(**F**)v(7A∧B)v(A∧C)v(B∧C)	Contradicción
⇔(7A∧B)v(A∧C)v(B∧C)	Identidad
⇔(7A∧B∧**T**)v(A∧C∧**T**)v(B∧C∧**T**)	Identidad
⇔(7A∧B∧(Cv7C))v(A∧C∧(Bv7B))v(B∧C∧(Av7A))	Complemento
⇔(7A∧B∧C)v(7A∧B∧7C)v(A∧C∧B)v(A∧C∧7B)v (B∧C∧A) v(B∧C∧7A)	Distributiva
⇔(7A∧B∧C)v(7A∧B∧7C)v(A∧B∧C)v(A∧7B∧C)	Idempotencia
La expresión corresponde a la FNDP.	
Ahora, procedo a obtener la FNDP de la parte derecha de la misma expresión:	
(A∧C)v(7ª∧B) ⇔ (A∧C∧T)v(7A∧B∧T)	Identidad
⇔(A∧C∧(Bv7B))v(7A∧B∧(Cv7C))	Tautología
⇔(7A∧B∧C)v(7A∧B∧7C)v(A∧B∧C)v(A∧7B∧C)	Distributiva
Si de la parte izquierda y de la parte derecha de la expresión inicial, se obtiene la misma FNDP o FNCP, entonces se cumple la equivalencia.	

Comentarios:

Como se puede observar, las formas normales principales sirven para demostrar equivalencias.

En este momento Usted ya domina varios métodos.

Practique, use los conceptos.

3. Notación polaca y parentizada

3.1 Notación

3.2 Transformación de notaciones

54. A partir de cada expresión infija, obtenga la notación prefija (polaca prefija) y la notación sufija (posfija o polaca inversa).

a) $P \wedge 7Q$

b) $P \wedge (Q \vee 7R)$

c) $(P \vee ((7Q \wedge R) \wedge S))$

Inciso a)

Solución:

Procedimiento:

Infija: $P \wedge 7Q$ Prefija: $\wedge P\ 7Q$ Sufija: $P\ Q\ 7 \wedge$

Inciso b)

Solución:

Procedimiento:

Infija: $P \wedge (Q \vee 7R)$ Prefija: $\wedge P \vee Q\ 7\ R$ Sufija: $P\ Q\ R\ 7 \vee \wedge$

Inciso c)

Solución:

Procedimiento:

Infija: $(P\vee((7Q\wedge R)\wedge S))$ Prefija: $\vee P\wedge\wedge 7QRS$ Sufija: $PQ7R\wedge S\wedge\vee$

Comentarios:

Recuerde:

Notación infija:	Operando 1	Operador	Operando 2
Notación prefija:	Operador	Operando 1	Operando 2
Notación sufija:	Operando 1	Operando 2	Operador

Relacionando lo que ya sabemos: operador es lo mismo que conectivo y operando corresponde a la proposición.

Por otra parte, dos puntos importantes:

1. Cada atómica conserva su posición original, sin importar el tipo de notación que se trate.
2. Si la notación infija tiene paréntesis, la notación prefija y sufija elimina los paréntesis.

55. Dada la siguiente notación infija, encuentra su notación prefija. Posteriormente evalúe la notación prefija, asignando los siguientes valores de verdad a las variables (o atómicas):

Notación infija: $P \vee (Q \wedge R) \wedge S$

$P = F$

$Q = T$

$R = T$

$S = T$

Solución:

Procedimiento:

Primero, a partir de la notación infija encontramos la notación prefija:

Infija: $P \vee (Q \wedge R) \wedge S$ Prefija: $\vee P \wedge \wedge Q R S$

Ahora, aplicamos el algoritmo para evaluar notación prefija y obtenemos lo siguiente, paso a paso:

Forma prefija	Operador actual	Operandos actuales	Valor calculado
$\vee P \wedge \wedge Q R S$	$\wedge$	Q, R	$V_1 = T$
$\vee P \wedge \quad V_1 \quad S$	$\wedge$	V_1, S	$V_2 = T$
$\vee P \quad V_2$	$\vee$	P, V_2	$V_3 = T$
V_3	—	—	

Comentarios:

El algoritmo para evaluar expresiones prefijas está dado por:

1. Encuentre el operador más a la derecha.
2. Seleccione el (los) operando(s) inmediato(s) a la derecha del operador encontrado. Si el operador es unario (negación), entonces sólo tendrá un operando a la derecha. Si el operador es binario (como la disyunción), entonces tendrá dos operandos a la derecha.
3. Desarrolle la operación indicada.
4. Reemplace al operador y a su(s) operando(s).

Las instrucciones se repiten hasta que en la forma prefija quede un solo valor calculado.

56. Dada la siguiente notación infija, encuentra su notación sufija. Posteriormente evalúe la notación sufija, asignando los siguientes valores de verdad a las variables (o atómicas):

Notación infija: $P \vee (Q \wedge R) \wedge S$

$P = F$

$Q = T$

$R = T$

$S = T$

Solución:

Procedimiento:

Primero, a partir de la notación infija encontramos la notación sufija:

Infija: $P \vee (Q \wedge R) \wedge S$ Sufija: $P\,Q\,R \wedge S \wedge \vee$

Ahora, aplicamos el algoritmo para evaluar notación sufija y obtenemos lo siguiente, paso a paso:

Forma sufija	Operador actual	Operandos actuales	Valor calculado
$P\,Q\,R \wedge S \wedge \vee$	$\wedge$	Q, R	$V_1 = T$
$P\ V_1\ S \wedge \vee$	$\wedge$	V_1, S	$V_2 = T$
$P\ V_2\ \vee$	$\vee$	P, V_2	$V_3 = T$
V_3	—	—	

Comentarios:

El algoritmo para evaluar expresiones sufijas está dado por:

1. Encuentre el operador más a la izquierda.
2. Seleccione el (los) operando(s) inmediato(s) a la izquierda del operador encontrado. Si el operador es unario (negación), entonces sólo tendrá un operando a la izquierda. Si el operador es binario (como la disyunción), entonces tendrá dos operandos a la izquierda.
3. Desarrolle la operación indicada.
4. Reemplace al operador y a su(s) operando(s).

Las instrucciones se repiten hasta que en la forma sufija quede un solo valor calculado.

57. A partir de expresión dada obtenga las otras dos notaciones. Finalmente, evalúe la notación prefija con los siguientes valores:

Notación dada: $\to \to P\ Q \wedge 7\ R\ S$

$P = T$

$Q = F$

$R = F$

$S = T$

Solución:

Procedimiento:

Analizando la estructura de la expresión vemos que es prefija. Escribimos las dos restantes:

Prefija: $\to\to PQ\wedge 7RS$ Infija: $(P\to Q)\to(7R\wedge S)$ Sufija: $PQ\to R7S\wedge\to$

Ahora, aplicamos el algoritmo para evaluar notación prefija y obtenemos lo siguiente, paso a paso:

Forma prefija	Operador actual	Operandos actuales	Valor calculado
$\to\to PQ\wedge 7RS$	7	R	$V_1 = T$
$\to\to PQ\wedge V_1 S$	$\wedge$	V_1, S	$V_2 = T$
$\to\to PQ\ \ V_2$	$\to$	P, Q	$V_3 = F$
$\to\ V_3\ \ V_2$	$\to$	V_3, V_2	$V_4 = T$
V_4	—	—	

Comentarios:

Recuerde:

1. La jerarquía de los conectivos es muy importante. La negación es la de mayor jerarquía. Entonces la jerarquía queda de la siguiente manera: $7, \wedge, \vee, \to, \rightleftarrows$
2. El orden de las atómicas se conserva, no importando el tipo de notación.
3. Por claridad, se recomienda escribir la notación infija parentizada.
4. Las notaciones prefija y sufija no contienen paréntesis.
5. Para evaluar la notación se aplica el algoritmo correspondiente.

Está Usted listo para pasar a otros temas. Si tiene dudas, entonces estudie.

4. Elementos de inferencia para el cálculo proposicional

4.1 Método basado en tablas de verdad

4.2 Método de deducción paso a paso

58. Encuentre la notación simbólica del siguiente razonamiento:

Si Alemania gana el Campeonato Mundial de Fútbol entonces Argentina obtiene el segundo lugar. Argentina no obtiene el segundo lugar o Camerún es eliminado, y Camerún no es eliminado. No es el caso que: Alemania no gana el Campeonato Mundial de Fútbol y que Italia es eliminada. Por lo tanto, Italia no es eliminada.

Solución:
Se procede a escribir la notación simbólica. Primero se detectan a las proposiciones atómicas:

A: Alemania gana el Campeonato Mundial de Fútbol.
B: Argentina obtiene el segundo lugar.
C: Camerún es eliminado.
D: Italia es eliminada.

Premisas o hipótesis.

H_1: Si Alemania gana el Campeonato Mundial de Fútbol entonces Argentina obtiene el segundo lugar. $A \rightarrow B$

H_2: Argentina no obtiene el segundo lugar o Camerún es eliminado, y Camerún no es eliminado. $(\neg B \vee C) \wedge \neg C$

H_3: No es el caso que: Alemania no gana el Campeonato Mundial de Fútbol y que Italia es eliminada. $\neg(\neg A \wedge D)$

Conclusión.

C: Italia no es eliminada. $\neg D$

Finalmente, se escribe la notación simbólica completa:

H_1: $A \rightarrow B$
H_2: $(\neg B \vee C) \wedge \neg C$
H_3: $\neg(\neg A \wedge D)$
C: $\neg D$

Comentarios:
Si tiene alguna duda, repase la Tabla I. Formalización de la lógica proposicional.

59. Encuentre la notación simbólica del siguiente razonamiento:

Si Guillermo gana o Héctor gana, entonces Jorge pierde y Carlos pierde. Guillermo gana. Por lo tanto, Jorge pierde.

Solución:
Se procede a escribir la notación simbólica. Primero se detectan a las proposiciones atómicas:

G: Guillermo gana.
H: Héctor gana.
J: Jorge pierde.
C: Carlos pierde.

Premisas o hipótesis.

H_1: Si Guillermo gana o Héctor gana, entonces Jorge pierde y Carlos pierde. $(G \vee H) \rightarrow (J \wedge C)$

H_2: Guillermo gana. G

Conclusión.

C: Jorge pierde. J

Finalmente, se escribe la notación simbólica completa:

H_1: $(G \vee H) \rightarrow (J \wedge C)$
H_2: G

C: J

Comentarios:

Si tiene alguna duda, repase la Tabla I. Formalización de la lógica proposicional.
Tenga cuidado. No se confunda.

60. Encuentre la notación simbólica del siguiente razonamiento:

Si Paula estudia Estructuras Discretas entonces aprueba el examen. Si aprueba el examen entonces no repite el curso. Repite el curso. Paula estudia Estructuras Discretas o, Javier se va de vacaciones y Silvia se compra un auto. Por lo tanto, Javier se va de vacaciones y Silvia se compra un auto.

Solución:

Se procede a escribir la notación simbólica. Primero se detectan a las proposiciones atómicas:

A: Paula estudia Estructuras Discretas.
B: Aprueba el examen.
C: Repite el curso.
D: Javier se va de vacaciones.
E: Silvia se compra un auto.

Premisas o hipótesis.

H_1: Si Paula estudia Estructuras Discretas entonces aprueba el examen.
$A \rightarrow B$
H_2: Si aprueba el examen entonces no repite el curso. $B \rightarrow \neg C$
H_3: Repite el curso. C
H_4: Paula estudia Estructuras Discretas o, Javier se va de vacaciones y Silvia se compra un auto. $A \vee (D \wedge E)$

Conclusión.

C: Javier se va de vacaciones y Silvia se compra un auto. $D \wedge E$

Finalmente, se escribe la notación simbólica completa:

H_1: $A \rightarrow B$
H_2: $B \rightarrow \neg C$
H_3: C
H_4: $A \vee (D \wedge E)$
C: $D \wedge E$

Comentarios:

En algunos casos, tal vez será necesario reescribir algún elemento del razonamiento.

61. Determine, mediante tablas de verdad, la validez o falsedad del siguiente razonamiento.

Si Alemania gana el Campeonato Mundial de Fútbol entonces Argentina obtiene el segundo lugar. Argentina no obtiene el segundo lugar o Camerún es eliminado, y Camerún no es eliminado. No es el caso que: Alemania no gana el Campeonato Mundial de Fútbol y que Italia es eliminada. Por lo tanto, Italia no es eliminada.

Solución:

La notación simbólica completa:

H_1: $A \rightarrow B$

H_2: $(\neg B \vee C) \wedge \neg C$

H_3: $\neg(\neg A \wedge D)$

C: $\neg D$

Por el método de tablas de verdad, tenemos lo siguiente:

A	B	C	D	$(A \rightarrow B) \wedge ((\neg B \vee C) \wedge \neg C) \wedge (\neg(\neg A \wedge D))$	$\rightarrow$	$\neg D$
T	T	T	T	F	T	F
T	T	T	F	F	T	T
T	T	F	T	F	T	F
T	T	F	F	F	T	T
T	F	T	T	F	T	F
T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	F
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	T	F
F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	T	F
F	T	F	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T	T

$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \rightarrow C$ es una tautología, por consiguiente la conclusión si se puede deducir de las premisas. Por lo tanto, el razonamiento es válido.

Comentarios:

Recuerde, para que el razonamiento sea válido, $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge \ldots\ldots \wedge H_n \rightarrow C$ debe ser una tautología. Así, el razonamiento válido corresponde a una implicación tautológica.

62. Demuestre la validez del siguiente razonamiento. Use tablas de verdad.

H_1: 7P v Q
H_2: 7Q v R
C: R

Solución:

Procedemos a construir la tabla de verdad. Obtenemos lo siguiente:

P	Q	R	(7P v Q)∧(7Q v R)	→	R
T	T	T	T	**T**	T
T	T	F	F	**T**	F
T	F	T	F	**T**	T
T	F	F	F	**T**	F
F	T	T	T	**T**	T
F	T	F	F	**T**	F
F	F	T	T	**T**	T
F	F	F	T	**F**	F

Se observa que el último renglón de la columna resultante contiene un valor falso.
Así, $H_1 \wedge H_2 \rightarrow C$ no es una tautología, por lo que la conclusión no se puede deducir de las premisas. Por lo tanto, el razonamiento no es válido.

Comentarios:
Recuerde: Para que el razonamiento sea válido, $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge ..... \wedge H_n \rightarrow C$ debe ser una tautología.
En caso contrario, el razonamiento no es válido.

Formalmente, se debe escribir el símbolo ⇒ en lugar de la condicional →.

$$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge ..... \wedge H_n \Rightarrow C.$$

Sin embargo, recordemos que ⇒ es un símbolo de implicación, no un conectivo. Por tal motivo, al momento de generar la tabla de verdad, se sustituye ⇒ por →.

63. Demuestre la validez del siguiente razonamiento. Use tablas de verdad.

H_1: $(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)$
H_2: P
C: R

Solución:

Procedemos a construir la tabla de verdad. Obtenemos lo siguiente:

P	Q	R	S	$((P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)) \wedge P$	$\rightarrow$	R
T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	F	T	T
T	T	F	T	F	T	F
T	T	F	F	F	T	F
T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	F
T	F	F	F	F	T	F
F	T	T	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	T	F
F	T	F	F	F	T	F
F	F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	T	F
F	F	F	F	F	T	F

Se observa que la columna resultante contiene únicamente valores verdaderos. Así, $H_1 \wedge H_2 \rightarrow C$ es una tautología, por lo que la conclusión se puede deducir de las premisas. Por lo tanto, el razonamiento es válido.

Comentarios:

Recuerde, para que el razonamiento sea válido, $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge ..... \wedge H_n \rightarrow C$ debe ser una tautología. Así, el razonamiento válido corresponde a una implicación tautológica.

64. Demuestre la validez del siguiente razonamiento. Use tablas de verdad.

H_1: $(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)$
H_2: $P \rightarrow (R \wedge S)$
C: $R \vee Q$

Solución:

Procedemos a construir la tabla de verdad. Obtenemos lo siguiente:

P	Q	R	S	$((P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)) \wedge (P \rightarrow (R \wedge S))$	$\rightarrow$	$R \vee Q$
T	T	T	T	T	**T**	T
T	T	T	F	F	**T**	T
T	T	F	T	F	**T**	T
T	T	F	F	F	**T**	T
T	F	T	T	T	**T**	T
T	F	T	F	F	**T**	T
T	F	F	T	F	**T**	F
T	F	F	F	F	**T**	F
F	T	T	T	T	**T**	T
F	T	T	F	F	**T**	T
F	T	F	T	F	**T**	T
F	T	F	F	F	**T**	T
F	F	T	T	T	**T**	T
F	F	T	F	T	**T**	T
F	F	F	T	T	**F**	F
F	F	F	F	T	**F**	F

Se observa que la columna resultante contiene dos valores falsos.
Así, para este caso, $H_1 \wedge H_2 \rightarrow C$ no corresponde a una tautología, por lo que la conclusión no se puede deducir de las premisas. Por lo tanto, el razonamiento no es válido.

Comentarios:
Recuerde, para que el razonamiento sea válido, $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge ..... \wedge H_n \rightarrow C$ debe ser una tautología. Así, el razonamiento válido corresponde a una implicación tautológica.
En caso contrario, el razonamiento no es válido.

65. Demuestre la validez del siguiente razonamiento. Use tablas de verdad.

$H_1: P \rightarrow Q$
$H_2: P \wedge S$
$H_3: Q \rightarrow R$
C: R

Solución:

Procedemos a construir la tabla de verdad. Obtenemos lo siguiente:

P	Q	R	S	$((P \rightarrow Q) \wedge (P \wedge S) \wedge (Q \rightarrow R))$	$\rightarrow$	R
T	T	T	T	T	**T**	T
T	T	T	F	F	**T**	T
T	T	F	T	F	**T**	F
T	T	F	F	F	**T**	F
T	F	T	T	F	**T**	T
T	F	T	F	F	**T**	T
T	F	F	T	F	**T**	F
T	F	F	F	F	**T**	F
F	T	T	T	F	**T**	T
F	T	T	F	F	**T**	T
F	T	F	T	F	**T**	F
F	T	F	F	F	**T**	F
F	F	T	T	F	**T**	T
F	F	T	F	F	**T**	T
F	F	F	T	F	**T**	F
F	F	F	F	F	**T**	F

Se observa que la columna resultante contiene sólo valores verdaderos.
Así, para este caso, $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \rightarrow C$ corresponde a una tautología, por lo que la conclusión se puede deducir de las premisas. Por lo tanto, el razonamiento es válido.

Comentarios:

Recuerde, para que el razonamiento sea válido, $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge \ldots\ldots \wedge H_n \rightarrow C$ debe ser una tautología. En caso contrario, el razonamiento no es válido.

56. Demuestre la validez del siguiente razonamiento.
Use el método de deducción paso a paso, MDPP.

Si Alemania gana el Campeonato Mundial de Fútbol entonces Argentina obtiene el segundo lugar. Argentina no obtiene el segundo lugar o Camerún es eliminado, y Camerún no es eliminado. No es el caso que: Alemania no gana el Campeonato Mundial de Fútbol y que Italia es eliminada. Por lo tanto, Italia no es eliminada.

Solución:
Se procede a escribir la notación simbólica. Primero se detectan a las proposiciones atómicas:

A: Alemania gana el Campeonato Mundial de Fútbol.
B: Argentina obtiene el segundo lugar.
C: Camerún es eliminado.
D: Italia es eliminada.

Premisas o hipótesis.

H_1: Si Alemania gana el Campeonato Mundial de Fútbol entonces Argentina obtiene el segundo lugar. $A \rightarrow B$

H_2: Argentina no obtiene el segundo lugar o Camerún es eliminado, y Camerún no es eliminado. $(7B \vee C) \wedge 7C$

H_3: No es el caso que: Alemania no gana el Campeonato Mundial de Fútbol y que Italia es eliminada. $7(7A \wedge D)$

Conclusión.

C: Italia no es eliminada. $7D$

Se escribe la notación simbólica completa:

H_1: $A \rightarrow B$
H_2: $(7B \vee C) \wedge 7C$
H_3: $7(7A \wedge D)$
C: $7D$

A continuación se desarrolla el método de deducción paso a paso, MDPP:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_1	$A \rightarrow B$
2	P, H_2	$(7B \vee C) \wedge 7C$
3	T, 2, Eq	$(7B \wedge 7C) \vee (C \wedge 7C)$
4	T, 3, Eq	$(7B \wedge 7C) \vee$ **F**
5	T, 4, Eq	$7B \wedge 7C$
6	T, 5, I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$ $7B \wedge 7C \Rightarrow 7B$	$7B$
7	T, 5, I_2 $P \wedge Q \Rightarrow Q$ $7B \wedge 7C \Rightarrow 7C$	$7C$
8	T, 6, 1, I_{12} $7Q,\ P \rightarrow Q \Rightarrow 7P$ $7B,\ A \rightarrow B \Rightarrow 7A$	$7A$
9	P, H_3	$7(7A \wedge D)$
10	T, 9, Eq	$A \vee 7D$
11	T, 8, 10, I_{10} $7P,\ P \vee Q \Rightarrow Q$ $7A,\ A \vee 7D \Rightarrow 7D$	$7D$

Comentarios:

Se usan indistintamente los términos derivación y deducción. Nos quedamos con deducción.

Procedo a explicar las reglas del método de deducción paso a paso, MDPP.
La regla P sirve para meter una premisa en cualquier paso de la deducción.
La **regla T** sirve para implicar tautológicamente a una o varias expresiones obtenidas en algún paso de la deducción. También sirve para encontrar expresiones equivalentes. Las equivalencias se obtienen por el método algebraico. Así, la expresión **Eq** corresponde a una equivalencia.
En el paso 6 se hizo una instancia de sustitución, ya que, a partir de la I_1, se procedió a sustituir a la atómica por la expresión correspondiente, quedando de la siguiente manera:

T, 5, I_1
$P \wedge Q \Rightarrow P$
$7B \wedge 7C \Rightarrow 7B$

En lugar de P, escribimos 7B. En lugar de Q, escribimos 7C. A este proceso se le llama **instancia de sustitución**. La instancia de sustitución opera únicamente sobre implicaciones tautológicas. Si tiene alguna duda, una vez hecha la instancia de sustitución obtenga la tabla de verdad y ésta debe corresponder a una tautología. En caso contrario, cometió un error al sustituir.

57. Determine si el siguiente argumento es consistente lógicamente:

S: Paula estudia Estructuras Discretas entonces aprueba el examen. Si aprueba el examen entonces no repite el curso. Repite el curso. Paula estudia Estructuras Discretas o, Javier se va de vacaciones y Silvia se compra un auto. Por lo tanto, Javier se va de vacaciones y Silvia se compra un auto.

Solución:

Se procede a escribir la notación simbólica. Primero se detectan a las proposiciones atómicas:

A: Paula estudia Estructuras Discretas.
B: Aprueba el examen.
C: Repite el curso.
D: Javier se va de vacaciones.
E: Silvia se compra un auto.

Premisas o hipótesis.

H_1: Si Paula estudia Estructuras Discretas entonces aprueba el examen. $A \rightarrow B$.
H_2: Si aprueba el examen entonces no repite el curso. $B \rightarrow 7C$
H_3: Repite el curso. C
H_4: Paula estudia Estructuras Discretas o, Javier se va de vacaciones y Silvia se compra un auto. $A \vee (D \wedge E)$

Conclusión.

C: Javier se va de vacaciones y Silvia se compra un auto. $D \wedge E$

Se escribe la notación simbólica completa:

H_1: $A \rightarrow B$
H_2: $B \rightarrow 7C$
H_3: C
H_4: $A \vee (D \wedge E)$
C: $D \wedge E$

A continuación se desarrolla el método de deducción paso a paso, MDPP:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_1	$A \rightarrow B$
2	P, H_2	$B \rightarrow 7C$
3	T, 1, 2, I_{13} $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $A \rightarrow B, B \rightarrow 7C \Rightarrow A \rightarrow 7C$	$A \rightarrow 7C$
4	P, H_3	C
5	T, 4, 3, I_{12} $7Q,\ P \rightarrow Q \Rightarrow 7P$ $C,\ A \rightarrow 7C \Rightarrow 7A$	7A
6	P, H_4	$A \vee (D \wedge E)$
7	T, 5, 6, I_{10} $7P,\ P \vee Q \Rightarrow Q$ $7A,\ A \vee (D \wedge E) \Rightarrow D \wedge E$	$D \wedge E$

Comentarios:

Para el MDPP se usa la Tabla II de Leyes y propiedades, así como la Tabla III de Implicaciones tautológicas.
El MDPP requiere cierta habilidad para ir metiendo las hipótesis en algún orden.
Tomando como referencia la hipótesis que haya metido, a continuación introduzca aquella hipótesis que le permita establecer alguna relación, con lo que ya se tiene.
Para este caso, en el paso 1 se metió la H_1. Si compara las hipótesis restantes, la única que me permite establecer alguna relación con lo que ya se tiene, es la H_2.
De esta manera, en el paso 3 tenemos:

T, 1, 2, I_{13}
$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$
$A \rightarrow B, B \rightarrow 7C \Rightarrow A \rightarrow 7C$

Las instancias de sustitución resultan evidentes.
Todas las hipótesis deben intervenir en alguna implicación tautológica. Al final, debemos encontrar una expresión igual a la conclusión para que el razonamiento sea válido.

68. Exprese lógicamente las siguientes premisas y demuestre que la conclusión es correcta. Use el método de deducción paso a paso.

Si Guillermo gana o Héctor gana entonces Jorge pierde y Carlos pierde. Guillermo gana. Por lo tanto, Jorge pierde.

Solución:

Se procede a escribir la notación simbólica. Primero se detectan a las proposiciones atómicas:

P: Guillermo gana.
Q: Héctor gana.
R: Jorge pierde.
S: Carlos pierde.

Premisas o hipótesis.

H_1: Si Guillermo gana o Héctor gana entonces Jorge pierde y Carlos pierde.
$(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)$
H_2: Guillermo gana. P

Conclusión.

C: Jorge pierde. R

Finalmente, se escribe la notación simbólica completa:

H_1: $(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)$
H_2: P
C: R

A continuación se desarrolla el método de deducción paso a paso, MDPP:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_2	P
2	T, 1, I_3 $P \Rightarrow P \vee Q$ $P \Rightarrow P \vee Q$	$P \vee Q$
3	P, H_1	$(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)$
4	T, 2, 3, I_{11} $P,\ P \rightarrow Q \Rightarrow Q$ $(P \vee Q), (P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S) \Rightarrow (R \wedge S)$	$R \wedge S$
5	T, 4, I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$ $R \wedge S \Rightarrow R$	R

Comentarios:

Parece un ejercicio sencillo; sin embargo, no lo es. Veamos algunos aspectos importantes.
A partir de una expresión cualquiera, ésta puede ser implicada poniéndola en disyunción con lo que sea.
De esta manera se cumple lo siguiente:

T, 1, I_3
$P \Rightarrow P \vee Q$
$P \Rightarrow P \vee Q$

Para este ejemplo, es válido que P implique a $P \vee Q$.
No se confunda. Para el ejemplo fue una casualidad que P fuese sustituida por P y que Q fuese sustituida por Q.

Recuerde:
La instancia de sustitución opera únicamente sobre tautologías. En la instancia se sustituye a la atómica por lo que sea necesario.
Todas las hipótesis deben ser implicadas al menos una vez.
Si el razonamiento es válido, la última expresión debe corresponder a la conclusión.
Cualquier hipótesis o lo que se haya obtenido en algún paso del MDPP, puede ser usado las veces que sea necesario.

69. Demuestre la validez del siguiente razonamiento. Use el método de deducción paso a paso.

Si ahorro dinero entonces compro una casa y si trabajo con ahínco entonces progreso de inmediato. Si progreso de inmediato y compro una casa entonces soy una persona feliz. No soy una persona feliz. Por lo tanto, o no ahorro dinero o no trabajo con ahínco.

Solución:
Se procede a escribir la notación simbólica. Primero se detectan a las proposiciones atómicas:

P: Ahorro dinero.
Q: Compro una casa.
R: Trabajo con ahínco.
S: Progreso de inmediato.
W: Soy una persona feliz.

Premisas o hipótesis.
H_1: Si ahorro dinero entonces compro una casa y si trabajo con ahínco progreso de inmediato. $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)$

H_2: Si progreso de inmediato y compro una casa entonces soy una persona feliz. $(S \wedge Q) \rightarrow W$
H_3: No soy una persona feliz. 7W

Conclusión.
C: O no ahorro dinero o no trabajo con ahínco. 7P v 7R

Finalmente, se escribe la notación simbólica completa:

H_1: $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)$
H_2: $(S \wedge Q) \rightarrow W$
H_3: 7W
C: 7P v 7R

A continuación se desarrolla el método de deducción paso a paso, MDPP:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_3	7W
2	P, H_2	$(S \wedge Q) \rightarrow W$
3	T, 1, 2, I_{12} 7Q, $P \rightarrow Q \Rightarrow 7P$ 7W, $(S \wedge Q) \rightarrow W \Rightarrow 7(S \wedge Q)$	$7(S \wedge Q)$
4	T, 3, Eq	7S v 7Q
5	T, 4, Eq	7Q v 7S
6	T, 5, Eq	$Q \rightarrow 7S$
7	P, H_1	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)$
8	T, 7, I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$ $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$	$P \rightarrow Q$
9	T, 7, I_2 $P \wedge Q \Rightarrow P$ $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \Rightarrow (R \rightarrow S)$	$R \rightarrow S$
10	T, 8, 6, I_{13} $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $P \rightarrow Q, Q \rightarrow 7S \Rightarrow P \rightarrow 7S$	$P \rightarrow 7S$
11	T, 9, Eq	7R v S
12	T, 11, Eq	S v 7R
13	T, 12, Eq	$7S \rightarrow 7R$
14	T, 10, 13, I_{13} $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $P \rightarrow 7S, 7S \rightarrow 7R \Rightarrow P \rightarrow 7R$	$P \rightarrow 7R$
15	T, 14, Eq	7P v 7R

Comentarios:

Aparentemente, las cosas se complican. No es cierto. Vea, analice y actúe.
En el paso 3, se trabajó con lo obtenido en el paso 1 y con el paso 2. Se hizo una instancia de sustitución, ya que, a partir de la I_{12}, se procedió a sustituir a la atómica por la expresión correspondiente, quedando de la siguiente manera:

T, 1, 2, I_{12}
7Q, $P \rightarrow Q \Rightarrow 7P$
7W, $(S \wedge Q) \rightarrow W \Rightarrow 7(S \wedge Q)$

En lugar de Q, escribimos W. En lugar de P, escribimos $(S \wedge Q)$.

Una pregunta: ¿Cómo sabemos cuál hipótesis meter primero, cuál después y cuál al último? Piense. En el siguiente ejemplo le daré algunas pistas.

70. Demuestre que la conclusión se deduce de las premisas o hipótesis:

Si tomo el taxi y el taxi se descompone entonces falto a mi clase. Si falto a mi clase y me siento triste entonces no me iré a la fiesta. Si no apruebo el examen entonces me siento triste y me iré a la fiesta. Por lo tanto, si tomo el taxi y el taxi se descompone entonces apruebo el examen.

Solución:
Se procede a escribir la notación simbólica. Primero se detectan a las proposiciones atómicas:

P: Tomo el taxi.
Q: El taxi se descompone.
R: Falto a mi clase.
S: Me siento triste.
W: Me iré a la fiesta.
X: Apruebo el examen.

Premisas o hipótesis.

H_1: Si tomo el taxi y el taxi se descompone entonces falto a mi clase.
$(P \wedge Q) \rightarrow R$

H_2: Si falto a mi clase y me siento triste entonces no me iré a la fiesta.
$(R \wedge S) \rightarrow \neg W$

H_3: Si no apruebo el examen entonces me siento triste y me iré a la fiesta.
$\neg X \rightarrow (S \wedge W)$

Conclusión.

C: Si tomo el taxi y el taxi se descompone entonces apruebo el examen.
$(P \wedge Q) \rightarrow X$

Finalmente, se escribe la notación simbólica completa:

H_1: $(P \wedge Q) \rightarrow R$
H_2: $(R \wedge S) \rightarrow \neg W$
H_3: $\neg X \rightarrow (S \wedge W)$
C: $(P \wedge Q) \rightarrow X$

A continuación se desarrolla el método de deducción paso a paso, MDPP:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_2	$(R \wedge S) \rightarrow 7W$
2	T, 1, Eq	$7(R \wedge S) \vee 7W$
3	T, 2, Eq	$7R \vee 7S \vee 7W$
4	T, 3, Eq	$R \rightarrow (7S \vee 7W)$
5	T, 4, Eq	$R \rightarrow 7(S \wedge W)$
6	P, H_1	$(P \wedge Q) \rightarrow R$
7	T, 6, 5, I_{13} $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $(P \wedge Q) \rightarrow R, R \rightarrow 7(S \wedge W) \Rightarrow$ $(P \wedge Q) \rightarrow 7(S \wedge W)$	$(P \wedge Q) \rightarrow 7(S \wedge W)$
8	T, 7, Eq	$(S \wedge W) \rightarrow 7(P \wedge Q)$
9	P, H_3	$7X \rightarrow (S \wedge W)$
10	T, 9, 8, I_{13} $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $7X \rightarrow (S \wedge W), (S \wedge W) \rightarrow 7(P \wedge Q) \Rightarrow 7X$ $\rightarrow 7(P \wedge Q)$	$7X \rightarrow 7(P \wedge Q)$
11	T, 10, Eq	$(P \wedge Q) \rightarrow X$

Comentarios:

Lo que aparece a continuación, sólo pretende ayudar. No son reglas. Repito, tómelas como tips.

Primero, meta aquella hipótesis que menos se parezca a la conclusión; después, introduzca la premisa que se le parezca a lo que ya tiene en el proceso, para ser implicada. Siga así. Al final, meta aquella hipótesis que, en primera opción, se pueda vincular con lo que ya se tiene adentro y que se relacione con la conclusión. No es una regla, pero no falla.

Por otra parte, si al aplicar el MDPP encuentra una expresión igual a la conclusión y no ha implicado a TODAS las hipótesis, entonces el razonamiento no es válido.

1. Usando la deducción paso a paso, demuestre la validez del siguiente razonamiento:

Si México no gana el Hexagonal entonces los aficionados de Costa Rica celebran y a Javier Aguirre no le renuevan el contrato. Si México gana el Hexagonal entonces los mexicanos realizan una fiesta. Los aficionados de Costa Rica no celebran. Por lo tanto, los mexicanos realizan una fiesta.

Solución:

Se procede a escribir la notación simbólica. Primero se detectan a las proposiciones atómicas:

P: México gana el Hexagonal.
Q: Los aficionados de Costa Rica celebran.
R: A Javier Aguirre le renuevan el contrato.
S: Los mexicanos realizan una fiesta.

Premisas o hipótesis.

H_1: Si México no gana el Hexagonal entonces los aficionados de Costa Rica celebran y a Javier Aguirre no le renuevan el contrato.
$\neg P \rightarrow (Q \wedge \neg R)$

H_2: Si México gana el hexagonal entonces los mexicanos realizan una fiesta.
$P \rightarrow S$

H_3: Los aficionados de Costa Rica no celebran. $\neg Q$

Conclusión.

C: Los mexicanos realizan una fiesta. S

Finalmente, se escribe la notación simbólica completa:

H_1: $\neg P \rightarrow (Q \wedge \neg R)$
H_2: $P \rightarrow S$
H_3: $\neg Q$
C: S

A continuación se desarrolla el método de deducción paso a paso, MDPP:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_2	$P \rightarrow S$
2	T, 1, Eq	$7S \rightarrow 7P$
3	P, H_1	$7P \rightarrow (Q \wedge 7R)$
4	T, 2, 3, I_{13} $P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $7S \rightarrow 7P, 7P \rightarrow (Q \wedge 7R) \Rightarrow 7S \rightarrow (Q \wedge 7R)$	$7S \rightarrow (Q \wedge 7R)$
5	T, 4, Eq	$S \vee (Q \wedge 7R)$
6	T, 5, Eq	$(S \vee Q) \wedge (S \vee 7R)$
7	T, 6, I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$ $(S \vee Q) \wedge (S \vee 7R) \Rightarrow (S \vee Q)$	$S \vee Q$
8	T, 7, Eq	$7S \rightarrow Q$
9	P, H_3	$7Q$
10	T, 9, 8, I_{12} $7Q,\ P \rightarrow Q \Rightarrow 7P$ $7Q,\ 7S \rightarrow Q \Rightarrow S$	S

Comentarios:

En ocasiones, resulta indispensable encontrar expresiones equivalentes para proceder a acomodarlas, de tal manera que se puedan usar las implicaciones más adecuadas.

Piense, analice y actúe.

Siga los tips, no fallan.

2. Demuestre la validez del siguiente razonamiento. Use MDPP.

Si Juan estudia y no va a la fiesta y no aprueba el examen entonces Juan está triste. Juega ajedrez. Si Juan está triste y juega ajedrez entonces no lo regaña su papá. Si Juan está triste y no lo regaña su papá entonces Juan es feliz. Juan no es feliz. Por lo tanto, si Juan estudia y no va a la fiesta entonces aprueba el examen.

Solución:

Se procede a escribir la notación simbólica. Primero se detectan a las proposiciones atómicas:

P: Juan estudia.
Q: Va a la fiesta.
R: Aprueba el examen.
S: Juan está triste.
W: Juega ajedrez.
X: Lo regaña su papá.
Y: Juan es feliz.

Premisas o hipótesis.

H_1: Si Juan estudia y no va a la fiesta y no aprueba el examen entonces Juan está triste. $(P \wedge 7Q \wedge 7R) \rightarrow S$

H_2: Juega ajedrez. W

H_3: Si Juan está triste y juega ajedrez entonces no lo regaña su papá. $(S \wedge W) \rightarrow 7X$

H_4: Si Juan está triste y no lo regaña su papá entonces Juan es feliz. $(S \wedge 7X) \rightarrow Y$

H_5: Juan no es feliz. $7Y$

Conclusión.

C: Si Juan estudia y no va a la fiesta entonces aprueba el examen. $(P \wedge 7Q) \rightarrow R$

Finalmente, se escribe la notación simbólica completa:

H_1: $(P \wedge 7Q \wedge 7R) \rightarrow S$
H_2: W
H_3: $(S \wedge W) \rightarrow 7X$
H_4: $(S \wedge 7X) \rightarrow Y$
H_5: $7Y$
C: $(P \wedge 7Q) \rightarrow R$

A continuación se desarrolla el método de deducción paso a paso, MDPP:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_5	7Y
2	P, H_4	$(S \wedge 7X) \to Y$
3	T, 1, 2, I_{12} $7Q, \quad P \to Q \Rightarrow 7P$ $7Y, \ (S \wedge 7X) \to Y \Rightarrow 7(S \wedge 7X)$	$7(S \wedge 7X)$
4	T, 3, Eq	$7S \vee X$
5	T, 4, Eq	$S \to X$
6	P, H_3	$(S \wedge W) \to 7X$
7	T, 6, Eq	$X \to 7(S \wedge W)$
8	T, 5, 7, I_{13} $P \to Q, \ Q \to R \Rightarrow P \to R$ $S \to X, \ X \to 7(S \wedge W) \Rightarrow S \to 7(S \wedge W)$	$S \to 7(S \wedge W)$
9	T, 8, Eq	$7S \vee 7S \vee 7W$
10	T, 9, Eq	$7S \vee 7W$
11	T, 10, Eq	$S \to 7W$
12	P, H_2	W
13	T, 12, 11, I_{12} $7Q, \ P \to Q \Rightarrow 7P$ $W, \ S \to 7W \Rightarrow 7S$	7S
14	P, H_1	$(P \wedge 7Q \wedge 7R) \to S$
15	T, 13, 14, I_{12} $7Q, \quad P \to Q \Rightarrow 7P$ $7S, (P \wedge 7Q \wedge 7R) \to S \Rightarrow 7(P \wedge 7Q \wedge 7R)$	$7(P \wedge 7Q \wedge 7R)$
16	T, 15, Eq	$7P \vee Q \vee R$
17	T, 16, Eq	$(7P \vee Q) \vee R$
18	T, 17, Eq	$7(7P \vee Q) \to R$
19	T, 18, Eq	$(P \wedge 7Q) \to R$

Comentarios:

Revise, analice, pregunte.

Es posible eliminar algunos pasos, especialmente aquellos relacionados con las equivalencias.

Es preciso hacer y entender las instancias de sustitución, basadas en la Tabla III.

73. Demuestre que el siguiente razonamiento corresponde a una implicación tautológica. Use el método de deducción paso a paso.

Si Carlos estudia entonces aprueba el examen y si acredita el semestre entonces le compran un auto. Por lo tanto, si Carlos estudia o acredita el semestre entonces aprueba el examen o le compran un auto.

Solución:
Se procede a escribir la notación simbólica. Primero se detectan a las proposiciones atómicas:

P: Carlos estudia.
Q: Aprueba el examen.
R: Acredita el semestre.
S: Le compran un auto.

Premisas o hipótesis.

H_1: Si Carlos estudia entonces aprueba el examen y si acredita el semestre entonces le compran un auto.
$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)$

Conclusión.

C: Si Carlos estudia o acredita el semestre entonces aprueba el examen o le compran un auto.
$(P \vee R) \rightarrow (Q \vee S)$

Finalmente, se escribe la notación simbólica completa:

H_1: $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)$

C: $(P \vee R) \rightarrow (Q \vee S)$

Parece un caso especial, pues sólo contiene una hipótesis. No se preocupe, siga el método.

A continuación se desarrolla el método de deducción paso a paso, MDPP:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_1	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)$
2	T, 1, Eq	(7P v Q) ∧ (7R v S)
3	T, 2, I_3 P ⇒ P v Q [(7PvQ)∧(7RvS)] ⇒ [(7PvQ)∧(7RvS)] v (QvS)	[(7P v Q) ∧ (7R v S)] v (Q v S)
4	T, 3, Eq	((7PvQ) v (QvS)) ∧ ((7RvS) v (QvS))
5	T, 4, Eq	(7P v (QvS)) ∧ (7R v (QvS))
6	T, 5, Eq	(7P ∧ 7R) v (Q v S)
7	T, 6, Eq	7(7P ∧ 7R) → (Q v S)
8	T, 7, Eq	(P v R) → (Q v S)

Comentarios:

Sólo tiene una hipótesis. No importa. El método funciona.

74. Demuestre la siguiente implicación tautológica:

H_1: P → Q
H_2: R v S
H_3: S → 7Q
H_4: 7R
C: 7P

Solución:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_2	R v S
2	T, 1, Eq	7R → S
3	P, H_3	S → 7Q
4	T, 2, 3, I_{13} P → Q, Q → R ⇒ P → R 7R → S, S →7Q ⇒ 7R → 7Q	7R → 7Q
5	P, H_4	7R
6	T, 5, 4, I_{11} P, P → Q ⇒ Q 7R, 7R →7Q ⇒ 7Q	7Q
7	P, H_1	P → Q
8	T, 6, 7, I_{12} 7Q, P → Q ⇒ 7P 7Q, P → Q ⇒ 7P	7P

Busque otro camino:

# paso	Regla	Fórmula proposicional

Comentarios:

Resuelva el ejercicio siguiendo otro camino.

75. Determine si el siguiente argumento es consistente lógicamente:

H_1: $P \wedge Q \to R$
H_2: $7(P \vee R) \to S$
H_3: $P \to Q$
C: $7S \to R$

Solución:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_3	$P \to Q$
2	P, H_1	$P \wedge Q \to R$
3	T, 2, Eq	$7(P \wedge Q) \vee R$
4	T, 3, Eq	$Q \to (7P \vee R)$
5	T, 1, 4, I_{13} $P \to Q,\ Q \to\ \ R \Rightarrow P \to R$ $P \to Q,\ Q \to (7P \vee R) \Rightarrow P \to (7P \vee R)$	$P \to (7P \vee R)$
6	T, 5, Eq	$7P \vee 7P \vee R$
7	T, 6, Eq	$7R \to 7P$
8	P, H_2	$7(P \vee R) \to S$
9	T, 8, Eq	$P \vee (R \vee S)$
10	T, 9, Eq	$7P \to (R \vee S)$
11	T, 7, 10, I_{13} $P \to Q,\ Q \to\ \ R \Rightarrow P \to R$ $7R \to 7P,\ 7P \to (R \vee S) \Rightarrow 7R \to (R \vee S)$	$7R \to (R \vee S)$
12	T, 11, Eq	$7R \to S$
13	T, 12, Eq	$7S \to R$

Busque otro camino:

# paso	Regla	Fórmula proposicional

Comentarios:
Piense.

76. Demuestre que la conclusión se deduce de las premisas:

H_1: $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
H_2: $R \rightarrow 7R$
H_3: $(W \rightarrow P) \wedge (X \rightarrow Q)$
C: $W \rightarrow 7X$

Solución:

= paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_2	$R \rightarrow 7R$
2	T, 1, Eq	$7R \vee 7R$
3	T, 2, Eq	$7R$
4	P, H_1	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
5	T, 4, Eq	$7P \vee 7Q \vee R$
6	T, 5, Eq	$R \vee (7P \vee 7Q)$
7	T, 3, 6, I_{10} $7P,\ P \vee Q \Rightarrow Q$ $7R,\ R \vee (7P \vee 7Q) \Rightarrow (7P \vee 7Q)$	$7P \vee 7Q$
8	T, 7, Eq	$P \rightarrow 7Q$
9	P, H_3	$(W \rightarrow P) \wedge (X \rightarrow Q)$
10	T, 9, I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$ $(W \rightarrow P) \wedge (X \rightarrow Q) \Rightarrow (W \rightarrow P)$	$W \rightarrow P$
11	T, 9, I_2 $P \wedge Q \Rightarrow P$ $(W \rightarrow P) \wedge (X \rightarrow Q) \Rightarrow (X \rightarrow Q)$	$X \rightarrow Q$
12	T, 10, 8, I_{13} $P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $W \rightarrow P,\ P \rightarrow 7Q \Rightarrow W \rightarrow 7Q$	$W \rightarrow 7Q$
13	T, 11, Eq	$7Q \rightarrow 7X$
14	T, 12, 13, I_{13} $P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $W \rightarrow 7Q,\ 7Q \rightarrow 7X \Rightarrow W \rightarrow 7X$	$W \rightarrow 7X$

Busque otro camino:

# paso	Regla	Fórmula proposicional

Comentarios:

Cuando use la I_1, también aplique la I_2.

Como ya se dio cuenta, en ocasiones resulta indispensable obtener expresiones equivalentes para facilitar el uso de las implicaciones.

77. Demuestre la validez del siguiente razonamiento:

H_1: $P \rightarrow M$
H_2: $7M$
H_3: $P \vee Q$
H_4: $Q \rightarrow R$
C: $R \wedge (P \vee Q)$

Solución:

= paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_2	$7M$
2	P, H_1	$P \rightarrow M$
3	T, 1, 2, I_{12} $7Q,\ P \rightarrow Q \Rightarrow 7P$ $7M,\ P \rightarrow M \Rightarrow 7P$	$7P$
4	P, H_3	$P \vee Q$
5	T, 3, 4, I_{10} $7P,\ P \vee Q \Rightarrow Q$ $7P,\ P \vee Q \Rightarrow Q$	Q
6	P, H_4	$Q \rightarrow R$
7	T, 5, 6, I_{11} $P,\ P \rightarrow Q \Rightarrow Q$ $Q,\ Q \rightarrow R \Rightarrow R$	R
8	T, 7, 4, I_9 $P,\ Q \Rightarrow P \wedge Q$ $R,\ (P \vee Q) \Rightarrow R \wedge (P \vee Q)$	$R \wedge (P \vee Q)$

Busque otro camino:

# paso	Regla	Fórmula proposicional

Comentarios:
Como ve, es necesario practicar. Piense.

78. Demuestre que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas:

H_1: $7P \wedge Q$
H_2: $7P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
H_3: $7S \rightarrow 7(R \wedge Q)$
C: S

Solución:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_1	$7P \wedge Q$
2	T, 1, I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$ $7P \wedge Q \Rightarrow 7P$	$7P$
3	T, 1, I_2 $P \wedge Q \Rightarrow Q$ $7P \wedge Q \Rightarrow Q$	Q
4	P, H_2	$7P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
5	T, 2, 4, I_{11} $P,\ P \rightarrow Q \Rightarrow Q$ $7P,\ 7P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Rightarrow (Q \rightarrow R)$	$Q \rightarrow R$
6	P, H_3	$7S \rightarrow 7(R \wedge Q)$
7	T, 6, Eq	$S \vee 7R \vee 7Q$
8	T, 7, Eq	$7R \vee S \vee 7Q$
9	T, 8, Eq	$R \rightarrow (S \vee 7Q)$
10	T, 5, 9, I_{13} $P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $Q \rightarrow R,\ R \rightarrow (S \vee 7Q) \Rightarrow Q \rightarrow (S \vee 7Q)$	$Q \rightarrow (S \vee 7Q)$
11	T, 10, Eq	$7Q \vee S \vee 7Q$
12	T, 11, Eq	$7Q \vee S$
13	T, 3, 12, I_{10} $7P,\ P \vee Q \Rightarrow Q$ $Q,\ 7Q \vee S \Rightarrow S$	S

Busque otra solución:

# paso	Regla	Fórmula proposicional

Comentarios:

Practique. Entienda el proceso.

Por medio del uso de la regla P y la regla T, prácticamente se resuelven los problemas.

Adelante, Usted puede con todas las demostraciones. Piense.

79. Realice la deducción completamente formal de la conclusión a partir de las premisas dadas:

H_1: Q
H_2: 7R v P
H_3: P → (7Q v S)
C: R → S

Solución:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_2	7R v P
2	T, 1, Eq	R → P
3	P, H_3	P → (7Q v S)
4	T, 2, 3, I_{13} P → Q, Q → R ⇒ P → R R → P, P → (7Qv S) ⇒ R →(7Q v S)	R → (7Q v S)
5	T, 4, Eq	7R v (7Q v S)
6	T, 5, Eq	7Q v (7R v S)
7	P, H_1	Q
8	T, 7, 6, I_{10} 7P, P v Q ⇒ Q Q, 7Q v (7Rv S) ⇒ (7Rv S)	7R v S
9	T, 8, Eq	R → S

Busque otro camino:

# paso	Regla	Fórmula proposicional

Comentarios:

Siga practicando. Entienda el proceso. Piense.

80. Probar que la conclusión se puede deducir lógicamente de las premisas:

H_1: $P \rightarrow Q$
H_2: $Q \rightarrow 7R$
H_3: $7P \rightarrow S$
H_4: $S \rightarrow 7R$
H_5: $7R \rightarrow D$
C: D

Solución:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_1	$P \rightarrow Q$
2	P, H_2	$Q \rightarrow 7R$
3	T, 1, 2, I_{13} $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $P \rightarrow Q, Q \rightarrow 7R \Rightarrow P \rightarrow 7R$	$P \rightarrow 7R$
4	P, H_3	$7P \rightarrow S$
5	P, H_4	$S \rightarrow 7R$
6	T, 4, 5, I_{13} $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $7P \rightarrow S, S \rightarrow 7R \Rightarrow 7P \rightarrow 7R$	$7P \rightarrow 7R$
7	T, 6, Eq	$R \rightarrow P$
8	T, 7, 3, I_{13} $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $R \rightarrow P, P \rightarrow 7R \Rightarrow R \rightarrow 7R$	$R \rightarrow 7R$
9	T, 8, Eq	$7R \vee 7R$
10	T, 9, Eq	$7R$
11	P, H_5	$7R \rightarrow D$
12	T, 10, 11, I_{11} $P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$ $7R, 7R \rightarrow D \Rightarrow D$	D

Busque otro camino:

# paso	Regla	Fórmula proposicional

Comentarios:

Adelante, busque otros caminos usando otras implicaciones.

Como ya se dio cuenta, la expresión "validez de un razonamiento" se puede decir de diferentes maneras.

81. Dar una deducción formal del siguiente razonamiento:

H_1: $P \rightarrow Q$
H_2: $Q \rightarrow (7S \rightarrow R)$
H_3: $P \wedge 7R$
C: S

Solución:		
# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_3	$P \wedge 7R$
2	T, 1, I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$ $P \wedge 7R \Rightarrow P$	P
3	T, 1, I_2 $P \wedge Q \Rightarrow Q$ $P \wedge 7R \Rightarrow 7R$	7R
4	P, H_1	$P \rightarrow Q$
5	T, 2, 4, I_{11} $P,\ P \rightarrow Q \Rightarrow Q$ $P,\ P \rightarrow Q \Rightarrow Q$	Q
6	P, H_2	$Q \rightarrow (7S \rightarrow R)$
7	T, 5, 6, I_{11} $P,\ P \rightarrow Q \Rightarrow Q$ $Q,\ Q \rightarrow (7S \rightarrow R) \Rightarrow (7S \rightarrow R)$	$7S \rightarrow R$
8	T, 3, 7, I_{12} $7Q,\ P \rightarrow Q \Rightarrow 7P$ $7R,\ 7S \rightarrow R \Rightarrow S$	S

Busque otro camino:

# paso	Regla	Fórmula proposicional

Comentarios:

¿Ya domina el método? Si su respuesta es afirmativa, felicidades. En caso contrario practique más. Piense.

82. Demuestre la validez del siguiente razonamiento:

H_1: $P \rightarrow (7Q \vee R)$
H_2: $R \rightarrow S$
H_3: $Q \wedge 7S$
C: $7P$

Solución:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_3	$Q \wedge 7S$
2	T, 1, I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$ $Q \wedge 7S \Rightarrow Q$	Q
3	T, 1, I_2 $P \wedge Q \Rightarrow Q$ $Q \wedge 7S \Rightarrow 7S$	$7S$
4	P, H_2	$R \rightarrow S$
5	T, 3, 4, I_{12} $7Q,\ P \rightarrow Q \Rightarrow 7P$ $7S,\ R \rightarrow S \Rightarrow 7R$	$7R$
6	T, 2, 5, I_9 $P,\ Q \Rightarrow P \wedge Q$ $Q,\ 7R \Rightarrow Q \wedge 7R$	$Q \wedge 7R$
7	T, 6, Eq	$7(7Q \vee R)$
8	P, H_1	$P \rightarrow (7Q \vee R)$
9	T, 7, 8, I_{12} $7Q,\ P \rightarrow Q \Rightarrow 7P$ $7(7Q \vee R),\ P \rightarrow (7Q \vee R) \Rightarrow 7P$	$7P$

Busque otro camino:

= paso	Regla	Fórmula proposicional

...entarios:

... el método. Felicidades.

83. Demuestre que la conclusión es consecuencia lógica de las hipótesis:

H_1: $P \rightarrow Q$
H_2: P
H_3: $Q \rightarrow R$
C: R

Solución:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_2	P
2	P, H_1	$P \rightarrow Q$
3	T, 1, 2, I_{11} $P,\ P \rightarrow Q \Rightarrow Q$ $P,\ P \rightarrow Q \Rightarrow Q$	Q
4	P, H_3	$Q \rightarrow R$
5	T, 3, 4, I_{11} $P,\ P \rightarrow Q \Rightarrow Q$ $Q,\ Q \rightarrow R \Rightarrow R$	R

Busque otro camino:

# paso	Regla	Fórmula proposicional

Comentarios:

Un ejercicio sencillo.

4. Demuestre la validez del siguiente razonamiento:

H_1: $P \vee Q$
H_2: $Q \rightarrow S$
H_3: $P \rightarrow R$
C: $S \vee R$

Solución:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_1	$P \vee Q$
2	T, 1, Eq	$7P \rightarrow Q$
3	P, H_2	$Q \rightarrow S$
4	T, 2, 3, I_{13} $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $7P \rightarrow Q, Q \rightarrow S \Rightarrow 7P \rightarrow S$	$7P \rightarrow S$
5	T, 4, Eq	$7S \rightarrow P$
6	P, H_3	$P \rightarrow R$
7	T, 5, 6, I_{13} $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $7S \rightarrow P, P \rightarrow R \Rightarrow 7S \rightarrow R$	$7S \rightarrow R$
8	T, 7, Eq	$S \vee R$

Busque otro camino:

# paso	Regla	Fórmula proposicional

Comentarios:

No importa el número de hipótesis; todo tiene solución.

85. Realice una deducción formal del siguiente razonamiento:

H_1: $P \to Q$
H_2: $Q \to 7R$
H_3: R
H_4: $P \vee (S \wedge W)$
C: $S \wedge W$

Solución:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_1	$P \to Q$
2	P, H_2	$Q \to 7R$
3	T, 1, 2, I_{13} $P \to Q, Q \to R \Rightarrow P \to R$ $P \to Q, Q \to 7R \Rightarrow P \to 7R$	$P \to 7R$
4	P, H_3	R
5	T, 4, 3, I_{12} $7Q, P \to Q \Rightarrow 7P$ $R, P \to 7R \Rightarrow 7P$	$7P$
6	P, H_4	$P \vee (S \wedge W)$
7	T, 5, 6, I_{10} $7P, P \vee Q \Rightarrow Q$ $7P, P \vee (S \wedge W) \Rightarrow (S \wedge W)$	$S \wedge W$

Busque otro camino:

# paso	Regla	Fórmula proposicional

Comentarios:

Como ve, existen algunas implicaciones de la tabla que se usan más que otras.

36. Demuestre que la conclusión se deduce lógicamente de las premisas:

H_1: $P \rightarrow Q$
H_2: $(P \vee Q) \vee (R \wedge S)$
H_3: $7Q \wedge S$
C: R

Solución:

paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_3	$7Q \wedge S$
2	T, 1, I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$ $7Q \wedge S \Rightarrow 7Q$	$7Q$
3	T, 1, I_2 $P \wedge Q \Rightarrow Q$ $7Q \wedge S \Rightarrow S$	S
4	P, H_1	$P \rightarrow Q$
5	T, 2, 4, I_{12} $7Q, P \rightarrow Q \Rightarrow 7P$ $7Q, P \rightarrow Q \Rightarrow 7P$	$7P$
	T, 5, 2, I_9 $P, Q \Rightarrow P \wedge Q$ $7P, 7Q \Rightarrow 7P \wedge 7Q$	$7P \wedge 7Q$
	T, 6, Eq	$7(P \vee Q)$
	P, H_2	$(P \vee Q) \vee (R \wedge S)$
	T, 7, 8, I_{10} $7P, P \vee Q \Rightarrow Q$ $7(P \vee Q), (P \vee Q) \vee (R \wedge S) \Rightarrow (R \wedge S)$	$R \wedge S$
	T, 9, I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$ $R \wedge S \Rightarrow R$	R

Busque otro camino:

# paso	Regla	Fórmula proposicional

Comentarios:

Trate de encontrar diferentes caminos.

87. Pruebe que la conclusión es correcta:

H_1: R
H_2: Q ∨ 7P
H_3: 7(R ∧ Q)
H_4: P ∨ (R ∧ S)
C: R ∧ S

Solución:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_1	R
2	P, H_3	7(R ∧ Q)
3	T, 2, Eq	7R ∨ 7Q
4	T, 1, 3, I_{10} 7P, P ∨ Q ⇒ Q R, 7R ∨ 7Q ⇒ 7Q	7Q
5	P, H_2	Q ∨ 7P
6	T, 4, 5, I_{10} 7P, P ∨ Q ⇒ Q 7Q, Q ∨ 7P ⇒ 7P	7P
7	P, H_4	P ∨ (R ∧ S)
8	T, 6, 7, I_{10} 7P, P ∨ Q ⇒ Q 7P, P ∨ (R ∧ S) ⇒ (R ∧ S)	R ∧ S

Busque otro camino:

# paso	Regla	Fórmula proposicional

Comentarios: Como ve, es necesario practicar. Piense. Compare este ejercicio con el ejercicio 85. Encuentre alguna similitud y saque sus conclusiones.

88. Realice una deducción completamente formal de la conclusión a partir de las hipótesis dadas:

H_1: $(P \wedge Q) \rightarrow R$
H_2: $7R \vee S$
H_3: $7S$
C: $7P \vee 7Q$

Solución:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_3	$7S$
2	P, H_2	$7R \vee S$
3	T, 2, Eq	$S \vee 7R$
4	T, 1, 3, I_{10} $7P,\ P \vee Q \Rightarrow Q$ $7S,\ S \vee 7R \Rightarrow 7R$	$7R$
5	P, H_1	$(P \wedge Q) \rightarrow R$
6	T, 4, 5, I_{12} $7Q,\ P \rightarrow Q \Rightarrow 7P$ $7R,\ (P \wedge Q) \rightarrow R \Rightarrow 7(P \wedge Q)$	$7(P \wedge Q)$
7	T, 6, Eq	$7P \vee 7Q$

Busque otro camino:

# paso	Regla	Fórmula proposicional

Comentarios:

Busque otros caminos.

89. Demuestre la deducción formal del siguiente razonamiento:

H_1: 7C → (7A ∨ 7B)
H_2: 7C ∨ D
H_3: 7(7B ∨ D)
C: 7A

Solución:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_3	7(7B ∨ D)
2	T, 1, Eq	B ∧ 7D
3	T, 2, I_1 P ∧ Q ⇒ P B ∧ 7D ⇒ B	B
4	T, 2, I_2 P ∧ Q ⇒ Q B ∧ 7D ⇒ 7D	7D
5	P, H_2	7C ∨ D
6	T, 5, Eq	D ∨ 7C
7	T, 4, 6, I_{10} 7P, P ∨ Q ⇒ Q 7D, D ∨ 7C ⇒ 7C	7C
8	P, H_1	7C → (7A ∨ 7B)
9	T, 7, 8, I_{11} P, P → Q ⇒ Q 7C, 7C → (7A ∨ 7B) ⇒ 7A ∨ 7B	7A ∨ 7B
10	T, 9, Eq	7B ∨ 7A
11	T, 3, 10, I_{10} 7P, P ∨ Q ⇒ Q B, 7B ∨ 7A ⇒ 7A	7A

Busque otro camino:

# paso	Regla	Fórmula proposicional

Comentarios:

Ya es Usted un experto. Vamos a complicar el método.

90. Demuestre que la conclusión se deduce de las hipótesis:

H_1: P
H_2: $7Q \rightarrow 7P$
H_3: $7R \rightarrow 7Q$
C: R

Solución:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_3	$7R \rightarrow 7Q$
2	P, H_2	$7Q \rightarrow 7P$
3	T, 1, 2, I_{13} $P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $7R \rightarrow 7Q, 7Q \rightarrow 7P \Rightarrow 7R \rightarrow 7P$	$7R \rightarrow 7P$
4	P, H_1	P
5	T, 4, 3, I_{12} $7Q,\ P \rightarrow Q \Rightarrow 7P$ $P, 7R \rightarrow 7P \Rightarrow R$	R
	Otro camino	
# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_1	P
2	P, H_2	$7Q \rightarrow 7P$
3	T, 1, 2, I_{12} $7Q,\ P \rightarrow Q \Rightarrow 7P$ $P, 7Q \rightarrow 7P \Rightarrow Q$	Q
4	P, H_3	$7R \rightarrow 7Q$
5	T, 3, 4, I_{12} $7Q,\ P \rightarrow Q \Rightarrow 7P$ $Q, 7R \rightarrow 7Q \Rightarrow R$	R

Comentarios:

Obtener equivalencias ayuda mucho para poder encontrar expresiones que se ajusten a alguna de las implicaciones de la tabla.

90. Demuestre que la conclusión se deduce de las hipótesis:

H_1: P
H_2: $\neg Q \rightarrow \neg P$
H_3: $\neg R \rightarrow \neg Q$
C: R

Solución:

Nº paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_3	$\neg R \rightarrow \neg Q$
2	P, H_2	$\neg Q \rightarrow \neg P$
3	T, 1, 2, I_{13} $P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $\neg R \rightarrow \neg Q, \neg Q \rightarrow \neg P \Rightarrow \neg R \rightarrow \neg P$	$\neg R \rightarrow \neg P$
4	P, H_1	P
5	T, 4, 3, I_{12} $\neg Q,\ P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$ $P, \neg R \rightarrow \neg P \Rightarrow R$	R
	Otro camino	
Nº paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_1	P
2	P, H_2	$\neg Q \rightarrow \neg P$
3	T, 1, 2, I_{12} $\neg Q,\ P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$ $P, \neg Q \rightarrow \neg P \Rightarrow Q$	Q
4	P, H_3	$\neg R \rightarrow \neg Q$
5	T, 3, 4, I_{12} $\neg Q,\ P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$ $Q, \neg R \rightarrow \neg Q \Rightarrow R$	R

…entarios:

…er equivalencias ayuda mucho para poder encontrar expresiones que se ajusten a … de las implicaciones de la tabla.

91. Demuestre que la conclusión se deduce de las hipótesis:

H_1: P
H_2: $7Q \rightarrow 7P$
H_3: $7R \rightarrow 7Q$
C: R

Restricción: Para el caso de las implicaciones, trate de usar únicamente el silogismo disyuntivo.

Solución:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_1	P
2	P, H_2	$7Q \rightarrow 7P$
3	T, 2, Eq	$P \rightarrow Q$
4	T, 3, Eq	$7P \vee Q$
5	T, 1, 4, I_{10} $7P,\ P \vee Q \Rightarrow Q$ $P,\ 7P \vee Q \Rightarrow Q$	Q
6	P, H_3	$7R \rightarrow 7Q$
7	T, 6, Eq	$Q \rightarrow R$
8	T, 7, Eq	$7Q \vee R$
9	T, 5, 8, I_{10} $7P,\ P \vee Q \Rightarrow Q$ $Q,\ 7Q \vee R \Rightarrow R$	R

Comentarios:

Si usted analizó detenidamente el ejercicio, podrá concluir que prácticamente cualquier ejercicio donde nos pidan demostrar la validez de un razonamiento, esto se puede lograr usando principalmente el silogismo disyuntivo. Sin embargo, para tener éxito, es necesario realizar una serie de equivalencias para acomodar nuestras expresiones de tal manera que podamos incluir la I_{10}.

Practique, haga más ejercicios. Compruebe el hecho de que, en general, muchas de las demostraciones de validez de razonamiento se pueden lograr usando el silogismo disyuntivo.

92. Demuestre la validez del siguiente razonamiento:

H_1: $P \wedge Q \wedge 7U$
H_2: $P \rightarrow (Q \rightarrow (R \vee S))$
H_3: $R \rightarrow A$
H_4: $S \rightarrow U$
C: A

Solución:

= paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_1	$P \wedge Q \wedge 7U$
2	T, 1, I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$ $P \wedge Q \wedge 7U \Rightarrow P$	P
3	T, 1, I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$ $P \wedge Q \wedge 7U \Rightarrow Q$	Q
4	T, 1, I_2 $P \wedge Q \Rightarrow Q$ $P \wedge Q \wedge 7U \Rightarrow 7U$	7U
5	P, H_4	$S \rightarrow U$
6	T, 4, 5, I_{12} $7Q, P \rightarrow Q \Rightarrow 7P$ $7U, S \rightarrow U \Rightarrow 7S$	7S
7	P, H_2	$P \rightarrow (Q \rightarrow (R \vee S))$
8	T, 2, 7, I_{11} $P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$ $P, P \rightarrow (Q \rightarrow (R \vee S)) \Rightarrow Q \rightarrow (R \vee S)$	$Q \rightarrow (R \vee S)$
9	T, 3, 8, I_{11} $P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$ $Q, Q \rightarrow (R \vee S) \Rightarrow (R \vee S)$	$R \vee S$
	T, 9, Eq	$S \vee R$
	T, 6, 10, I_{10} $7P, P \vee Q \Rightarrow Q$ $7S, S \vee R \Rightarrow R$	R
12	P, H_3	$R \rightarrow A$
13	T, 11, 12, I_{11} $P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$ $R, R \rightarrow A \Rightarrow A$	A

Busque otro camino:

# paso	Regla	Fórmula proposicional

Comentarios:
Muy bien, ya es Usted un experto.

93. Demuestre la validez del siguiente razonamiento:

H_1: $P \wedge Q \wedge 7U$
H_2: $P \rightarrow (Q \rightarrow (R \vee S))$
H_3: $R \rightarrow A$
H_4: $S \rightarrow U$
C: A

Restricción: Para el caso de las implicaciones, trate de usar, hasta donde sea posible, el silogismo disyuntivo.

Solución:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_1	$P \wedge Q \wedge 7U$
2	T, 1, I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$ $P \wedge Q \wedge 7U \Rightarrow P$	P
3	T, 1, I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$ $P \wedge Q \wedge 7U \Rightarrow Q$	Q
4	T, 1, I_2 $P \wedge Q \Rightarrow Q$ $P \wedge Q \wedge 7U \Rightarrow 7U$	$7U$
5	P, H_4	$S \rightarrow U$
6	T, 5, Eq	$7S \vee U$
7	T, 6, Eq	$U \vee 7S$
8	T, 4, 7, I_{10} $7P,\ P \vee Q \Rightarrow Q$ $7U,\ U \vee 7S \Rightarrow 7S$	$7S$
9	P, H_2	$P \rightarrow (Q \rightarrow (R \vee S))$
10	T, 9, Eq	$7P \vee 7Q \vee R \vee S$
11	T, 2, 10, I_{10} $7P,\ P \vee Q \Rightarrow Q$ $P,\ 7P \vee (7Q \vee R \vee S) \Rightarrow 7Q \vee R \vee S$	$7Q \vee R \vee S$
12	T, 11, Eq	$S \vee 7Q \vee R$
13	T, 8, 12, I_{10} $7P,\ P \vee Q \Rightarrow Q$ $7S,\ S \vee (7Q \vee R) \Rightarrow 7Q \vee R$	$7Q \vee R$
14	T, 3, 13, I_{10} $7P,\ P \vee Q \Rightarrow Q$ $Q,\ 7Q \vee R \Rightarrow R$	R
15	P, H_3	$R \rightarrow A$
16	T, 15, Eq	$7R \vee A$

17	T, 14, 16, I_{10} 7P, $P \vee Q \Rightarrow Q$ R, 7R $\vee A \Rightarrow A$	A

Busque otro camino:

# paso	Regla	Fórmula proposicional

Comentarios:

Como ve, la validez de un razonamiento se puede demostrar usando silogismo disyuntivo.

Es cierto que se requieren más pasos, pero la mayor parte son equivalencias, las cuales Usted ya domina.

Analice, haga más ejercicios. Compruebe el hecho de que prácticamente muchos ejercicios, para demostrar la validez del razonamiento, se pueden realizar usando silogismo disyuntivo.

Muy bien, ya es Usted un experto.

94. Demuestre la validez del siguiente razonamiento:

H_1: $P \rightarrow Q$
H_2: $(7Q \vee R) \wedge 7R$
H_3: $7(7P \wedge S)$
C: $7S$

Solución:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_1	$P \rightarrow Q$
2	P, H_2	$(7Q \vee R) \wedge 7R$
3	T, 2, I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$ $(7Q \vee R) \wedge 7R \Rightarrow 7Q \vee R$	$7Q \vee R$
4	T, 2, I_2 $P \wedge Q \Rightarrow Q$ $(7Q \vee R) \wedge 7R \Rightarrow 7R$	$7R$
5	T, 3, Eq	$Q \rightarrow R$
6	T, 1, 5, I_{13} $P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$	$P \rightarrow R$
7	P, H_3	$7(7P \wedge S)$
8	T, 7, Eq	$7P \rightarrow 7S$
9	T, 6, Eq	$7R \rightarrow 7P$
10	T, 9, 8, I_{13} $P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $7R \rightarrow 7P,\ 7P \rightarrow 7S \Rightarrow 7R \rightarrow 7S$	$7R \rightarrow 7S$
11	T, 4, 10, I_{11} $P,\ P \rightarrow Q \Rightarrow Q$ $7R,\ 7R \rightarrow 7S \Rightarrow 7S$	$7S$

Busque otro camino:

# paso	Regla	Fórmula proposicional

Comentarios:

A medida que avanzamos, los ejercicios parecen más sencillos.

Como puede observar, en algunos casos es factible no usar los paréntesis. Sin embargo, tenga cuidado, para evitar errores.

95. Demuestre la validez del siguiente razonamiento:

H_1: $P \rightarrow Q$
H_2: $(7Q \vee R) \wedge 7R$
H_3: $7(7P \wedge S)$
C: $7S$

Restricción: Para el caso de las implicaciones, trate de usar únicamente el silogismo disyuntivo, hasta donde sea posible.

Solución:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_2	$(7Q \vee R) \wedge 7R$
2	T, 1, Eq	$(7Q \wedge 7R) \vee (R \wedge 7R)$
3	T, 2, Eq	$(7Q \wedge 7R) \vee$ **F**
4	T, 3, Eq	$7Q \wedge 7R$
5	T, 4, I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$ $7Q \wedge 7R \Rightarrow 7Q$	$7Q$
6	T, 4, I_2 $P \wedge Q \Rightarrow Q$ $7Q \wedge 7R \Rightarrow 7Q$	$7R$
7	P, H_1	$P \rightarrow Q$
8	T, 7, Eq	$7P \vee Q$
9	T, 8, Eq	$Q \vee 7P$
10	T, 5, 9, I_{10} $7P,\ P \vee Q \Rightarrow Q$ $7Q,\ Q \vee 7P \Rightarrow 7P$	$7P$
11	P, H_3	$7(7P \wedge S)$
12	T, 11, Eq	$P \vee 7S$
13	T, 10, 12, I_{10} $7P,\ P \vee Q \Rightarrow Q$ $7P,\ P \vee 7S \Rightarrow 7S$	$7S$

Busque otro camino:

# paso	Regla	Fórmula proposicional

Comentarios:
Muy bien. Elabore un resumen con lo aprendido. Le puede ser útil.

96. Demuestre la deducción formal del siguiente razonamiento:

H_1: $P \rightarrow (7Q \vee R)$
H_2: $R \rightarrow S$
H_3: $Q \wedge 7S$
C: $7P$

Solución:

# paso	Regla	Fórmula proposicional
1	P, H_3	$Q \wedge 7S$
2	T, 1, I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$ $Q \wedge 7S \Rightarrow Q$	Q
3	T, 1, I_2 $P \wedge Q \Rightarrow Q$ $Q \wedge 7S \Rightarrow 7S$	$7S$
4	P, H_2	$R \rightarrow S$
5	T, 3, 4, I_{12} $7Q,\ P \rightarrow Q \Rightarrow 7P$ $7S,\ R \rightarrow S \Rightarrow 7R$	$7R$
6	T, 2, 5, I_9 $P,\ Q \Rightarrow P \wedge Q$ $Q,\ 7R \Rightarrow Q \wedge 7R$	$Q \wedge 7R$
7	T, 6, Eq	$7(7Q \vee R)$
8	P, H_1	$P \rightarrow (7Q \vee R)$
9	T, 7, 8, I_{12} $7Q,\ P \rightarrow Q \Rightarrow 7P$ $7(7Q \vee R),\ P \rightarrow (7Q \vee R) \Rightarrow 7P$	$7P$

Busque otro camino:

# paso	Regla	Fórmula proposicional

Comentarios:

Ya es Usted un experto. Vamos a aprender otro método.

5. Prueba automática de teoremas

5.1 Razonamiento automático

5.2 Prueba automática de teoremas

97. Demuestre la validez del siguiente razonamiento. Use el método de prueba automática de teoremas:

H_1: $(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)$
H_2: P
C: R

Solución:

# paso	Regla	Expresión
1		$\Rightarrow [((P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)) \wedge (P)] \rightarrow (R)$
1 si 2	$\Rightarrow \rightarrow$	$[((P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)) \wedge (P)] \Rightarrow R$
2 si 3	$\wedge \Rightarrow$	$(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)$, $P \Rightarrow R$
3 si 4	$\rightarrow\Rightarrow$	$(R \wedge S)$, $P \Rightarrow R$
y 5		, $(P) \Rightarrow (P \vee Q), (R)$
4 si 6	$\wedge \Rightarrow$	$(R),(S)$, $(P) \Rightarrow (R)$ Axioma 1
5 si 7	$\Rightarrow \vee$	, $(P) \Rightarrow (P), (Q), (R)$ Axioma 2
		Como todas las expresiones libres de conectivos son axiomas,
		entonces el razonamiento es válido.

Comentarios:

Prueba Automática de Teoremas, PAT, es un método que permite demostrar la validez de los razonamientos. Consiste en encontrar axiomas. Para lograrlo, se deben eliminar todos los conectivos que aparecen en las expresiones. Cada expresión libre de conectivos debe ser un axioma. Para que esa expresión libre de conectivos sea un axioma debe tener al menos una atómica en común, tanto en el antecedente como en el consecuente.

antecedente $\Rightarrow$ consecuente

Ahora usaremos el símbolo de implicación $\Rightarrow$ para relacionar el antecedente con el consecuente.
Para que el razonamiento sea válido, todas, si todas las expresiones libres de conectivos deben ser axiomas. Si encontramos una expresión libre de conectivos que no sea axioma, en ese momento se detiene el método y se concluye que el razonamiento no es válido. Los conectivos se eliminan aplicando la Tabla IV. Reglas para Prueba Automática de Teoremas, PAT.
El proceso involucra tres columnas. Cada columna especifica lo siguiente: la primera, el número del paso o renglón; la segunda, la regla usada y la tercera, la expresión obtenida.
A continuación se explica todo el proceso:

Proceso:

Siempre, en el paso 1, todo se escribe en el consecuente. Para esto, tomemos al símbolo de implicación $\Rightarrow$ como punto de referencia. Las premisas se escriben relacionándolas con conjunciones, si existe más de una premisa o hipótesis. El resultado se encierra entre paréntesis cuadrados. A continuación se escribe una condicional y, finalmente, la conclusión.

$$\Rightarrow [((P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)) \wedge (P)] \rightarrow (R)$$

El paso **1 si 2**, significa que trabajamos con el paso 1 para generar la expresión 2. Así, en el paso **1 si 2** el primer conectivo que se elimina es precisamente la condicional, la cual se encuentra en el consecuente.

$$\Rightarrow [((P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)) \wedge (P)] \rightarrow (R)$$

Entonces, en 1 si 2, buscamos la regla que nos permita eliminar una condicional que se encuentra en el consecuente. La regla está dada por:

Regla $\Rightarrow\rightarrow$: Si $X, \alpha \Rightarrow Y, \beta, \gamma$, entonces $\alpha \Rightarrow \beta,\ X \rightarrow Y,\ \gamma$.

Dos aclaraciones:
Primera: Las únicas letras que nos interesan en cada regla son aquellas identificadas con X y Y, ya que son las letras que representan a las expresiones que contienen al conectivo que se pretende eliminar. Las letras griegas α, β y γ, corresponden a expresiones que no interesan, debido a que PAT elimina a un solo conectivo por paso.

Segunda: Trataremos de no usar muchos paréntesis, tanto en las premisas o hipótesis y conclusión, sólo aquellos que resulten indispensables.

Continuamos.
¿Qué dice la regla?
Entramos por el consecuente, por eso se escribe **1 si 2**.

Identificamos cuál es X y cuál es Y.
La conjunción de las premisas $[((P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)) \wedge (P)]$ corresponde a X.
(R) corresponde a Y.

La regla dice que a X la pasamos al antecedente y que Y permanece en el consecuente, quedando asi:

$$[((P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)) \wedge (P)] \Rightarrow R$$

Cada nuevo renglón que se obtenga, se revisa para ver si está libre de conectivos. No es el caso. Seguimos.

En el paso 2 si 3, el conectivo que se elimina es la conjunción que relaciona a la H_1 y a la H_2 y que se encuentran en el antecedente. De acuerdo con la regla:

Regla $\wedge \Rightarrow$: Si $X, Y, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma$, entonces $\alpha, X \wedge Y, \beta \Rightarrow \gamma$.

Identificamos a X y Y.
H_1 dada por $(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)$ corresponde a X y por otra parte H_2 dada por P corresponde a Y. Se elimina $\wedge$ y se escribe una coma.

$$(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S) \ , \ P \Rightarrow R$$

En el paso 3 si 4, se elimina una condicional que se encuentra en el antecedente, condicional que relaciona a los dos paréntesis $(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)$. ¿Qué dice la regla?

Regla $\rightarrow \Rightarrow$: Si $Y, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma$ y $\alpha, \beta \Rightarrow X, \gamma$, entonces $\alpha, X \rightarrow Y, \beta \Rightarrow \gamma$.

Identificamos a X y Y.
X está dada por $(P \vee Q)$ y Y está dada por $(R \wedge S)$.

Se generan dos nuevas expresiones dadas por los pasos 4 y 5.
En **3 si 4** se deja a Y, $(R \wedge S)$, en el antecedente y todo lo demás permanece igual.
En 5 se pasa a X, $(P \vee Q)$, al consecuente y todo lo demás permanece igual. El renglón 5 se mete a un arreglo de pendientes.

5			

Se trabaja con el renglón 4 y se genera el renglón 6, dado por **4 si 6**. De 4 se determina que el siguiente conectivo a eliminar corresponde a una conjunción que se encuentra en el antecedente, $(R \wedge S)$. ¿Qué dice la regla?

Regla $\wedge \Rightarrow$: Si $X, Y, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma$, entonces $\alpha, X \wedge Y, \beta \Rightarrow \gamma$.

Identificamos a X y Y.
X corresponde a R y Y corresponde a S. Se elimina $\wedge$ y se escribe una coma.

$$(R),(S) \ , \ (P) \Rightarrow (R)$$

Ha encontrado una expresión libre de conectivos.

Como es una expresión libre de conectivos entonces se revisa si corresponde a un axioma. Para lograr esto es necesario que esta expresión tenga una atómica en común, tanto en el antecedente como en el consecuente. En efecto, R aparece en el antecedente y en el consecuente. Por lo tanto, corresponde a un axioma, al cual identificamos como **Axioma 1**.

Revisamos si el arreglo de pendientes tiene elementos. El arreglo no está vacío. Procedemos a sacar el número del paso con el cual vamos a trabajar. Aplicamos el algoritmo de últimas entradas primeras salidas. Entonces el renglón que se extrae del arreglo es el número 5.
Eso quiere decir que ahora trabajaremos con el renglón 5, que contiene:

$$, \ (P) \Rightarrow (P \vee Q), (R).$$

Ahora el arreglo queda vacío:

Revisando el renglón 5, el conectivo que se elimina es una disyunción,

$(P \vee Q)$

que se encuentra en el consecuente. ¿Qué dice la regla?

$$\text{Regla} \Rightarrow \vee : \text{Si } \alpha \Rightarrow X, Y, \beta, \gamma, \text{ entonces } \alpha \Rightarrow \beta, X \vee Y, \gamma.$$

Identificamos a X y Y.
X corresponde a P y Y corresponde a Q. Se elimina $\vee$ y se escribe una coma.

$$, \ (P) \Rightarrow (P), (Q), (R)$$

Ha encontrado una expresión libre de conectivos:

Como es una expresión libre de conectivos entonces se revisa si corresponde a un axioma. Para lograr esto es necesario que tenga una atómica en común, tanto en el antecedente como en el consecuente. En efecto, P aparece en el antecedente y en el consecuente. Por lo tanto, corresponde a un axioma, al cual identificamos como **Axioma 2**.

Se revisa el arreglo de pendientes. El arreglo está vacío. Esto quiere decir que el proceso ha terminado.

Por lo tanto, el razonamiento es válido.

Recuerde: PAT es un método para demostrar la validez de un razonamiento. PAT consiste, primero en generar expresiones libres de conectivos. Para eliminar los conectivos se utiliza la Tabla IV. Los conectivos se eliminan de izquierda a derecha; inicia con los externos.
Segundo: Todas las expresiones libres de conectivos deben ser axiomas. Una expresión libre de conectivos es un axioma si esa expresión contiene al menos una atómica en común.
Si alguna expresión libre de conectivos no es axioma entonces el razonamiento no es válido.

Siga el método de manera automática.

98. Demuestre la validez del siguiente razonamiento. Use el método de prueba automática de teoremas:

H_1: $P \rightarrow Q$
H_2: $Q \rightarrow R$
C: $P \rightarrow R$

Solución:

# paso	Regla	Expresión	
1		$\Rightarrow [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R)$	
1 si 2	$\Rightarrow\rightarrow$	$[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \Rightarrow (P \rightarrow R)$	
2 si 3	$\wedge\Rightarrow$	$(P \rightarrow Q), (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R)$	
3 si 4	$\rightarrow\Rightarrow$	$(Q), (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R)$	
y 5		$, (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P), (P \rightarrow R)$	
4 si 6	$\rightarrow\Rightarrow$	$(Q), \quad (R) \Rightarrow (P \rightarrow R)$	
y 7		$(Q), \quad \Rightarrow (Q), (P \rightarrow R)$	
6 si 8	$\Rightarrow\rightarrow$	$(P), (Q), \quad (R) \Rightarrow (R)$	Axioma 1
7 si 9	$\Rightarrow\rightarrow$	$(P), (Q), \quad \Rightarrow (Q), (R)$	Axioma 2
5 si 10	$\rightarrow\Rightarrow$	$, \quad (R) \Rightarrow (P), (P \rightarrow R)$	
y 11		$, \quad \Rightarrow (Q), (P), (P \rightarrow R)$	
10 si 12	$\Rightarrow\rightarrow$	$(P), \quad (R) \Rightarrow (P), (R)$	Axioma 3
11 si 13	$\Rightarrow\rightarrow$	$, \quad (P) \Rightarrow (Q), (P), (R)$	Axioma 4
		Como todas las expresiones libres de conectivos son	
		axiomas, entonces el razonamiento es válido.	

Comentarios:

El proceso involucra tres columnas. Cada columna especifica lo siguiente: la primera, el número del paso; la segunda, la regla usada y la tercera, la expresión obtenida.

En la columna correspondiente a la expresión obtenida, por claridad, trate de mantener a las atómicas en la misma posición. Para lograrlo, deje los huecos que se vayan generando. En caso de cometer algún error, resulta más fácil encontrarlo.

A continuación se explica todo el proceso.

Proceso:

Siempre, en el paso 1, todo se escribe en el consecuente. Las premisas se escriben relacionándolas con conjunciones. Se encierran entre paréntesis cuadrados. A continuación se escribe una condicional y, finalmente, la conclusión.
El primer conectivo que se elimina es precisamente la condicional, la cual se encuentra en el consecuente. Así, en el paso 1 si 2, de acuerdo con la regla:

Regla $\Rightarrow\rightarrow$: Si $X, \alpha \Rightarrow Y, \beta, \gamma$, entonces $\alpha \Rightarrow \beta,\ X \rightarrow Y,\ \gamma$.

X corresponde a la conjunción de las premisas y Y corresponde a la conclusión.
En el paso 2 si 3, el conectivo que se elimina es la conjunción que relaciona a la H_1 y a la H_2 y que se encuentra en el antecedente. De acuerdo con la regla:

Regla $\wedge\Rightarrow$: Si $X, Y, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma$, entonces $\alpha,\ X \wedge Y,\ \beta \Rightarrow \gamma$.

H_1 corresponde a X y Y está dada por H_2. Se elimina $\wedge$ y se escribe una coma.
En el paso 3 si 4, se elimina una condicional que se encuentra en el antecedente, $(P \rightarrow Q)$.
¿Qué dice la regla?

Regla $\rightarrow\Rightarrow$: Si $Y, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma$ y $\alpha, \beta \Rightarrow X, \gamma$, entonces $\alpha,\ X \rightarrow Y,\ \beta \Rightarrow \gamma$.

X corresponde a **P** y Y corresponde a **Q**.
Se generan dos nuevas expresiones dadas por los pasos 4 y 5.
En 4 se deja a Y (**Q**) en el antecedente y todo lo demás permanece igual.
En 5 se pasa a X (**P**) al consecuente y todo lo demás permanece igual. El renglón 5 se mete a un arreglo de pendientes.

5				

Se trabaja con el renglón 4. El siguiente conectivo a eliminar es otra condicional que se encuentra en el antecedente, $(Q \rightarrow R)$. ¿Qué dice la regla?

Regla $\rightarrow\Rightarrow$: Si $Y, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma$ y $\alpha, \beta \Rightarrow X, \gamma$, entonces $\alpha,\ X \rightarrow Y,\ \beta \Rightarrow \gamma$.

X corresponde a **Q** y Y corresponde a **R**.
Se generan dos nuevas expresiones dadas por los pasos 6 y 7.
En 6 se deja a Y (**R**) en el antecedente y todo lo demás permanece igual.
En 7 se pasa a X (**Q**) al consecuente y todo lo demás permanece igual. El renglón 7 se mete a un arreglo de pendientes.

5	7			

Se trabaja con el renglón 6. El siguiente conectivo a eliminar es otra condicional que se encuentra en el consecuente, $(P \rightarrow R)$. ¿Qué dice la regla?

Regla $\Rightarrow\rightarrow$: Si $X, \alpha \Rightarrow Y, \beta, \gamma$, entonces $\alpha \Rightarrow \beta,\ X \rightarrow Y,\ \gamma$.

X corresponde a **P** y Y corresponde a **R**.
Se generan una sola expresión dada por el paso 8, donde se escribe una coma en lugar de la condicional, quedando la siguiente expresión:

$(P), (Q)\ ,\qquad (R) \Rightarrow (R)$

Esta es una expresión libre de conectivos. ¿Es un axioma?

Si, porque tiene una variable, **R**, en común, tanto en el antecedente como en el consecuente. Por lo tanto, corresponde a un axioma al cual identificamos como **Axioma 1**.

Y continuamos con el proceso.

Revisamos si el arreglo de pendientes tiene elementos. El arreglo no está vacío. Procedemos a sacar el número del paso con el cual vamos a trabajar.

5	7			

Aplicamos el algoritmo de últimas entradas primeras salidas. Entonces el renglón que se extrae del arreglo es el número 7.

5				

Eso quiere decir que ahora trabajaremos con el renglón 7, que contiene:

$$(Q)\ ,\qquad \Rightarrow (Q), (P \rightarrow R)$$

Revisando el renglón 7, el conectivo que se elimina es una condicional,

$(P \rightarrow R)$

que se encuentra en el consecuente. ¿Qué dice la regla?

Regla $\Rightarrow\rightarrow$: Si $X, \alpha \Rightarrow Y, \beta, \gamma$, entonces $\alpha \Rightarrow \beta,\ X \rightarrow Y,\ \gamma$.

Identificamos a X y Y. X está dada por **P** y Y está dada por **R**.

En el paso 7 si 9 el conectivo que se elimina es la condicional. De acuerdo con la regla:

Pasamos a X (**P**) al antecedente y todo lo demás permanece igual.

En el paso 7 si 9 después de aplicar la regla obtenemos lo siguiente:

$$(P), (Q), \qquad \Rightarrow (Q), (R)$$

Ha encontrado una expresión libre de conectivos:

Como es una expresión libre de conectivos entonces se revisa si corresponde a un axioma. Para lograr esto es necesario que tenga una atómica en común, tanto en el antecedente como en el consecuente. En efecto, Q aparece en el antecedente y en el consecuente. Por lo tanto, corresponde a un axioma, al cual identificamos como **Axioma 2**.

Revisamos si el arreglo de pendientes tiene elementos. El arreglo no está vacío. Procedemos a sacar el número del paso con el cual vamos a trabajar.

5				

Aplicamos el algoritmo de últimas entradas primeras salidas. Entonces el renglón que se extrae del arreglo es el número 5.

Trabajamos con el renglón 5. Revisando el renglón 5 el conectivo que se elimina es una condicional en el antecedente $(Q \rightarrow R)$. ¿Qué dice la regla?

Regla $\rightarrow \Rightarrow$: Si $Y, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma$ y $\alpha, \beta \Rightarrow X, \gamma$, entonces $\alpha, X \rightarrow Y, \beta \Rightarrow \gamma$.

Identificamos a X y Y. X está dada por (Q) y Y está dada por (R).

Se generan dos nuevas expresiones dadas por los pasos **5 si 10** y el paso **11**. Se mete 11 al arreglo de pendientes:

11				

Se trabaja con el renglón **10 si 12**, vemos que el conectivo a eliminar es una condicional en el consecuente, por lo que de acuerdo con la regla paso a X (**P**) al antecedente y se deja a Y (**R**) en el consecuente, quedando la expresión libre de conectivos $(P), \quad (R) \Rightarrow (P), (R)$
El cual es un axioma (**Axioma 3**)

Se saca al renglón 11 del arreglo, se genera el paso **11 si 13**. El conectivo a eliminar es una condicional.

Aplicando la regla se pasa a X (**P**) al antecedente y Y (**R**) permanece en el consecuente. Es una expresión libre de conectivos y corresponde a un axioma (**Axioma 4**).
Se revisa el arreglo de pendientes, el cual está vacío. Hemos terminado. Todas las expresiones libres de conectivos son axiomas. Por lo tanto, el razonamiento es válido.

99. Demuestre la validez del siguiente razonamiento. Use el método de prueba automática de teoremas:

H_1: 7Q
H_2: $P \rightarrow Q$
C: 7P

Solución:

# paso	Regla	Expresión	
1		⇒ [(7Q)∧(P → Q)] → (7P)	
1 si 2	⇒→	(7Q)∧(P → Q) ⇒ (7P)	
2 si 3	∧ ⇒	(7Q) , (P → Q) ⇒ (7P)	
3 si 4	7⇒	, (P → Q) ⇒ (Q),(7P)	
4 si 5	→⇒	, (Q) ⇒ (Q),(7P)	
y 6		⇒ (P),(Q),(7P)	
5 si 7	⇒7	(P) , (Q) ⇒ (Q)	Axioma 1
6 si 8	⇒7	(P) ⇒ (P),(Q)	Axioma 2
		Como todas las expresiones libres de conectivos son	
		axiomas, entonces el razonamiento es válido.	

Comentarios:

No se confunda. Sólo aplique la Tabla IV. Reglas para Prueba Automática de Teoremas, PAT.

Por otra parte, no olvide crear el arreglo de pendientes. Meta siempre el número de renglón mayor. Vaya sacando los números del renglón del arreglo de pendientes. Encuentre axiomas y verifique que el arreglo de pendientes esté vacío.

100. Demuestre la validez del siguiente razonamiento. Use el método de prueba automática de teoremas:

H_1: P v Q
H_2: $P \rightarrow R$
H_3: $Q \rightarrow R$
C: R

Solución:

# paso	Regla	Expresión	
1		$\Rightarrow [(PvQ)\wedge(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)]\rightarrow (R)$	
1 si 2	$\Rightarrow\rightarrow$	$(PvQ)\wedge(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R) \Rightarrow (R)$	
2 si 3	$\wedge\Rightarrow$	$(PvQ), (P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R) \Rightarrow (R)$	
3 si 4	$\wedge\Rightarrow$	$(PvQ), (P\rightarrow R), (Q\rightarrow R) \Rightarrow (R)$	
4 si 5	$v\Rightarrow$	$(P), (P\rightarrow R), (Q\rightarrow R) \Rightarrow (R)$	
y 6		$(Q), (P\rightarrow R), (Q\rightarrow R) \Rightarrow (R)$	
5 si 7	$\rightarrow\Rightarrow$	$(P), (R), (Q\rightarrow R) \Rightarrow (R)$	
y 8		$(P), , (Q\rightarrow R) \Rightarrow (P),(R)$	
7 si 9	$\rightarrow\Rightarrow$	$(P), (R), (R) \Rightarrow (R)$	Axioma 1
y 10		$(P), (R), \Rightarrow (Q),(R)$	Axioma 2
8 si 11	$\rightarrow\Rightarrow$	$(P), , (R) \Rightarrow (P),(R)$	Axioma 3
y 12		$(P), , \Rightarrow (Q),(P),(R)$	Axioma 4
6 si 13	$\rightarrow\Rightarrow$	$(Q), (R), (Q\rightarrow R) \Rightarrow (R)$	
y 14		$(Q), , (Q\rightarrow R) \Rightarrow (P),(R)$	
13 si 15	$\rightarrow\Rightarrow$	$(Q), (R), (R) \Rightarrow (R)$	Axioma 5
y 16		$(Q), (R), \Rightarrow (Q),(R)$	Axioma 6
14 si 17	$\rightarrow\Rightarrow$	$(Q), , (R) \Rightarrow (P),(R)$	Axioma 7
y 18		$(Q), , \Rightarrow (Q),(P),(R)$	Axioma 8
		El razonamiento es válido.	

Comentarios:

Use la Tabla IV. Reglas para Prueba Automática de Teoremas, PAT.
Aplique mecánicamente las reglas.

No olvide crear y usar el arreglo de pendientes.

101. Demuestre la validez del siguiente razonamiento. Use el método de prueba automática de teoremas:

H_1: $P \rightarrow Q$
H_2: P
H_3: $Q \rightarrow R$
C: R

Solución:

# paso	Regla	Expresión	
1		$\Rightarrow [(P\rightarrow Q)\wedge(P)\wedge(Q\rightarrow R)]\rightarrow (R)$	
1 si 2	$\Rightarrow\rightarrow$	$(P\rightarrow Q)\wedge(P)\wedge(Q\rightarrow R) \Rightarrow (R)$	
2 si 3	$\wedge\Rightarrow$	$(P\rightarrow Q)$, $(P)\wedge(Q\rightarrow R) \Rightarrow (R)$	
3 si 4	$\wedge\Rightarrow$	$(P\rightarrow Q)$, (P) , $(Q\rightarrow R) \Rightarrow (R)$	
4 si 5	$\rightarrow\Rightarrow$	(Q) ,(P) , $(Q\rightarrow R) \Rightarrow (R)$	
y 6		(P) , $(Q\rightarrow R) \Rightarrow (R)$, (P)	
5 si 7	$\rightarrow\Rightarrow$	(Q) ,(P) , $(R) \Rightarrow (R)$	Axioma 1
y 8		(Q) ,(P) , $\Rightarrow (R)$, (Q)	Axioma 2
6 si 9	$\rightarrow\Rightarrow$	(P) , $(R) \Rightarrow (R)$, (P)	Axioma 3
y 10		(P) , $\Rightarrow (R)$, (P) , (Q)	Axioma 4
		El razonamiento es válido.	

Comentarios:

Como ve, sólo hay que aplicar las reglas de la Tabla IV. Reglas para Prueba Automática de Teoremas, PAT.

Tenga cuidado; cualquier error es fatal.

Los elementos que cambian del antecedente al consecuente pueden escribirse al principio o al final del consecuente. Por otra parte, los elementos que cambian del consecuente al antecedente deben escribirse al final del antecedente.

102. Demuestre la validez del siguiente razonamiento. Use el método de prueba automática de teoremas:

H_1: $(P \land Q) \to R$
H_2: $7R \lor S$
H_3: $7S$
C: $7P \lor 7Q$

Solución:

# paso	Regla	Expresión
1		$\Rightarrow[((P\land Q)\to R)\land(7RvS)\land(7S)] \to (7Pv7Q)$
1 si 2	$\Rightarrow\to$	$((P\land Q)\to R)\land(7RvS)\land(7S) \Rightarrow (7Pv7Q)$
2 si 3	$\land\Rightarrow$	$((P\land Q)\to R)\ ,\ (7RvS)\land(7S) \Rightarrow (7Pv7Q)$
3 si 4	$\land\Rightarrow$	$(P\land Q)\to R\ ,\ 7RvS\ ,\ 7S \Rightarrow 7Pv7Q$
4 si 5	$\to\Rightarrow$	$R\ ,\ 7RvS\ ,\ 7S \Rightarrow 7Pv7Q$
y 6		$,\ 7RvS\ ,\ 7S \Rightarrow 7Pv7Q, P\land Q$
5 si 7	$v\Rightarrow$	$R\ ,\ 7R\ ,\ 7S \Rightarrow 7Pv7Q$
y 8		$R\ ,\ S\ ,\ 7S \Rightarrow 7Pv7Q$
7 si 9	$7\Rightarrow$	$R\ ,\ ,\ 7S \Rightarrow 7Pv7Q, R$
9 si 10	$7\Rightarrow$	$R\ ,\ , \Rightarrow 7Pv7Q, R, S$
10 si 11	$\Rightarrow v$	$R\ ,\ , \Rightarrow 7P, 7Q, R, S$
11 si 12	$\Rightarrow 7$	$R\ ,\ ,\ P \Rightarrow\ , 7Q, R, S$
12 si 13	$\Rightarrow 7$	$R\ ,\ ,\ P, Q \Rightarrow\ ,\ ,\ R\ ,\ S$ Axioma 1
8 si 14	$7\Rightarrow$	$R\ ,\ S\ , \Rightarrow 7Pv7Q\ ,\ S$
14 si 15	$\Rightarrow v$	$R\ ,\ S\ , \Rightarrow 7P, 7Q\ ,\ S$
15 si 16	$\Rightarrow 7$	$R\ ,\ S\ ,\ P \Rightarrow\ , 7Q\ ,\ S$
16 si 17	$\Rightarrow 7$	$R\ ,\ S\ ,\ P\ ,Q \Rightarrow\ ,\ ,\ S$ Axioma 2
6 si 18	$v\Rightarrow$	$,\ 7R\ ,\ 7S \Rightarrow 7Pv7Q, P\land Q$
y 19		$,\ S\ ,\ 7S \Rightarrow 7Pv7Q, P\land Q$
18 si 20	$7\Rightarrow$	$,\ ,\ 7S \Rightarrow 7Pv7Q, P\land Q, R$
20 si 21	$7\Rightarrow$	$,\ , \Rightarrow 7Pv7Q, P\land Q, R, S$
21 si 22	$\Rightarrow v$	$,\ , \Rightarrow 7P, 7Q, P\land Q, R, S$
22 si 23	$\Rightarrow 7$	$,\ ,\ P \Rightarrow\ , 7Q, P\land Q, R, S$
23 si 24	$\Rightarrow 7$	$,\ ,\ P, Q \Rightarrow\ ,\ ,\ P\land Q, R, S$
24 si 25	$\Rightarrow \land$	$,\ ,\ P, Q \Rightarrow\ ,\ ,\ P\ ,\ R, S$ Axioma 3
y 26		$,\ ,\ P, Q \Rightarrow\ ,\ ,\ Q, R,S$ Axioma 4

19 si 27	7 ⇒	, S , ⇒ 7Pv7Q, P∧Q, S
27 si 28	⇒ v	, S , ⇒ 7P, 7Q, P∧Q, S
28 si 29	⇒ 7	, S , P ⇒ , 7Q, P∧Q, S
29 si 30	⇒ 7	, S , P, Q ⇒ , , P∧Q, S
30 si 31	⇒ ∧	, S , P, Q ⇒ , , P , S Axioma 5
y 32		, S , P, Q ⇒ , , Q, S Axioma 6
		El razonamiento es válido.

Comentarios:

¿Vamos bien? Los ejercicios se empiezan a complicar. Como ve, no es necesario pensar demasiado. Sólo aplique mecánicamente las reglas. Conviértase en un autómata.

Donde sea posible, elimine paréntesis.

Sea ordenado. Deje los huecos que se van creando al aplicar las reglas. Si llegase a cometer algún error, es más fácil encontrarlo.

103. Demuestre la validez del siguiente razonamiento. Use el método de prueba automática de teoremas:

H_1: $P \vee Q$
C: P

Solución:

# paso	Regla	Expresión
1		$\Rightarrow [(P \vee Q)] \rightarrow (P)$
1 si 2	$\Rightarrow \rightarrow$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P)$
2 si 3	$\vee \Rightarrow$	$P \Rightarrow P$ Axioma 1
y 4		$Q \Rightarrow P$ Expresión libre de conectivos, pero que no tiene una atómica en común, tanto en el antecedente como en el consecuente. Así, el paso 4 no es un axioma. Por lo tanto, el razonamiento no es válido.

Comentarios:

Si la expresión libre de conectivos no tiene una atómica en común, entonces la expresión no es un axioma. El método se detiene en ese momento y se da por terminado. Se concluye que el razonamiento no es válido.

104. Demuestre la validez del siguiente [illegible] automática de teoremas.

H_1: $P \rightarrow Q$
H_2: 7P
C: Q

Solución:

# paso	Regla	Expresión
1		$\Rightarrow [(P\rightarrow Q)\wedge(7P)]\rightarrow (Q)$
1 si 2	$\Rightarrow\rightarrow$	$[(P\rightarrow Q)\wedge(7P)] \Rightarrow (Q)$
2 si 3	$\wedge\Rightarrow$	$P\rightarrow Q$, 7P $\Rightarrow Q$
3 si 4	$\rightarrow\Rightarrow$	Q , 7P $\Rightarrow Q$
y 5		, 7P $\Rightarrow P, Q$
4 si 6	$7\Rightarrow$	Q , $\Rightarrow P, Q$ Axioma 1
5 si 7	$7\Rightarrow$	, $\Rightarrow P, P, Q$ Expresión libre de conectivos, pero que no tiene una atómica en común, tanto en el antecedente como en el consecuente. Así, el paso 5 si 7 no es un axioma. Por lo tanto, el razonamiento no es válido.

Comentarios:

Si la expresión libre de conectivos no tiene una atómica en común, entonces la expresión no es un axioma. El método se detiene en ese momento y se da por terminado. Se concluye que el razonamiento no es válido.

Para el PAT, atómica y variable se usa indistintamente.

105. Demuestre la validez del siguiente razonamiento. Use el método de prueba automática de teoremas:

H_1: P
H_2: 7Q → 7P
H_3: 7R → 7Q
C: R

Solución:

# paso	Regla	Expresión
1		⇒[(P)∧(7Q→7P)∧(7R→7Q)]→(R)
1 si 2	⇒→	[(P)∧(7Q→7P)∧(7R→7Q)]⇒(R)
2 si 3	∧⇒	(P) , (7Q→7P)∧(7R→7Q) ⇒(R)
3 si 4	∧⇒	P , 7Q→7P , 7R→7Q ⇒ R
4 si 5	→⇒	P , 7P , 7R→7Q ⇒ R
y 6		P , , 7R→7Q ⇒7Q, R
5 si 7	7⇒	P , , 7R→7Q ⇒ P, R
7 si 8	→⇒	P , , 7Q ⇒ P, R
y 9		P , , ⇒ 7R, P, R
8 si 10	7⇒	P , , ⇒ Q, P, R Axioma 1
9 si 11	⇒7	P , , R ⇒ , P, R Axioma 2
6 si 12	→⇒	P , , 7Q ⇒7Q, R
y 13		P , , ⇒7R, 7Q, R
12 si 14	7⇒	P , , ⇒ Q, 7Q, R
14 si 15	⇒7	P , , Q ⇒ Q, , R Axioma 3
13 si 16	⇒7	P , , R ⇒ , 7Q, R
16 si 17	⇒7	P , , R, Q ⇒ , , R Axioma 4
		El razonamiento es válido.

Comentarios:

Todas las expresiones libres de conectivos deben ser axiomas. Si se cumple esta condición, entonces el razonamiento es válido.

106. Demuestre la validez del siguiente razonamiento. Use el método de prueba automática de teoremas:

H_1: $P \rightarrow Q$
H_2: $Q \rightarrow R$
C: $R \rightarrow P$

Solución:

# paso	Regla	Expresión
1		$\Rightarrow [(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R)]\rightarrow(R\rightarrow P)$
1 si 2	$\Rightarrow\rightarrow$	$[(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R)] \Rightarrow (R\rightarrow P)$
2 si 3	$\wedge\Rightarrow$	$P\rightarrow Q\ ,\ Q\rightarrow R\ \Rightarrow\ R\rightarrow P$
3 si 4	$\rightarrow\Rightarrow$	$Q\ ,\ Q\rightarrow R\ \Rightarrow\ R\rightarrow P$
y 5		$,\ Q\rightarrow R\ \Rightarrow P,\ R\rightarrow P$
4 si 6	$\rightarrow\Rightarrow$	$Q\ ,\ R\ \Rightarrow\ R\rightarrow P$
y 7		$Q\ ,\ \Rightarrow Q,\ R\rightarrow P$
6 si 8	$\Rightarrow\rightarrow$	$Q\ ,\ R, R\Rightarrow\ P$ Se llegó a una expresión libre de conectivos, pero no tiene una atómica en común, entre el antecedente y el consecuente. Así, la expresión no es un axioma. Por lo tanto, no es una implicación tautológica, es decir, no es un razonamiento válido.

Comentarios:

Si la expresión libre de conectivos no tiene una atómica en común, entonces la expresión no es un axioma. El método se detiene en ese momento y se da por terminado. Se concluye que el razonamiento no es válido.

107. Demuestre la validez del siguiente razonamiento. Use el método de prueba automática de teoremas:

H_1: $P \rightarrow (Q \rightarrow S)$
H_2: $7R \vee P$
H_3: Q
C: $R \rightarrow S$

Solución:

# paso	Regla	Expresión
1		$\Rightarrow[(P\rightarrow(Q\rightarrow S))\wedge(7R\vee P)\wedge(Q)]\rightarrow(R\rightarrow S)$
1 si 2	$\Rightarrow\rightarrow$	$[(P\rightarrow(Q\rightarrow S))\wedge(7R\vee P)\wedge(Q)]\Rightarrow(R\rightarrow S)$
2 si 3	$\wedge\Rightarrow$	$(P\rightarrow(Q\rightarrow S))\ ,\ (7R\vee P)\wedge(Q)\Rightarrow(R\rightarrow S)$
3 si 4	$\wedge\Rightarrow$	$P\rightarrow(Q\rightarrow S)\ ,\ 7R\vee P\ ,\ Q\Rightarrow R\rightarrow S$
4 si 5	$\rightarrow\Rightarrow$	$(Q\rightarrow S)\ ,\ 7R\vee P\ ,\ Q\Rightarrow R\rightarrow S$
y 6		$,\ 7R\vee P\ ,\ Q\Rightarrow R\rightarrow S, P$
5 si 7	$\rightarrow\Rightarrow$	$S\ ,\ 7R\vee P\ ,\ Q\Rightarrow R\rightarrow S$
y 8		$,\ 7R\vee P\ ,\ Q\Rightarrow R\rightarrow S, Q$
7 si 9	$\vee\Rightarrow$	$S\ ,\ 7R\ ,\ Q\Rightarrow R\rightarrow S$
y 10		$S\ ,\ P\ ,\ Q\Rightarrow R\rightarrow S$
9 si 11	$7\Rightarrow$	$S\ ,\ \ ,\ Q\Rightarrow R\rightarrow S, R$
11 si 12	$\Rightarrow\rightarrow$	$S\ ,\ \ ,\ Q,R\Rightarrow S, R$ Axioma 1
10 si 13	$\Rightarrow\rightarrow$	$S\ ,\ P\ ,\ Q,R\Rightarrow S$ Axioma 2
8 si 14	$\vee\Rightarrow$	$,\ 7R\ ,\ Q\Rightarrow R\rightarrow S, Q$
y 15		$,\ P\ ,\ Q\Rightarrow R\rightarrow S, Q$
14 si 16	$7\Rightarrow$	$,\ \ ,\ Q\Rightarrow R\rightarrow S, Q, R$
16 si 17	$\Rightarrow\rightarrow$	$,\ \ ,\ Q,R\Rightarrow S, Q, R$ Axioma 3
15 si 18	$\Rightarrow\rightarrow$	$,\ P\ ,\ Q,R\Rightarrow S, Q$ Axioma 4
6 si 19	$\vee\Rightarrow$	$,\ 7R\ ,\ Q\Rightarrow R\rightarrow S, P$
y 20		$,\ P\ ,\ Q\Rightarrow R\rightarrow S, P$
19 si 21	$7\Rightarrow$	$,\ \ ,\ Q\Rightarrow R\rightarrow S, P, R$
21 si 22	$\Rightarrow\rightarrow$	$,\ \ ,\ Q,R\Rightarrow S, P, R$ Axioma 5
20 si 23	$\Rightarrow\rightarrow$	$,\ P\ ,\ Q,R\Rightarrow S, P$ Axioma 6

Comentarios:
El razonamiento es válido.
Muy bien, ahora vamos a estudiar otros temas.

6. Cálculo de predicados

6.1 Predicados

6.2 Cuantificador universal y existencial

6.3 Fórmulas de predicados

108. Formalice los siguientes enunciados expresados en lenguaje natural para su representación en el cálculo de predicados.

a) Todos los alumnos son estudiosos.
b) Todos los jóvenes son estudiantes o son trabajadores.
c) Todo aficionado que no sea puma o es americanista o es tapatío.

Solución:

Inciso a) Todos los alumnos son estudiosos.

También puede expresarse de la siguiente manera:
- Para toda x, si x es alumno, entonces x es estudioso.
- Cualquier alumno es estudioso.

Procedimiento:

A(x): x es alumno.
E(x): x es estudioso.

$(\forall x)\ (\ A(x) \rightarrow\ E(x))$

Inciso b) Todos los jóvenes son estudiantes o son trabajadores.

También puede expresarse de la siguiente manera:
- Para toda x, si x es joven, entonces x o es estudiante o x es trabajador.
- Cualquier joven o es estudioso o es trabajador.

Procedimiento:

J(x): x es joven.
E(x): x es estudiante.
T(x): x es trabajador.

$(\forall x)\ (\ J(x) \rightarrow\ (E(x) \vee T(x)))$

Inciso C) Todo aficionado que no sea puma o es americanista o es tapatío.

También puede expresarse de la siguiente manera:

- Para toda x, si x es aficionado y x no es puma, entonces x o es americanista o x es tapatío.
- Cualquier aficionado que no sea puma, o es americanista o es tapatío.

Procedimiento:
A(x): x es aficionado.
P(x): x es puma.
M(x): x es americanista.
T(x): x es tapatío.

$$(\forall x)\ (\ (A(x) \wedge 7P(x)) \rightarrow\ (M(x) \vee T(x)))$$

Comentarios:

Para el uso adecuado de los cuantificadores (universal y existencial), es necesario definir de manera explícita el universo del discurso.

Si las expresiones contienen palabras tales como *todo, todos, para todo, para cada, cualquiera*, entre otras, estamos en presencia del cuantificador universal $\forall$.

Investigue, no se quede con la duda.

109. Formalice los siguientes enunciados expresados en lenguaje natural para su representación en el cálculo de predicados.

a) Algunos profesionistas son ingenieros.
b) Algunos taxis son contaminantes o están arreglados.
c) Algunos gatos y perros son agresivos.

Solución:

Inciso a) Algunos profesionistas son ingenieros.

También puede expresarse de la siguiente manera:
- Existe una x de tal modo que x es profesionista y x es ingeniero.
- Existe al menos una x de tal modo que x es profesionista y x es ingeniero.

Procedimiento:

P(x): x es profesionista.
I(x): x es ingeniero.

$(\exists x)\,(P(x) \wedge I(x))$

Inciso b) Algunos taxis son contaminantes o están arreglados

También puede expresarse de la siguiente manera:
- Existe una x de tal modo que x es taxi y, x es contaminante o x está arreglado.
- Existe al menos una x de tal modo que x es taxi y, x es contaminante o x está arreglado.

Procedimiento:

T(x): x es taxi.
C(x): x es contaminante.
A(x): x está arreglado.

$(\exists x)\,(T(x) \wedge (C(x) \vee A(x)))$

Inciso C) Algunos gatos y perros son agresivos.

También puede expresarse de la siguiente manera:

- Existe una x de tal modo que x es gato y x es perro y x es agresivo.
- Existe al menos una x de tal modo que x es gato y x es agresivo y x es perro y x es agresivo.

Procedimiento:
G(x): x es un gato.
P(x): x es un perro.
A(x): x es un agresivo.

$(\exists x)\ (\ (G(x) \wedge A(x)) \wedge\ (P(x) \wedge A(x)))\ \equiv\ (\exists x)\ (\ (G(x) \wedge P(x)) \wedge A(x)))$

Comentarios:

Si la expresión contiene palabras tales como: *para algún, alguno, alguna, algunos o algunas*, *para al menos*, entre otras, entonces corresponde al cuantificador existencial $\exists$.

También si aparecen expresiones tales como: "*Existe una x de tal modo que…*", así como el enunciado "*Existe al menos una x de tal modo que …*".

Recuerde que el símbolo de equivalencia tiene dos representaciones: $\Leftrightarrow$ o $\equiv$.

Tenga especial cuidado con el manejo de los cuantificadores. Por otra parte, investigue otras representaciones relacionadas con los cuantificadores.

110. Formalice los siguientes enunciados expresados en lenguaje natural [illegible] su representación en el cálculo de predicados.

a) No hay nadie que sea joven o viejo y no sea un enamorado.
b) Hay por lo menos un proyecto que sea coherente y realizable.
c) Los jugadores de fútbol son enemigos de los cantantes de rock.

Solución:

Inciso a) No hay nadie que sea joven o viejo y no sea un enamorado.

Procedimiento:

J(x): x es joven.
V(x): x es viejo.
E(x): x es un enamorado.

$7(\exists x)\ ((\ J(x) \vee V(x))\ \wedge 7E(x))$

Inciso b) Existe por lo menos un proyecto que sea coherente y realizable.

Procedimiento:

P(x): x es un proyecto.
C(x): x es coherente.
R(x): x es realizable.

$(\exists x)\ ((\ P(x) \wedge C(x)) \wedge ((\ P(x) \wedge R(x))))$

Inciso C) Todos los jugadores de fútbol son enemigos de los cantantes de rock.

Procedimiento:
J(x): x es un jugador de fútbol.
C(y): y es un cantante de rock.
E(x,y): x es enemigo de y.

$(\forall x)(\forall y)\ ((J(x) \wedge C(y)) \rightarrow E(x,y))$

Comentarios:

Para las expresiones *nadie* o *ninguno*, se pueden usar varias representaciones.

Investigue y aplique los diferentes tipos.

No pierda de vista que se cumple la siguiente equivalencia lógica:

$7(\exists x)\ I(x) \equiv (\forall x)\ 7I(x)$

Por otra parte, cuando se presenta una relación "*es enemigo de*" se requieren dos sujetos.

Finalmente, sea muy cuidadoso para formalizar y demostrar los argumentos.

111. A partir de las siguientes representaciones en el cálculo de predicados, escriba los enunciados en lenguaje natural.

Sea:

F(x): x es una fruta.
D(x): x es dulce.
N(x): x es una naranja.

Escriba en lenguaje natural lo siguiente:

a) $(\forall x)\ (N(x) \rightarrow F(x))$
b) $(\exists x)\ (N(x) \wedge D(x))$

Solución:

Inciso a) Se puede escribir de diversas maneras:

- Para toda x, si x es una naranja entonces x es una fruta.
- Cualquier naranja es una fruta.
- Todas las naranjas son frutas.

La expresión en lenguaje natural corresponde a
$(\forall x)\ (N(x) \rightarrow F(x))$

Inciso b) Se puede escribir de diversas maneras:

- Existe una x de tal modo que x es una naranja y x es dulce.
- Existe al menos una x de tal modo que x es una naranja y x es dulce.
- Existe alguna x de tal modo que x es una naranja y x es dulce.
- Algunas naranjas son dulces.

La expresión en lenguaje natural corresponde a
$(\exists x)\ (N(x) \wedge D(x))$

Comentarios:
No debe perder de vista que una expresión de cálculo de predicados puede escribirse de diversas maneras en lenguaje natural.

112. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$7(\exists x)\,(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\,(7P(x) \wedge 7Q(x))$$

Solución:	Ley o regla
Demostremos la primera implicación:	
$7(\exists x)\,(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\,7(P(x) \vee Q(x))$	NC
$\Rightarrow \quad 7(P(y) \vee Q(y))$	EU
$\Leftrightarrow \quad 7P(y) \wedge 7Q(y)$	De Morgan
$\Rightarrow (\forall x)\,(7P(x) \wedge 7Q(x))$	GU
queda demostrada la implicación	
$7(\exists x)\,(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x)\,(7P(x) \wedge 7Q(x)) \qquad (1)$	
Demostremos la otra implicación:	
$(\forall x)\,(7P(x) \wedge 7Q(x)) \Rightarrow \quad 7P(y) \wedge 7Q(y)$	EU
$\Leftrightarrow \quad 7(P(y) \vee Q(y))$	De Morgan
$\Rightarrow \quad (\forall x)7(P(x) \vee Q(x))$	GU
$\Leftrightarrow 7(\exists x)\,(P(x) \vee Q(x))$	NC
queda demostrada la implicación:	
$(\forall x)\,(7P(x) \wedge 7Q(x)) \Rightarrow 7(\exists x)\,(P(x) \vee Q(x)) \qquad (2)$	
Con (1) y (2) se demuestra la equivalencia.	
En otras palabras, son lógicamente equivalentes.	

Comentarios:

Nuevamente nos encontramos con equivalencias.

113. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$7(\forall x)\ (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\ (7P(x) \wedge 7Q(x))$$

Solución:	Regla o ley
Demostremos la primera implicación:	
$7(\forall x)\ (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\ 7(P(x) \vee Q(x))$	NC
$\Rightarrow \quad 7(P(a) \vee Q(a))$	EE
$\Leftrightarrow \quad 7P(a) \wedge 7Q(a)$	De Morgan
$\Rightarrow (\exists x)(7P(x) \wedge 7Q(x))$	GE
queda demostrada la implicación	
$7(\forall x)\ (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x)\ (7P(x) \wedge 7Q(x)) \qquad (1)$	
Demostremos la otra implicación:	
$(\exists x)\ (7P(x) \wedge 7Q(x)) \Rightarrow \quad 7P(a) \wedge 7Q(a)$	EE
$\Leftrightarrow \quad 7(P(a) \vee Q(a))$	De Morgan
$\Rightarrow (\exists x)\ 7(P(x) \vee Q(x))$	GE
$\Leftrightarrow 7(\forall x)\ (P(x) \vee Q(x))$	NC
queda demostrada la implicación:	
$(\exists x)\ (7P(x) \wedge 7Q(x)) \Rightarrow 7(\forall x)\ (P(x) \vee Q(x)) \qquad (2)$	
Con (1) y (2) se demuestra la equivalencia.	
En otras palabras, son lógicamente equivalentes.	

Comentarios:

Tenga especial cuidado para hacer las demostraciones.

114. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$\neg(\forall x)\,(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\,(\neg P(x) \vee \neg Q(x))$$

Solución:	Regla o Ley
Demostremos la primera implicación:	
$\neg(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\, \neg(P(x) \wedge Q(x))$	NC
$\Rightarrow \quad \neg(P(a) \wedge Q(a))$	EE
$\Leftrightarrow \quad \neg P(a) \vee \neg Q(a)$	De Morgan
$\Rightarrow (\exists x)(\neg P(x) \vee \neg Q(x))$	GE
queda demostrada la implicación	
$\neg(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)\,(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \quad (1)$	
Demostremos la otra implicación:	
$(\exists x)\,(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \Rightarrow \quad \neg P(a) \vee \neg Q(a)$	EE
$\Leftrightarrow \quad \neg(P(a) \wedge Q(a))$	De Morgan
$\Rightarrow (\exists x)\, \neg(P(x) \wedge Q(x))$	GE
$\Leftrightarrow \neg(\forall x)\,(P(x) \wedge Q(x))$	NC
queda demostrada la implicación:	
$(\exists x)\,(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \Rightarrow \neg(\forall x)\,(P(x) \wedge Q(x)) \quad (2)$	
Con (1) y (2) se demuestra la equivalencia.	
En otras palabras, son lógicamente equivalentes.	

Comentarios:

Las equivalencias siguen aplicándose.

115. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$7(\exists x)\ (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\ (7P(x) \vee\ 7Q(x))$$

Solución:	Regla o Ley
Demostremos la primera implicación:	
$7(\exists x)\ (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\ 7(P(x) \wedge Q(x))$	NC
$\Rightarrow \quad 7(P(y) \wedge Q(y))$	EU
$\Leftrightarrow \quad 7P(y) \vee 7Q(y)$	De Morgan
$\Rightarrow (\forall x)\ (7P(x) \vee 7Q(x))$	GU
queda demostrada la implicación	
$7(\exists x)\ (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\forall x)\ 7(P(x) \vee\ Q(x)) \quad (1)$	
Demostremos la otra implicación:	
$(\forall x)\ (7P(x) \vee 7Q(x)) \Rightarrow \quad 7P(y) \vee 7Q(y)$	EU
$\Leftrightarrow \quad 7(P(y) \wedge Q(y))$	De Morgan
$\Rightarrow (\forall x)\ 7(P(x) \wedge Q(x))$	GU
$\Leftrightarrow 7(\exists x)\ (P(x) \wedge Q(x))$	NC
queda demostrada la implicación:	
$(\forall x)\ (7P(x) \vee 7Q(x)) \Rightarrow\ 7(\exists x)\ (P(x) \wedge Q(x)) \quad (2)$	
Con (1) y (2) se demuestra la equivalencia.	
En otras palabras, son lógicamente equivalentes.	

Comentarios:

Repase aquellos conceptos sobre los cuales tenga dudas.

116. Demuestre la validez del siguiente razonamiento:

Todos los hombres son mortales. Sócrates es un hombre. Por lo tanto, Sócrates es un mortal.

Solución:
Se procede a escribir la notación simbólica. Primero se detectan a los predicados, así como el cuantificador:
H(x): x es un hombre.
M(x): x es un mortal.
s: Sócrates.

A continuación se escriben las premisas o hipótesis.
H_1: Todos los hombres son mortales.
$(\forall x)\ (H(x) \rightarrow M(x))$

H_2: Sócrates es un hombre.
$H(s)$

Conclusión.
C: Sócrates es un mortal.
$M(s)$

Se escribe la notación simbólica completa:

H_1: $(\forall x)\ (H(x) \rightarrow M(x))$
H_2: $H(s)$
C: $M(s)$

Ahora se procede con el método de deducción paso a paso:

# paso	Regla	Expresión
1	P, H_1	$(\forall x)\,(H(x) \rightarrow M(x))$
2	EU, 1	$H(s) \rightarrow M(s)$
3	P, H_2	$H(s)$
4	T, 3, 2, I_{11} $P,\ P \rightarrow Q \Rightarrow Q$ $H(s),\ H(s) \rightarrow M(s) \Rightarrow M(s)$	$M(s)$

Comentarios:

1. En el proceso para demostrar la validez de los razonamientos, hacemos uso del método de deducción paso a paso, aplicando todo lo que ya dominamos, manejando de manera intensiva la Tabla III. Implicaciones tautológicas y la Tabla V. Reglas específicas para el cálculo de predicados, así como las otras tablas, según sea el caso.
2. Cuando empleamos el método de deducción paso a paso, y de acuerdo con el problema a tratar, en ocasiones es conveniente eliminar o introducir los cuantificadores.
3. En el paso 2 se elimina el cuantificador universal con EU. Dicho de otra manera, se especifica el sujeto, es decir, x se particulariza como s.
4. En el paso 4, se hace uso de la implicación I_{11}.
5. En el paso 4 termina el proceso. No se requiere introducir cuantificador, ya que la conclusión no lo contiene.

117. Demuestre la validez del siguiente razonamiento:

A ningún ingeniero le agrada la televisión. A todos los comunicólogos les agrada la televisión. Por lo tanto, ningún ingeniero es comunicólogo.

Solución:
Se procede a escribir la notación simbólica. Primero se detectan a los predicados, así como el cuantificador:

I(x): x es un ingeniero.
G(x): A x le agrada la televisión.
C(X): x es comunicólogo.

A continuación se escriben las premisas o hipótesis.

H_1: A ningún ingeniero le agrada la televisión.
$7(\exists x)\ (I(x) \wedge G(x))$

H_2: A todos los comunicólogos les agrada la televisión.
$(\forall x)\ (C(x) \rightarrow G(x))$

Conclusión.

C: Ningún ingeniero es comunicólogo.
$7(\exists x)\ (I(x) \wedge C(x))$

Se escribe la notación simbólica completa:

H_1: $7(\exists x)\ (I(x) \wedge G(x))$
H_2: $(\forall x)\ (C(x) \rightarrow G(x))$
C: $7(\exists x)\ (I(x) \wedge C(x))$

Ahora se procede con el método de deducción paso a paso:

# paso	Regla	Expresión
1	P, H_1	7(∃x) (I(x) ∧ G(x))
2	T, 1, Eq	(∀x) (7I(x) v 7G(x))
3	EU, 2	7I(y) v 7G(y)
4	T, 3, Eq	7G(y) v 7I(y)
5	T, 4, Eq	G(y) →7I(y)
6	P, H_2	(∀x) (C(x) → G(x))
7	EU, 6	C(y) → G(y)
8	T, 7, 5, I_{13} P → Q, Q → R ⇒ P → R C(y)→G(y),G(y)→7I(y) ⇒C(y)→7I(y)	C(y) → 7I(y)
9	T, 8, Eq	7C(y) v 7I(y)
10	GU, 9	(∀x) (7C(x) v 7I(x))
11	T, 10, Eq	(∀x) 7(C(x) ∧ I(x))
12	T, 11, Eq	7(∃x) (C(x) ∧ I(x))
13	T, 12, Eq	7(∃x) (I(x) ∧ C(x))

Comentarios:

1. Para usar el método de deducción paso a paso, se eliminaron los cuantificadores y se introdujo un elemento (en este caso *y*).
2. En el paso 10 se agrega el cuantificador universal con GU.
3. En el paso 12, se obtuvo una expresión equivalente del paso 11, en función del cuantificador.

118. Demuestre la validez del siguiente razonamiento:

Todos los deportistas comen fruta. Todos los jóvenes son deportistas. Por lo tanto, todos los jóvenes comen fruta.

Solución:
Se procede a escribir la notación simbólica. Primero se detectan a los predicados, así como el cuantificador:

D(x): x es un deportista.
F(x): x come fruta.
J(X): x es joven.

A continuación se escriben las premisas o hipótesis.
H_1: Todos los deportistas comen fruta.
$(\forall x)\ (D(x) \rightarrow F(x))$

H_2: Todos los jóvenes son deportistas.
$(\forall x)\ (J(x) \rightarrow D(x))$

Conclusión.
C: Todos los jóvenes comen fruta.
$(\forall x)\ (J(x) \rightarrow F(x))$

Se escribe la notación simbólica completa:

H_1: $(\forall x)\ (D(x) \rightarrow F(x))$
H_2: $(\forall x)\ (J(x) \rightarrow D(x))$
C: $(\forall x)\ (J(x) \rightarrow F(x))$

Ahora se procede con el método de deducción paso a paso:

# paso	Regla	Expresión
1	P, H_1	$(\forall x)\ (D(x) \rightarrow F(x))$
2	EU, 1	$D(y) \rightarrow F(y)$
3	P, H_2	$(\forall x)\ (J(x) \rightarrow D(x))$
4	EU, 3	$J(y) \rightarrow D(y)$
5	T, 4, 2, I_{13} $P \rightarrow Q,\ \ Q \rightarrow R \ \Rightarrow P \rightarrow R$ $J(y) \rightarrow D(y), D(y) \rightarrow F(y) \Rightarrow J(y) \rightarrow F(y)$	$J(y) \rightarrow F(y)$
6	GU, 5	$(\forall x)\ (J(x) \rightarrow F(x))$

Comentarios:

Estudie. Si tiene dudas revise sus conceptos.

119. Demuestre la validez del siguiente razonamiento:

Ningún aviador escucha música. Todos los niños escuchan música. Por lo tanto, ningún niño es aviador.

Solución:
Se procede a escribir la notación simbólica. Primero se detectan a los predicados, así como el cuantificador:

A(x): x es un aviador.
M(x): x escucha música.
N(X): x es un niño.

A continuación se escriben las premisas o hipótesis.
H_1: Ningún aviador escucha música.
$(\forall x)\ (A(x) \rightarrow 7M(x))$

H_2: Todos los niños escuchan música.
$(\forall x)\ (N(x) \rightarrow M(x))$

Conclusión.
C: Ningún niño es aviador.
$(\forall x)\ (N(x) \rightarrow 7A(x))$

Se escribe la notación simbólica completa:

H_1: $(\forall x)\ (A(x) \rightarrow 7M(x))$
H_2: $(\forall x)\ (N(x) \rightarrow M(x))$
C: $(\forall x)\ (N(x) \rightarrow 7A(x))$

Ahora se procede con el método de deducción paso a paso:

# paso	Regla	Expresión
1	P, H_2	$(\forall x)\ (N(x) \rightarrow M(x))$
2	EU, 1	$N(y) \rightarrow M(y)$
3	P, H_1	$(\forall x)\ (A(x) \rightarrow 7M(x))$
4	EU, 3	$A(y) \rightarrow 7M(y)$
5	T, 4, Eq	$M(y) \rightarrow 7A(y)$
6	T, 2, 5, I_{13} $P \rightarrow Q,\quad Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $N(y) \rightarrow M(y), M(y) \rightarrow 7A(y) \Rightarrow N(y) \rightarrow 7A(y)$	$N(y) \rightarrow 7A(y)$
7	GU, 6	$(\forall x)\ (N(x) \rightarrow 7A(x))$

Comentarios:

Como ejercicio adicional, primero escriba la hipótesis H_1 y la conclusión C, usando el cuantificador existencial.

Tiene que llegar a las siguientes equivalencias:

Para hipótesis H_1 tenemos:
H_1: $(\forall x)\ (A(x) \rightarrow 7M(x)) \Leftrightarrow 7(\exists x)\ (A(x) \wedge M(x))$

Para la conclusión C tenemos:
C: $(\forall x)\ (N(x) \rightarrow 7A(x)) \Leftrightarrow 7(\exists x)\ (N(x) \wedge A(x))$

Finalmente, demuestre la validez del razonamiento. Piense.

120. Formalice y demuestre el siguiente argumento:

Todos los futbolistas mexicanos son responsables. Cualquier futbolista mexicano que sea responsable obtiene fama. Blanco es un futbolista mexicano. Por lo tanto, Blanco obtiene fama.

Solución:
Se procede a escribir la notación símbólica. Tenga cuidado para seleccionar el cuantificador adecuado.
P(x): x es un futbolista mexicano.
Q(x): x es responsable.
R(X): x obtiene fama.
b: Blanco.

A continuación se escriben las premisas o hipótesis.
H_1: Todos los futbolistas mexicanos son responsables.
$(\forall x)\ (P(x) \rightarrow Q(x))$

H_2: Cualquier futbolista mexicano que sea responsable obtiene fama.
$(\forall x)\ ((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x))$

H_3: Blanco es un futbolista mexicano.
$P(b)$

Conclusión.
C: Blanco obtiene fama.
$R(b)$

Se escribe la notación simbólica completa:

H_1: $(\forall x)\ (P(x) \rightarrow Q(x))$
H_2: $(\forall x)\ ((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x))$
H_3: $P(b)$
C: $R(b)$

Ahora se procede con el método de deducción paso a paso:

# paso	Regla	Fórmula
1	P, H_1	$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$
2	EU, 1	$P(b) \rightarrow Q(b)$
3	P, H_2	$\forall x\,((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x))$
4	EU, 3	$(P(b) \wedge Q(b)) \rightarrow R(b)$
5	P, H_3	$P(b)$
6	T, 5, 2, I_{11} $P,\ P \rightarrow Q \Rightarrow Q$ $P(b), P(b) \rightarrow Q(b) \Rightarrow Q(b)$	$Q(b)$
7	T, 5, 6, I_9 $P,\ Q \Rightarrow P \wedge Q$ $P(b), Q(b) \Rightarrow P(b) \wedge Q(b)$	$P(b) \wedge Q(b)$
8	T, 7, 4, I_{11} $P,\ P \rightarrow Q \Rightarrow Q$ $P(b) \wedge Q(b), (P(b)) \wedge Q(b)) \rightarrow R(b) \Rightarrow R(b)$	$R(b)$

Comentarios:

1. Para este caso, se eliminan los cuantificadores.
2. Como la conclusión no tiene cuantificador, así se deja la expresión en el paso 8.

121. Demuestre la validez del siguiente razonamiento:

H_1: $(\exists x)\ (D(x) \wedge Q(x)) \to (\forall y)(M(y) \to W(y))$
H_2: $(\exists y)\ (M(y) \wedge 7W(y))$
C: $(\forall x)\ (D(x) \to 7Q(x))$

Solución:

# paso	Regla	Fórmula
1	P, H_2	$(\exists y)\ (M(y) \wedge 7W(y))$
2	EE, 1	$M(z) \wedge 7W(z)$
3	T, 2, Eq	$7(7M(z) \vee W(z))$
4	T, 3, Eq	$7(M(z) \to W(z))$
5	GE, 4	$(\exists y)\ 7(M(y) \to W(y))$
6	T, 5, Eq	$7(\forall y)\ (M(y) \to W(y))$
7	P, H_1	$(\exists x)\ (D(x) \wedge Q(x)) \to (\forall y)(M(y) \to W(y))$
8	T, 6, 7, I_{12} $7Q,\ P \to Q \Rightarrow 7P$ $7(y)\ (M(y) \to W(y))$, $(\exists x)\ (D(x) \wedge Q(x)) \to (y)(M(y) \to W(y)) \Rightarrow$ $7\ (\exists x)\ (D(x) \wedge S(x))$	$7\ (\exists x)\ (D(x) \wedge Q(x))$
9	T, 8, Eq	$(\forall x)\ 7(D(x) \wedge Q(x))$
10	EU, 9	$7(D(x) \wedge Q(x))$
11	T, 10, Eq	$7D(x) \vee 7Q(x)$
12	T, 11, Eq	$D(x) \to 7Q(x)$
13	GU, 13	$(\forall x)\ (D(x) \to 7Q(x))$

Comentarios:

1. El ejercicio es muy completo.
2. Para usar el método de deducción paso a paso, en este caso, primero se elimina el cuantificador existencial. Se elimina porque la H_1 se parece mucho a la I_{12}. También hay un cambio de variable.
3. A partir del paso 3 se obtienen expresiones equivalentes.
4. En el paso 5 se generaliza con el cuantificador existencial. En el paso 6 se obtiene una expresión equivalente, pero en función del cuantificador universal.
5. En el paso 8 se hace uso de la I_{12}.
6. En algunos pasos se obtienen expresiones equivalentes.
7. Finalmente, en el paso 13 se generaliza en función del cuantificador universal.

122. Demuestre la validez del siguiente razonamiento:

H_1: $(\forall x)\ (C(x) \rightarrow 7S(x))$
H_2: $(\forall x)\ (D(x) \rightarrow 7A(x))$
H_3: $(\forall x)\ (7S(x) \rightarrow A(x))$
C: $(\forall x)\ (C(x) \rightarrow 7D(x))$

Solución:

# paso	Regla	Fórmula
1	P, H_1	$(\forall x)\ (C(x) \rightarrow 7S(x))$
2	EU, 1	$C(y) \rightarrow 7S(y)$
3	P, H_3	$(\forall x)\ (7S(x) \rightarrow A(x))$
4	EU, 3	$7S(y) \rightarrow A(y)$
5	T, 2, 4, I_{13} $P \rightarrow Q,\ \ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $C(y) \rightarrow 7S(y), 7S(y) \rightarrow A(y) \Rightarrow C(y) \rightarrow A(y)$	$C(y) \rightarrow A(y)$
6	P, H_2	$(\forall x)\ (D(x) \rightarrow 7A(x))$
7	EU, 6	$D(y) \rightarrow 7A(y)$
8	T, 7, Eq	$A(y) \rightarrow 7D(y)$
9	T, 5, 8, I_{13} $P \rightarrow Q,\ \ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $C(y) \rightarrow A(y), A(y) \rightarrow 7D(y) \Rightarrow C(y) \rightarrow 7D(y)$	$C(y) \rightarrow 7D(y)$
10	GU, 9	$(\forall x)\ (C(x) \rightarrow 7D(x))$

Comentarios:

1. Para usar el método de deducción paso a paso, primero se eliminan los cuantificadores y se introduce otra variable.
2. Se acomodan las expresiones para poder usar alguna implicación.
3. La I_{13} es de gran aplicación. De hecho, se usa dos veces.
4. Como la conclusión tiene cuantificador, entonces se hace uso de la regla GU en el paso 10.

123. Demuestre la validez del siguiente razonamiento:

H_1: $(\forall x)\ (C(x) \rightarrow 7R(x))$
H_2: $(\exists x)\ (M(x)\ \wedge C(x))$
C: $(\exists x)\ (M(x)\ \wedge\ 7R(x))$

Solución:

# paso	Regla	Fórmula
1	P, H_1	$(\forall x)\ (C(x) \rightarrow 7R(x))$
2	EU, 1	$C(y) \rightarrow 7R(y)$
3	P, H_2	$(\exists x)\ (M(x)\ \wedge C(x))$
4	EE, 3	$M(y)\ \wedge C(y)$
5	T, 4, I_1 $P\ \wedge\ Q\ \Rightarrow P$ $M(y)\ \wedge C(y)\ \Rightarrow M(y)$	$M(y)$
6	T, 4, I_2 $P\ \wedge\ Q\ \Rightarrow Q$ $M(y)\ \wedge C(y) \Rightarrow C(y)$	$C(y)$
7	T, 6, 2, I_{11} $P,\ P \rightarrow Q\ \Rightarrow Q$ $C(y), C(y) \rightarrow 7R(y) \Rightarrow 7R(y)$	$7R(y)$
8	T, 5, 7, I_9 $P,\ Q\ \Rightarrow P\ \wedge\ Q$ $M(y), 7R(y) \Rightarrow M(y) \wedge 7R(y)$	$M(y) \wedge 7R(y)$
9	GE, 8	$(\exists x)\ (M(x)\ \wedge\ 7R(x))$

Comentarios:

1. Para usar el método de deducción paso a paso, primero se eliminan los cuantificadores y se introduce una variable (en este caso se introdujo *y*).
2. La I_1 y la I_2 sirve para eliminar uno de los elementos que aparece en la conjunción de los mismos.
3. Con la I_{11} se obtiene uno de los elementos de la conclusión.
4. En el paso 8, usando la I_9, hacemos la conjunción de los elementos que aparecen en los pasos 5 y 7, obteniendo una expresión similar a lo contenido en la conclusión.
5. Como la conclusión tiene cuantificador existencial, entonces por medio de GE generalizo la expresión en función del cuantificador existencial.

124. Demuestre la validez del siguiente razonamiento:

H_1: $(\forall x)\,(S(x) \rightarrow P(x))$
H_2: $(\forall x)\,(P(x) \rightarrow 7Q(x))$
H_3: $(\forall x)\,(7Q(x) \rightarrow 7R(x))$

C: $(\forall x)\,(S(x) \rightarrow 7R(x))$

Solución:

# paso	Regla	Fórmula
1	P, H_2	$(\forall x)\,(P(x) \rightarrow 7Q(x))$
2	EU, 1	$P(y) \rightarrow 7Q(y)$
3	P, H_3	$(\forall x)\,(7Q(x) \rightarrow 7R(x))$
4	EU, 3	$7Q(y) \rightarrow 7R(y)$
5	T, 2, 4, I_{13} $P \rightarrow Q,\ \ Q \rightarrow R \ \Rightarrow\ P \rightarrow R$ $P(y)\rightarrow 7Q(y), 7Q(y)\rightarrow 7R(y) \Rightarrow P(y)\rightarrow 7R(y)$	$P(y) \rightarrow 7R(y)$
6	P, H_1	$(\forall x)\,(S(x) \rightarrow P(x))$
7	EU, 6	$S(y) \rightarrow P(y)$
8	T, 7, 5, I_{13} $P \rightarrow Q,\ \ Q \rightarrow R \ \Rightarrow\ P \rightarrow R$ $S(y)\rightarrow P(y), P(y)\rightarrow 7R(y) \Rightarrow S(y)\rightarrow 7R(y)$	$S(y) \rightarrow 7R(y)$
9	GU, 8	$(\forall x)\,(S(x) \rightarrow 7R(x))$

Comentarios:

1. Para usar el método de deducción paso a paso, primero se eliminan los cuantificadores y se introduce una variable (en este caso se introdujo *y*).
2. Con la implicación I_{13} se logra la deducción.
3. Como la conclusión tiene cuantificador universal, entonces por medio de GU se generaliza la expresión en función del cuantificador universal.

125. Demuestre la validez del siguiente razonamiento:

H_1: $(\forall x)\,(7P(x) \rightarrow 7Z(x))$
H_2: $(\forall x)\,(Q(x) \rightarrow S(x))$
H_3: $(\forall x)\,(W(x) \rightarrow R(x))$
H_4: $(\forall x)\,(R(x) \rightarrow 7S(x))$
H_5: $(\forall x)\,(P(x) \rightarrow Q(x))$

C: $(\forall x)\,(7Z(x) \vee 7W(x))$

Solución:

# paso	Regla	Fórmula
1	P, H_5	$(\forall x)\,(P(x) \rightarrow Q(x))$
2	EU, 1	$P(y) \rightarrow Q(y)$
3	P, H_2	$(\forall x)\,(Q(x) \rightarrow S(x))$
4	EU, 3	$Q(y) \rightarrow S(y)$
5	T, 2, 4, I_{13} $P \rightarrow Q,\ \ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $P(y)\rightarrow Q(y),\ Q(y)\rightarrow S(y) \Rightarrow P(y)\rightarrow S(y)$	$P(y) \rightarrow S(y)$
6	P, H_4	$(\forall x)\,(R(x) \rightarrow 7S(x))$
7	EU, 6	$R(y) \rightarrow 7S(y)$
8	T, 7, Eq	$S(y) \rightarrow 7R(y)$
9	T, 5, 8, I_{13} $P \rightarrow Q,\ \ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $P(y)\rightarrow S(y),\ S(y)\rightarrow 7R(y) \Rightarrow P(y)\rightarrow 7R(y)$	$P(y) \rightarrow 7R(y)$
10	T, 9, Eq	$R(y) \rightarrow 7P(y)$
11	P, H_3	$(\forall x)\,(W(x) \rightarrow R(x))$
12	EU, 11	$W(y) \rightarrow R(y)$
13	T, 12, 10, I_{13} $P \rightarrow Q,\ \ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $W(y)\rightarrow R(y),\ R(y)\rightarrow 7P(y) \Rightarrow W(y)\rightarrow 7P(y)$	$W(y) \rightarrow 7P(y)$
14	P, H_1	$(\forall x)\,(7P(x) \rightarrow 7Z(x))$
15	EU, 14	$7P(y) \rightarrow 7Z(y)$
16	T, 13, 15, I_{13} $P \rightarrow Q,\ \ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $W(y)\rightarrow 7P(y), 7P(y)\rightarrow 7Z(y)\Rightarrow W(y)\rightarrow 7Z(y)$	$W(y) \rightarrow 7Z(y)$
17	T, 16, Eq	$Z(y) \rightarrow 7W(y)$
18	T, 17, Eq	$7Z(y) \vee 7W(y)$
19	GU, 18	$(\forall x)\,(7Z(x) \vee 7W(x))$

Otra forma de resolver el problema:

# paso	Regla	Fórmula
1	P, H_1	$(\forall x)\ (7P(x) \rightarrow 7Z(x))$
2	EU, 1	$7P(y) \rightarrow 7Z(y)$
3	P, H_2	$(\forall x)\ (Q(x) \rightarrow S(x))$
4	EU, 3	$Q(y) \rightarrow S(y)$
5	P, H_3	$(\forall x)\ (W(x) \rightarrow R(x))$
6	EU, 5	$W(y) \rightarrow R(y)$
7	P, H_4	$(\forall x)\ (R(x) \rightarrow 7S(x))$
8	EU, 7	$R(y) \rightarrow 7S(y)$
9	P, H_5	$(\forall x)\ (P(x) \rightarrow Q(x))$
10	EU, 9	$P(y) \rightarrow Q(y)$
11	T, 10, 4, I_{13} $P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $P(y)\rightarrow Q(y),\ Q(y)\rightarrow S(y) \Rightarrow P(y)\rightarrow S(y)$	$P(y) \rightarrow S(y)$
12	T, 8, Eq	$S(y) \rightarrow 7R(y)$
13	T, 11, 12, I_{13} $P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $P(y)\rightarrow S(y),\ S(y)\rightarrow 7R(y) \Rightarrow P(y)\rightarrow 7R(y)$	$P(y) \rightarrow 7R(y)$
14	T, 13, Eq	$R(y) \rightarrow 7P(y)$
15	T, 6, 14, I_{13} $P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $W(y)\rightarrow R(y),\ R(y)\rightarrow 7P(y) \Rightarrow W(y)\rightarrow 7P(y)$	$W(y) \rightarrow 7P(y)$
16	T, 15, 2, I_{13} $P \rightarrow Q.\ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ $W(y)\rightarrow 7P(y), 7P(y)\rightarrow 7Z(y) \Rightarrow W(y)\rightarrow 7Z(y)$	$W(y) \rightarrow 7Z(y)$
17	T, 16, Eq	$Z(y) \rightarrow 7W(y)$
18	T, 17, Eq	$7Z(y) \vee 7W(y)$
19	GU, 18	$(\forall x)\ (7Z(x) \vee 7W(x))$

Comentarios:

1. Compare la solución de la página 204 con la solución de la página 205.
2. Entienda que existen diferentes caminos para resolver los ejercicios.
3. Estudie, practique. Todo tiene solución.

Recomendaciones finales

En el ejercicio de la ingeniería y en la vida diaria, hacemos frente a una serie de situaciones. Para encontrar la solución, primero debemos elaborar el planteamiento de problema, proponer alternativas, determinando las hipótesis y la conclusión correspondiente. Teniendo el argumento completo, procedemos a demostrar su validez.

Por otra parte, estos 125 ejercicios, sumados a las variantes de los mismos que Usted genere, son el inicio del estudio de las Estructuras Discretas, específicamente en lo relacionado con la lógica proposicional y el cálculo de predicados.

Ahora, Usted ya tiene los elementos necesarios para proceder a demostrar la validez de un razonamiento.

Le recomendamos que elabore los algoritmos de los métodos aprendidos, con el fin de escribir los programas de computadora. Estas acciones le permitirán tener un amplio dominio conceptual y de procedimiento.

Finalmente, no dude en establecer contacto con los creadores de esta obra.

Los autores

Orlando Zaldívar Esquivel
Orlando Zaldívar Zamorategui