第四章 解析延拓

§4.1

1. 若 $f_1(z)$ 在 σ_1 解析，$f_2(z)$ 在 σ_2 解析，且 $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \sigma_{12}$ 非空，而有 $f_1(z) \equiv f_2(z)$，则 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 互为彼此的解析延拓（or 开拓）

惟一性定理：无论解析开拓的途径和方法如何，开拓以后的解析函数是惟一的

2. 解析开拓的常规方法

① 泰勒级数展开

② 用函数关系 $\underset{\sim \mathrm{Re}\,z>0}{\Gamma(z)} = \overset{\sim \mathrm{Re}\,z>-1}{\frac{\Gamma(z+1)}{z}} = \overset{\sim \mathrm{Re}\,z>-2}{\frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}}$

③ 许瓦兹：若 $f(z)$ 在包括实轴在内的上半平面解析，有：

$\begin{cases} f(z) \text{ 在实轴上的值 } f(x) \text{ 是实数} \\ \overline{f(\bar{z})} \text{ 是 } f(z) \text{ 向下半平面的解析延拓} \end{cases}$

§4.2

1. Γ 函数，第二类欧拉型积分

$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$，$x>0$ $\sim$ $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$，$\mathrm{Re}\,z>0$

基本性质：

① $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$

② $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$

③ $\Gamma(n) = (n-1)!$　　$\Gamma(n+1) = n!$

④ $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$

⑤ 由④中取 $z=\frac{1}{2}$，得 $(\Gamma(\frac{1}{2}))^2 = \pi$，$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$\Gamma(\frac{2n+1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^n} = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$

⑥ $\Gamma(z) = 2\int_0^\infty r^{2z-1} e^{-r^2} dr$

$\int_0^\infty r^p e^{-r^2} dr = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{p+1}{2})$

2. Beta 函数： $B(p-q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \quad (\mathrm{Re}\,p > 0,\ \mathrm{Re}\,q > 0)$

$$B(p-q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

第五章 留数理论

1. 回顾：$f(z)$ 在 l 内
$$\begin{cases} 解析：\oint_l f(z)dz = 0 \\ 有一阶极点 a：\oint_l \frac{\varphi(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a) \\ 有n阶极点 a：\oint_l \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}dz = \frac{2\pi i}{n!}\varphi^{(n-1)}(a) \end{cases}$$
~ φ 的 n-1 阶导

§5.1 留数

2. 留数定理

设 $f(z)$ 在围道 l 所包围的区域 σ 为除了有限个（n个）孤立奇点之外，处处解析且在 $\bar{\sigma}$ 上连续 的函数，则有：$\oint_l f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}f(b_k)$，

其中 $\mathrm{Res}f(b_k) = C_{-1}(b_k)$ 称为 $f(z)$ 在 b_k 点的留数

△对于无穷远点，作足够大的围道 l（以0为中心，包围 $f(z)$ 在有限远处所有奇点的一个圆），圆以外的区域即 ∞ 点的邻域。

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l f(z)dz = \mathrm{Res}f(\infty) = -C_{-1}(\infty)$$

△ $\oint_l f(z)dz + \oint_l f(z)dz = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{Res}f(b_k) + \mathrm{Res}f(\infty) = 0$ 全平面留数之和为0

3. 留数的计算

① 本性奇点 (b)：将 $f(z)$ 作以 b 为中心的 Laurent 级数展开：

$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k(z-b)^k$，则 $\mathrm{Res}f(b) = C_{-1}(b)$

② 极点

在 $f(z)$ 的n阶极点 b 处的留数计算：$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-b)^n}$，$\varphi(b)\neq 0$ 且在 l 内解析

有 $\mathrm{Res}f(b) = \frac{1}{2\pi i}\oint_l f(z)dz = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-b)^n f(z)\right]_{z=b}$

单极点：$n=1$，$\mathrm{Res}f(b) = \lim_{z\to b}(z-b)f(z)$

另：若 $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 且 $\psi(b)=0$，$\varphi(b)\neq 0$，b 是 $\psi(z)$ 的单重根，$f(z)$ 的单极

则 $\mathrm{Res}f(z) = \frac{\varphi(b)}{\psi'(b)}$

无穷远点，$\mathrm{Res}f(\infty) = -C_{-1}(\infty)$

§5.2 应用 —计算实积分

1. 无穷实积分 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$

若 $f(z)$ 在实轴无奇点，在上半平面除了有限个孤立奇点，b_k $(k=Z^+)$ 以外，处处解析，且 $zf(z)$ 在包含实轴的上半平面，

当 $z\to\infty$ 时，$zf(z)$ 一致趋于0，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}\, f(b_k)\Big|_{\mathrm{Im}\, z>0}$

For $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\begin{cases}\cos px\\ \sin px\end{cases} dx \quad (p>0)$,

当 $f(z)$ 在实轴无奇点，在上半平面除有限个孤立奇点 b_k $(k\in\mathbb{Z}^+)$ 外处处解析，且 $f(z)$ 在包含实轴的上半平面，当 $z\to\infty$ 时，$f(z)$ 一致趋于0，

则：$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ipx}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}[\mathrm{Res}\, f(b_k)\, e^{ipb_k}]_{\mathrm{Im}\, b_k>0}$

2. Jordan Lemma 引理

若 $z\to\infty$ 时(上半平面) $f(z)\xrightarrow{一致}0$，则 $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\, e^{ipz}dz=0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ipx} + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\, e^{ipz}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\{f(b_k)\, e^{ipz}]_{\mathrm{Im}\, b_k>0}$$

推论：当 $f(x)=f(-x)$，

偶函数 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ipx}dx = 2\int_0^{\infty} f(x)\left(\frac{e^{ipx}+e^{-ipx}}{2}\right)dx$
$= 2\int_0^{\infty} f(x)\cos px\, dx$

奇函数 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ipx}dx = 2i\int_0^{\infty} f(x)\left(\frac{e^{ipx}-e^{-ipx}}{2i}\right)dx$
$= 2i\int_0^{\infty} f(x)\sin px\, dx$

e.g.: $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\cos\theta}\quad (|a|<1) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx$ 即 $f(z)=\frac{z}{z^2+4z+20}$ 变换，$\Rightarrow$

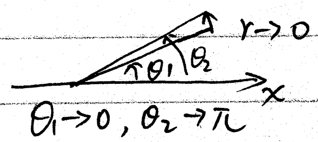
$= 2\pi i\left\{\frac{\varphi(z)}{\psi'(z)}\right]_{z=b_k}$ 其中 $\varphi(z)=ze^{iz}$，$\psi(z)=z^2+4z+20$

3. 小弧引理 $\oint_l f(x)\, e^{ipx}dx$

设 $f(z)$ 在圆弧 $C_r: |z-a|=r$，$\theta_1\le\theta\le\theta_2$，则有 $z-a=re^{i\theta}$，a 为 $f(z)$ 单极点，

即 $\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=\lambda$ (有限) $=\mathrm{Res}\, f(a)$，

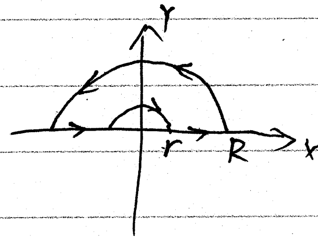
then: $\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)dz = i(2\pi-\pi)\mathrm{Res}\, f(x_0)$



$\theta_1\to 0$, $\theta_2\to\pi$

§5.3
物理问题
中的若干积分

1. Dirichlet Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$



解：取如图积分围道，consider $\frac{e^{iz}}{z}$ as 被积函数，

$$\oint \frac{e^{iz}}{z}dz = 0 = \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{-x}}{x}dx \quad (1)$$

$$= \int_r^R \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx = 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}dx \quad (2)$$

令(1)(2)式中 $r\to 0, R\to\infty$，则：

$$2i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z} + \lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

(Jordan's Lemma) (小弧引理)

2. Fresnel Integral $\int_0^\infty \begin{Bmatrix}\sin x^2 \\ \cos x^2\end{Bmatrix} dx \to e^{iz^2}$

3. Euler Integral

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha} = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx \quad (0<x<1)$$

$$\Rightarrow \oint_l \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}dz$$

4. Mellin transform

$$\oint_l f(z)z^\alpha dz = [1-e^{i\pi\alpha}]\int_0^\infty x^\alpha f(x)dx = 2\pi i\sum_k \mathrm{Res}(b_k)$$

其中$f(x)$在实轴上无极点，且为有理函数，当$z\to\infty$时$|z^2 f(z)|$有界。