求数列极限的常用方法

1. 用 $\varepsilon - N$ 定义验证极限
2. 用Cauchy命题求极限
3. 用追敛性求极限
4. 用单调有界定理求极限
5. 用Cauchy收敛准则证明极限
6. 用Stolz定理求极限
7. 用压缩映像原理求极限

1. 用 $\varepsilon-N$ 定义验证极限

例 1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n+a_{n-1})=0$，证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

【证】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n+a_{n-1})=0$ 可知，对 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$|2a_n+a_{n-1}|<\varepsilon,\quad 即\ |a_n|<\frac{|a_{n-1}|}{2}+\frac{\varepsilon}{2}。$$

从而

$$|a_n|<\frac{\frac{|a_{n-2}|}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\frac{1}{2^2}|a_{n-2}|$$

$$<\cdots<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2^{n-N}}+\frac{1}{2^{n-N}}|a_N|。$$

因为

$$\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2^{n-N}}=\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-N}}\right)<\varepsilon。$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-N}}|a_N|=0$，对上述 $\varepsilon>0$，存在 $N_1>N$，当 $n>N_1$ 时，有 $\frac{1}{2^{n-N}}|a_N|<\varepsilon$。

所以对 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，有 $|a_n|<2\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

例 2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-2})=0$，证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{n}=0$。

【证 1】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-2})=0$ 知，对 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a_{n-2}|<\varepsilon$。记 $b_n=|a_n-a_{n-1}|$，则

$$|b_n-b_{n-1}|=||a_n-a_{n-1}|-|a_{n-1}-a_{n-2}||\leqslant|a_n-a_{n-2}|,$$

从而

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n-a_{n-1}}{n}\right|=\frac{b_n}{n}&\leqslant\frac{|b_n-b_{n-1}|+|b_{n-1}-b_{n-2}|+\cdots+|b_{N+1}-b_N|}{n}+\frac{b_N}{n}\\&\leqslant\frac{|a_n-a_{n-2}|+|a_{n-1}-a_{n-3}|+\cdots+|a_{N+1}-a_{N-1}|}{n}+\frac{|a_N-a_{N-1}|}{n}\\&\leqslant\frac{(n-N)\varepsilon}{n}+\frac{|a_N-a_{N-1}|}{n}<\varepsilon+\frac{|a_N-a_{N-1}|}{n},\end{aligned}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_N-a_{N-1}|}{n}=0$，对上述 $\varepsilon>0$，存在 $N_1>N$，当 $n>N_1$ 时，有 $\dfrac{|a_N-a_{N-1}|}{n}$

所以对 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，有 $\left|\dfrac{a_n-a_{n-1}}{n}\right|<2\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{n}=0$。

【证 2】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-2})=0$ 知，对 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a_{n-2}|<\varepsilon$。因为

$$\begin{aligned}a_n-a_{n-1}&=(a_n-a_{n-2})-(a_{n-1}-a_{n-2})=(a_n-a_{n-2})-\\&\quad(a_{n-1}-a_{n-3})+(a_{n-2}-a_{n-3})\\&=(a_n-a_{n-2})-(a_{n-1}-a_{n-3})+(a_{n-2}-a_{n-4})+\cdots+\\&\quad(-1)^{n-N-1}[(a_{N+1}-a_{N-1})-(a_N-a_{N-1})]\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{|a_n-a_{n-1}|}{n}&\leqslant\frac{|a_n-a_{n-2}|+|a_{n-1}-a_{n-3}|+\cdots+|a_{N+1}-a_{N-1}|}{n}+\frac{|a_N-a_{N-1}|}{n}\\&\leqslant\frac{(n-N)\varepsilon}{n}+\frac{|a_N-a_{N-1}|}{n}<\varepsilon+\frac{|a_N-a_{N-1}|}{n},\end{aligned}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_N-a_{N-1}|}{n}=0$，对上述 $\varepsilon>0$，存在 $N_1>N$，当 $n>N_1$ 时，有 $\frac{|a_N-a_{N-1}|}{n}<\varepsilon$，所以对 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，有 $\left|\frac{a_n-a_{n-1}}{n}\right|<2\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{n}=0$。

2. 用Cauchy命题求极限

例 3. （**Cauchy 命题**） 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$。

【证】 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 知，对 $\forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有 $|a_n - a| < \varepsilon$。由于

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - a\right| \\
&= \left|\frac{(a_1-a)+\cdots+(a_N-a)+(a_{N+1}-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{(a_1-a)+\cdots+(a_N-a)}{n}\right| + \left|\frac{(a_{N+1}-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right| \\
&\leqslant \frac{|a_1-a|+\cdots+|a_N-a|}{n} + \frac{|a_{N+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n} \\
&\leqslant \frac{M}{n} + \frac{n-N}{n} \cdot \varepsilon < \frac{M}{n} + \varepsilon,
\end{aligned}
$$

其中 $M = |a_1 - a| + \cdots + |a_N - a|$ 为常数，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{M}{n} = 0$，则对上述 $\forall \varepsilon > 0$，取

$$N_1 = \max\left\{N, \left[\frac{M}{\varepsilon}\right]\right\},$$

当 $n > N_1$ 时，有 $\dfrac{M}{n} < \varepsilon$ 成立，从而，对 $\forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N_1，当 $n > N_1$ 时，有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - a\right| < 2\varepsilon,$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a。$$

例 4. 若$\{a_n\}$为一正项数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$。

【证】 记$a_0=1$，则$a_n=\dfrac{a_1}{a_0}\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$，两边同时取对数得

$$\frac{1}{n}\ln a_n=\frac{\ln\dfrac{a_1}{a_0}+\ln\dfrac{a_2}{a_1}+\ln\dfrac{a_3}{a_2}+\cdots+\ln\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}{n},$$

由 Cauchy 命题及$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$ 得

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{a_n}{a_{n-1}}=\ln a,$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$。

例 5. 计算数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$。

【解 1】 令 $a_n=\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$，$b_n=a_n^n=\dfrac{n!}{n^n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}},$$

则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{\mathrm{e}}。$$

【解 2】 将 $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ 取对数，并整理得

$$\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=-\frac{n\ln n-(\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln n)}{n},$$

记 $b_n=n\ln n-(\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln n)$，由 Cauchy 命题知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{\mathrm{c}}$。

3. 用追敛性求极限

例6. 请证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^c n}{n^b}=0$，其中 $a>1,b>0,c>0$；

无穷大阶次比较链：

$$\ln\ln n << \ln n << n^\alpha << n^k << a^n << n! << n^n \quad (n\to\infty)$$

其中， $0<\alpha<1, k\in N^+, a>1.$

（1）、证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

$0<\frac{n!}{n^n}=\frac{n}{n}*\frac{n-1}{n}*\dots*\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n}$，很显然 $\frac{1}{n}$ 是 $n\to\infty$ 时的无穷小量，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$ 得证；

（2）、证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

我们只考虑 $n\geq[a]+1$ 的情况；

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}*\frac{a}{2}*...*\frac{a}{[a]}*\frac{a}{[a]+1}*...*\frac{a}{n-1}*\frac{a}{n}\ ;$$

设常数 $A=\frac{a}{1}*\frac{a}{2}*...*\frac{a}{[a]}$ ，很显然 $\frac{a}{[a]+1}*...*\frac{a}{n-1}$ 每一项都比 1 小，因此我们有 $\frac{a^n}{n!}<A*1*\frac{a}{n}$ ，很显然 $A*1*\frac{a}{n}$ 是 $n\to\infty$ 时的无穷小量，则

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ 得证；

(3)、证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n}=0(a>1,b>0)$

由于 $\frac{n^b}{a^n}=(\frac{n}{(\sqrt[b]{a})^n})^b$ ，其中 $\sqrt[b]{a}$ 可以表示任意大于 1 的数，因此我们令

$x_n=\frac{n}{(d+1)^n}(d>0)$ 并转而证明 $\{x_n\}$ 是无穷小量；

对上式进行恒等变形和二项式展开：

$$n=x_n(1+dn+\frac{n(n-1)}{2}d^2+...+d^n)$$

$$>x_n(1+dn+\frac{n(n-1)}{2}d^2)$$ ；

因此 $x_n<\frac{n}{1+dn+\frac{n(n-1)}{2}d^2}$ ，很显然不等式右侧分母次数高于分子，因此是

$n\to\infty$ 时的无穷小量，则

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n}=0(a>1,b>0)$ 得证；

(4)、证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^c n}{n^b}=0(b>0,c>0)$

由于 $\frac{\ln^c n}{n^b}=(\frac{\ln n}{n^{\frac{b}{c}}})^c$，其中 $\frac{b}{c}$ 可以表示任意大于 0 的数，因此我们令

$x_n=\frac{\ln n}{n^d}(d>0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{e^{d\ln n}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{(e^d)^t}$，由于

$d>0\Rightarrow e^d>1$，由（3）中结论可得 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{(e^d)^t}=0$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^c n}{n^b}=0(b>0,c>0)$ 得证。

例 7. 设 $x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}(n=1,2,\cdots)$,计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

【解 1】(夹逼准则) 易知 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$,若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在,记 $a=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$,由极限的保号性知 $a=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\geqslant 0$。再对 $x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ 两边取极限得 $a=\dfrac{3(1+a)}{3+a}$,解得 $a=\sqrt{3}$。往证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{3}$。事实上,有

$$|x_n-\sqrt{3}|=\left|\frac{3(1+x_{n-1})}{3+x_{n-1}}-\sqrt{3}\right|=\frac{3-\sqrt{3}}{3+x_{n-1}}|x_{n-1}-\sqrt{3}|$$

$$\leqslant \frac{3-\sqrt{3}}{3}|x_{n-1}-\sqrt{3}|\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}|x_1-\sqrt{3}|,$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}=0$,由夹逼准则知,$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-\sqrt{3}|=0$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{3}$。

【解 2】(单调有界原理) 前半部分同解法 1。再证 $\{x_n\}$收敛。

(1) 当 $0<x_1\leqslant\sqrt{3}$时,设 $0<x_n\leqslant\sqrt{3}$,则

$$0<x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}=3-\frac{6}{3+x_n}\leqslant 3-\frac{6}{3+\sqrt{3}}=\sqrt{3},$$

则$\{x_n\}$有上界。又

$$x_{n+1}-x_n=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}-x_n=\frac{3-x_n^2}{3+x_n}\geqslant 0,$$

即$\{x_n\}$单调增加,因此$\{x_n\}$收敛。

(2) 当 $x_1>\sqrt{3}$时,设 $x_n>\sqrt{3}$,则

$$x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}=3-\frac{6}{3+x_n}\geqslant 3-\frac{6}{3+\sqrt{3}}=\sqrt{3},$$

即$\{x_n\}$有下界。又

$$x_{n+1}-x_n=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}-x_n=\frac{3-x_n^2}{3+x_n}<0,$$

即$\{x_n\}$单调减少,因此$\{x_n\}$收敛。

例 8. 设 $c_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\,(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{c_n\}$ 收敛。

【证】 因为

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\quad\Leftarrow$$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调增加有上界 e

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 单调减少有下界 e

两边取对数得

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

（或者利用拉格朗日中值定理证明对数不等式）。而

$$c_{n+1}-c_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,$$

则数列 $\{c_n\}$ 单调减少。又由 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 得

$$\ln(1+n)-\ln n<\frac{1}{n},$$

将 n 依次用 $1,2,\cdots,n$ 代入，再将这些不等式相加得

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)=\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\ln n+\frac{1}{n+1},$$

$$c_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\frac{1}{n+1}>0,$$

因此数列 $\{c_n\}$ 严格单调减少且有下界，从而数列 $\{c_n\}$ 收敛。

【注】

（1）称数列$\{c_n\}$的极限为 Euler 常数，记为 $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)\approx 0.55721\cdots$。

（2）由上述命题可以得到 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+o(1)$（$o(1)$为无穷小量）。

（3）利用上述结论可以计算极限。例如

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\{[\ln 2n+\gamma+o(1)]-[\ln n+\gamma+o(1)]\}\\&=\lim_{n\to\infty}(\ln 2+o(1))=\ln 2。\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{2n-1}\frac{1}{2n}\right)$$ （当极限存在时）

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\ln 2.$$

4. 用单调有界定理证明或求极限

例 9. 设$\{x_n\}$为非负数列，$0\leqslant x_{n+1}\leqslant x_n+\frac{1}{n^2}(n=1,2,\cdots)$. 试证$\{x_n\}$收敛.（中国科学技术大学）

提示 （当$n\geqslant 2$时）因为

$$0\leqslant x_{n+1}\leqslant x_n+\frac{1}{n^2}\leqslant x_n+\frac{1}{n(n-1)}=x_n+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow 0\leqslant x_{n+1}+\frac{1}{n}\leqslant x_n+\frac{1}{n-1}\Rightarrow\left\{x_n+\frac{1}{n-1}\right\}\text{递减且有下界 }0\Rightarrow\left\{x_n+\frac{1}{n-1}\right\}\text{收敛}$$

$$\Rightarrow x_n=\left(x_n+\frac{1}{n-1}\right)-\frac{1}{n-1}\text{（两收敛数列之差）},$$

故$\{x_n\}$收敛.

问 本题利用了$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$的特点和放大拆分技巧，使得证明特别简单，若将$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$换成任意收敛数列，命题是否能成立？如何证明？

例 10. 已知数列$\{x_n\}$满足$0\leqslant x_{n+1}\leqslant x_n+\dfrac{1}{n^p}$($p>1,n\in\mathrm{N}^+$),证明数列$\{x_n\}$收敛。

【证 1】 令$S_n=1+\dfrac{1}{2^p}+\cdots+\dfrac{1}{n^p}$,由于$p>1$,则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=A$($A$ 为常数),因此

$$-S_n\leqslant x_{n+1}-S_n\leqslant x_n+\frac{1}{n^p}-S_n=x_n-S_{n-1},$$

令$y_n=x_n-S_{n-1}$,则

$$y_n\geqslant y_{n+1}\geqslant -S_n>-A,$$

即数列$\{y_n\}$单调减少有下界,记$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$,所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(y_n+S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}y_n+\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=A+B。$$

例11. 已知 $x_1=1, x_2=\dfrac{1}{2}, x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

分析 假设极限存在，且值为 A，则 $A=\dfrac{1}{1+A}, A^2+A-1=0$，

$$A=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases}0.618\cdots,\\ -1.618\cdots.\end{cases}$$

因 $x_n>0$，负数不合题意，故 $A=0.618\cdots$.

我们来研究 x_n 的分布情况.

若 $x_n<A$，则 $x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}>\dfrac{1}{1+A}=A$；若 $x_n>A$，则 $x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}<\dfrac{1}{1+A}=A$. 即 x_n 在 A 的左右来回跳动. 而 $x_1=1>0.618\cdots$，故知

$$x_1, x_3, x_5, \cdots, x_{2n+1}, \cdots>A,\quad x_2, x_4, x_6, \cdots, x_{2n}, \cdots<A. \tag{1}$$

若 $\{x_n\}$ 收敛于 A，则 $\{x_{2n}\}$，$\{x_{2n+1}\}$ 亦然. 因此我们猜想：是否 $\{x_{2n}\}$ 在 A 左端 $\nearrow A$，$\{x_{2n+1}\}$ 在 A 右端 $\searrow A$？为此我们来考察 $x_{n+2}-x_n$ 的符号：

$$x_{n+2}-x_n=\frac{1}{1+x_{n+1}}-x_n=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x_n}}-x_n=\frac{1-x_n-x_n^2}{2+x_n}. \tag{2}$$

而 $1-x-x^2=0$ 的两根为 $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases}0.618\cdots,\\-1.618\cdots,\end{cases}$ 故 $1-x-x^2=(1.618\cdots+x)\cdot(0.618\cdots-x)$. 式(2)变为

$$x_{n+2}-x_n=\frac{(1.618\cdots+x_n)(0.618\cdots-x_n)}{2+x_n}\begin{cases}>0 & (\text{若 } x_n<0.618\cdots=A),\\<0 & (\text{若 } x_n>0.618\cdots=A).\end{cases}\tag{3}$$

式(1)和式(3)表明,$\{x_{2n}\}\nearrow$以 A 为上界,$\{x_{2n+1}\}\searrow$以 A 为下界,因此两子列收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=\beta$,在式 $x_{2n}=\dfrac{1}{1+x_{2n-1}}$ 及 $x_{2n+1}=\dfrac{1}{1+x_{2n}}$ 里取极限得

$$\alpha=\frac{1}{1+\beta},\ \beta=\frac{1}{1+\alpha}.$$

由此解得 $\alpha=\beta=A=0.618\cdots$. 既然 $\{x_{2n}\}$ 与 $\{x_{2n+1}\}$ 有相同极限,由例 1.2.13 知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=0.618\cdots$.

例12. 已知 $\begin{cases} x_{2n}=\dfrac{x_{2n-1}+2x_{2n-2}}{3}, \\ x_{2n+1}=\dfrac{2x_{2n}+x_{2n-1}}{3}. \end{cases}$ $x_0=a, x_1=b(b>a)$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 收敛.

提示：设法证明 $x_{2n}-x_{2n-2}=\dfrac{2}{9}(x_{2n-2}-x_{2n-4})$, $x_{2n+1}-x_{2n-1}=\dfrac{2}{9}(x_{2n-1}-x_{2n-3})$

$\Rightarrow$ $x_{2n}-x_{2n-2}$与$x_{2n-2}-x_{2n-4}$同号， $x_{2n+1}-x_{2n-1}$与$x_{2n-1}-x_{2n-3}$同号

又 $x_2-x_0=\dfrac{1}{3}(b-a)>0$, $x_3-x_1=-\dfrac{4}{9}(b-a)<0$

从而 $\{x_{2n}\}$单调增， $\{x_{2n+1}\}$单调减

由 $x_{2n}=\dfrac{x_{2n-1}+2x_{2n-2}}{3}\le\dfrac{x_{2n-1}+2x_{2n}}{3}$ $\Rightarrow$ $x_{2n}\le x_{2n-1}$

$\Rightarrow$ $x_0<x_2<\cdots<x_{2n-2}<x_{2n}<\cdots<x_{2n-1}<x_{2n-3}<\cdots<x_3<x_1$

$\Rightarrow$ $\{x_{2n}\}$单调增有上界， $\{x_{2n+1}\}$单调减有下界

最后导出：$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=A=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=B.$

5. 用Cauchy收敛准则证明极限

例13. 求证：序列 $x_n=\frac{\cos 1}{1\cdot 2}+\frac{\cos 2}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{\cos n}{n(n+1)}$收敛.

证 对 $\forall\, n,p\in N$，有

$$|x_{n+p}-x_n|<\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}.$$

由此可见，对 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\, N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，使得当 $n>N$ 时，有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon(\forall\, p\in N)$. 由收敛原理知 $\{x_n\}$ 收敛.

评注 从本例可以看出收敛原理的优点之一：它从序列本身的结构来判断收敛性，因此不需要事先知道极限值.

例14. 求证：序列 $x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$发散.

证 对 $\varepsilon_0=1$，$\forall\, N\in N$，只要 $n>\max\{N,2\}$ 及 $p=n$，便有

$$|x_{n+p}-x_n|=|x_{2n}-x_n|=\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$\geqslant\frac{n}{\sqrt{2n}}=\sqrt{\frac{n}{2}}>1=\varepsilon_0.$$

例15. 设 $0\leqslant x_{n+1}\leqslant x_n+y_n(\forall n\in\mathrm{N})$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} y_k<+\infty$. 试证 $\{x_n\}$ 收敛.

证 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} y_k<+\infty$ 收敛，根据 Cauchy 准则，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} y_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n+p} y_k-\sum_{k=1}^{n} y_k\right|<\varepsilon\ (\forall p\geqslant 0). \tag{1}$$

因恒有 $x_n\geqslant 0$，故 $\inf\limits_{k\geqslant n} x_k=\alpha_n\geqslant 0$. 由下确界的定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists n_1>n$，使得

$$\alpha_n\leqslant x_{n_1}<\alpha_n+\varepsilon. \tag{2}$$

根据已知条件：$x_{n+1}\leqslant x_n+y_n$，有

$$x_{n_1+k+1}-x_{n_1+k}\leqslant y_{n_1+k}(\forall k=0,1,2,\cdots,p-1).$$

诸式累加，得

$$x_{n_1+p+1}-x_{n_1}\leqslant\sum_{k=0}^{p} y_{n_1+k}=\sum_{k=n_1}^{n_1+p} y_k<\varepsilon(\forall p\geqslant 0). \tag{3}$$

1）若 $x_{n_1+p+1}\leqslant x_{n_1}$，则 $0\leqslant\alpha_n\leqslant x_{n_1+p+1}\leqslant x_{n_1}\overset{\text{式(2)}}{\leqslant}\alpha_n+\varepsilon$，知 $\left|x_{n_1+p+1}-x_{n_1}\right|<\varepsilon$.

2）若 $x_{n_1}<x_{n_1+p+1}$，则由式(3)：$0<x_{n_1+p+1}-x_{n_1}\leqslant\sum\limits_{k=n_1}^{n_1+p} y_k<\varepsilon$.

总之数列 $\{x_n\}$ 符合 Cauchy 准则条件，故 $\{x_n\}$ 收敛.

6. 用Stolz定理求极限

定 理： $\left(\dfrac{*}{\infty}\text{型的 Stolz 定理}\right)$ 设$\{b_n\}$为严格单调增加的数列，且$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$（$A$ 为有限数或$\pm\infty$），证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=A$。

例16. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\dfrac{1}{p+1}$（$p$ 为自然数）.

证
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)^p}{(p+1)n^p+\frac{(p+1)p}{2}n^{p-1}+\cdots+1}$$
$$=\frac{1}{p+1}.$$

例17. 设 $S_n=\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{n^2}$,其中 $C_n^k=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$,计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$。

【解】 因 $\{n^2\}$ 为严格单调增加的数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2=+\infty$,两次使用 Stolz 公式,得

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1}\ln C_{n+1}^k-\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{(n+1)^2-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\dfrac{C_{n+1}^k}{C_n^k}+\ln C_{n+1}^{n+1}}{2n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\dfrac{n+1}{n-k+1}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k}{2n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n-\ln(n+1)}{(2n+1)-(2n-1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{2}。$$

例18. 设 $a_1>0, a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}(n=1,2,\cdots)$，计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}}$。

【解】 因 $a_1>0, a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$，则 $a_n>0, a_{n+1}>a_n(n=1,2,\cdots)$，即 $\{a_n\}$ 严格单调增加，若 $\{a_n\}$ 收敛于有限数 a，由递推公式 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ 知 $a=a+\frac{1}{a}$，矛盾，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$。由 Stolz 公式得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{2(n+1)-2n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}^2-a_n^2)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{a_n^2}\right)=1,$$

因为 $a_n>0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$。

7. 用压缩映像原理求极限

压缩映射的定义 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上定义, $f([a,b])\subset[a,b]$, 并存在一个常数 k, 满足 $0<k<1$, 使得对一切 $x,y\in[a,b]$ 成立不等式 $|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$, 则称 f 是 $[a,b]$ 上的一个压缩映射, 称常数 k 为压缩常数.

命题 3.4.4 (压缩映射原理) 设 f 是 $[a,b]$ 上的一个压缩映射, 则

(1) f 在 $[a,b]$ 中存在唯一的不动点 $\xi=f(\xi)$;

(2) 由任何初始值 $a_0\in[a,b]$ 和递推公式 $a_{n+1}=f(a_n)$, $n\in\mathbf{N}_+$, 生成的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛于 ξ.

(3) 成立估计式 $|a_n-\xi|\leqslant\dfrac{k}{1-k}|a_n-a_{n-1}|$ 和 $|a_n-\xi|\leqslant\dfrac{k^n}{1-k}|a_1-a_0|$ (即**事后估计与先验估计**).

证 (注意在这个证明中不需要函数 f 的连续性概念.) 由于 $f([a,b])\subset[a,b]$, 因此 $\{a_n\}$ 必在 $[a,b]$ 中. 根据 Cauchy 收敛准则估计

$$\begin{aligned}|a_n-a_{n+p}|&\leqslant k|a_{n-1}-a_{n+p-1}|\leqslant k^2|a_{n-2}-a_{n+p-2}|\\&\leqslant\cdots\leqslant k^n|a_0-a_p|\leqslant k^n(b-a).\end{aligned}$$

可见对 $\varepsilon > 0$, 只要取 $N = [\ln(\varepsilon/(b-a)) / \ln k]$, 当 $n > N$ 和 $p \in \mathbf{N}_+$ 时, 就有 $|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon$. 因此 $\{a_n\}$ 是基本数列, 从而收敛. 记其极限为 $\xi \in [a,b]$. 为了证明这个 ξ 是 f 的不动点, 需要研究第二个数列 $\{f(a_n)\}$. 从不等式 $|f(a_n) - f(\xi)| \leqslant k|a_n - \xi|$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$ 可见数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛于 $f(\xi)$.

在 $a_{n+1} = f(a_n)$ 两边令 $n \to \infty$, 就得到 $\xi = f(\xi)$. 因此 ξ 是 f 的不动点.

如果 f 在 $[a,b]$ 上还有不动点 η, 即 $\eta = f(\eta)$, 则就有 $|\xi - \eta| = |f(\xi) - f(\eta)| \leqslant k|\xi - \eta|$. 由于 $0 < k < 1$, 只能有 $\xi = \eta$. 因此 f 在 $[a,b]$ 上的不动点是唯一的. 这样就证明了命题的 (1) 和 (2).

命题之 (3) 的前一式可从估计式

$$|a_n - \xi| = |f(a_{n-1}) - f(\xi)| \leqslant k|a_{n-1} - \xi| \leqslant k(|a_{n-1} - a_n| + |a_n - \xi|)$$

得到

$$|a_n - \xi| \leqslant \frac{k}{1-k}|a_n - a_{n-1}|.$$

又由上式出发, 利用 $|a_j - a_{j-1}| \leqslant k|a_{j-1} - a_{j-2}|$ 就可以如下得到 (3) 的后一式:

$$|a_n - \xi| \leqslant \frac{k^2}{1-k}|a_{n-1} - a_{n-2}| \leqslant \cdots \leqslant \frac{k^n}{1-k}|a_1 - a_0|. \quad \square$$

例19. 数列 $\{b_n\}$ 由 $b_1=1$ 和 $b_{n+1}=1+\dfrac{1}{b_n}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$ 生成. 讨论数列 $\{b_n\}$ 的敛散性, 若收敛则求出其极限.

解 这里的函数 $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$. 观察

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\frac{|x-y|}{|xy|},$$

并考虑如何选择区间. 这里要利用函数 f 在 $x>0$ 时单调减少, 以及数列的前几项 $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=1.5,\cdots$. 如果用以 $b_1=1$ 和 $b_2=2$ 为端点的闭区间 $[1,2]$, 则可以实现 $f([1,2])=[1.5,2]\subset[1,2]$. 但在这个区间 $[1,2]$ 上不能取到在 0 和 1 之间的压缩常数. 再尝试以 $b_2=2$ 和 $b_3=1.5$ 为端点的区间 $[1.5,2]$, 发现有 $f([1.5,2])\subset[1.5,2]$, 同时可以估计出

$$|f(x)-f(y)|=\frac{|x-y|}{|xy|}\leqslant\frac{1}{(1.5)^2}|x-y|=\frac{4}{9}|x-y|\quad\forall x,y\in[1.5,2].$$

由于数列 $\{b_n\}$ 从第二项起就进入 $[1.5,2]$, 因此由压缩映射原理保证了它的收敛性. 极限就是 f 在 $x>0$ 中的唯一不动点 $b=(1+\sqrt{5})/2$. □

例20. 设$0 \le x \le 1, y_1 = \dfrac{x}{2}, y_{n+1} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} y_n^2 \ (n = 1, 2, \cdots)$，求$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

提示：方法1 单调有界定理（分奇偶子列）

方法2 用Cauchy收敛准则

方法3 用压缩印象原理