

Rapport du Projet 1

Feifan PING

Decembre 2024

1 Introduction

Dans le projet 1, on va étudier l'approximation de l'équation de transport à vitesse constante avec une condition initiale u_{ini} 1-périodique pour travailler sur une domaine d'espace de dimension finie.

Il y a deux parties dans ce projet totalement: l'objet de la partie 1 est de donner les formes des schémas numériques. l'objet de la partie 2 est de travailler sur la convergence, dont la consistance et la stabilité du chaque schéma. En particulier on va chercher la relation entre la norme de l'erreur et la valeur du pas Δx qu'on prend pour calculer la vitesse à laquelle l'erreur décroît lors qu'on diminue Δx .

2 Approximation de l'équation de transport à vitesse constante

On se donne le problème qu'on va étudier: Soit un temps final $T > 0$, nous cherchons une approximation de, $\bar{u} : \mathbb{R} \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, solution du problème suivants,

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u}(x, t) + a \partial_x \bar{u}(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \\ \bar{u}(x, 0) = u_{ini}(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Proposition 1 La solution de (P) est donnée par $\bar{u}(x, t) = u_{ini}(x - at)$, $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$

Démonstration. Puisque le problème donne que:

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u}(x, t) + a \partial_x \bar{u}(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \\ \bar{u}(x, 0) = u_{ini}(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Nous considérons x comme une fonction de t , donc on peut obtenir que:

$$\begin{cases} x'(t) = a \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

En résolvant le système d'équations ci-dessus, on a la relation entre x et t : $x(t) = at + x_0$. C'est-à-dire $x_0 = x - at$. Donc pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $\bar{u}(x(t), t) = u_{ini}(x_0) = u_{ini}(x - at)$, $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$. \square

Maintenant, on obtient la solution exacte par la condition initiale. Après, on va chercher la propriété de périodicité de \bar{u} par u_{ini} .

Exercice 1 Montrer que, puisque u_{ini} est 1-périodique, alors \bar{u} est également 1-périodique en espace, i.e. $\bar{u}(x + 1, t) = \bar{u}(x, t)$, $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$.

Démonstration. u_{ini} est 1-périodique implique que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, u_{ini}(x + 1) = u_{ini}(x)$$

Puisque $\bar{u}(x, t) = u_{ini}(x - at)$, donc on a que:

$$\bar{u}(x + 1, t) = u_{ini}((x + 1) - at) = u_{ini}((x - at) + 1) = u_{ini}(x - at) = \bar{u}(x, t)$$

Donc \bar{u} est également 1-périodique en espace. \square

Exercice 2 On considère la donnée initiale, $u_{ini}(x) = \sin(2\pi x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Vérifier qu'elle est bien 1-périodique.

Démonstration. Pour cette question, on a que:

$$u_{ini}(x) = \sin(2\pi x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$u_{ini}(x + 1) = \sin(2\pi(x + 1)) = \sin(2\pi x + 2\pi) = \sin(2\pi x) = u_{ini}(x)$$

Donc $u_{ini}(x) = \sin(2\pi x)$ est 1-périodique. \square

Les exercices 1 et 2 nous ont donné une façon de calculer la solution exacte par la condition initiale u_{ini} . Maintenant, on va donner les formes de 5 schémas pour calculer la solution approchée:

1. Schéma centré. Ce schéma est obtenu en utilisant une approximation centrée de la dérivée spatiale.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda a}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

Démonstration. On va utiliser la formule de Taylor: Sur le temps la formule de Taylor d'ordre 1 sur le point (x_j, t_{n+1}) donne que:

$$\bar{u}(x_j, t_{n+1}) = \bar{u}(x_j, t_n) + \partial_t \bar{u}(x_j, t_n) \Delta t + O(\Delta t)$$

Donc on peut approcher $\partial_t \bar{u}$ par:

$$\partial_t \bar{u}(x_j, t_n) \approx \frac{\bar{u}(x_j, t_n + \Delta t) - \bar{u}(x_j, t_n)}{\Delta t}$$

On dit qu'on applique *le forward method* sur le temps, qui est d'ordre 1. Sur l'espace la formule de Taylor d'ordre 2 sur le point (x_{j+1}, t_n) donne que:

$$\bar{u}(x_{j+1}, t_n) = \bar{u}(x_j, t_n) + \Delta t \partial_x \bar{u}(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx}^2 \bar{u}(x_j, t_n) + O(\Delta x^2)$$

$$\bar{u}(x_{j-1}, t_n) = \bar{u}(x_j, t_n) - \Delta t \partial_x \bar{u}(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx}^2 \bar{u}(x_j, t_n) + O(\Delta x^2)$$

On ajoute les deux équations et après on va obtenir que:

$$\bar{u}(x_{j+1}, t_n) - \bar{u}(x_{j-1}, t_n) = 2\Delta x \partial_x \bar{u}(x_j, t_n) + O(\Delta x^2)$$

Donc on peut approcher $\partial_x \bar{u}(x_j, t_n)$ par:

$$\partial_x \bar{u}(x_j, t_n) \approx \frac{\bar{u}(x_{j+1}, t_n) - \bar{u}(x_{j-1}, t_n)}{2\Delta x}$$

On dit qu'on applique *le center method* sur l'espace, qui est d'ordre 2. On remplace $\partial_t \bar{u}(x_j, t_n)$ et $\partial_x \bar{u}(x_j, t_n)$ par les résultats obtenues avant, donc on a que:

$$\frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{a}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = 0$$

Nous va mettre la partie de temps de (n+1) à gauche et la partie de temps de n à droite, après on obtient finalement la formule de schéma centré:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad \text{avec } \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

□

2. Schéma décentré à gauche. Il est obtenu en utilisant une approximation décentrée(à gauche) de la dérivée spatiale.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda a(u_j^n - u_{j-1}^n).$$

Démonstration. On applique *le forward method* sur le temps, donc on a que:

$$\partial_t u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

Sur l'espace, on utilise la formule de Taylor d'ordre 1 sur le point (x_{j-1}, t_n) :

$$\bar{u}(x_{j-1}, t_n) = \bar{u}(x_j, t_n) - \Delta x \partial_x \bar{u}(x_j, t_n) + O(\Delta x)$$

Donc on peut approcher $\partial_x \bar{u}$ par *le backward method*:

$$\partial_x u_j^n = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

On remplace $\partial_t \bar{u}(x_j, t_n)$ et $\partial_x \bar{u}(x_j, t_n)$ par les résultats obtenues avant, donc on a que:

$$\frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{a}{\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0$$

Nous voulons mettre la partie de temps de $(n+1)$ à gauche et la partie de temps de n à droite, après on obtient finalement la formule de schéma décentré à gauche:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda a(u_j^n - u_{j-1}^n) \quad \text{avec } \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

□

3. Schéma décentré à droite. Il est obtenu en utilisant une approximation décentrée(à droite) de la dérivée spatiale.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda a(u_{j+1}^n - u_j^n).$$

Démonstration. On applique *le forward method* sur le temps, donc on a que:

$$\partial_t u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

Sur l'espace, on utilise la formule de Taylor d'ordre 1 sur le point (x_{j+1}, t_n) :

$$\bar{u}(x_{j+1}, t_n) = \bar{u}(x_j, t_n) + \Delta x \partial_x \bar{u}(x_j, t_n) + O(\Delta x)$$

Donc on peut approcher $\partial_x \bar{u}$ par *le forward method*:

$$\partial_x u_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}$$

On remplace $\partial_t \bar{u}(x_j, t_n)$ et $\partial_x \bar{u}(x_j, t_n)$ par les résultats obtenues avant, donc on a que:

$$\frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{a}{\Delta x}(u_{j+1}^n - u_j^n) = 0$$

Nous va mettre la partie de temps de $(n+1)$ à gauche et la partie de temps de n à droite, après on obtient finalement la formule de schéma décentré à gauche:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda a(u_{j+1}^n - u_j^n) \quad \text{avec } \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

□

4. Schéma de Lax-Friedrichs. On reconnaît une modification du schéma centré dans lequel u_j^n est remplacé par la moyenne de u_{j-1}^n et u_{j+1}^n .

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\lambda a}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

Démonstration. Par schéma centré, on a que:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda a}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad \text{avec } \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

on va remplacer u_j^n par la moyenne de u_{j+1}^n et u_{j-1}^n , c'est-à-dire $u_j^n = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)$, donc on peut obtenir le schéma de Lax-Friedrichs:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\lambda a}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

□

5. Schéma de Lax-Wendroff. On reconnaît une modification du schéma centré dans lequel on a rajouté un terme étrange qui contient une discrétisation de la dérivée seconde en espace alors qu'il n'y a pas de dérivée seconde dans l'EDP considérée.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda a}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2 a^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

Démonstration. Par la formule de Taylor d'ordre 2 sur le point (x_j, t_{n+1}) , on a que:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \partial_t u_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{tt}^2 u_j^n$$

Par le problème de cette exercice, on a que:

$$\partial_t \bar{u}(x, t) + a \partial_x \bar{u}(x, t) = 0$$

Donc on peut obtenir que:

$$\begin{aligned} \partial_t u_j^n &= -a \partial_x u_j^n \\ \partial_{tt}^2 u_j^n &= \partial_t (-a \partial_x u_j^n) = -a \partial_x (\partial_t u_j^n) = a^2 \partial_{xx}^2 u_j^n \end{aligned}$$

Par formule de Taylor d'ordre 2 sur l'espace:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta x \partial_x u_j^n + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx}^2 u_j^n + O(\Delta x^2) \\ u_j^{n-1} &= u_j^n - \Delta x \partial_x u_j^n + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx}^2 u_j^n + O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

Donc on peut obtenir *le center method d'ordre 2* que:

$$\begin{aligned} \partial_{xx}^2 u_j^n &= \frac{1}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \\ \partial_{tt}^2 u_j^n &= a^2 \partial_{xx}^2 u_j^n = \frac{a^2}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \end{aligned}$$

On utilise *le center method* pour approcher $\partial_x u_j^n$:

$$\partial_x u_j^n = \frac{1}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

Donc on remplace $\partial_t u_j^n$ et $\partial_{tt}^2 u_j^n$ par les résultats obtenus avant dans la formule de Taylor d'ordre 2 sur le point (x_j, t_{n+1}) , c'est justement le schéma de Lax-Wendroff:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda a}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2 a^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad \text{avec } \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

□

On observe que tous les schémas peuvent s'écrire sous la forme:

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-L}^n, \dots, u_{j+L}^n) = \sum_{l=-L}^{+L} c_l u_{j+l}^n$$

avec $L=1$ en particulier. Maintenant, on va préciser la solution exacte et la solution numérique qui vient de fonction H . Pour atteindre notre objectif, il y a trois étapes à faire:

- Premièrement, *la discrétisation sur le temps et l'espace*;
- Deuxièmement, *donner la solution analytique et numérique*;
- Finalement, *tracer la solution analytique et numérique pour chaque schéma*.

Tout d'abord, on va expliquer les sens des notations pour les questions suivantes:

- J : Nombre de petite intervalle sur espace. Donc le maillage sur espace est donné par $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{J-1} < x_J = 1$.
- Δx : Pas sur l'espace. La valeur du Δx est égale à $1/J$. $x_j = j\Delta x, \forall j = 0, 1, \dots, J$.
- Δt : Pas sur le temps inconnu qu'on peut calculer par les autres informations.
- λ : Une constante donnée qui est définie par $\lambda = \Delta t / \Delta x$.
- T : Un temps final constant donné.
- M : Nombre d'intervalle de discrétisation sur le temps. La valeur de M est donnée par la partie entier de $T/\Delta t$.

En suite, on va définir des fonctions pour construire les méthodes numériques.

1. *espaceDiscretise*:

- Input: J, λ
- Output: $\Delta x, \Delta t, (x_j)_j, M$
- Cette fonction est pour donner un maillage sur l'espace.

2. *schema_type*:

- Input: le nom du schéma qu'on veut obtenir, de type chaîne de caractère.
- Output: c_{-1}, c_0, c_1
- Cette fonction est pour donner les coefficients dans fonction H des schémas différents.

3. *schema*:

- Input: $\Delta x, \Delta t, X = (x_j)_j, M, c_{-1}, c_0, c_1$
- Output: $U_exact_M = (\bar{u}_j^M)_j, U_numerique_M = (u_j^M)_j, Q$
- Cette fonction est pour donner deux listes contenant les valeurs de u et \bar{u} sur le maillage X . En particulier, elle a donné la matrice Q pour faire l'itération.

4. *image*:

- Input: J, λ , le nom du schéma qu'on veut obtenir, de type chaîne de caractère.
- Output: l'image de solution exacte et de solution numérique du tel schéma.
- Cette fonction est pour donner une image afin de comparer la solution numérique

et la solution exacte.

Il faut faire attention que l'itération de U est différente quand on prend la condition au bord de type périodique, en particulier, le calcul de u_0^n et u_J^n . Je peins une image pour expliquer ce processus plus clairement.

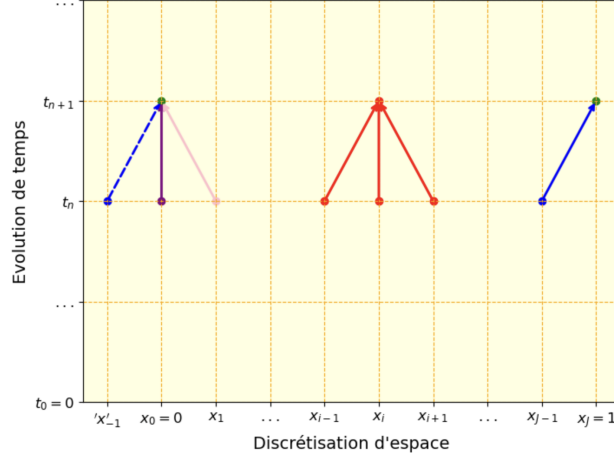


Figure 1: Façon de calculer u_i^{n+1} avec condition au bord 1-périodique

La valeur de $u_0^{n+1} = u_J^{n+1}$ est calculé par u_{-1}^n , u_0^n et u_1^n . En fait, u_{-1}^n n'existe pas dans l'intervalle $[0, 1]$, mais grâce à la propriété de 1-périodique, sa valeur est égale à la valeur de u_{J-1}^n . Cette distinction se reflète également dans la forme de matrice Q . On va écrire la procédure d'itération sous la forme de matrice:

$$U_h^{n+1} = QU_h^n$$

Où on peut préciser la matrice $Q \in M_J(\mathbb{R})$ est de la forme:

$$Q = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & c_{-1} \\ c_{-1} & c_0 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{-1} & c_0 & c_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{-1} & c_0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{-1} & c_0 & c_1 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{-1} & c_0 \end{pmatrix}_{J \times J}$$

Pour obtenir la solution numérique quand $t = t_M$, il faut faire l'itération M fois à partir de la condition initiale.

Après faire toutes les étapes précédentes, on va bien obtenir les résultats suivants:

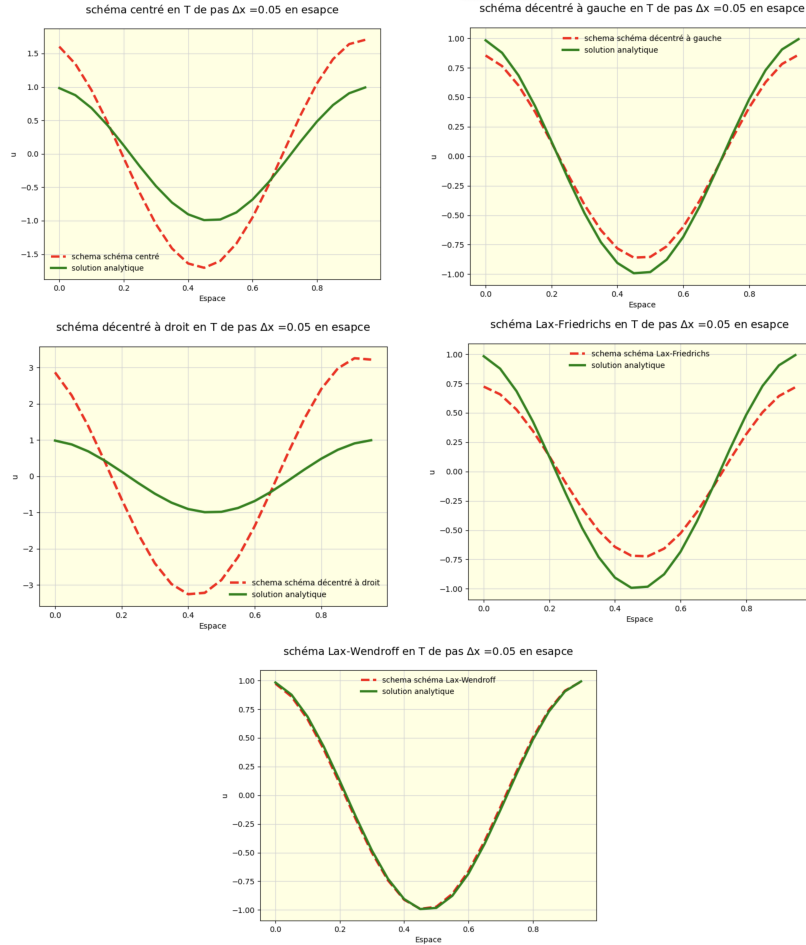


Figure 2: Solution exacte et solutions numériques du schéma différent

3 Analyse des schémas

On a déjà vu toutes les cinq schémas pour approcher la solution analytique dans la partie précédente. Dans cette partie, notre objet est de justifier si chaque schéma est un bon schéma pour l'approximation. C'est-à-dire on va étudier la propriété de convergence, dont la stabilité et la consistance.

Tout abord, on va rappeler quelques définitions du cours:

Définition 2 On appelle erreur de consistance du schéma(1) au point x_j et à l'instant t_n , le réel

$$k_j^n = \frac{1}{\Delta t} (u(x_j, t_{n+1}) - H(u(x_{j-L}, t_n), \dots, u(x_{j+L}, t_n))).$$

L'erreur de consistance du schéma à l'instant t_n est le vecteur \mathcal{K}_h^n dont les composantes sont les k_j^n , et qui vérifie donc

$$\bar{U}_h^{n+1} = Q\bar{U}_h^n + \Delta t \mathcal{K}_h^n$$

Définition 3 On dit qu'un schéma est stable pour une norme vectorielle $\|\cdot\|$ si et seulement si il existe une constante C_0 (qui peut dépendre de T), telle que

$$\sup_{n\Delta t \leq T} \|Q^n\| \leq C_0$$

Pour déterminer la stabilité, il faut calculer la norme matricielle de Q et Q^M pour chaque schéma. Donc on définit une fonction suivante:

5. *norm_schema*:

- Input: le nom de schéma de type chaîne de caractère, type de norme qui est '2' ou 'infini', J , λ
- Output: $\|Q\|$, $\sup_{1 \leq m \leq M} \|Q^m\|$
- Cette fonction est pour calculer les normes de Q et Q^m .

Les résultats sont données dans le tableau suivant:

	$\ Q\ _2$	$\ Q\ _\infty$	$\ Q^M\ _2$	$\ Q^M\ _\infty$
<i>schéma centré</i>	1.28062484	1.8	85.82120980	43.43498528
<i>schéma décentré à gauche</i>	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>schéma décentré à droite</i>	2.6	2.6	29479510.2	29479510.2
<i>schéma Lax-Friedrichs</i>	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>schéma Lax-Wendroffs</i>	0.99	1.16	1.0	1.30

Table 1: Les normes de Q et Q^M

Il y a deux schémas non stables pour les deux normes matricielles sous les conditions données, la norme matricielle $\|Q^n\|$ n'est pas bornée pour $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$:

- Pour schéma centré, les coefficients ne sont pas tous positives. Cela vérifie le résultat du cours que "schéma centré s'avère numériquement instable" n'importe quelle condition.
- Pour schéma décentré à gauche, puisque ici $a = 1 > 0$ qui est contre la condition stable " $a < 0$, $-a\lambda \leq 1$ " du cours.

Il y a deux schémas stables pour les deux normes matricielles sous les conditions données (schéma décentré à gauche et schéma Lax-Friedrichs), la norme

matricielle est à valeur vers 1.

- Pour schéma décentré à gauche, $c_{-1} = a\lambda = 0.8 \geq 0$; $c_0 = 1 - a\lambda = 0.2 \geq 0$; $c_1 = 0$
 - Pour schéma Lax-Friedrichs, $c_{-1} = \frac{1}{2} + \frac{a\lambda}{2} = 0.9 \geq 0$; $c_0 = 0$; $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{a\lambda}{2} = 0.1 \geq 0$
- Du cours, ils sont vérifiés la condition CFL: $|a|\lambda \leq 1$ donc stables.

Il y a un schéma stable par rapport à la norme matricielle de la norme 2 mais pas stable par rapport à la norme ∞ (schéma Lax-Wendroff). Donc quand on choisit ce schéma pour calculer, on doit bien choisir la norme pour vérifier la stabilité.

Pour étudier la convergence pour chaque schéma, on va calculer la vitesse à laquelle l'erreur décroît lorsqu'on diminue Δx . Maintenant, nous devons faire quelques préparatifs.

Définition 3 On dit que la méthode est d'ordre $p \in \mathbb{R}^+$ s'il existe une constante $C > 0$, indépendante de Δx , telle que

$$\|\bar{U}_{\Delta x}^n - U_{\Delta x}^n\| = \mathcal{O}((\Delta x)^p).$$

Définition 4 Les normes L^p discrète des erreurs s'écrivent sous les formes:

$$\epsilon_{\Delta t, \Delta x}^{(\infty)} = \max_{n \geq 0} (\|\bar{U}_{\Delta x}^n - U_{\Delta x}^n\|_{\infty, \Delta})$$

$$\epsilon_{\Delta t, \Delta x}^{(2)} = \max_{n \geq 0} (\|\bar{U}_{\Delta x}^n - U_{\Delta x}^n\|_{2, \Delta})$$

En suite, on va définir des fonctions pour exposer la vitesse de la convergence pour chaque schéma, dont la relation entre l'erreur et le pas du maillage Δx .

6. *schema_erreur*:

- Input: $\Delta x, \Delta t, X = (x_j)_j, M, J, c_{-1}, c_0, c_1$
- Output: $U_exact_M, U_numerique_M, erreur_2$ pour noter norme L^2 d'erreur, $erreur_inf$ pour noter norme L^∞
- Cette fonction est pour calculer les normes d'erreurs avec une certaine valeur de Δx .

7. *image_erreur*:

- Input: $J_liste, \lambda, type_schema$
- Output: une image pour montrer la relation entre l'erreur et Δx , les pentes des droites
- J_liste est une liste pour la stockage des valeurs de J , qui est associée aux valeurs de Δx . Parceque la norme d'erreur a une relation d'exponentielle avec Δx , on va choisir l'image log-log pour regarder plus clairement. La pente de la droite obtenue par l'image log-log reflète l'ordre de la convergence pour chaque

schéma.

Après faire toutes les étapes précédentes, on peut obtenir les images suivantes:

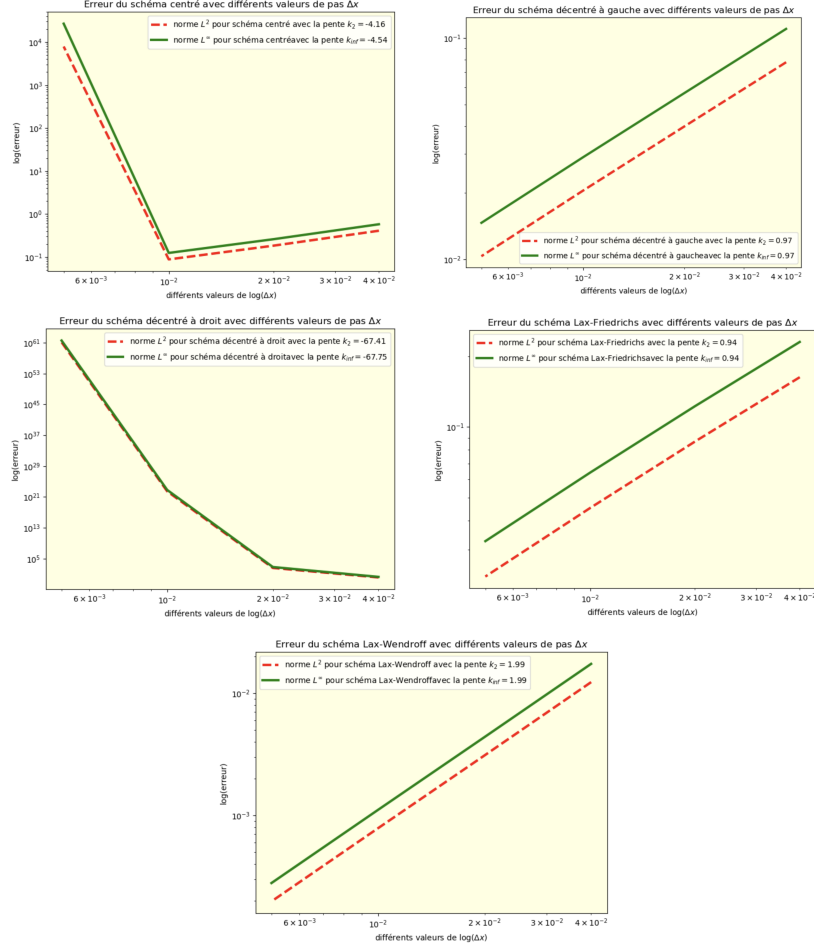


Figure 3: Vitesse de la convergence

Puisque schéma centré et schéma décentré à droite ne sont pas stables donc pas convergents, il n'y a pas de loi pour leurs images. Pour les schémas stables, on observe que l'image est une ligne droite, et la pente de la ligne est justement l'ordre de la convergence, dont la vitesse.

Par calculer, la pente pour schéma décentré à gauche ≈ 0.97 , la pente pour schéma Lax-Friedrichs ≈ 0.94 , cela vérifie qu'ils sont des méthodes d'ordre 1. Et la pente pour schéma Lax-Wendroff ≈ 1.99 , cela vérifie que le schéma est une méthode d'ordre 2.