

Projet 2

Feifan PING

December 2024

1 Introduction

Dans cette partie, on va étudier la méthode des éléments finis de degré plus élevés pour une équation différentielle ordinaire linéaire non homogène du second ordre.

Dans Exercice 1, on va donner la formulation variationnelle et la forme matricielle. Et on va aussi représenter la solution numérique et la solution exacte graphiquement pour différente valeur de nombre d'intervalle du maillage. Dans l'exercice 2, on va étudier la relation entre l'erreur et la valeur du pas par la courbe "log-log".

2 Solution exacte

Dans projet 2, on considère le problème suivant: Trouver $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ solution du problème aux limites:

$$-\epsilon u'' + u' = 2 \quad \text{dans } [0, 1]$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 2$$

où $\epsilon > 0$ est un nombre réels.

Premièrement, on va donner la solution exacte par résoudre l'équation analytiquement: on réécrit l'équation sous la forme:

$$\epsilon u'' - u' = -2$$

Tout d'abord, on considère l'équation homogène suivante:

$$\epsilon u'' - u' = 0$$

Supposons que la solution soit de la forme $u(x) = e^{rx}$, en substituant dans l'équation on obtient :

$$\epsilon r^2 e^{rx} - r e^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(\epsilon r^2 - r) = 0$$

Comme $e^{rx} \neq 0$, donc on obtient que $r = 0$ ou $r = \frac{1}{\epsilon}$. La solution générale de l'équation non homogène est donc:

$$u_h(x) = C_1 + C_2 e^{x/\epsilon}$$

Ensuite, on va trouver une solution particulière pour l'équation non homogène:

$$\epsilon u'' - u' = -2$$

On peut essayer une solution particulière de forme linéaire:

$$u_p(x) = Bx + C$$

Donc on obtient que

$$u_p(x)' = B \text{ et } u_p(x)'' = 0$$

En substituant dans l'équation $\epsilon u'' - u' = -2$:

$$\epsilon \times (0) - B = -2$$

Ce qui donne que

$$B = 2$$

Donc la solution particulière est

$$u_p(x) = 2x + C$$

Finalement, on va trouver les constantes dans la forme de la solution. Maintenant, la solution générale est la somme de la solution homogène et de la solution particulière:

$$u(x) = C_1 + C_2 e^{x/\epsilon} + 2x + C$$

En utilisant les condition au bord, on obtient que:

$$u(0) = C_1 + C_2 e^0 + C = 1$$

$$u(1) = C_1 + C_2 e^{1/\epsilon} + 2 + C = 2$$

En résolvant ce système d'équations, nous pouvons déterminer les valeurs des constantes:

$$C_2 = \frac{1}{1 - e^{1/\epsilon}}$$

$$C_1 + C = 1 - C_2 = 1 - \frac{1}{1 - e^{1/\epsilon}}$$

Donc la solution générale a la forme:

$$u(x) = 2x + \frac{e^{x/\epsilon} - e^{1/\epsilon}}{1 - e^{1/\epsilon}}$$

3 Méthode numérique des éléments finis

Pour présenter la méthode des éléments finis, on part d'un maillage(uniforme) de sommets

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m < x_{m+1} = 1, \quad m \in \mathbb{N}^*$$

Nous noterons

$$T_i =]x_i, x_{i+1}[$$

l'élément i et

$$h = \frac{1}{m+1}$$

la taille de l'élément.

(a)Formulation variationnelle des éléments finis P_2

Puisque pour la condition aux limites de Dirichlet non homogènes, on ne peut pas définir V comme l'espace des fonctions $C^1([0, 1])$ telles que $v(0) = 1, v(1) = 2$ car ce n'est pas un espace vectoriel. On se ramène au problème de Dirichlet homogène en posant $\tilde{u} = u - g$ où on prends g une fonction affine $g(x) = 1 + x$ vérifiant que $g(0) = 1$ et $g(1) = 2$. Donc on peut définir l'espace V comme:

$$V = \{v \in C^1([0, 1]) \text{ telles que } v(0) = v(1) = 0\}$$

Et on vérifie que \tilde{u} est solution d'un problème de type: trouver $\tilde{u} \in V$ telle que

$$a(\tilde{u}, v) = \tilde{l}(v), \quad v \in V$$

avec $\tilde{l}(v) = l(v) - a(g, v)$. En suite, on va trouver les forme de a et l . Pour $\forall v \in V$, on a que

$$\int_{\Omega} (-\epsilon(\tilde{u}'' + g'')v + (\tilde{u}' + g')v) \, dx = \int_{\Omega} 2v \, dx$$

$$\int_{\Omega} (-\epsilon\tilde{u}''v + \tilde{u}'v) \, dx = \int_{\Omega} (2v + \epsilon g''v - g'v) \, dx$$

Pour $\int_{\Omega} -\epsilon\tilde{u}''v \, dx$, par l'intégration par partie, on obtient

$$\int_{\Omega} -\epsilon\tilde{u}''v \, dx = \int_{\Omega} -\epsilon v \, d\tilde{u}' = -\epsilon\tilde{u}'v|_0^1 + \int_{\Omega} \epsilon\tilde{u}'v' \, dx$$

Puisque $v(0) = v(1) = 0$ par la condition de Dirichlet homogène, on a que

$$\int_{\Omega} -\epsilon\tilde{u}''v \, dx = \int_{\Omega} \epsilon\tilde{u}'v' \, dx$$

$$\int_{\Omega} (\epsilon\tilde{u}'v' + \tilde{u}'v) \, dx = \int_{\Omega} (2v + \epsilon g''v - g'v) \, dx$$

Cela donne que

$$a(\tilde{u}, v) = \int_{\Omega} (\epsilon \tilde{u}' v' + \tilde{u}' v) dx$$

$$\tilde{l}(v) = \int_{\Omega} (2v - \epsilon g' v' - g' v) dx$$

Pour résoudre ce problème numériquement, on va utiliser la méthode des éléments finis de Lagrange P_2 . Tout d'abord, on va définir un espace V_h :

$$V_h = \{v_h \in C^1(\bar{\Omega}), v_h \in P_2(T_i), v_h(0) = v_h(1) = 0\}$$

Puisque on a la condition de Dirichlet homogène, la dimension d'espace V_h est égale à $2m + 1$. On notes la base de V_h comme $(w_{j/2})_{1 < 2 < \dots < j < \dots < 2m+1}$. On part de la base locale dans élément T_i . Trouver trois polynômes de degré 2 w_i , $w_{(2i+1)/2}$ et w_{i+1} tel que $w_{\beta}(x_{\alpha}) = \delta_{\alpha, \beta}$ pour tout $\alpha, \beta \in \{i, i+1/2, i+1\}$. On suppose que $w_i = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$, $w_{i+1/2} = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$ et $w_{i+1} = a_3 x^2 + b_3 x + c_3$, on va résoudre les équations suivantes:

$$\begin{aligned} w_i(x_i) &= 1, & w_i(x_{i+1/2}) &= 0, & w_i(x_{i+1}) &= 0; \\ w_{i+1/2}(x_i) &= 0, & w_{i+1/2}(x_{i+1/2}) &= 1, & w_{i+1/2}(x_{i+1}) &= 0; \\ w_{i+1}(x_i) &= 0, & w_{i+1}(x_{i+1/2}) &= 0, & w_{i+1}(x_{i+1}) &= 1 \end{aligned}$$

Donc on peut obtenir la base locale dans T_i :

$$\begin{cases} w_i(x) = \frac{(h-2(x-x_i))(h-(x-x_i))}{h^2} \\ w_{i+1/2}(x) = \frac{4(h-(x-x_i))(x-x_i)}{h^2} \\ w_{i+1}(x) = \frac{-(h-2(x-x_i))(x-x_i)}{h^2} \end{cases}$$

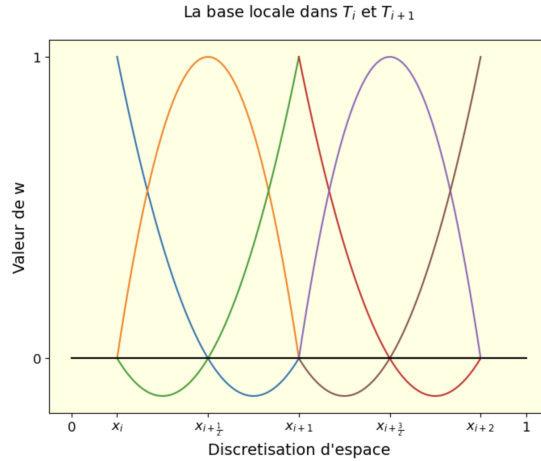


Figure 1: Base locale des éléments finis P_2

Donc la formulation variationnelle des éléments finis P_2 est donnée par:
Trouver $\tilde{u}_h \in V_h$ telle que pour tout $v_h \in V_h$, on a:

$$a(\tilde{u}_h, v_h) = \tilde{l}(v_h)$$

$$u_h = \tilde{u}_h + g$$

Comme Théorème 4.4.1 du cours, on peut démontrer la continuité, la coercivité de a et la continuité de l . Donc par Lax-Milgram le problème variationnel admet une seule solution.

(b)Formulation matricielle

Pour $\forall v_h \in V_h$, elle se décompose sur la base $(w_{j/2})_{1 < 2 < \dots < j < \dots < 2m+1}$. On note que $\tilde{u}_h = \sum_{j=1}^{2m+1} \lambda_{j/2} w_{j/2}$. Calculer \tilde{u}_h est équivalente à calculer ses composantes $\lambda_{j/2}$ dans la base choisie. On notera $\tilde{U}^h = (\lambda_{1/2}, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{(2m+1)/2})_{2m+1}$. Par théorème 5.2.1 du cours, le vecteur $\tilde{U}^h \in \mathbb{R}^{2m+1}$ est l'unique solution du système linéaire

$$A^h \tilde{U}^h = \tilde{F}^h$$

avec $A^h \in \mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1}$ la matrice de coefficients $(A^h)_{i,j} = a(w_{j/2}, w_{i/2})$ et \tilde{F}^h le vecteur de composantes $(\tilde{F}^h)_i = \tilde{l}(w_{i/2})$. On considère l'élément T_i localement pour les élément finis de Lagrange P_2 . Pour toute fonction d'interpolation $\prod_i u$ dans T_i , on a que:

$$\prod_i u = w_i u_i + w_{\frac{2i+1}{2}} u_{\frac{2i+1}{2}} + w_{i+1} u_{i+1}$$

$$(\prod_i u)' = w'_i u_i + w'_{\frac{2i+1}{2}} u_{\frac{2i+1}{2}} + w'_{i+1} u_{i+1}$$

Dans l'élément T_i , on a que:

$$\int_{T_i} \epsilon u' v' dx = \begin{pmatrix} v_i \\ v_{i+\frac{1}{2}} \\ v_{i+1} \end{pmatrix}^T \epsilon \begin{pmatrix} \int_{T_i} w'_i w'_i dx & \int_{T_i} w'_i w'_{i+\frac{1}{2}} dx & \int_{T_i} w'_i w'_{i+1} dx \\ \int_{T_i} w'_{i+\frac{1}{2}} w'_i dx & \int_{T_i} w'_{i+\frac{1}{2}} w'_{i+\frac{1}{2}} dx & \int_{T_i} w'_{i+\frac{1}{2}} w'_{i+1} dx \\ \int_{T_i} w'_{i+1} w'_i dx & \int_{T_i} w'_{i+1} w'_{i+\frac{1}{2}} dx & \int_{T_i} w'_{i+1} w'_{i+1} dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+\frac{1}{2}} \\ u_{i+1} \end{pmatrix}$$

$$\int_{T_i} u' v dx = \begin{pmatrix} v_i \\ v_{i+\frac{1}{2}} \\ v_{i+1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \int_{T_i} w_i w'_i dx & \int_{T_i} w_i w'_{i+\frac{1}{2}} dx & \int_{T_i} w_i w'_{i+1} dx \\ \int_{T_i} w_{i+\frac{1}{2}} w'_i dx & \int_{T_i} w_{i+\frac{1}{2}} w'_{i+\frac{1}{2}} dx & \int_{T_i} w_{i+\frac{1}{2}} w'_{i+1} dx \\ \int_{T_i} w_{i+1} w'_i dx & \int_{T_i} w_{i+1} w'_{i+\frac{1}{2}} dx & \int_{T_i} w_{i+1} w'_{i+1} dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+\frac{1}{2}} \\ u_{i+1} \end{pmatrix}$$

$$\int_{T_i} 2v dx = \begin{pmatrix} v_i \\ v_{i+\frac{1}{2}} \\ v_{i+1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \int_{T_i} 2w_i dx \\ \int_{T_i} 2w_{i+\frac{1}{2}} dx \\ \int_{T_i} 2w_{i+1} dx \end{pmatrix}$$

$$\int_{T_i} (\epsilon v' + v) dx = \begin{pmatrix} v_i \\ v_{i+\frac{1}{2}} \\ v_{i+1} \end{pmatrix}^T \epsilon \begin{pmatrix} \int_{T_i} w'_i \\ \int_{T_i} w'_{i+\frac{1}{2}} \\ \int_{T_i} w'_{i+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_i \\ v_{i+\frac{1}{2}} \\ v_{i+1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \int_{T_i} w_i dx \\ \int_{T_i} w_{i+\frac{1}{2}} dx \\ \int_{T_i} w_{i+1} dx \end{pmatrix}$$

On considère $y = x - x_i$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$\pi_i u(y) = \frac{(h-2y)(h-y)}{h^2} u_i + \frac{4(h-y)y}{h^2} u_{i+\frac{1}{2}} + \frac{-(h-2y)y}{h^2} u_{i+1}$$

La dérivée:

$$\begin{cases} w'_i(y) = \frac{4}{h^2} y - \frac{3}{h} \\ w'_{i+\frac{1}{2}}(y) = -\frac{8}{h^2} y + \frac{4}{h} \\ w'_{i+1}(y) = \frac{4}{h^2} y - \frac{1}{h} \end{cases}$$

Par calculer l'intégration, on obtient que:

$$\int_{T_i} \epsilon u' v' dx = \begin{pmatrix} v_i \\ v_{i+\frac{1}{2}} \\ v_{i+1} \end{pmatrix}^T \frac{\epsilon}{h} \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+\frac{1}{2}} \\ u_{i+1} \end{pmatrix} = V_{T_i}^T A_{T_{i1}}^h U_{T_i}$$

$$\int_{T_i} u' v dx = \begin{pmatrix} v_i \\ v_{i+\frac{1}{2}} \\ v_{i+1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+\frac{1}{2}} \\ u_{i+1} \end{pmatrix} = V_{T_i}^T A_{T_{i2}}^h U_{T_i}$$

$$\int_{T_i} 2v dx = \begin{pmatrix} v_i \\ v_{i+\frac{1}{2}} \\ v_{i+1} \end{pmatrix}^T h \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = V_{T_i}^T \tilde{F}_{T_{i1}}^h$$

$$\int_{T_i} (\epsilon v' + v) dx = \begin{pmatrix} v_i \\ v_{i+\frac{1}{2}} \\ v_{i+1} \end{pmatrix}^T \epsilon \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_i \\ v_{i+\frac{1}{2}} \\ v_{i+1} \end{pmatrix}^T h \begin{pmatrix} 1/6 \\ 2/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} = V_{T_i}^T \tilde{F}_{T_{i2}}^h$$

Donc on peut obtenir les matrices locales dans T_i :

$$A_{T_i}^h = A_{T_{i1}}^h + A_{T_{i2}}^h$$

$$\tilde{F}_{T_i}^h = \tilde{F}_{T_{i1}}^h - \tilde{F}_{T_{i2}}^h$$

En suite, on peut utiliser les matrices locales pour construire la matrice globale: pour tout $1 \leq i \leq m+1$, la matrice $A_{T_i}^h$ influence la partie $[2i-1, 2i+1] \times [2i-1, 2i+1]$ dans la matrice globale A_h . On affiche les A_{T_i} et \tilde{F}_{T_i} ensemble de manière précisée dans figure 2:

Après, on peut résoudre le système linéaire $A^h \tilde{U}^h = \tilde{F}^h$. On va définir quelque fonctions pour donner l'image de solution exacte et solution numérique avec différentes valeurs de m:

1.local

- Input: m, ϵ
- Output: $A_{T_i}^h, F_{T_i}^h$
- Pour donner les matrices locales dans élément T_i .

2. globale_numérique

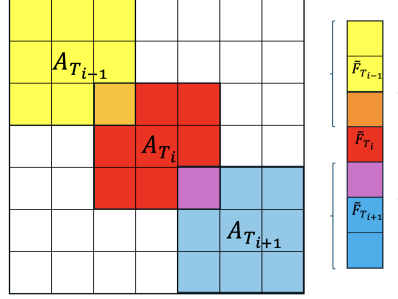


Figure 2: Façon de calculer A^h par $A_{T_i}^h$ et \tilde{F}^h par $\tilde{F}_{T_i}^h$

- Input: m, ϵ
 - Output: \tilde{U}^h
 - Pour donner les coefficients de \tilde{U}^h .
- 3. image**
- Input: m, ϵ, L (la longueur totale d'intervalle, ici c'est une constante 1)
 - Output: l'image de solution numérique et solution exacte avec une certaine m
 - Pour représenter graphiquement la solution du système linéaire.

Finalement, on peut obtenir les images pour valeurs différentes de m :

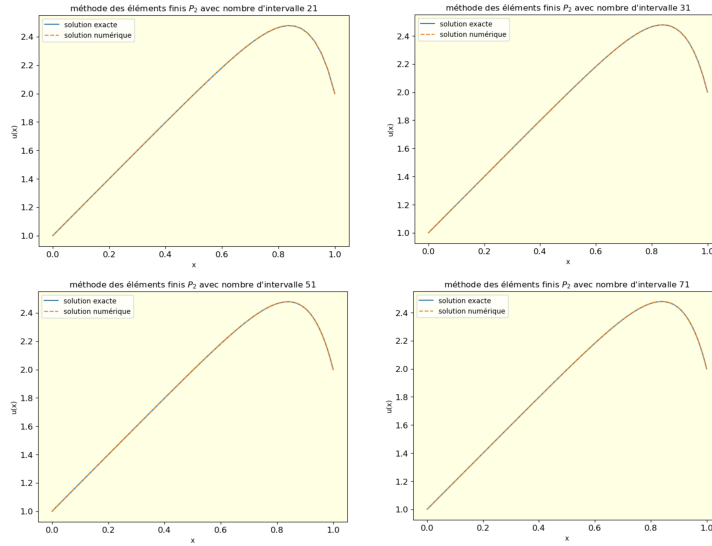


Figure 3: Façon de calculer A^h par $A_{T_i}^h$ et \tilde{F}^h par $\tilde{F}_{T_i}^h$

4 Analyse d'erreur

Maintenant, on a déjà obtenu la solution exacte et la solution numérique. Dans la partie suivante, on va étudier la relation entre $e_h = \|u - \pi_h u\|$ et la valeur de h . Tout d'abord, on va étudier l'erreur pour la norme L^2 , ensuite pour la semi-norme. On rappelle la forme d'interpolation locale de u dans T_i :

$$\pi_i u(y) = \frac{(h-2y)(h-y)}{h^2} u_i + \frac{4(h-y)y}{h^2} u_{i+\frac{1}{2}} + \frac{-(h-2y)y}{h^2} u_{i+1}$$

Et la relation entre l'erreur d'interpolation locale et l'erreur d'interpolation globale pour la norme L^2 donne que:

$$\|u - \pi_h u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{m+1} \|u - \pi_h u\|_{L^2(T_i)}^2$$

On définit quelques fonctions pour préciser la relation entre l'erreur et le pas h .

4.base_wi_

- Input: x, h, i
- Output: les trois bases locales sur élément T_i
- Pour calculer l'interpolation locale dans élément T_i .

5.erreur_norme2

- Input: m, u, ϵ
- Output: La norme L^2 d'erreur sur $[0, 1]$
- Pour calculer la norme globale dans $[0, 1]$.

6.image_erreur_l2

- Input: L, M (une liste pour la stockage des valeurs m), ϵ
- Output: l'image pour donner la relation entre erreur et h
- Pour préciser l'ordre d'erreur

7.image_erreur_l2_loglog

- Input: L, M (une liste pour la stockage des valeurs m), ϵ
- Output: l'image log-log pour donner la relation entre erreur et h
- Pour préciser l'ordre d'erreur

Si on prends par exemple $M = [20, 40, 60, 80, 100]$, on va obtenir les images suivantes:

Nous observons que la pente est égale 3, cela signifie que l'ordre d'erreur $\mathcal{O}(h^p)$ est 3 pour la norme L^2 .

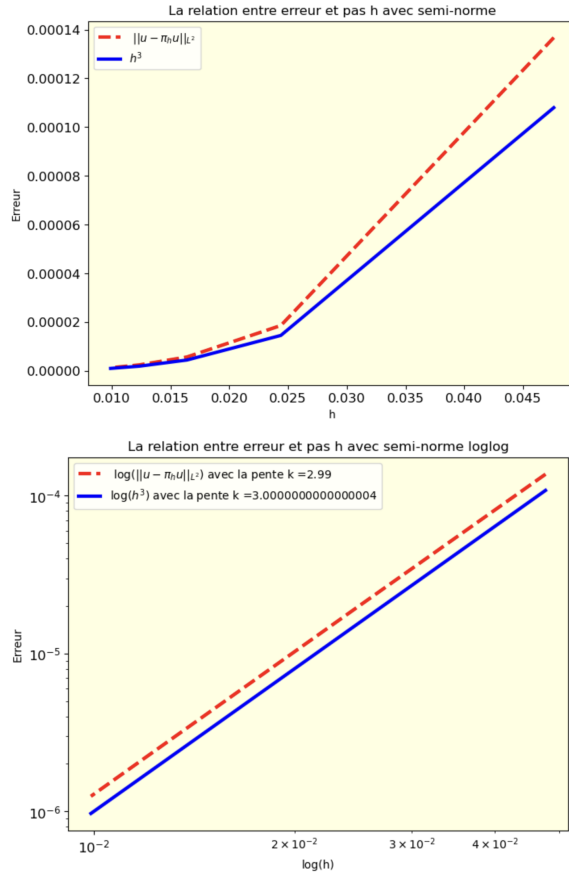


Figure 4: norme L^2 d'erreur

Maintenant, on va remplacer le type de la norme par semi-norme:

$$\|u' - \pi_h u'\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{m+1} \|u' - \pi_h u'\|_{L^2(T_i)}^2$$

De même façon, on va définir les fonctions suivantes:

8.base_wi_prime_

- Input: x, h, i
- Output: la dérivée des trois bases locales sur élément T_i
- Pour calculer la dérivée de l'interpolation locale dans élément T_i .

9.erreur_norme_semi

- Input: m, u, ϵ
- Output: La semi-norme d'erreur sur $[0, 1]$
- Pour calculer la semi-norme globale dans $[0, 1]$.

10.image_erreur_l2

- Input: L, M(une liste pour la stockage des valeurs m), ϵ
- Output: l'image pour donner la relation entre erreur et h avec la semi-norme
- Pour préciser l'ordre d'erreur

7.image_erreur_l2_loglog

- Input: L, M(une liste pour la stockage des valeurs m), ϵ
- Output: l'image log-log pour donner la relation entre erreur et h avec la semi-norme
- Pour préciser l'ordre d'erreur

Finalement, on obtient les images suivantes: Par la pente de l'image, nous

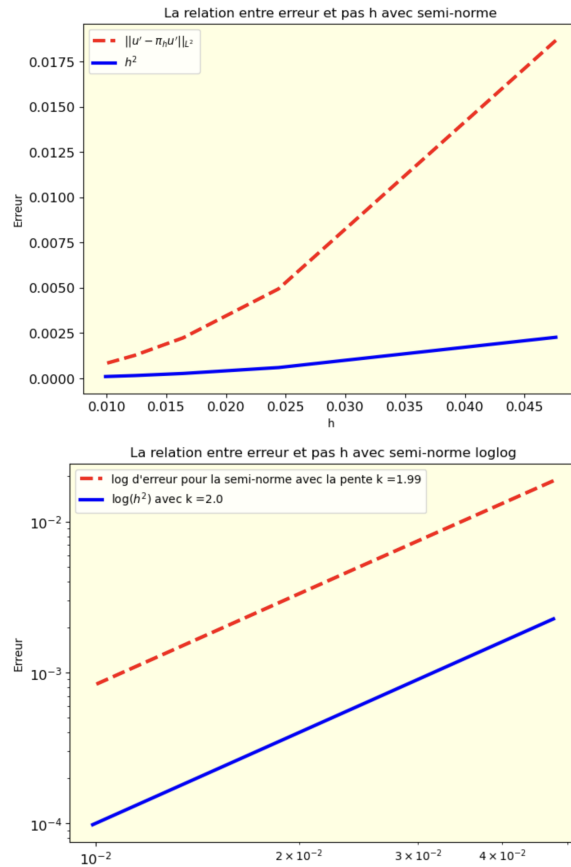


Figure 5: norme L^2 d'erreur

observons que la pente est égale 2, cela signifie que l'ordre d'erreur $\mathcal{O}(h^p)$ est 2 pour la semi-norme.