Projet TP 2

Notation. On rappelle que votre note de TP correspond à 30% de votre note de 4MA006 (4MA106) et que cette note de TP est incompressible, c'est à dire sans rattrapage. Votre projet est individuel et il sera évalué comme suit :

- rapport et code : clarté, lisibilité, organisation.
- soutenance orale : aisance à utiliser le code, pertinence des explications et réponses aux questions, recul sur le lien entre résultats théoriques et observations numériques. La soutenance orale représentera une très moitié de la note finale.

Vous êtes bien sûr autorisé à discuter du projet entre vous et avec l'équipe enseignante de l'UE mais par individuel on entend que toutes similitudes trop importantes pour être considérées comme le fruit d'un heureux hasard, et ceci que ce soit au niveau du code et/ou du rapport, seront considérées comme de la triche et donc sanctionnées sévèrement au niveau de la note.

Le code. Le code doit être envoyé sous la forme d'un ou plusieurs fichiers et doit être développé en Python (extention `.py` ou `.ipynb`). Votre code doit être agréable à lire (noms de variables explicites, indentation, un minimum de commentaires,...). Pour éviter tout problème d'encodage, ne pas utiliser d'accent dans vos commentaires.

Le rapport. Le rapport doit être retourné en format `.pdf`. Dans le cas d'un rapport pdf, de préférence utiliser LaTeX mais vous pouvez également envoyer des notes manuscrites scannées (soigneuses).

Deadline. Le nom de tous vos fichiers doit débuter par `NOM prenom`. Vos fichiers, code et rapport, seront à déposer sur la page Moodle de 4M006 (4M106) **avant le 30/12/2024.**

Soutenance. La soutenance orale aura lieu la semaine des examens. Un planning sera disponible sur Moodle en temps voulu. Cette soutenance consistera à présenter et commenter votre travail. Vous disposerez de 10 minutes pour ce faire, puis s'en suivra une séance de questions. Il vous est fortement conseillé de vous entraîner à cet exercice avant votre passage.

Tout retard, ou non respect des consignes décrites ici, sera sanctionné dans votre note de TP.

Le sujet comporte des parties indépendantes. L'important n'est pas de le finir, l'évaluation portera plus sur la qualité du travail rendu que sa quantité. Pour toute question ou commentaire sur ce projet, il ne faut pas hésiter à prendre contact via Moodle ou par mail :

ruiyang.dai@sorbonne-universite.fr

La méthode des éléments finis de degré plus élevés

On considère le problème suivant. Trouver $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ solution du problème aux limites

$$-\varepsilon u'' + u' = 2 \quad \text{dans }]0,1[\tag{1}$$

et vérifiant les conditions aux limites

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 2, \tag{2}$$

où $\varepsilon > 0$ sont des nombres réels.

Exercice 1 On part d'un maillage (uniforme) de sommets

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m < x_{m+1} = 1, \quad m \in \mathbb{N}^*.$$

Nous noterons

$$T_i =]x_i, x_{i+1}[$$

l'élément i et

$$h = \frac{1}{m+1}$$

la taille de l'élément.

(a) Écrire une formulation variationnelle du problème $(1) - (2)$ utilisant des éléments finis P_2.

(b) On note U^h le vecteur dont les composantes sont les inconnues, i.e. les valeurs de U^h, approximations des $u(x)$ aux sommets et aux points internes de lélément. Montrer que U^h est solution d'un système linéaire

$$A^h U^h = F^h$$

dont on précisera la matrice $A^h \in \mathbb{R}^{(2m-1)\times(2m-1)}$ et le second membre $F^h \in \mathbb{R}^{2m-1}$.

(c) Pour $\varepsilon = 0.1$, représenter graphiquement (pour différentes valeurs de m) la solution obtenue en résolvant le système. Représenter sur le même graphique la solution exacte.

Exercice 2 On note $\pi_h u$ la projection d'une fonction continue u sur V_h (un espace approprié avec des éléments finis de Lagrange P_2). Tracer la courbe $h \mapsto e_h = \|u - \pi_h u\|_{L^2(\Omega)}$. Tracer la même courbe en échelle "log-log" (avec `plt.loglog(...)`). En déduire que, pour h petit, $e_h = \mathcal{O}(h^p)$ pour un certain nombre p à déterminer. Ensuite, tracer la courbe $h \mapsto \|u' - (\pi_h u)'\|_{L^2(\Omega)}$ et en déduire la décroissance de l'erreur en fonction de h.