Igor Staręga, 320741, grupa 5, projekt 1, zadanie 12

Wstęp

Rozwiązywanie równań różniczkowych postaci:

$$a_2(x) * y''(x) + a_1(x) * y'(x) + a_0(x) * y(x) = b(x). \tag{1}$$

przy użyciu metody predyktor-korektor Addamsa-Bashfortha-Moultona rzędu 4-tego dla liniowych równań różniczkowych 2-go stopnia. Wartości początkowe $y1, y2, y3$ wyliczone zostały przy pomocy metody Rungego-Kutty 4-tego rzędu. Testy mają na celu sprawdzenie działania odpowiednio metod: Addamsa-Bashfortha-Moultona, Addamsa-Bashfortha oraz Rungego-Kutty. Przy użyciu uzyskanych wyników wyliczone zostały również rzędy wcześniej wymienionych metod. Czwarty eksperyment polega na zbadaniu wpływu zmiany proporcji operacji predykcji do korekcji na błąd globalny oraz rząd metody. Wyniki powyższych testów nie były zaskakujące. W pierwszych trzech testach rząd metod wyniósł około 4. Natomiast ostatni test pokazał, że zmiana proporcji powoduje zwiększenie błędu globalnego średnio o 10^{-13}, a rząd pozostał taki sam.

Opis metod iteracyjnych

Równanie różniczkowe 1-go stopnia możemy przedstawić jako $y' = f(x, y)$, w dodatku przy założeniu, że $y(x_0) = y_0$ dla pewnych x_0 i y_0 możemy (na ogół) jednoznacznie wyznaczyć rozwiązanie takiego równania. Można to zrobić przy użyciu metody Addamsa-Bashforda-Moultona 4-tego rzędu, która znając wartość początkową y_0, ilość wykonanych kroków n oraz przedział (x_0, x_n), jest w stanie obliczyć $y(x_n)$ dokonując predykcji, a następnie korekcji zgodnie ze wzorami:

$$\begin{aligned} y_i^* &= y_{i-1} + \tfrac{h}{24}(55f(x_{i-1}, y_{i-1}) - 59f(x_{i-2}, y_{i-2}) + 37f(x_{i-3}, y_{i-3}) - 9f(x_{i-4}, y_{i-4})) \\ y_i &= y_{i-1} + \tfrac{h}{24}(9f(x_i, y_i^*) + 19f(x_{i-1}, y_{i-1}) - 5f(x_{i-2}, y_{i-2}) + f(x_{i-3}, y_{i-3})) \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ oraz $3 < i \leqslant n$. Jako, że jest to metoda wielokrokowa, 3 pierwsze przybliżenia y muszą zostać wyznaczone przy użyciu innej metody, na przykład Rungego-Kutty 4-tego rzędu, zgodnie ze wzorami:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ k_2 &= hf(x_{i-1} + \tfrac{h}{2}, y_{i-1} + \tfrac{k_1}{2}) \\ k_3 &= hf(x_{i-1} + \tfrac{h}{2}, y_{i-1} + \tfrac{k_2}{2}) \\ k_4 &= hf(x_{i-1} + h, y_{i-1} + k_3) \\ y_i &= y_{i-1} + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \tag{3}$$

Jako, że wzory powyższych metod są przeznaczone dla równań różniczkowych 1-go rzędu, aby móc rozwiązać równanie (1) przedstawione jako $y'' = f(x, y, y')$ musimy odpowiednio dostosować dane, a mianowicie we wzorach y_i zastąpimy wektorem $Y_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ y_i' \end{pmatrix}$, a zamiast funkcji $f(x, y)$ wykorzystamy $F(Y_i) = \begin{pmatrix} 1 \\ y_i' \\ f(x_i, y_i, y_i') \end{pmatrix}$

Eksperymenty numeryczne

Zauważmy, że jeżeli mamy policzone błędy globalne e_n dla n oraz e_{4n} dla $4n$, to łatwo możemy oszacować rząd metody. Jeżeli przyjmiemy, że rząd metody to największa liczba całkowita p, taka że dla dostatecznie małych h zachodzi $|e_n^{(h)}| \leqslant c * h^p$, gdzie c jest liczbą niezależną od h. Z definicji liczby h wiadomo, że jeżeli dla tego samego równania $h^{(n)} = 4h^{(4n)}$ rozpiszemy nierówność dla e_{4n}, a następnie podzielimy stronami i zlogarytmizujemy, otrzymamy:

$$p = log_4 \frac{e_n}{e_{4n}} \tag{4}$$

Analizując metodę Addamsa-Bashfotha-Maultona zacząłem zastanawiać się, jak rząd metody oraz błąd zmieniłby się, gdybym "zaburzył" proporcje wykonywanych predykcji do korekcji. Dlatego dodałem dodatkowy parametr $b2m$ odpowiadający za ilość wykonanaych predykcji przed korekcją. Jako, że zarówno predyktor jak i korektor są metodami 4-go rzędu, to niezależnie od dobranych proporcji wykorzystania tych metod wciąż otrzymamy metodę 4-go rzędu, co zostało potwierdzone przez eksperyment. Błąd nowej metody zwiększał się wraz ze zwiększeniem parametru $b2m$, co, jak można się domyślić, związane jest z coraz rzadszą korekcją wykonywaną przez metodę Addamsa-Bashfortha-Moultona.

Tabela 1: Wartość parametru $b2m$ w zmodyfikowanej metodzie, czyli ile razy wykonana została predykcja przed korekcją, oszacowana wartość p, błąd przybliżenia e_k oraz przesunięcie błędu względem wartości wyliczonej "normalną" wersją metody predyktor-korektor Δe_k
Rozwiązywane równanie opisane jest wzorem: $\sqrt{x} * y''(x) - \frac{2}{x} * y'(x) + x^2 * y(x) = x^4 - 5 * x^2 + \frac{2}{x} - 4$, a warunki początkowe to $y(1) = -4, y'(1) = 3log3$, natomiast szukaną wartością jest $y(5) = 243$.

$b2m$	p	e_k	Δe_k
2^1	$1.137{\times}10^{-11}$	4.000521	$-9.294{\times}10^{-12}$
2^2	$1.756{\times}10^{-11}$	3.992626	$-1.549e{\times}10^{-11}$
2^3	$2.1{\times}10^{-11}$	3.991659	$-1.893e{\times}10^{-11}$
2^4	$2.225{\times}10^{-11}$	4.006274	$-2.018{\times}10^{-11}$
2^5	$2.308{\times}10^{-11}$	4.006660	$-2.100{\times}10^{-11}$
2^6	$2.376{\times}10^{-11}$	3.998580	$-2.169{\times}10^{-11}$
2^7	$2.393{\times}10^{-11}$	3.999762	$-2.186{\times}10^{-11}$
2^8	$2.404{\times}10^{-11}$	3.998623	$-2.197{\times}10^{-11}$
2^9	$2.413{\times}10^{-11}$	3.991504	$-2.206{\times}10^{-11}$