Probabilité

QFM 2023 _UM6P

TD et TP

Elhoucine AIT BOUGNSA
Elhoucine.AITBOUGNSA@um6p.ma

Exercice 0.0.1. Tracé de f_X et F_X à partir d'un échantillon
Soit X une V.A de densité f_X et de fonction de répartition F_X et (X_n) des observations indépendantes de X (les X_n sont vues comme de VA iid de même loi que X

1. Soit $0 < h << 1$ tel que $\int_x^{x+h} f_X(t)dt \approx h.f_X(x)$. Montrer que :

$$h.f_X(x) \approx E\left(\mathbb{1}_{[x,x+h]}(X)\right)$$

et que :

$$F_X(x) = E\left(\mathbb{1}_{]-\infty,x]}(X)\right)$$

2. En utilisant la loi des grandes nombres et la question précédente , tracer la courbe de la fonction densité de probabilité de $X = U.V$ avec U et V sont iid de même loi uniforme sur $]0,1[$
3. Calculer explicitement F_X et f_X puis tracer les courbes réelles ($X = U.V$)
4. (Vérification numérique de la méthode de Box-Muller) Tracer la courbe approchée de f_X si $X = \sqrt{-2log(U)}.sin(2\pi.V)$ avec Uet V sont iid de même loi uniforme sur $]0,1[$

Exercice 0.0.2. Simulation de la loi uniforme et application
Soient X et Y deux VA de densités ,respectivement, $f_X(t) = e^{-|t|}$ et $f_Y(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$.
Soient $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f_X(x) > y > -f_Y(x)\}$ et le couple (U_1, U_2) suit la loi uniforme sur A
On note f_1 la densité de U_1 et f_2 la densité marginale de U_2

1. réaliser la simulation de X et de Y
2. Montrer que $f_1 = \frac{1}{2}f_X + \frac{1}{2}f_Y$
3. réaliser la simulation de (U_1, U_2) et en déduire la simulation U_2
4. Tracer la courbe approchée de f_2 la densité de U_2 et F_2 la fonction de répartition de U_2 (en utilisant la démarche de l'exercice 1)
5. Montrer explicitement que :

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & si\ t > 1\ ou\ t < \frac{-1}{\pi} \\ \sqrt{-\frac{1}{\pi t} - 1} & si\ \frac{-1}{\pi} \leq t < 0 \\ -Log(t) & si\ 1 > t > 0 \end{cases}$$

tracer la courbe exacte de f_Y
Soit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < y < |sin(x)|e^{-|x|}\}$ et (X_1, Y_1) suit la loi uniforme sur B
6. Calculer une approximation de la surface de B (par la loi des grandes nombres)
7. Réaliser la simulation de (X_1, Y_1)
8. En déduire la simulation de la loi caractérisée par la densité

$$f(t) = \alpha|sin(t)|e^{-|t|}$$

Indication : calculer f_{X_1}

Exercice 0.0.3. Simulation d'un couple Gaussien
Soit (X, Y) un couple de densité

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{1}{2}(-x^2-y^2)}$$

1. Montrer que X et Y sont indépendantes et puis réaliser la simulation du couple (X, Y)
2. On suppose maintenant que

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2-y^2-2\alpha x.y}$$

réaliser la simulation de (X, Y)

Exercice 0.0.4. simulation d'une marche aléatoire
Soit X_n une famille de variables aléatoires iid de même loi de bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et $S_n = \sum_1^n X_k$

1. réaliser la simulation de X_n
2. Tracer la courbe (n, S_n)

Exercice 0.0.5. Simulation d'un mouvement brownien
Soit $(X_t)_{t\leq 0}$ un processus définie par :

$$X_0 = 0$$

$\forall s \geq t \geq 0 : X_s - X_t$ suit la loi normale $N(0, \sqrt{s-t})$
$\forall s > t \geq 0$ $X_s - X_t$ est mutuellement indépendante avec $(X_u)_{0\leq u\leq t}$

1. En utilisant la méthode de box-Muller réaliser la simulation de la loi $N(m, \sigma)$
2. Tracer la courbe (t, X_t)
   Indication : $X_{t+h} = X_{t+h} - X_t + X_t$,le pas $h = 0.01$ et l'intervalle $[0, 100]$
3. Soit (Y_t) un autre processus vérifiant les même propriétés que X_t mais indépendante de X_t. Tracer la courbe paramétrique (X_t, Y_t)

Exercice 0.0.6. simulation de processus de poisson
Soit X_n une suit de VA IID de même loi exponentielle de paramètre λ. Soient

$$S_n = \sum_1^n X_k \; et \; N(t) = min\{n/S_n > t\}$$

Exemple d'explication :
Si on considère l'arrivée de clients dans une magazine , S_n va représenter l'instante correspondante au n^{eme} client et X_{n+1} représente l'espacement entre le n^{eme} client et $n + 1^{eme}$ client (le temps d'attente). $N(t)$ va représenter le nombre de clients reçus entre 0 et t

1. réaliser la simulation de X_n
2. Montrer que $N(t)$ suit la loi de poisson de paramètre $\lambda.t$
3. réaliser une simulation qui trace la courbe $(t, N(t))$