MOHAMMED VI
POLYTECHNIC
UNIVERSITY

Probabilité
QFM 2023 _UM6P

Probabiliés appliquées

Elhoucine AIT BOUGNSA
Elhoucine.AITBOUGNSA@um6p.ma

Table des matières

1 Simulation des Variables aléatoires

1.1 La loi uniforme et leur simulation

Une variable aléatoire X est dite suit la loi uniforme sur]0,1[si sa fonction de densité de probabilité f_X est définie par :

$$f_X(t) = \begin{cases} 1 & si\ 0 < t < 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Ou bien sa fonction de répartition F_X est définie par :

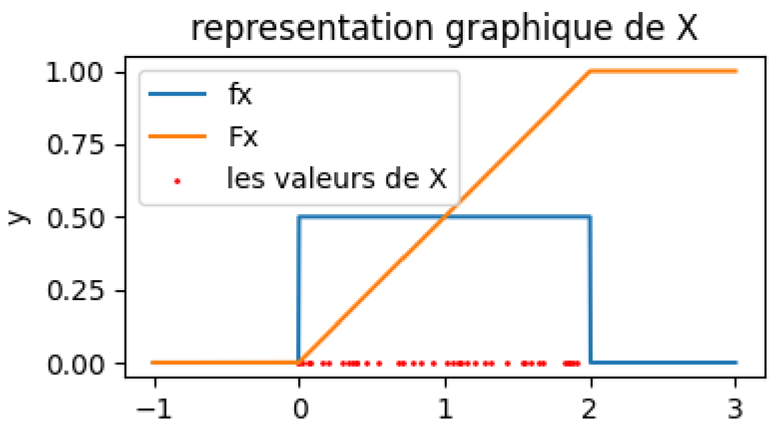
$$F_X(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \geq 1 \\ t & si\ 0 < t < 1 \\ 0 & si\ t \leq 0 \end{cases}$$

Plus générale, la variable aléatoire X est dite suit la loi uniforme sur $]a, b[$ si sa fonction de densité de probabilité f_X est définie par :

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\ a < t < b \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Et la fonction de répartition F_X devient :

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \geq b \\ \frac{t-a}{b-a} & si\ a < t < b \\ 0 & si\ t \leq a \end{cases}$$



ce graphe illustre la fonction densité de probabilité, la fonction de répartition et la répartition des valeurs données par une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0, 2]$

Proposition 1.1.1. les propriétés de la loi uniforme

1. Si U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$ et $Z = (b-a)U + a$, alors : Z suit la loi uniforme sur $]a, b[$
2. Si Z suit la loi uniforme sur $]a, b[$ et $U = \frac{Z-a}{b-a}$, alors : U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$

Exemple 1.1.1. Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Trouver la loi de $min(U, V)$
2. Trouver la loi de $max(U, V)$

1.1.1 Simulation de la loi uniforme des congriance linéaire

Les nombres pseudo-aléatoires sont générés de manière séquentielle, où chaque nombre dans la séquence est calculé en fonction du nombre précédent en utilisant la suite suivante

$$\begin{cases} S_0 \\ S_{n+1} = a.S_n + b\ [m] \end{cases}$$

S_0 est appelé **graine** ou **seed** les valeurs S_0,S_1... sont appelées des valeurs pseudo aléatoires. On considère

$$U_n = \frac{S_n}{m}$$

On veut que la suite générée U_n « ressemble » à une suite d'observations aléatoires uniformes sur $[0, 1]$ et indépendantes.

Les valeurs U_0,U_1,U_2,... sont des observation pseudo aléatoires et qui sont dans $[0, 1]$

Sous certain conditions sur a,b et m on considère les valeurs U_n comme des observations indépendantes selon la loi uniforme pour certains calculs

Exemples :

1. Le générateur *Rnd* implémenté dans Microsoft Visual Basic(2004,2005) :

$$Rnd \begin{cases} s_0 & \\ s_k = & (16598013 s_{k-1} + 12820163)\ mod\ 2^{24} \\ U_k = \frac{S_k}{2^{24}} & \end{cases}$$

2. Le générateur Rand qui est implémenté dans Microsoft Visual C++ (1985)

$$Rand \begin{cases} s_0 & \\ s_k = & (214013 s_{k-1} + 2531011)\ mod\ 2^{31} \\ Y_k = & \text{Le reste de la division euclidienne de } S_k \text{ par } 2^{16} \\ Z_k = & Y_k\ mod\ 2^{15} \\ U_k = \frac{Z_k}{2^{15}} & \end{cases}$$

Les valeurs U_k sont considérées des observations selon la loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour implémenter cette algorithme, il suffit de fixer s_0 (par exemple $s_0 = 0$) puis l'algorithme nous donne les valeurs U_k

commentaire :

L'algorithme implémenté en PYTHON est l'algorithme de **Mersenne Twister**. Ces valeurs sont données par la fonction **random.uniform** qui existe dans la bibliothèque **numpy**

1.2 simulation des variables aléatoires discrètes, Exemple : lois usuelles

Proposition 1.2.1. Soient X une variable discrète et U suit la loi uniforme sur $]0,1[$. On pose

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, ...\}$$

et $p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$ avec $p_0 = 0$. Soient $S_n = p_0+p_1+p_2+...p_n$ et $Y = \sum x_{n+1}.1_{S_n<U<S_{n+1}}$. On a :
Y suit même loi que X

la proposition précédente nous permet de simuler toutes les variables aléatoires discrètes.

Démonstration. *On voit que* $Y(\Omega) = X(\Omega)$.
D'autre part :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = x_{n+1}) =& \mathbb{P}\\ =&(S_{n+1} > S_n)\\ =&S_{n+1} - S_n\\ =&p_{n+1}\\ =&\mathbb{P}(X = x_{n+1})\end{aligned}$$

Simulation de la loi de Bernoulli soit U suit la loi uniforme sur $[0,1]$. $\mathbb{1}_{[0,p]}(U)$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p

1.3 simulation des variables aléatoires réelles continues par la méthode de loi inverse

Proposition 1.3.1. Soient X une variable continue de fonction de répartition F_X et U suit la loi uniforme sur $]0,1[$. On suppose que F_X forme une bijection d'un intervalle I dans $]0,1[$ alors $F_X^{-1}(U)$ suit même loi que X

Démonstration. *Soit* $Y = F_X^{-1}(U)$

$$\mathbb{P}(Y \le x) = \mathbb{P}(U \le F_X(x)) = F_X(x)$$

Donc X et Y ont une même loi de probabilité

Exemple 1 : la loi exponentielle Soit :

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda.t} & si\ t > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

F_X est un bijection de $]0,\infty[\longrightarrow]0,1[$. et :

$$F_X^{-1}(y) = -\frac{Log(1-y)}{\lambda}$$

On considère U suit la loi uniforme sur $]0,1[$. $F_X^{-1}(U)$ suit même loi que X
Exemple 2 : La loi de Cauchy Soit X suit la loi de Cauchy, et :

$$f_X(t) = \frac{1}{\pi(1+t)^2}$$

1.4 Simulation d'une variable aléatoire continue par la méthode mixte :

Proposition 1.4.1. Soient $X_1, X_2, ..., X_m$ une familles de VA de densité respectivement $f_1, f_2, ..., f_m$. Soit Y une VA indépendante des X_i et $Y(\Omega) = 1, 2, ..., m$.
X_Y est une variable de densité $f = \sum_1^m \mathbb{P}(Y = i) f_i$

Démonstration. *Indication :* $\{Y = 1\}, \{Y = 2\}, ..., \{Y = m\}$ *forment un système complet d'évènements*

1.5 Simulation des VA par la méthode acceptation rejet

Proposition 1.5.1. Soient $(X_n)_{1\leq n}$ une suite de aléatoires indépendantes et de même loi (de même densité f_X) et $(U_n)_{1\leq n}$ une famille des V.A indépendantes de même loi uniforme sur $]0, 1[$ .Soit Y de densité f_Y, On suppose qu'il existe $1 > \alpha > 0$ tel que :

$$\alpha f_Y \leq f_X$$

Soit :

$$T = \inf \left\{ n/U_n \leq \frac{\alpha f_Y(X_n)}{f_X(X_n)} \right\}$$

Alors :
T suit la loi géométrique et X_T suit même loi que Y

Démonstration. *Soit :*

$$B = \{(u, x)/0 \leq u \leq \frac{\alpha f_Y(x)}{f_X(x)},\ x \in \mathbb{R}\}$$

On a :

$$\mathbb{P}\left(U_n \leq \frac{\alpha f_Y(X_n)}{f_X(X_n)}\right) = \mathbb{P}\left((U_n, X_n) \in B\right)$$

U_n *et* X_n *sont indépendantes donc :*

$$f_{(U_n,X_n)} = f_{U_n}.f_{X_n}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left((U_n, X_n) \in B\right) &= \iint_B f_{U_n}.f_{X_n} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{\frac{\alpha f_Y(x)}{f_X(x)}} f_{X_n}(x)du \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \alpha f_Y(x)dx \\ &= \alpha\end{aligned}$$

T *suit la loi géométrique de paramètre* α

Soit : $z \in \mathbb{R}$, *Montrons que*

$$\mathbb{P}(X_T \leq z) = \mathbb{P}(Y \leq z)$$

On a : $\{T = 1\}, \{T = 2\}, \{T = 3\}, ...$ *forme un système complet d'évènements. Donc :*

$$\mathbb{P}(X_T \leq z) = \sum_{0<n} \mathbb{P}\left(\{X_T \leq z\} \cap \{T = n\}\right)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\{X_T \leq z\} \cap \{T = n\} =& \{X_n \leq z\} \cap \{T = n\} \\ =& \{X_n \leq z\} \cap \{U_n \leq \frac{\alpha f_Y(X_n)}{f_X(X_n)}\} \cap \{U_{n-1} > \frac{\alpha f_Y(X_{n-1})}{f_X(X_{n-1})}\} \cap ... \cap \{U_1 > \frac{\alpha f_Y(X_1)}{f_X(X_1)}\}\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{P}(\{X_T \leq z\}) = \mathbb{P}(\{X_n \leq z\} \cap \{U_n \leq \frac{\alpha f_Y(X_n)}{f_X(X_n)}\}).(1-\alpha)^{n-1}$$

Et :

$$\mathbb{P}(\{X_n \leq z\} \cap \{U_n \leq \frac{\alpha f_Y(X_n)}{f_X(X_n)}\}) = \int_{-\infty}^{z} \left(\int_0^{\frac{\alpha f_Y(x)}{f_X(x)}} f_{X_n}(x) du \right) dx = \alpha \mathbb{P}(Y \leq z)$$

Donc :

$$\mathbb{P}(X_T \leq z) = \sum_{0<n} \mathbb{P}\left(\{X_T \leq z\} \cap \{T = n\}\right) = \sum_{0<n} \alpha \mathbb{P}(Y \leq z)(1-\alpha)^{n-1} = \mathbb{P}(Y \leq z)$$

1.5.1 simulation de la loi Normale

1.5.2 simulation via TCL

Théorème 1.5.1. Théorème central limite, Admis

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, identiquement distribuées (de même loi) et admettent l'espérance m et la variance V.
pour tout $n \geq 1$, on pose

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \text{ et } Z_n = \sqrt{n}\frac{Y_n - m}{\sqrt{V}}$$

En même temps :

$$Z_n = \frac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{V(Y_n)}}$$

Alors Z_n converge en loi vers une variable qui suit la loi normale centrée réduite $N(0,1)$

1.5.3 méthode de box-Muller

Proposition 1.5.2. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $]0,1[$ et $Y = \sqrt{-2ln(U)}.sin(2\pi V)$.
Y suit la loi normale centrée réduite et $\sigma Y + m$ suit le loi $Normale(m, \sigma)$

Exercice Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $]0,1[$. On définit :

$$R = \sqrt{-2ln(U)}\ ,\ \Theta = 2\pi V\ et\ Y = R.sin(\Theta)$$

1. Montrer que Θ suit la loi uniforme sur $]0, 2\pi[$
2. Montrer que :

$$F_R(r) = \left(1 - e^{\frac{-r^2}{2}}\right).\mathbb{1}_{r>0}\ et\ f_R(r) = r.e^{\frac{-r^2}{2}}\mathbb{1}_{r>0}$$

3. Donner la densité conjointe du couple (R, Θ)
4. Soit $z \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que :
   $$\mathbb{P}(\{Y \leq z\}) = \iint_B \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-r^2}{2}} r dr d\theta$$
   Avec :
   $$B = \{(r,\theta)/r.\sin(\theta) \leq z, r \geq 0, 2\pi > \theta \geq 0\}$$
   Indication :
   $$\{Y \leq z\} = \{(R, \Theta) \in B\}$$
   (b) Soient $x = r.\cos(\theta),\ y = r.\sin(\theta)$ avec $r \geq 0\ et\ 2\pi > \theta \geq 0\}$ Montrer que :
   $$(r,\theta) \in B \iff x \in \mathbb{R}\ et\ y \leq z$$
   (c) En effectuant un changement de variables (polaires vers cartésiennes). Montrer que :
   $$\mathbb{P}(Y \leq z) = \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-x^2+y^2}{2}} dx.dy = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$$
   Indication
   $$dxdy = rdrd\theta,\ r^2 = x^2 + y^2$$
   (d) En déduire que Y suit la loi normale centrée réduite.
   (e) Soient $\sigma > 0$ et $m \in \mathbb{R}$ et $X = \sigma Y + m$. X suit elle quelle loi ?

1.6 simulation d'un vecteur aléatoire

Simulation d'un couple de VA

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité $f_{(X,Y)}$. la simulation de (X, Y) consiste à générer des observations selon la loi conjointe du couple (X, Y). Voici les étapes pour le faire :

1. Calcul de f_X
2. on génère une observation x selon la loi f_X
3. calcul de $f_{Y/X=x}$
4. On génère une observation y selon la densité $f_{Y/X=x}$
5. l'observation (x, y) est une observation selon la loi conjointe de (X, Y)

X et Y ont un rôle symétrique, vous pouvez commencer également par Y puis $X/Y = y$

1.7 Calcul des surfaces par la méthode de monte Carlo

Voici deux théorèmes très importantes pour appliquer la méthode de Monte Carlo

Théorème 1.7.1. Théorème de transfert (Admis)
Soit X une variable aléatoire à densité d'une densité f_X,et $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. $Y = g(X)$ admet l'espérance si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_X(t)dt\ intgrable$$

Sous réserve de condition précédente, on'a :

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_X(t)dt$$

Le théorème de transfert nous permet de calculer $E(g(X))$ en utilisant seulement la loi de X (sans connaître la loi de $g(X)$

Théorème 1.7.2. La loi faible des grandes nombres
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et admettent la même espérance m et la même variance V.
pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ Alors Y_n converge en probabilité vers la variable aléatoire constante égale à m, soit encore :

$$Y_n \xrightarrow{P} m$$

.
Particulièrement, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes de même loi

Démonstration. *On a ;*

$$E(Y_n) = m \text{ et } V(Y_n) = \frac{V}{n}$$

D'après Inégalité de Bienaymé-Tchebychev,on a ;

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|Y_n - m| > \epsilon) \leq \frac{V(Y_n)}{\epsilon^2} = \frac{V}{n.\epsilon^2} \to 0$$

1.7.1 Monte Carlo analytique

Pour calculer une intégrale de la forme :

$$S = \int_a^b f(t)dt$$

Nous allons utiliser la loi uniforme $U_{a,b}$ sur$[a, b]$. Nous aurons :

$$S = (b - a).E(f(U_{a,b}))$$

Avec :

$$U_{a,b} = (b - a)U + a$$

Et en utilisant la loi des grandes nombres, on a :

$$E(f(U_{a,b})) = E\left(f((b-a)U + a)\right) \simeq \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} f((b-a)U_i + a)$$

Avec les U_i sont des observations selon la loi uniforme sur $]0, 1[$

Proposition 1.7.1. Soient f une fonction définie et intégrale sur I et X une VA de densité f_X qui ne s'annule pas sur I. On a :

$$\int_I f(t)dt = E\left(\frac{f(X)}{f_X(X)}\mathbb{1}_I(X)\right) \simeq \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \frac{f(X_i)}{f_X(X_i)}\mathbb{1}_I(X_i)$$

avec les X_i sont des observations selon la loi de X

Démonstration. *D'après le théorème de transfert, si on considère $g(t) = \frac{f(t)}{f_X(t)}\mathbb{1}_I(t)$, on a :*

$$\begin{aligned} E\left(\frac{f(X)}{f_X(X)}\mathbb{1}_I(X)\right) &= \int_{\mathbb{R}} g(t)f_X(t)dt \\ &= \int_I \frac{f(t)}{f_X(t)}f_X(t)dt \\ &= \int_I f(t)dt \end{aligned}$$

L'autre approximation est donnée par la loi des grandes nombres