

Méthode des Différences Finies pour les EDP

Master QFM

Première année

Imad EL MAHI

Table des matières

1	Equations de la physique - Classification des EDP	3
1.1	Introduction	3
1.2	Généralités sur les EDP	3
1.3	Classification des EDP linéaires du 2 ^{ème} ordre :	6
1.4	Quelques modèles d'équations hyperboliques et paraboliques	8
1.4.1	Equations hyperboliques	8
1.4.2	Equations paraboliques	9
1.5	Méthode des caractéristiques pour les EDP du 1 ^{er} ordre	10
2	Méthode des différences finies	17
2.1	Introduction	17
2.2	Principe de la méthode des différences finies - Ordre de précision	17
2.2.1	Principe	17
2.2.2	Ordre de la méthode	17
2.3	Différences finies pour une équation différentielle du 1er ordre	18
2.4	Différences finies pour un problème elliptique 1D	22
2.4.1	Modèle mathématique	22
2.4.2	Approximation aux différences finies	22
2.5	Différences finies pour un problème parabolique 1D (Equation de la chaleur) . . .	24
2.5.1	Modèle mathématique	24
2.5.2	Approximation différences finies	24
2.6	Consistance, stabilité et convergence des schémas aux différences finies	27
2.6.1	Erreur de troncature	27
2.6.2	Consistance	28
2.6.3	Stabilité d'un schéma numérique	29
2.6.4	Convergence	29
2.6.5	Théorème de Lax	29
2.6.6	Stabilité au sens de Fourier - Von Neumann	29

Chapitre 1

Equations de la physique - Classification des EDP

1.1 Introduction

La modélisation consiste à remplacer un système complexe en un objet simple qui reproduit les comportements principaux du système à étudier. Ce modèle peut être un modèle réduit, une expérience au laboratoire, un modèle numérique, etc.

On s'intéresse ici à la modélisation numérique qui consiste à remplacer le problème physique, chimique, biologique, économique ou industriel par des équations mathématiques. Ces équations s'écrivent souvent sous forme d'EDP (Équations aux dérivées partielles) et sont généralement non linéaires et posées en deux ou trois dimensions d'espaces avec des conditions aux limites parfois compliquées. Leurs solutions analytiques (exactes) sont souvent très difficiles à calculer voire impossible. On fait donc recours aux méthodes numériques pour approcher les solutions de ces équations.

La modélisation numérique se décompose en 5 étapes :

1. Établissement d'un modèle mathématique qui décrit le problème physique ou industriel que l'on veut résoudre.
2. Discrétisation des équations, ce qui permet d'avoir un modèle mathématique posé en un nombre fini de nœuds obtenus par une discrétisation (maillage) du domaine du calcul.
3. Méthodes numériques pour la résolution du problème discret. Ce point est crucial car la validité du modèle dépend étroitement de la précision des méthodes utilisées. A ce niveau, souvent une analyse d'erreurs et de convergence de la méthode est requise.
4. Mise en œuvre informatique. Ceci consiste à reproduire les algorithmes développés par un langage de programmation (Fortran, Matlab, Python, ...).
5. Analyse, interprétation des résultats et évaluation de la précision du modèle et des méthodes utilisées. Ceci se fait en général en comparant avec les études expérimentales existantes, ou par des études d'analyse mathématique d'ordre et convergence des méthodes utilisées.

1.2 Généralités sur les EDP

Définition 1.2.1 (Définition d'une EDP) Soit $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes. Par exemple, x_1 peut représenter la variables temps t et x_2, x_3, x_4 peuvent représenter les variables d'espace x, y et z .

Une équation aux dérivées partielles (ou en abrégé EDP) pour la fonction u est une relation liant la fonction u , les variables x_1, x_2, \dots, x_n et les dérivées partielles de u par rapport à ces variables. Elle s'écrit en général sous la forme :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots) = 0 \quad (1.1)$$

Remarque 1:

Les EDP interviennent dans beaucoup d'applications en physique, biologie, économie, ingénierie, génie civil, etc :

- En électromagnétisme → Équations de Maxwell
- En mécanique des fluides → Équations de Navier-Stokes
- En mécanique quantique → Équations de Schrödinger
- En finance → Équations de Black & Scholes
- En génie civil → Équations d'équilibre, équations de propagation, équations de l'hydraulique.

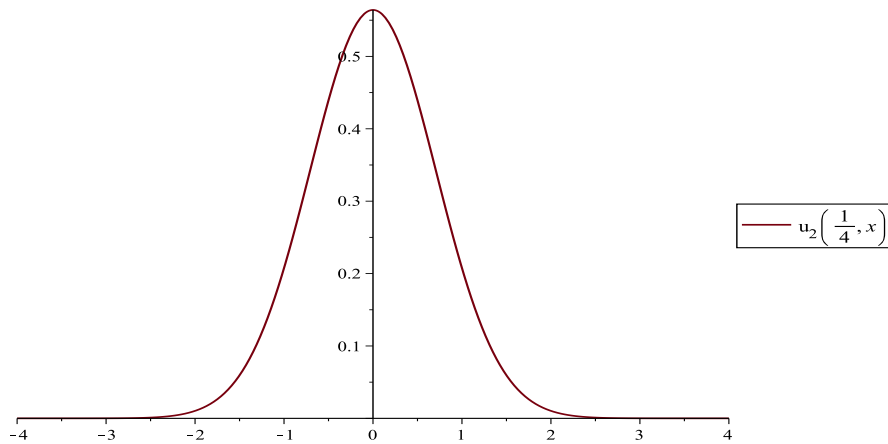
Exemple : *Equation de diffusion (1D)*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (E)$$

$u_1(t, x) = t + \frac{1}{2}x^2$ est une solution de (E) définie sur \mathbb{R}^2 .

$u_2(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ est aussi solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (c'est-à-dire pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$) dite solution fondamentale ou noyau de la chaleur.

On peut représenter par exemple la solution u_2 en fonction de x pour $t = \frac{1}{4}$.



et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_2\left(\frac{1}{4}, x\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1$$

Remarque 2:

Il est clair que pour avoir une solution unique de l'EDP (E), il faut rajouter à l'équation une condition initiale et des conditions aux limites.

Exercice 1 Montrer que la solution de (E) s'exprime, quand le domaine est non borné (infini), comme le produit de convolution de la condition initiale par le noyau de la chaleur :

$$u(t, x) = u(0, x) \star u_2(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(0, x - y) u_2(t, y) dy$$

Définition 1.2.2 (Ordre d'une EDP) On appelle ordre d'une EDP l'ordre le plus élevé des dérivées que contient l'EDP.

Définition 1.2.3 (EDP linéaire - EDP non linéaire) Une EDP est dite linéaire quand elle l'est par rapport à u et par rapport à toutes ses dérivées partielles.

En fait, les EDP linéaires ne contiennent aucun produit de u avec elle même ou avec ses dérivées partielles alors que les EDP non linéaires peuvent en avoir.

— Par exemple, une EDP linéaire du 1^{er} ordre pour la fonction $u(x, y)$ a la forme générale :

$$A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + Cu = D \quad (1.2)$$

où A , B , C et D peuvent être des fonctions de x et y .

— La forme générale d'une EDP linéaire du 2^{ème} ordre pour $u(x, y)$ est :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \quad (1.3)$$

où A , B , C , D , E , F et G peuvent dépendre de x et y .

Définition 1.2.4 (EDP homogène - EDP non homogène) Une EDP est dite homogène lorsqu'elle ne contient que des termes faisant intervenir la fonction u et ses dérivées partielles.

— Par exemple, l'EDP linéaire du 1^{er} ordre (1.2) serait homogène si $D = 0$. Celle du 2^{ème} ordre (1.3) est homogène si $G = 0$.

Exemples :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{EDP du 1}^{er} \text{ ordre, linéaire et homogène (à coefficients constants).}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Eq. d'équilibre}) \text{ est une EDP du 2}^{ème} \text{ ordre, linéaire et homogène.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \sin(u) = 0 \quad 1^{er} \text{ ordre, non linéaire et homogène.}$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + 4xyu = 1 \quad 1^{er} \text{ ordre, linéaire et non homogène.}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{Eq. de propagation des ondes}) \text{ 2}^{ème} \text{ ordre, linéaire et homogène.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 2^{ème} \text{ ordre, non linéaire et homogène.}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 2^{ème} \text{ ordre, non linéaire et homogène.}$$

1.3 Classification des EDP linéaires du 2^{ème} ordre :

On considère une EDP linéaire du 2^{ème} ordre sous forme générale en $(2D)$:

$$\underbrace{A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{(P)} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \quad (1.4)$$

où A, B, C, D, E, F et G peuvent dépendre des variables x et y .

La partie (P) s'appelle **partie principale** de l'EDP (1.4). En fait, c'est elle qui donne la nature de l'EDP.

On note par $\Delta = B^2 - 4AC$ le discriminant associé à l'EDP (1.4).

Classification :

On dira que l'EDP (1.4) est

- hyperbolique si $\Delta > 0$,
- parabolique si $\Delta = 0$,
- elliptique si $\Delta < 0$.

Remarques :

1. Les termes "hyperbolique", "parabolique", "elliptique" proviennent du fait que si l'on suppose que A, B, C, D, E et F constants et que l'on cherche une solution $\varphi(x, y)$ de l'équation homogène associée à (1.4) ($G = 0$) de la forme :

$$\varphi(x, y) = \exp(r_1 x + r_2 y)$$

On obtient l'équation algébrique pour r_1, r_2 , dite équation caractéristique, suivante :

$$Ar_1^2 + Br_1 r_2 + Cr_2^2 + Dr_1 + Er_2 + F = 0$$

qui est de type :

$$AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0 \quad (A)$$

et qui représente l'équation d'une **conique**.

On rappelle que la conique d'équation (A) représente

une hyperbole si $\Delta > 0$, une parabole si $\Delta = 0$, une ellipse si $\Delta < 0$.

2. Si les coefficients A, B et C dépendent des variables (x, y) alors la définition du type de l'EDP (1.4) devient locale, c'est-à-dire que l'EDP (1.4) sera

- hyperbolique au point (x_0, y_0) si $\Delta(x_0, y_0) > 0$,
- parabolique au point (x_0, y_0) si $\Delta(x_0, y_0) = 0$,
- elliptique au point (x_0, y_0) si $\Delta(x_0, y_0) < 0$.

avec $\Delta(x_0, y_0) = B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0)$

C'est-à-dire que l'EDP peut être hyperbolique dans certaines régions, parabolique ou elliptique dans d'autres régions.

Exemples :

1. Equation des ondes (1D) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{où } c \text{ représente la vitesse du son.}$$

Variables $\longrightarrow (t, x)$

Coefficients : $A = 1$; $B = 0$; $C = -c^2$; $D = E = F = G = 0$

Le discriminant de l'EDP : $\Delta = B^2 - 4AC = 4c^2 > 0$

L'équation des ondes est donc une EDP hyperbolique.

2. Equation de diffusion (1D) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (\nu > 0 \text{ est le coefficient de diffusion})$$

Variables $\longrightarrow (t, x)$

Coefficients : $A = 0$; $B = 0$; $C = -\nu$; $D = 1$; $E = F = G = 0$

$\Delta = B^2 - 4AC = 0 \implies$ L'équation de diffusion est parabolique.

3. Equation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Variables $\longrightarrow (x, y)$

Coefficients : $A = 1$; $B = 0$; $C = 1$; $D = E = F = G = 0$

$\Delta = -4 < 0 \implies$ L'équation de Laplace est elliptique.

4. Equation de Tricomi :

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Variables $\longrightarrow (x, y)$

Coefficients : $A = y$; $B = 0$; $C = -1$; $D = E = F = G = 0$

Le discriminant de l'EDP : $\Delta = 4y$

Si $y > 0$ alors l'EDP est hyperbolique.

Si $y = 0$ alors l'EDP est parabolique.

Si $y < 0$ alors l'EDP est elliptique.

L'équation de Tricomi peut modéliser par exemple les écoulements transsoniques non visqueux. On voit que c'est une EDP mixte : hyperbolique sur le demi plan supérieur $y > 0$, parabolique sur l'axe horizontal $y = 0$ et elliptique sur le demi plan inférieur $y < 0$.

1.4 Quelques modèles d'équations hyperboliques et paraboliques

1.4.1 Equations hyperboliques

Les équations hyperboliques modélisent les phénomènes de propagation d'ondes sans aucune dissipation, c'est-à-dire que l'énergie produite par ces ondes ne s'atténue pas au cours du temps. On parle de **convection pure**. On les trouve dans divers problèmes de la physique.

Dans le cas linéaire, ces équations peuvent modéliser la propagation du son dans un milieu homogène. En électromagnétisme, les équations de Maxwell sont hyperboliques et linéaires.

Dans le cas non linéaire, ces équations proviennent de lois de conservation de certaines quantités. C'est le cas par exemple des équations d'Euler qui expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour un fluide parfait (non visqueux). En hydraulique, les équations de Saint-Venant modélisent les écoulements de l'eau peu profonde (océans, rivières, écoulements suite aux ruptures de barrages, etc).

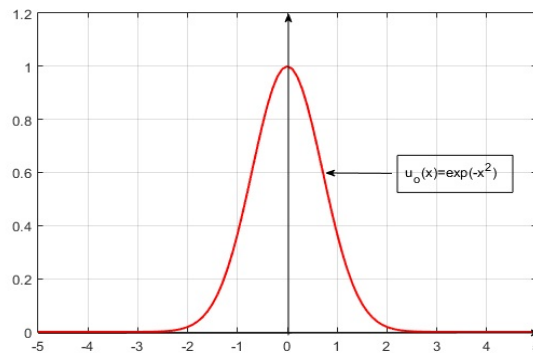
Exemples types de problèmes hyperboliques

1. Equation des ondes :

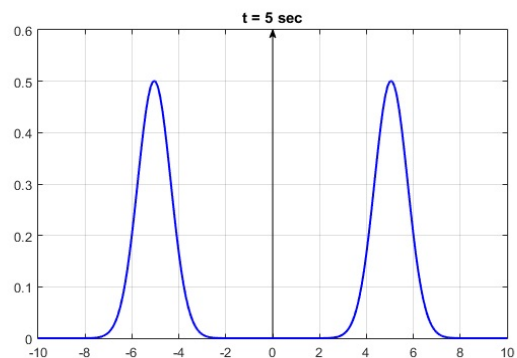
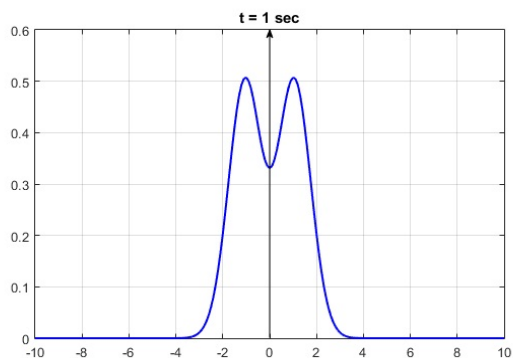
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(t=0, x) = u_0(x) \quad \text{donnée} \quad (\text{condition initiale}) \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Cette équation modélise la propagation d'une onde sonore à vitesse c dans milieu homogène. On l'appelle aussi équation de la corde vibrante.

Si l'on prend $c = 1$ et comme condition initiale la fonction $u_0(x)$ définie par $u_0(x) = e^{-x^2}$,



alors à $t = 1 \text{ sec}$ et à $t = 5 \text{ sec}$, on obtient en résolvant l'équation (1.5) :



2. Equation de convection :

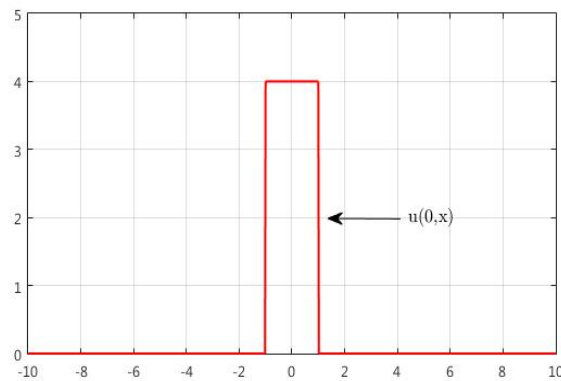
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(t=0, x) = u_0(x) \quad \text{donnée} \end{cases} \quad (1.6)$$

C'est l'équation de transport de la quantité u sans dissipation avec la vitesse c .

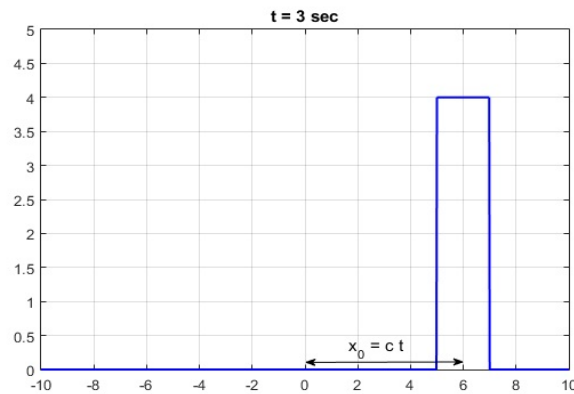
On peut montrer que la solution de cette équation hyperbolique s'écrit :

$$u(t, x) = u_0(x - ct) \leftarrow \text{condition initiale } u_0(x) \text{ transportée avec la vitesse } c.$$

c'est-à-dire que si l'on prend la condition initiale $u_0(x)$ comme suit :



alors la simulation avec une vitesse $c = 2m/sec$, donne la solution suivante à $t = 3 sec$:



1.4.2 Equations paraboliques

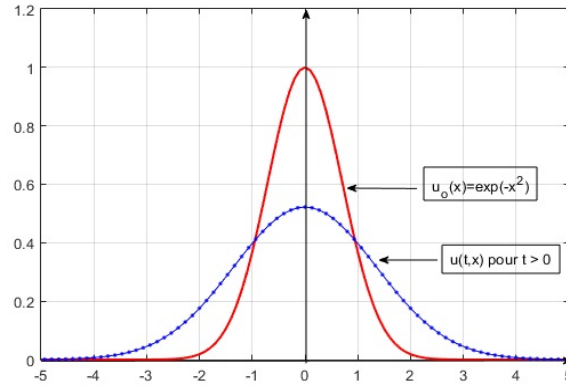
Ces équations modélisent la diffusion d'une quantité u dans un milieu. Cela peut être la diffusion de la température dans une barre métallique ou dans un milieu bidimensionnel, ou la diffusion d'une quantité u d'un polluant dans une rivière.

Exemple :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(t=0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (1.7)$$

Cette équation permet de simuler la diffusion de la quantité $u(t, x)$ où ν est le coefficient de diffusion. Il est clair que plus ν est grand plus la quantité $u(t, x)$ diffuse plus vite.

Si l'on prend à $t = 0$, la condition initiale $u(0, x) = u_0(x) = e^{-x^2}$, alors à $t > 0$, on aura :



1.5 Méthode des caractéristiques pour les EDP du 1^{er} ordre

On considère l'EDP linéaire du 1^{er} ordre, sous sa forme générale :

$$P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} + C u = D \quad (1.8)$$

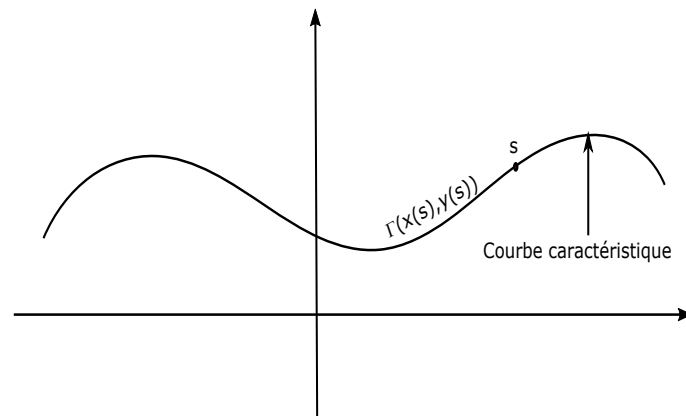
où P , Q , C et D sont des fonctions de x et y .

(1.8) s'écrit aussi :

$$P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} = R$$

avec $R = D - C u$

Le principe de la méthode des caractéristiques pour la résolution de l'EDP (1.8) est de chercher des courbes dites *courbes caractéristiques* le long desquelles l'EDP (1.8) se ramène à une simple équation différentielle ordinaire (EDO).



Si on arrive à résoudre l'EDO sur la courbe caractéristique Γ , alors on pourra répéter la procédure en partant de la courbe voisine, etc et donc obtenir la solution $u(x, y)$ dans tout le domaine.

On va illustrer le principe sur l'exemple suivant :

Equation de convection

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R} ; t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x) & \leftarrow \text{condition initiale} \end{cases}$$

Nous allons chercher une courbe caractéristique $\Gamma((t(s), x(s)))$, s étant le paramètre qui décrit la courbe, le long de laquelle l'EDP devient un système d'EDO.

Dérivons u le long de la courbe Γ :

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds}$$

Or d'après l'EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}$$

On a alors :

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dx}{ds} - c \frac{dt}{ds} \right)$$

On voit que si on impose : $\frac{dx}{ds} - c \frac{dt}{ds} = 0$ c'est-à-dire $dx = c dt$

$$\text{ou encore } \frac{dx}{dt} = c$$

on obtient :

$$\frac{du}{ds} = 0$$

Les courbes caractéristiques sont donc les droites d'équation :

$$\frac{dx}{dt} = c$$

et sur ces courbes caractéristiques la solution vérifie :

$$du = 0$$

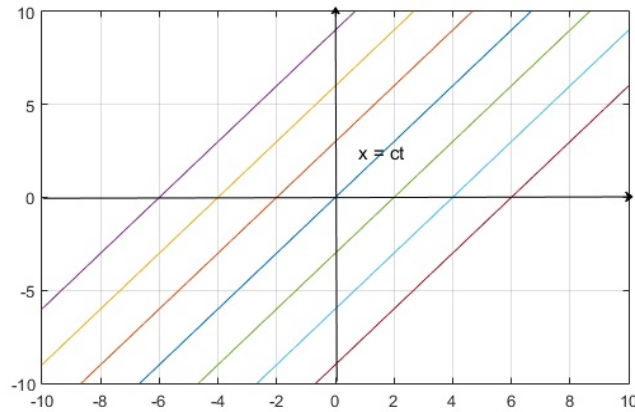
c'est-à-dire que u reste constante sur chaque caractéristique (on parle d'invariants de Riemann).

Le système d'EDO à résoudre est donc :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = c & \text{qui donne la courbe caractéristique } \Gamma \\ du = 0 & \text{qui donne la solution sur cette courbe caractéristique} \end{cases}$$

Courbes caractéristiques

$$\frac{dx}{dt} = c \Leftrightarrow x = ct + \xi \quad (\xi \in \mathbb{R})$$



Solution

Sur chaque courbe caractéristique $(\Gamma) : x - ct = \xi$, on a :

$$du = 0 \implies u(t, x) = cte = f(\xi) \longleftarrow \text{c-à-d } u \text{ ne dépend que de } \xi$$

$$\uparrow$$

$$f \in C^1(\mathbb{R})$$

Soit alors

$$u(t, x) = f(x - ct)$$

Cette solution doit être retrouvée aussi à $t = 0$.

or à $t = 0$, on a :

$$u(0, x) = u_0(x) \implies f(x) = u_0(x)$$

$$\text{c-à-d } f \equiv u_0$$

On obtient finalement :

$$\boxed{u(t, x) = u_0(x - ct)}$$

Retour au cas général

$$P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} = R$$

Cherchons une courbe caractéristique $\Gamma = \Gamma(x(s), y(s))$ le long de laquelle l'EDP se réduit à une équation différentielle.

Dérivons u le long de la courbe Γ :

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds}$$

Soit

$$\begin{aligned} P \frac{du}{ds} &= P \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + P \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \\ &= (R - Q \frac{\partial u}{\partial y}) \frac{dx}{ds} + P \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \\ &= \frac{\partial u}{\partial y} (P \frac{dy}{ds} - Q \frac{dx}{ds}) + R \frac{dx}{ds} \end{aligned}$$

On remarque alors que dès lors qu'on impose

$$P \frac{dy}{ds} - Q \frac{dx}{ds} = 0$$

on aura

$$P \frac{du}{ds} = R \frac{dx}{ds}$$

Autrement dit, le long des courbes caractéristiques :

$$\boxed{P dy = Q dx} \quad (1.9)$$

la solution vérifie :

$$\boxed{P du = R dx} \quad (1.10)$$

Comme moyen de retenir ces relations, il suffit d'écrire :

$$\boxed{\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{R}} \quad (1.11)$$

(*Attention* : Lorsque P , Q , ou R sont nuls, il vaut mieux utiliser (1.9) et (1.10)).

Remarques :

1. La relation $P dy = Q dx$ est appelée *direction caractéristique*. La pente locale de la caractéristique est :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}$$

2. Dans le cas où $R = 0$, la méthode des caractéristiques donne : $du = 0$ le long de la caractéristique, c'est-à-dire que u est constante le long de la caractéristiques (on appelle cela un invariant de Riemann).
3. La méthode des caractéristiques est particulièrement adaptée aux problèmes hyperboliques (régis par un transport convectif d'une quantité).

Exercice 2 Utiliser la méthode des caractéristiques pour résoudre les EDP suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Cherchons une courbe caractéristique $\Gamma = \Gamma(x(s), y(s))$ le long de laquelle l'EDP se réduit à une équation différentielle. Dérivons le long de la courbe Γ

$$\begin{aligned}
\frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \\
&= -\frac{\partial u}{\partial y} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \\
&= \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{dy}{ds} - \frac{dx}{ds} \right)
\end{aligned}$$

On voit donc que dès lors qu'on pose

$$\frac{dy}{ds} - \frac{dx}{ds} = 0$$

c'est-à-dire le long de la courbe caractéristique

$$dy = dx$$

ou encore

$$y - x = cte = \xi$$

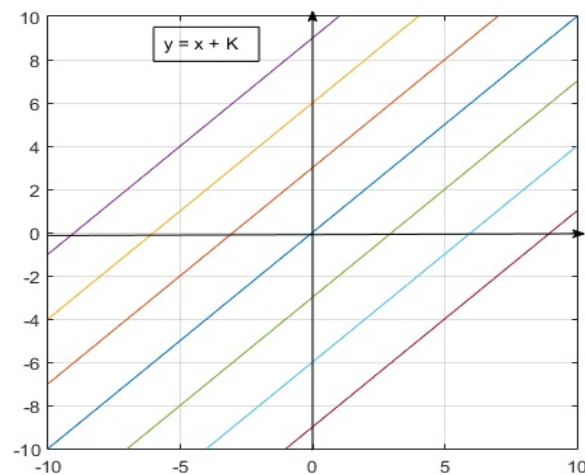
la solution u vérifie :

$$\frac{du}{ds} = 0$$

c'est-à-dire u est constante le long de chaque courbe Γ (invariant de Riemann).

Autrement dit, u ne dépend que de ξ d'où :

La solution générale de l'EDP (1) est : $u(x, y) = f(\xi) = f(y - x)$ où $f \in C^1(\mathbb{R})$



Plus simple pour la résolution

On peut écrire directement le système d'EDO ($P = 1$; $Q = 1$; $R = 0$)

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} \\ \frac{du}{0} = \frac{dx}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + \xi \leftarrow \text{courbes caractéristiques} \\ du = 0 \leftarrow \text{solution sur ces courbes} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Manière 1

On dérive le long d'une courbe caractéristique Γ :

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \\ &= \left(-y \frac{\partial u}{\partial y}\right) \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \\ &= \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right) \end{aligned}$$

Le long de la courbe caractéristique

$$\frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = 0 \quad \text{c-à-d} \quad dy = y dx$$

La solution vérifie

$$\frac{du}{ds} = 0 \quad \text{c-à-d} \quad du = 0$$

Les courbes caractéristiques sont

$$\begin{aligned} dy = y dx &\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = dx & \ln|y| = x + K \\ y &= \xi e^x \end{aligned}$$

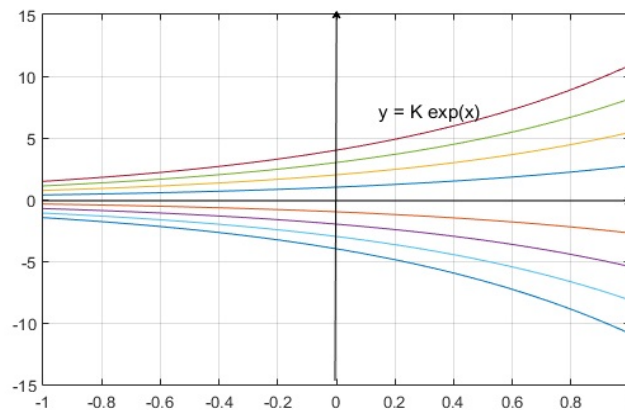
ou encore

$$ye^{-x} = \xi$$

Le long de ces courbes, la solution u est constante c'est-à-dire :

La solution générale de l'EDP (2) est : $u(x, y) = f(\xi) = f(ye^{-x})$ où $f \in C^1(\mathbb{R})$

Les courbes caractéristiques sont :



Plus simple

Écrire le système d'EDP sur les caractéristiques ($P = 1$; $Q = y$; $R = 0$)

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{1} = \frac{dy}{y} \\ \frac{du}{0} = \frac{dx}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y dx = dy \leftarrow \text{caractéristiques} \\ du = 0 \leftarrow \text{solution} \end{cases}$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0 \quad (3)$$

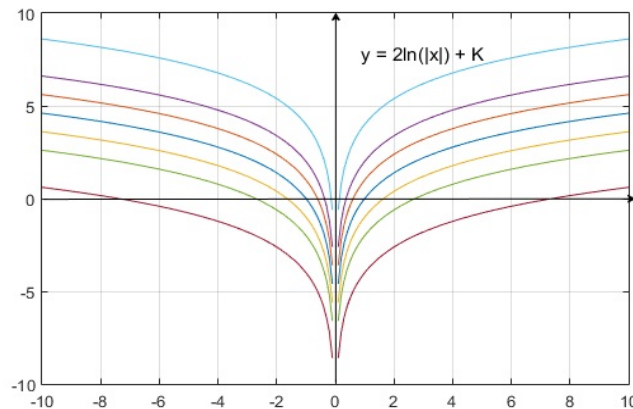
On dérive le long d'une caractéristique :

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{1}{2} (2u - x \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{dy}{ds} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dx}{ds} - \frac{x}{2} \frac{dy}{ds} \right) + u \frac{dy}{ds} \end{aligned}$$

Les courbes caractéristiques ont pour équation :

$$\frac{dx}{ds} - \frac{x}{2} \frac{dy}{ds} = 0 \quad \text{c-à-d} \quad \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} dy$$

$$\ln |x| = \frac{1}{2} y + K \quad \text{ou} \quad x = \xi e^{y/2}$$



La solution vérifie le long de ces caractéristiques :

$$\frac{du}{ds} = u \frac{dy}{ds} \quad \text{c-à-d} \quad \frac{du}{u} = dy$$

$$\ln |u| = y + K \quad \text{soit} \quad u = C e^y$$

Chapitre 2

Méthode des différences finies

2.1 Introduction

On distingue parmi les méthodes numériques pour la résolution des équations aux dérivées partielles trois grandes familles de méthodes :

- La méthode des différences finies qui s'utilise surtout sur des domaines réguliers (rectangles en 2D et hexaèdres en 3D).
- La méthode des volumes finis qui peut être utilisée sur des géométries complexes pour des EDP représentant la conservation de certaines quantités physiques (Exemple : Équations de Navier-Stokes).
- La méthode des éléments finis qui peut être aussi appliquée sur des géométries complexes et qui est largement utilisée pour la mécanique des fluides et surtout en mécanique des structures.

2.2 Principe de la méthode des différences finies - Ordre de précision

2.2.1 Principe

On considère une EDP modélisant un problème de la physique ou autre. La méthode des différences finies appliquée à l'EDP consiste à approximer les dérivées partielles dans l'EDP en utilisant des développements limités de Taylor. En procédant ainsi, les dérivées partielles de l'EDP sont donc remplacées par leurs approximations différences finies constituées par les valeurs de l'inconnu en un certain nombre de points du maillage. On aboutit généralement à un schéma itératif défini par des équations algébriques ou à des systèmes linéaires.

2.2.2 Ordre de la méthode

On se place en 3D. Soit $u(x, y, z, t)$ une fonction désignant l'inconnue d'une EDP provenant de la physique.

On a par définition :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta x} \quad \leftarrow \text{Cette relation est exacte.}$$

Donnons maintenant une approximation de $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t)$.

Faisons un DL de $u(x + \Delta x, y, z, t)$ au voisinage de (x, y, z, t) avec $\Delta x \rightarrow 0$.

$$u(x + \Delta x, y, z, t) = u(x, y, z, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z, t) + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, y, z, t) + \mathcal{O}((\Delta x)^{n+1})$$

Si on tronque ce DL à l'ordre 1 en Δx , on aura :

$$u(x + \Delta x, y, z, t) = u(x, y, z, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) = \frac{u(x + \Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Nous venons en fait de donner une une approximation différences finies de $\frac{\partial u}{\partial x}$ qui est :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) \simeq \frac{u(x + \Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta x}$$

avec une précision d'ordre 1 (puissance de Δx dans l'erreur de troncature).

$\mathcal{O}(\Delta x)$ est appelé Erreur de troncature.

Et on a la définition :

Définition 2.2.1 On appelle *ordre d'une méthode*, la puissance de Δx avec laquelle l'erreur de troncature tend vers 0.

2.3 Différences finies pour une équation différentielle du 1er ordre

Nous allons appliquer la méthode des différences finies pour la résolution numérique de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} u'(x) + u(x) = x - 1 & \text{pour } x \in]0, 2] \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

La méthode de différences finies se compose en 3 étapes :

Etape 1 : Discrétisation du domaine : Maillage

On subdivise l'intervalle $[0, 2]$ en N points $x_i (i = 1, \dots, N)$ régulièrement espacés.

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{-----} & & & & & \\ & | & | & & | & | & | \\ a = x_1 & x_2 & x_3 & & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & & x_N = b \end{array}$$

On note par $\Delta x = \frac{b-a}{N-1}$ le pas du maillage (ici $a = 0$ et $b = 2$).

Les nœuds du maillage sont :

$$x_1 = a ; \quad x_2 = a + \Delta x ; \quad \dots ; \quad x_i = a + (i-1)\Delta x$$

Le problème continue (2.1) qui consiste à chercher la fonction $u(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ de dimension infini se ramène alors à la recherche de N valeurs discrètes u_i en chaque nœud x_i du maillage.

On dit qu'on a remplacé le problème continu par un problème discret.

Le problème discret s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u(x_i) & \text{pour } i = 2, \dots, N \text{ vérifiant} \\ u'(x_i) + u(x_i) = x_i - 1 \\ u(x_1) = 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

Etape 2 : Construction du schéma numérique

Cette étape consiste à approximer les opérateurs dérivées $u'(x_i)$ en chaque nœud x_i du maillage.

Notons par $u_i = u(x_i)$ la valeur discrète de $u(x)$ au nœud x_i et $u'_i = u'(x_i)$ la dérivée au nœud x_i .

Schéma d'ordre 1 pour l'approximation de u'_i

On a déjà vu que :

$$u'(x) = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Au nœud x_i , on aura :

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Une approximation de l'ordre 1 de u'_i est donc :

$$u'_i \simeq \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}$$

qui est un schéma aux différences finies décentré "aval".

On peut aussi construire un schéma d'ordre 1 décentré "amont" en écrivant :

$$u'_i \simeq \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$$

Schéma d'ordre supérieur pour l'approximation de u'_i

Les deux choix d'approximation d'ordre 1 pour u'_i ne sont pas uniques. On peut construire des schémas d'ordre supérieur en manipulant les DL au voisinage de x_i .

Ecrivons les DL de u_{i+1} et u_{i-1} au voisinage de x_i :

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x u'_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} u''_i + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \quad (A)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x u'_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} u''_i + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \quad (B)$$

En faisant (A)-(B), on obtient :

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2\Delta x u'_i + \mathcal{O}((\Delta x)^3)$$

c'est-à-dire :

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

Autrement dit, une approximation d'ordre 2 "centrée" de u'_i est :

$$u'_i \simeq \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$$

Remarque 1:

1. En général, pour obtenir des ordres encore supérieurs, il faut utiliser plusieurs nœuds voisins de x_i . Le nombre de nœuds nécessaires pour l'écriture du schéma numérique est appelé "stencil".
2. Afin de pouvoir conclure sur l'ordre d'un schéma, il est conseillé de pousser les développements limités suffisamment loin.
3. En théorie, la précision d'un schéma d'ordre supérieur est plus élevée. Mais attention, ceci n'est vrai que dans la limite $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$. D'ailleurs, parfois un schéma d'ordre 1, peut s'avérer être plus précis qu'un schéma d'ordre supérieur à $\Delta x, \Delta t$ finis.

Par exemple, nous avons l'inégalité :

$$x \leq 10x^2 \iff x \geq 0.1$$

C'est-à-dire que pour $x \geq 0.1$, la précision à l'ordre 1 est plus élevée.

Exercice 3 *Ecrire un schéma aux différences finies d'ordre 3 par l'approximation de la dérivée u'_i au nœud x_i (Indication : utiliser les valeurs de u aux nœuds x_i, x_{i-1}, x_{i+1} , et x_{i+2}).*

Réponse

$$u'_i = \frac{-u_{i+2} + 6u_{i+1} - 3u_i - 2u_{i-1}}{6\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^3)$$

on peut aussi utiliser les valeurs de u aux nœuds $x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$, et on obtient :

$$u'_i = \frac{-u_{i-2} + 6u_{i-1} - 3u_i - 2u_{i+1}}{-6\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^3)$$

Détail corrigé

On fait le DL de $u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i-1}$ au voisinage de x_i à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u(x_{i+1}) = u(x_i + \Delta x) \\ &= u_i + \Delta x u'_i + \frac{(\Delta x)^2}{2} u''_i + \frac{(\Delta x)^3}{3!} u_i^{(3)} + \mathcal{O}((\Delta x)^4) \\ u_{i+2} &= u(x_{i+2}) = u(x_i + 2\Delta x) \\ &= u_i + 2\Delta x u'_i + \frac{(2\Delta x)^2}{2} u''_i + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} u_i^{(3)} + \mathcal{O}((\Delta x)^4) \\ u_{i-1} &= u(x_{i-1}) = u(x_i - \Delta x) \\ &= u_i - \Delta x u'_i + \frac{(\Delta x)^2}{2} u''_i - \frac{(\Delta x)^3}{3!} u_i^{(3)} + \mathcal{O}((\Delta x)^4) \end{aligned}$$

On fait une combinaison linéaire de u_{i+1} , u_{i+2} et u_{i-1} :

$$\alpha u_{i+1} + \beta u_{i+2} + \gamma u_{i-1} = (\alpha + \beta + \gamma)u_i + \Delta x(\alpha + 2\beta - \gamma)u'_i + \frac{(\Delta x)^2}{2}(\alpha + 4\beta + \gamma)u''_i + \frac{(\Delta x)^3}{3!}(\alpha + 8\beta - \gamma)u_i^{(3)} + \mathcal{O}((\Delta x)^4) \quad (2.3)$$

Pour obtenir u'_i en fonction de u_i , u_{i-1} , u_{i+1} et u_{i+2} , on annule on les coefficients de u''_i et $u_i^{(3)}$. On impose alors que :

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 8\beta - \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma \neq 0 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha + 12\beta = 0 \Rightarrow \alpha = -6\beta$$

On a un système de 2 équations à 3 inconnues α , β et γ . On peu choiri par exemple $\beta = 1$, et on obtient $\alpha = -6\beta = -6$ et $\gamma = -\alpha - 4\beta = 2$.

L'égalité (2.3) s'écrit alors :

$$-6u_{i+1} + u_{i+2} + 2u_{i-1} = -3u_i - 6\Delta x u'_i + \mathcal{O}((\Delta x)^4)$$

Ce qui donne :

$$\left[u'_i = \frac{6u_{i+1} - u_{i+2} - 2u_{i-1} - 3u_i}{6 \Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \right]$$

→ Revenons maintenant à notre équation différentielle du 1^{er} ordre.

Nous avons vu que le problème discret s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_i \text{ pour } i = 2, \dots, N \text{ tel que :} \\ u'_i + u_i = x_i - 1 \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

Si on utilise le schéma aux différences finies décentré amont :

$$u'_i \simeq \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$$

alors le problème discret devient :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_i \text{ pour } i = 2, \dots, N \text{ tel que :} \\ \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + u_i = x_i - 1 \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} u_i = \frac{1}{1 + \Delta x} (u_{i-1} + \Delta x(x_i - 1)) & \text{pour } i = 2, \dots, N \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

Connaissant u_1 , on peut calculer facilement u_2 , puis à partir de u_2 on peut calculer u_3 et ainsi de suite. Ce schéma est itératif et est très simple à mettre en œuvre.

Exercice 4 Programmer cette méthode aux différences finies sous Python, puis comparer la solution numérique avec la solution exacte.

La solution exacte de l'équation différentielle étant :

$$u(x) = 3e^{-x} + x - 2$$

2.4 Différences finies pour un problème elliptique 1D

2.4.1 Modèle mathématique

On considère une barre métallique de longueur 1 m chauffée par une source de chaleur f et dont les deux extrémités sont plongées dans un milieu où la température est nulle (la glace par exemple).

On note par $u(x)$ la température en un point x .

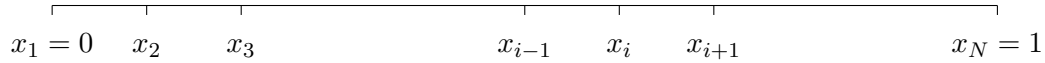
A l'état stationnaire, u est la solution de l'EDP suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{pour } x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 & \leftarrow \text{conditions aux limites du type } \underline{\text{Dirichlet}}. \end{cases} \quad (2.4)$$

f étant une fonction donnée supposée continue sur $[0, 1]$.

2.4.2 Approximation aux différences finies

Etape 1 : Maillage et problème discret



On subdivise le domaine de calcul $[0, 1]$ en N points x_i espacés de Δx .

On a :

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x = (i-1)\Delta x \quad \text{avec} \quad \Delta x = \frac{1}{N-1}$$

Le problème continue (2.4) est remplacé par le problème discret suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u(x_i) \text{ pour } i = 2, \dots, N-1 \text{ vérifiant} \\ -u''(x_i) = f(x_i) \\ u(x_1) = u(x_N) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Etape 2 : Schéma numérique

Donnons une approximation d'ordre 2 de $u''(x_i)$:

Ecrivons les DL de u_{i+1} et u_{i-1} au voisinage de x_i

$$u_{i+1} = u_i + \Delta x u'_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} u''_i + \frac{(\Delta x)^3}{3!} u^{(3)}_i + \mathcal{O}((\Delta x)^4) \quad (\text{A})$$

$$u_{i-1} = u_i - \Delta x u'_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} u''_i - \frac{(\Delta x)^3}{3!} u^{(3)}_i + \mathcal{O}((\Delta x)^4) \quad (\text{B})$$

$$(\text{A}) + (\text{B}) \implies u_{i-1} + u_{i+1} = 2u_i + (\Delta x)^2 u''_i + \mathcal{O}((\Delta x)^4)$$

soit :

$$u''_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

c'est-à-dire qu'une approximation à l'ordre 2 de u_i'' est :

$$u_i'' \simeq \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2}$$

Avec ce choix d'approximation de u_i'' , on peut approcher le problème (2.5) par le problème discret suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_2, u_3, \dots, u_{N-1} \in \mathbb{R} / \\ -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2} = f_i & \text{pour } i = 2, \dots, N-1 \\ u_1 = u_N = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Etape 3 : Passage au problème matriciel

Maintenant, il suffit d'écrire le problème discret (2.6) sous forme matricielle, l'inconnue étant le vecteur $U = (u_2, u_3, \dots, u_{N-1})$.

Mais avant, il faut tenir compte des conditions aux limites $u_1 = u_N = 0$.

En $i = 2$, on a :

$$-\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{(\Delta x)^2} = f_2$$

Puisque $u_1 = 0$ alors

$$\left[-\frac{1}{(\Delta x)^2}(-2u_2 + u_3) = f_2 \right]$$

En $i = N-1$, on a :

$$-\frac{1}{(\Delta x)^2}(u_{N-2} - 2u_{N-1} + u_N) = f_{N-1}$$

Or $u_N = 0$, alors

$$\left[-\frac{1}{(\Delta x)^2}(u_{N-2} - 2u_{N-1}) = f_{N-1} \right]$$

Et pour $3 \leq i \leq N-2$, on a :

$$\left[-\frac{1}{(\Delta x)^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) = f_i \right]$$

Le système linéaire s'écrit alors :

$$\begin{cases} -\frac{1}{(\Delta x)^2}(-2u_2 + u_3) = f_2 \\ -\frac{1}{(\Delta x)^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) = f_i & \text{pour } 3 \leq i \leq N-2 \\ -\frac{1}{(\Delta x)^2}(u_{N-2} - 2u_{N-1}) = f_{N-1} \end{cases}$$

Sous forme matricielle

$$-\frac{1}{(\Delta x)^2} \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice tridiagonale}} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

\Leftrightarrow

$$AU = b$$

Pour résoudre ce système linéaire on peut utiliser :

- une méthode directe : Elimination de Gauss ou Cholesky.
- une méthode itérative : Jacobi, Gauss-Seidel ou relaxation.
- On peut aussi utiliser, comme la matrice est tridiagonale, l'algorithme de Thomas basé sur la factorisation LU et qui est moins coûteux en nombre d'opérations (voir plus tard).

2.5 Différences finies pour un problème parabolique 1D (Equation de la chaleur)

2.5.1 Modèle mathématique

Considérons le problème de conduction de la chaleur dans une barre métallique de longueur 1 m, dont les extrémités sont soumises à des températures T_g et T_d . On suppose qu'à l'instant initial, la température le long de la barre vaut $f(x)$.

Notons par $u(x, t)$ la température au point x de la barre à l'instant t . u vérifie l'équation de la chaleur suivante avec conditions initiales (CI) et conditions aux limites (CL) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall x \in]0, 1[; \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \leftarrow \text{donnée } \forall x \in]0, 1[\\ u(0, t) = T_g ; u(1, t) = T_d & \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

D étant le coefficient de diffusion.

2.5.2 Approximation différences finies

Etape 1 : Maillage (Discretisation spatiale et temporelle)

$$\overbrace{\begin{array}{ccccccc} a = x_1 & x_2 & x_3 & & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & & x_N = b \end{array}}$$

- On discrétise l'intervalle $[0, 1]$ en N points (x_1, x_2, \dots, x_N) espacés de Δx .

$$\Delta x = \frac{1}{N-1}, \quad \text{et} \quad x_i = x_{i-1} + \Delta x = (i-1)\Delta x$$

- Le temps t est aussi discrétisé en des intervalles Δt ($t^0, t^1, \dots, t^n, \dots$)
avec $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ Δt étant le pas du temps.

On note par u_i^n la température au nœud x_i à l'instant $t^n = n\Delta t$.

Etape 2 : Différences finies (Approximation des dérivées)

Dérivée spatiale

Une approximation à l'ordre 2 centrée de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ au nœud x_i s'écrit :

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i \simeq \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2}$$

Donc le problème approché s'écrit au point x_i :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i &= D \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2} \\ \Leftrightarrow \left. \frac{du}{dt} \right|_i &= f(u) \end{aligned}$$

Dérivée temporelle :

Pour la discrétisation temporelle, il y a deux manières de procéder : soit utiliser un schéma explicite, soit un schéma implicite.

Tout d'abord, une approximation à l'ordre 1 en temps de $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i$ s'écrit :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i \simeq \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

Schéma d'Euler explicite

Dans ce cas, les termes de l'opérateur spatiale sont évalués à l'instant t^n . On a donc :

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i \simeq \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

Le problème discret s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - D \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0 & \text{pour } i = 2, \dots, N-1 \\ u_i^0 = f(x_i) & \text{pour } i = 2, \dots, N-1 \\ u_1^n = T_g ; u_N^n = T_d & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.8)$$

On obtient alors le schéma :

$$\left[u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n) \quad \forall i = 2, \dots, N-1 \right] \quad (2.9)$$

Comme on connaît u_i^0 (pour $i = 1, \dots, N$), alors on peut calculer u_i^1 à l'instant $t^1 = \Delta t$ par le procédé itératif (2.9), puis u_i^2 et ainsi de suite.

En fait le schéma est dit explicite car les u_i^{n+1} à l'instant $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$ se déduisent directement des u_i^n à l'instant $t^n = n\Delta t$ qui sont connues. Il n'y a aucun système à résoudre.

Remarque 1:

Le schéma (2.9) est très simple à mettre en oeuvre, cependant on montrera par la suite que pour être stable, il nécessite une restriction sur le pas du temps Δt . Ce dernier doit être choisi de telle sorte que la condition suivante soit vérifiée :

$$\Delta t \frac{2D}{(\Delta x)^2} \leq 1$$

Schéma d'Euler implicite

Dans ce cas, l'opérateur spatial est évalué à l'instant t^{n+1} . Et on a :

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i \simeq \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

Le problème discret s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - D \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = 0 & \text{pour } i = 2, \dots, N-1 \\ u_i^0 = f(x_i) & \text{pour } i = 2, \dots, N-1 \\ u_1^n = T_g ; u_N^n = T_d & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.10)$$

Soit

$$[-\lambda u_{i-1}^{n+1} + (1+2\lambda)u_i^{n+1} - \lambda u_{i+1}^{n+1}] = u_i^n \quad \text{pour } i = 2, \dots, N-1 \quad (2.11)$$

avec $\lambda = \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

Le schéma aux différences finies implicite (2.11) peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ u_4^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2}^{n+1} \\ u_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2^n + \lambda T_g \\ u_3^n \\ u_4^n \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2}^n \\ u_{N-1}^n + \lambda T_d \end{bmatrix}$$

On voit donc qu'à chaque instant, c'est-à-dire qu'à chaque passage de t^n à t^{n+1} , ce schéma nécessite la résolution d'un système linéaire dont la matrice est tridiagonale.

Néanmoins, ce schéma possède l'avantage d'être inconditionnellement stable c'est-à-dire stable quelque soit le choix du pas du temps Δt (comme on le verra par la suite). L'un des avantages des schémas implicites est qu'ils se permettent l'utilisation de grands pas de temps et donc sont bien adaptés pour la simulation des problèmes longs en temps physique.

Remarque 2:

Pour la résolution du système linéaire avec matrice tridiagonale, on peut utiliser l'algorithme de Thomas, qui effectue la factorisation LU de Gauss et qui nécessite un coût de calcul de $8N - 7$ opérations ($3(N - 1)$ opérations pour la factorisation et $5N - 4$ opérations pour la substitution).

Algorithme de Thomas

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & & & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

On décompose : $A = LU$ avec :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2 & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_n & 1 \end{bmatrix} ; \quad U = \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

On aura alors :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 \\ \beta_2 \alpha_1 &= b_2 \implies \beta_2 = \frac{b_2}{\alpha_1} = \frac{b_2}{a_1} \\ \beta_2 c_1 + \alpha_2 &= a_2 \implies \alpha_2 = a_2 - \beta_2 c_1 = a_2 - \frac{b_2}{a_1} c_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

2.6 Consistance, stabilité et convergence des schémas aux différences finies

2.6.1 Erreur de troncature

Définition 2.6.1 On appelle erreur de troncature d'un schéma numérique la quantité, notée ET , obtenue par la différence entre l'équation exacte et l'équation approchée par le schéma numérique.

Autrement dit, si l'équation s'écrit :

$$L(u) = 0$$

où L est un opérateur différentiel, et l'équation approchée s'écrit :

$$L_h(u) = 0$$

alors

$$ET = L(u) - L_h(u)$$

Exemple 2.6.1 Dans le cas de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \iff L(u) = 0 \quad (2.12)$$

avec le schéma numérique :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - D \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0 \iff L_h(u) = 0 \quad (2.13)$$

l'erreur de troncature s'écrit :

$$ET = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \left(\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - D \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \right) = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

On voit que l'erreur de troncature en temps est en $\mathcal{O}(\Delta t)$ et celle en espace est en $\mathcal{O}((\Delta x)^2)$. Nous avons donc un schéma d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

2.6.2 Consistance

En fait, pour une même équation différentielle ou aux dérivées partielles, il existe une multitude de schémas numériques permettant de résoudre cette équation. Il faut donc assurer que le schéma représente bien l'équation exacte dans la limite où le pas d'espace Δx et la pas de temps Δt tendent vers zero, et partout dans le domaine considéré. On parle de consistance du schéma.

Définition 2.6.2 Un schéma aux différences finies est dit consistant si et seulement si :

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} ET = 0$$

Exemple 2.6.2 Le schéma (2.13) pour l'équation de la chaleur (2.12) est consistant. En effet :

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} ET = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

or

$$|\mathcal{O}(\Delta t)| \leq \lambda_1 |\Delta t| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0 \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta t) = 0$$

et

$$|\mathcal{O}((\Delta x)^2)| \leq \lambda_2 |(\Delta x)^2| \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0 \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{O}((\Delta x)^2) = 0$$

2.6.3 Stabilité d'un schéma numérique

Définition 2.6.3 *Un schéma numérique est dit stable si la solution numérique calculée par ce schéma reste bornée dans le temps et dans l'espace.*

Autrement dit, les erreurs produites par le schéma (Erreur de troncature, erreurs d'arrondi, ...) ne doivent pas croître lors de la procédure numérique.

La stabilité du schéma numérique est parfois attachée aux valeurs du pas du temps Δt et du pas d'espace Δx .

En fait, trois cas sont possibles pour un schéma numérique :

- Il peut être inconditionnellement stable, c'est-à-dire stable quelque soit le choix de Δt et Δx (généralement c'est le cas des schémas implicites).
- Conditionnellement stable (cas de schémas explicites).
- Il peut être instable.

2.6.4 Convergence

Définition 2.6.4 *Un schéma numérique sera dit convergent pour une norme donnée (notée $\|\cdot\|$), si pour toute solution initiale u^0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \|u_h^n - u_{ex}^n\| = 0$$

où u_{ex}^n est la solution exacte au temps t^n et u_h^n la solution numérique.

2.6.5 Théorème de Lax

En général, il n'est pas facile de montrer la convergence d'une méthode numérique en calculant $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \|u_h^n - u_{ex}^n\|$ du fait qu'on ne connaît pas toujours u_{ex}^n . La consistance et la stabilité d'un schéma sont en général beaucoup plus facile à étudier que sa convergence.

On utilise le théorème de Lax (Richtmyer et Norton 1967) suivant :

Théorème de Lax

Pour un problème linéaire aux valeurs initiales, la solution numérique d'un schéma itératif en temps aux différences finies converge vers la solution exacte si le schéma est consistant et stable.

2.6.6 Stabilité au sens de Fourier - Von Neumann

Définition 2.6.5 *Un schéma numérique est dit L^2 -stable si pour tout temps $T > 0$, il existe une constante $C(T)$ indépendante de Δx et Δt telle que :*

Pour toute donnée initiale $u^0 \in L^2$; et $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n\Delta t \leq T$, on a :

$$\|u_h^n\|_{L^2} \leq C(T) \|u^0\|_{L^2}$$

où u_h^n est la solution approchée à l'instant $t^n = n\Delta t$.

→ Pour l'étude de la stabilité au sens L^2 , on utilise la méthode de Fourier - Von Neumann.

La méthode consiste à chercher des solutions de l'EDP sous la forme :

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j} \quad \text{avec} \quad x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde.}$$

puis injecter cette solution dans le schéma numérique, et étudier le comportement de la suite de fonction $(C^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On obtient une relation de récurrence sur les C^n . Et on a :

si la suite de fonctions $(C^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour la norme L^2 alors le schéma numérique est stable, sinon il est instable.

Exemple 2.6.3 *Considérons l'équation de la chaleur :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

et soit le schéma aux différences finies explicite suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - D \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

qui peut s'écrire aussi :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \lambda(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\Delta t D}{(\Delta x)^2}$$

Étudions la stabilité au sons de Fourier - Von Neumann :

on pose :

$$u_j^n = C^n e^{i\xi j \Delta x}$$

on injecte cette solution dans le schéma, on aura :

$$C^{n+1} e^{i\xi j \Delta x} = C^n e^{i\xi j \Delta x} + \lambda(C^n e^{i\xi(j-1)\Delta x} - 2C^n e^{i\xi j \Delta x} + C^n e^{i\xi(j+1)\Delta x})$$

$$\begin{aligned} C^{n+1} &= [1 - 2\lambda + \lambda(e^{-i\xi \Delta x} + e^{i\xi \Delta x})] C^n \\ &= [1 - 2\lambda + 2\lambda \cos(\xi \Delta x)] C^n \\ &= [1 - 2\lambda(1 - \cos(\xi \Delta x))] C^n \quad \text{or } 1 - \cos(2x) = 2\sin^2(x) \\ C^{n+1} &= [1 - 4\lambda \sin^2(\frac{\xi \Delta x}{2})] C^n \end{aligned}$$

posons :

$$A = 1 - 4\lambda \sin^2(\frac{\xi \Delta x}{2}) \quad A \text{ est appelé } \underline{\text{facteur d'amplification}}.$$

on a alors :

$$C^{n+1} = AC^n$$

c'est-à-dire :

$$C^n = AC^{n-1} = A^2 C^{n-2} = \dots = A^n C^0$$

En démarrant par une condition initiale $u_j^0 = C^0 e^{i\xi j \Delta x}$ bornée

c'est-à-dire telle que $|C^0| \leq M$, pour que la solution u_j^n à l'instant $t^n = n\Delta t$ soit bornée $\forall n \in \mathbb{N}$, il faut que $|A| \leq 1$; $\forall \xi \in \mathbb{R}$

c'est-à-dire :

$$-1 \leq 1 - 4\lambda \sin^2\left(\frac{\xi \Delta x}{2}\right) \leq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

or on a toujours

$$1 - 4\lambda \sin^2\left(\frac{\xi \Delta x}{2}\right) \leq 1 \quad \text{car} \quad 4\lambda \sin^2\left(\frac{\xi \Delta x}{2}\right) \geq 0$$

Il reste :

$$\begin{aligned} & -1 \leq 1 - 4\lambda \sin^2\left(\frac{\xi \Delta x}{2}\right) \\ \Leftrightarrow & -2 \leq -4\lambda \sin^2\left(\frac{\xi \Delta x}{2}\right) \\ \Leftrightarrow & 2\lambda \sin^2\left(\frac{\xi \Delta x}{2}\right) \leq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \sup_{\xi \in \mathbb{R}} (2\lambda \sin^2\left(\frac{\xi \Delta x}{2}\right)) \leq 1 \\ \Leftrightarrow & 2\lambda \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2\Delta t D}{(\Delta x)^2} \leq 1 \end{aligned}$$

Le schéma proposé est donc stable si :

$$\boxed{\frac{\Delta t D}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}}$$

Exemple 2.6.4 *Considérons cette fois-ci un schéma implicite pour l'équation de la chaleur :*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - D \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = 0$$

Regardons ce qu'il en est par la stabilité L^2 .

Le schéma s'écrit :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \lambda(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\Delta t D}{(\Delta x)^2}$$

on prend :

$$u_j^n = C^n e^{i\xi j \Delta x}$$

Le schéma s'écrit :

$$C^{n+1} e^{i\xi j \Delta x} = C^n e^{i\xi j \Delta x} + \lambda(C^{n+1} e^{i\xi(j-1)\Delta x} - 2C^{n+1} e^{i\xi j \Delta x} + C^{n+1} e^{i\xi(j+1)\Delta x})$$

$$(1 + 2\lambda) C^{n+1} - \lambda(e^{-i\xi \Delta x} + e^{i\xi \Delta x}) C^{n+1} = C^n$$

$$C^{n+1} = \frac{1}{(1 + 2\lambda) - \lambda(e^{-i\xi \Delta x} + e^{i\xi \Delta x})} C^n$$

$$\begin{aligned} C^{n+1} &= \frac{1}{1 + 4\lambda \sin^2\left(\frac{\xi \Delta x}{2}\right)} C^n \\ &= A C^n \end{aligned}$$

or

$$\forall \xi \in \mathbb{R} ; |A| = \left| \frac{1}{1 + 4\lambda \sin^2(\frac{\xi \Delta x}{2})} \right| \leq 1$$

Il s'en suit que le schéma implicite est stable dans $L^2(\mathbb{R})$.

On dit qu'il est inconditionnellement stable (c'est-à-dire quelques soient les paramètres Δt et Δx).

Exemple 2.6.5 On considère l'équation de transport avec la CI suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \forall x \in \mathbb{R} ; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On suppose que la vitesse $c > 0$.

Étudions la stabilité L^2 du schéma décentré amont suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

qui s'écrit aussi :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(u_j^n - u_{j-1}^n) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

on prend :

$$u_j^n = C^n e^{i\xi j \Delta x}$$

Injectons dans le schéma :

$$\begin{aligned} C^{n+1} e^{i\xi j \Delta x} &= C^n e^{i\xi j \Delta x} - \lambda(C^n e^{i\xi j \Delta x} - C^n e^{i\xi(j-1)\Delta x}) \\ C^{n+1} &= \underbrace{(1 - \lambda + \lambda e^{-i\xi \Delta x})}_A C^n \end{aligned}$$

On doit avoir :

$$|A| \leq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} |A|^2 &= |1 - \lambda + \lambda \cos(\xi \Delta x) - i\lambda \sin(\xi \Delta x)|^2 \\ &= (1 - \lambda + \lambda \cos(\xi \Delta x))^2 + (\lambda \sin(\xi \Delta x))^2 \\ &= 1 - 2\lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda \cos(\xi \Delta x) - 2\lambda^2 \cos(\xi \Delta x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A|^2 \leq 1 &\Leftrightarrow 1 + 2\lambda^2(1 - \cos(\xi \Delta x)) - 2\lambda(1 - \cos(\xi \Delta x)) \leq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow 2\lambda(1 - \cos(\xi \Delta x))(\lambda - 1) \leq 0 \end{aligned}$$

or

$$\forall \xi \in \mathbb{R} ; \quad 2\lambda(1 - \cos(\xi \Delta x)) \geq 0 \quad \text{car} \quad \lambda > 0$$

On doit donc avoir :

$$\lambda - 1 \leq 0$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1}$$

Exercice 5 On reprend l'équation d'advection précédente (avec $c > 0$).

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \forall x \in \mathbb{R} ; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Étudier l'ordre, la consistance et la stabilité de Fourier - Von Neumann des schémas suivants :

Schéma 1 (décentré aval) :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0$$

Schéma 2 (centré) :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Schéma 3 (Leap-frog ou saute-mouton) :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Schéma 1 (décentré aval)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0$$

Ordre du schéma et consistance

- $u_j^{n+1} = u(x_j, t^n + \Delta t) = u_j^n + \Delta t \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n + \mathcal{O}((\Delta t)^2)$
 $\implies \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)$
- $u_{j+1}^n = u(x_j + \Delta x, t^n) = u_j^n + \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$
 $\implies \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$

On déduit l'erreur de troncature :

$$ET = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Le schéma (1) est donc d'ordre 1 en temps et en espace.

Il est consistant. En effet,

$$|\mathcal{O}(\Delta t)| \leq \lambda_1 |\Delta t| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad |\mathcal{O}(\Delta x)| \leq \lambda_2 |\Delta x| \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} ET = 0$$

Stabilité

Le schéma (1) s'écrit :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(u_{j+1}^n - u_j^n) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

on pose

$$u_j^n = C^n e^{i\xi j \Delta x}$$

on injecte cette solution dans le schéma :

$$C^{n+1} e^{i\xi j \Delta x} = C^n e^{i\xi j \Delta x} - \lambda(C^n e^{i\xi(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\xi j \Delta x})$$

$$C^{n+1} = \underbrace{[1 + \lambda - \lambda e^{i\xi \Delta x}]}_A C^n$$

Le schéma (1) est stable si et seulement si

$$|A| \leq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} |A|^2 \leq 1 &\Leftrightarrow |(1 + \lambda) - \lambda(\cos(\xi \Delta x) + i \sin(\xi \Delta x))|^2 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow ((1 + \lambda) - \lambda \cos(\xi \Delta x))^2 + (\lambda \sin(\xi \Delta x))^2 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow (1 + \lambda)^2 - 2\lambda(1 + \lambda) \cos(\xi \Delta x) + \lambda^2 \cos^2(\xi \Delta x) + \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 1 + 2\lambda + \lambda^2 - 2\lambda(1 + \lambda) \cos(\xi \Delta x) + \lambda^2 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 2\lambda(1 + \lambda)(1 - \cos(\xi \Delta x))_{\forall \xi \in \mathbb{R}} \leq 0 \end{aligned}$$

Impossible car $\lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \geq 0$ et $1 - \cos(\xi \Delta x) \geq 0$

Le schéma (1) est donc instable.

Schéma 2 (centré)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Ordre et consistance

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)$$

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \quad (2.14)$$

$$u_{j-1}^n = u_j^n - \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \quad (2.15)$$

$$(2.14)-(2.15) \Rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

$$\begin{aligned} ET &= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \\ |ET| &\leq |\mathcal{O}(\Delta t)| + |\mathcal{O}(\Delta x)^2| \leq \lambda_1 \Delta t + \lambda_2 (\Delta x)^2 \xrightarrow{\Delta t/\Delta x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Le schéma (2) est donc consistant, d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

Stabilité

Le schéma s'écrit :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{c\Delta t}{2\Delta x}$$

On pose :

$$u_j^n = C^n e^{i\xi j \Delta x}$$

On l'injecte dans le schéma

$$C^{n+1} e^{i\xi j \Delta x} = \left[e^{i\xi j \Delta x} - \lambda(e^{i\xi(j+1)\Delta x} - e^{i\xi(j-1)\Delta x}) \right] C^n$$

$$C^{n+1} = \left[1 - \lambda(e^{i\xi \Delta x} - e^{-i\xi \Delta x}) \right] C^n$$

$$\boxed{C^{n+1} = \underbrace{[1 - 2i \sin(\xi \Delta x)]}_A C^n}$$

Or

$$\begin{aligned} |A|^2 &= |1 - 2i\lambda \sin(\xi \Delta x)|^2 \\ &= 1 + 4\lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) \geq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc le schéma (2) est instable.

Schéma 3 (Leap-frog)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n + \mathcal{O}((\Delta t)^3) \quad (2.16)$$

$$u_j^{n-1} = u_j^n - \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n + \mathcal{O}((\Delta t)^3) \quad (2.17)$$

$$(2.16)-(2.17) \implies \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{O}((\Delta t)^2)$$

De même on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

$$ET = \mathcal{O}((\Delta t)^2) + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

\implies Schéma consistant d'ordre 2 en temps et en espace.

Stabilité

Le schéma s'écrit :

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \lambda(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

On pose :

$$u_j^n = C^n e^{i\xi j \Delta x}$$

on l'injecte dans le schéma

$$C^{n+1} e^{i\xi j \Delta x} = C^{n-1} e^{i\xi j \Delta x} - \lambda(C^n e^{i\xi(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\xi(j-1)\Delta x})$$

$$C^{n+1} = C^{n-1} - 2i\lambda \sin(\xi \Delta x) C^n$$

$$\boxed{C^{n+1} + 2i\lambda \sin(\xi \Delta x) C^n - C^{n-1} = 0}$$

L'équation caractéristique de cette suite récurrente est :

$$r^2 + 2i\lambda \sin(\xi \Delta x) r - 1 = 0 \quad (2.18)$$

Le terme général de la suite $(C^n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'écrit alors :

$$C^n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique (2.18)

$$\begin{cases} r_1 = -i\lambda \sin(\xi \Delta x) - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x)} \\ r_2 = -i\lambda \sin(\xi \Delta x) + \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x)} \end{cases}$$

Pour avoir la stabilité c'est-à-dire la suite (C^n) bornée $\forall n \in \mathbb{N}$, il faut et il suffit que les racines de l'équation caractéristique (2.18) soient toutes les deux de module inférieur ou égale à 1.

Si $\lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) \leq 1$ alors

$$1 - \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) \geq 0$$

Donc :

$$|r_1|^2 = |r_2|^2 = (-\lambda \sin(\xi \Delta x))^2 + (1 - \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x)) = 1$$

Le schéma est donc stable.

Si $\lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) > 1$ alors

$$r_1 = -i\lambda \sin(\xi \Delta x) - i\sqrt{\lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) - 1}$$

$$r_2 = -i\lambda \sin(\xi \Delta x) + i\sqrt{\lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) - 1}$$

Dans ce cas, les deux racines sont imaginaires pures. De plus, leur produit $r_1 \cdot r_2 = -1$. Donc l'une des deux racines a un module > 1 .

Le schéma est donc instable.

La stabilité est donc vérifiée si et seulement si $\forall \xi \in \mathbb{R}$

$$\lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \sup_{\xi \in \mathbb{R}} (\lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x)) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1}$$