Fiche TD $N^o\,2$
Classification des EDP - Méthode des caractéristiques

Exercice 1. Pour chacune des équations aux dérivées partielles suivantes, donner son ordre et dire si elle est linéaire ou non linéaire, homogène ou non homogène :

(a) $x\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + xy\,u = 2.$

(b) $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + rx\dfrac{\partial u}{\partial x} - ru = 0.$

(c) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0.$

Exercice 2. Pour chacune des EDP suivantes, déterminer les régions du plan où l'EDP est hyperbolique, parabolique et elliptique.

(a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a\,\dfrac{\partial u}{\partial t} - c^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu = 0 \qquad (a,\,b,\,c \neq 0)$

(b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2(x-y)\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = \cos(u)$

(c) $2e\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + e^{x^2}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + e^{y^2}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy\dfrac{\partial u}{\partial x} - y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = u^2$

Exercice 3. On considère l'équation des ondes, avec conditions initiales, suivante :

$$(E) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0,x) = f(x) \quad ; \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x) \end{cases}$$

a) Montrer que cette équation peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire d'EDP de la forme

$$(S) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + \mathbf{A}\,\frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

b) Diagonaliser la matrice $\mathbf{A}$ puis montrer que le système (S) se ramène à la résolution de deux EDP scalaires.

c) Donner alors l'expression de la solution $u(t,x)$ de l'EDP (E).

Exercice 4. En utilisant la méthode des caractéristiques, calculer les solutions des EDP suivantes (représenter aussi l'allure des caractéristiques) :

(a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

(b) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

(c) $x\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0.$

Exercice 5. On considère l'EDP, avec conditions initiales et aux limites, suivante :

$$(E) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -u(x,t) + \sin t & 0 < x \le L\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & 0 \le x \le L \\ u(0,t) = f(t) & t > 0 \end{cases}$$

où $u_0 \in \mathcal{C}^0([0,L],\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$.

1) Déterminer les caractéristiques de l'EDP (E), puis représenter les.

2) Donner une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la solution u le long des courbes caractéristiques.

3) Déterminer la solution $u(x,t)$ de l'EDP (E) pour tout $(x,t) \in [0,L] \times [0,+\infty[$.
(On pourra distinguer les cas où $x > c\,t$ et ceux où $x < c\,t$).

Exercice 6. On considère le problème aux limites suivant :

$$(E) \qquad \begin{cases} y\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2 & \text{pour } x \in \mathbb{R}\,, \quad y \in \mathbb{R}^* \\ \\ u(x,0) = f(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1) Déterminer un paramétrage $\Gamma(s) = (x(s), y(s))$ de chacune des caractéristiques de l'équation (E), puis représenter ces courbes caractéristiques.

2) Donner une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la solution u le long des courbes caractéristiques.

3) Etant donnée une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, déterminer les solutions de l'EDP (E) de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.