Méthodes de résolution des systèmes linéaires

Imad Elmahi

Master 1 QFM - UM6P, Ben Guérir, 2023

Motivations

L'utilisation des méthodes numériques pour la résolution d'un grand nombre de problèmes issus de la mécanique, du génie civil, hydraulique, etc, se ramène à la résolution de systèmes linéaires de grandes tailles.

En hydraulique : les inconnues sont la hauteur d'eau et le champ de vitesse en chaque point du domaine du calcul

$\longrightarrow$ Equations de Saint-Venant.

En génie civil : Contraintes ou les charges exercées sur la structure à évaluer en chaque point de la structure.

$\longrightarrow$ Equations d'équilibre.

Les deux grandes classes de méthodes de résolution de systèmes linéaires :

- Les méthodes directes : Méthode d'élimination de Gauss, factorisation LU, méthode de Cholesky.
- Les méthodes itératives : La méthode de Jacobi, La méthode de Gauss-Seidel (avec ou sans relaxation).

Rappels sur les matrices

Définition

Une matrice à n lignes et p colonnes a la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

le couple (n, p) est dit dimension ou ordre de la matrice A.

- *si $n = p$, la matrice A est dite matrice carrée.*
- *si $p = 1$, la matrice A peut être identifiée à un vecteur colonne.*
- *si $n = 1$, la matrice A peut être identifiée à un vecteur ligne.*

On note par $\mathcal{M}_{n,p}$ l'ensemble des matrices de dimension (n, p).

On peut aussi noter la matrice A par : $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$

Somme

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$ *et* $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$.

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -1 & 11 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}$$

Multiplication par un scalaire

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$.

Alors :

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$$

Exemple

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4/3 \\ 2/3 & 5 \end{pmatrix}$$

Multiplication des matrices

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$ *et* $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,m}$.

$$C = A \times B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}$$

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$ *(Multiplier chaque ligne* i *de* A *par chaque colonne* j *de* B *en faisant la somme)*

Exemple

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{2,3}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{3,2}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 25 & 11 \\ 19 & 17 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{2,2}}$$

Remarque

Le produit de matrices n'est pas commutatif c'est-à-dire qu'on n'a pas toujours $A \times B = B \times A$.

Opérations sur les matrices

Transposée d'une matrice

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$.

On définit la transposée de A comme étant la matrice $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}$ *telle que :* $b_{ij} = a_{ji}$.

En fait la matrice transposée B est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

On écrit : $B = A^t$ *ou* $B = A'$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3} \longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrices particulières

Matrice nulle

C'est la matrice Θ *dont tous les éléments* a_{ij} *valent 0.*

c'est-à-dire :

$$a_{ij} = 0 \qquad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n$$
$$1 \leqslant j \leqslant p$$

Exemple

- *La matrice nulle d'ordre* $(2,3)$ *est :* $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- *La matrice nulle carrée d'ordre 3 est :* $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ *On a :* $\forall$ *A in* $\mathcal{M}_{n,p}$ *;*

$$A + \Theta = \Theta + A = A$$

Matrices particulières

Matrice identité

On appelle matrice identité d'ordre n, la matrice carrée I_n tel que :

$$I_n = (a_{ij}) \quad avec \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

La matrice identité d'ordre 3 est : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ *On a :* $\forall\ A \in \mathcal{M}_{n,n}$;

$$A \times I = I \times A = A$$

Matrice diagonale

C'est une matrice carrée définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \textit{c'est-à-dire :} \quad a_{ij} = 0 \quad \textit{si} \quad i \neq j$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrices particulières

Matrice triangulaire supérieure

C'est une matrice carrée A de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad c'est\ à\ dire : \quad a_{ij} = 0 \quad pour \quad i > j$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure

C'est une matrice carrée A de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{c'est-à-dire :} \quad a_{ij} = 0 \quad \text{pour} \quad i < j$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Matrices particulières

Matrice tridiagonale

C'est une matrice carrée A de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrice symétrique

Une matrice carrée A est dite symétrique si $A^t = A$

c'est-à-dire tel que :

$$\forall\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\,; \quad a_{ij} = a_{ji}$$

.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -7 \\ 2 & 1 & 3 \\ -7 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \textit{on a} \quad A^t = A \ \ \textit{c'est-à-dire } A \textit{ est symétrique.}$$

Matrice inversible

Une matrice carrée A est dite inversible s'il existe une matrice carrée B tel que :

$$A \times B = B \times A = I_n$$

Cette matrice inverse B est alors notée A^{-1}.

On a donc :

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$$

Déterminant d'une matrice

Déterminant d'une matrice d'ordre 2

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

On définit le déterminant de A par :

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{12}$$

Exemple

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \\ det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - (-3) \times 5 = 8 + 15 = 23 \end{aligned}$$

Déterminant d'une matrice d'ordre supérieur à 2

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}$ *avec* $n \geqslant 2$.

Notons par M_{ij} *la matrice de* $\mathcal{M}_{n-1,n-1}$ *obtenue à partir de* A *en enlevant la ligne* i *et la colonne* j *(matrice cofacteur de* A*).*
On définit alors le déterminant de A *par :*

$$\begin{aligned} det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \, a_{1j} \, det(M_{1j}) \\ &= a_{11} \, det(M_{11}) - a_{12} \, det(M_{12}) + a_{13} \, det(M_{13}) \\ &+ \cdots + (-1)^{1+n} \, a_{1n} \, det(M_{1n}) \end{aligned}$$

Remarque

Dans la définition, nous avons calculé le déterminant $det(A)$ *en développant selon la première ligne. On peut aussi calculer le* $det(A)$ *en développant sur n'importe quelle ligne ou colonne.*

Déterminant d'une matrice

Exemple

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
det(A) &= (-1)^{1+1} \times 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 5 \times \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\
&+ (-1)^{1+3} \times 6 \times \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2 \times (-4) + (-1) \times 5 \times (-5) + 6 \times (-11) = -49
\end{aligned}
$$

Exercice

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes :

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad ou \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}
$$

Déterminant d'une matrice

Proposition

- *Si* $A = \Theta_n$ *matrice nulle alors* $det(A) = 0$.
- *Si* $A = I_n$ *matrice identité alors* $det(A) = 1$.
- *Si* $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ *matrice diagonale alors*

  $det(A) = a_{11} \times a_{22} \times \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
- *Si* A *est une matrice triangulaire supérieure ou inférieure alors*

  $det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
- *Si* A *et* B *sont deux matrice* <u>*carrées*</u> *alors :*

$$det(A \times B) = det(A) \times det(B) = det(B \times A)$$

- A *est inversible si et seulement si* $det(A) \neq 0$ *et on a :* $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$.
- $det(A^t) = det(A)$.

Forme d'un système linéaire

Un système linéaire de n équations à n inconnues s'écrit sous la forme :

$$(L)\left\{\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nn}\,x_n = b_n \end{array}\right.$$

Les coefficients a_{ij} (pour $1 \leqslant i,j \leqslant n$) et le second membre b_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) sont données.
Les inconnues à chercher sont $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Le système linéaire (L) peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Méthode des déterminants (de Cramer) de résolution de systèmes linéaires

Proposition

Si $det(A) \neq 0$ *alors le système linéaire* $(L)\ :\ Ax = b$ *admet une solution unique*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ *donnée par :*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad pour\ \ j = 1, \cdots, n$$

où $\Delta = det(A)$

$$et \quad \Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Exemple

Résoudre le système linéaire :

$$(L)\begin{cases} 2x_1+ & 5x_2 & +3x_3 = & -1 \\ x_1+ & 4x_2 & +2x_3 = & -3 \\ 7x_1+ & x_2 & -2x_3 = & -4 \end{cases}$$

Réponse :

Ce système s'écrit sous la forme matricielle :

$$A\,x \;=\; b$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$det(A) = -21 \neq 0$ donc A est inversible.

Méthode des déterminants (de Cramer) de résolution de systèmes linéaires

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -21 \implies x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-21}{-21} = 1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 7 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 63 \implies x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{63}{-21} = -3$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 7 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -84 \implies x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-84}{-21} = 4$$

Complexité de la méthode Cramer

Nombre d'opérations de la méthode de Cramer :

Le calcul de chaque déterminant d'ordre n nécessite :

$$n! - 1 \text{ additions}$$
$$\text{et } n!(n-1) \text{ multiplications}$$

$\longrightarrow n! - 1 + n!(n-1) = nn! - 1$ opérations.

La méthode de Cramer nécessite donc :

- $nn! - 1$ opérations pour calculer un déterminant.
- Il y a $(n+1)$ déterminants à calculer (Δ et les Δ_j pour $j = 1, \cdots, n$).
- n divisions $(\dfrac{\Delta_j}{\Delta})$.

<u>Au total</u> : $(n+1).(nn! - 1) + n \; = \; n \cdot (n+1)! - 1.$

Quand n est assez grand, la complexité de l'algorithme de Cramer est de l'ordre de $n.(n+1)!$.

Complexité de la méthode Cramer

Si on considère donc une matrice A d'ordre $n = 100$, la complexité est de l'ordre de $100 \times 101!$.

Formule de Stirling :

$$n! \underset{n \to \infty}{\sim} n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

$$\Longrightarrow \quad 100 \times 101! = 100 \times 101 \times 100! \simeq 100 \times 101 \times 100^{100} \mathrm{e}^{-100} \sqrt{2\pi \cdot 100} \simeq 9 \cdot 10^{161}$$

Ordinateur avec processeur de 1GHz : effectue 10^9 opérations par seconde.

Le nombre d'opérations effectué par cet ordinateur en 1 année est :

$$10^9 \times 3600 \times 24 \times 365 \simeq 3 \cdot 10^{16} \text{ opérations}$$

$$\frac{100 \cdot 101!}{3 \cdot 10^{16}} \simeq \frac{9 \times 10^{161}}{3 \times 10^{16}} \simeq 3 \cdot 10^{145} \text{ année}$$

Il faudra donc $3 \cdot 10^{145}$ année pour résoudre ce système par la méthode de Cramer ! ! !

Idée des méthodes directes :

Ramener le système linéaire de départ à la résolution d'un ou deux systèmes linéaires triangulaires.

Résolution de systèmes triangulaires :

Supposons que A soit une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire que le système s'écrit :

$$(L) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\iff \quad (L) \quad \begin{cases} a_{11}\, x_1 & + & a_{12}\, x_2 + & \cdots + a_{1n}\, x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}\, x_2 + & \cdots + a_{2n}\, x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & \\ & & & a_{nn}\, x_n & = & b_n \end{cases}$$

Résolution de systèmes triangulaires

Hypothèse :

On suppose bien sûr que la matrice A est inversible et donc tous les a_{ii} sont non nuls.

Méthode de résolution (par remontée)

- *La dernière équation* $\Longrightarrow \quad x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$
- *L'avant dernière équation s'écrit :*

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \Longrightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

- *Ainsi de suite, on procède par remontée pour calculer* $x_{n-2}, x_{n-3}, \cdots x_1$.

  En fait sur la ligne i *, l'équation s'écrit :*

$$a_{ii}x_i + a_{ii+1}x_{i+1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i \quad \Longleftrightarrow \quad x_i = \frac{b_i - (a_{ii+1}x_{i+1} + \cdots + a_{in}x_n)}{a_{ii}}$$

Exemple

$$(L)\begin{cases} 2\,x_1 + \;\; 4\,x_2 - 3\,x_3 = -12 & (L_1) \\ \qquad\quad 5\,x_2 - \;\; x_3 = 4 & (L_2) \\ \qquad\qquad\quad 3\,x_3 = 18 & (L_3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(L_3) \quad &\Leftrightarrow \quad x_3 = \frac{18}{3} = 6 \\
(L_2) \quad &\Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{4 + x_3}{3} = \frac{4+6}{5} = 2 \\
(L_1) \quad &\Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{-12 - 4x_2 + 3x_3}{2} = \frac{-12 - 4 \times 2 + 3 \times 6}{2} = -1
\end{aligned}$$

La solution du système (L) est donc : $\boxed{x_1 = -1 \;\; ; \;\; x_2 = 2 \;\; ; \;\; x_3 = 6}$

Exercice

Implémenter l'algorithme de remonté de résolution d'un système triangulaire de n équations.

→ Entrée : Matrice A, vecteur second membre b.
→ Sortie : vecteur x solution du système $Ax = b$.

Pour calculer un x_i quelconque, on utilise la i$^{\text{ème}}$équation :

$$a_{ii}x_i + a_{ii+1}x_{i+1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i \quad \Longleftrightarrow \quad x_i = \frac{b_i - (a_{ii+1}x_{i+1} + \cdots + a_{in}x_n)}{a_{ii}}$$

Algorithme :

$x(n) = b(n)/a(n,n)$;
Pour $i = n-1$ à 1 faire
    $S = 0$;
    Pour $j = i+1$ à n faire
        $S = S + a(i,j) * x(j)$
    FinPour
    $x(i) = (b(i) - S)/a(i,i)$
FinPour

Complexité :

Le calcul de x_i nécessite :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ n-i \text{ additions} \\ \bullet\ n-i \text{ multiplications} \\ \bullet\ 1 \text{ division} \end{array}\right\} \Longrightarrow 2(n-i)+1 \ \text{ opérations}$$

Au total, le nombre d'opérations est :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} 2(n-i)+1 &= 2\sum_{i=1}^{n} n - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= 2n^2 - 2\frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= \boxed{n^2} \end{aligned}$$

Idée de la méthode :

Ramener le système linéaire de départ à un système linéaire dont la matrice est triangulaire supérieure.

Exemple

Considérons le système linéaire :

$$(L)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 2\,x_1 & - & x_2 & + & 3\,x_3 & = & 5 \\ 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Méthode d'élimination de Gauss

Etape 1 :

Garder la ligne (L_1) et éliminer x_1 des lignes (L_2) et (L_3) en opérant avec la ligne (L_1) comme suit :

$$\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Etape 2 :

Garder les lignes (L_1) et (L_2) et éliminer x_2 de la ligne (L_3) en opérant avec la ligne (L_2) comme suit :

$$\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

On obtient donc un système linéaire triangulaire supérieur qu'on résoud par une méthode de remontée.

$$\begin{cases} (L_3) \iff & -2x_3 = -8 & \iff \boxed{x_3 = 4} \\ (L_2) \iff & x_2 + x_3 = -3 & \iff \boxed{x_2 = -7} \\ (L_1) \iff & x_1 - x_2 + x_3 = 4 & \iff \boxed{x_1 = -7} \end{cases}$$

La solution du système linéaire est donc :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Méthode d'élimination de Gauss

Exemple

$$(L)\begin{cases} 2\,x_1 + 2\,x_2 - \;x_3 = -5 \\ \;x_1 + 4\,x_2 - \;x_3 = -10 \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 + \;x_3 = 2 \end{cases}$$

Le système s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A\,x \;=\; b$$

Posons : $A^{(1)} = A$ *et* $b^{(1)} = b$, *le système s'écrit alors :*

$$A^{(1)}x = b^{(1)}$$

Méthode d'élimination de Gauss

Etape 1 :

Garder la ligne (L_1) et éliminer x_1 des lignes (L_2) et (L_3) en opérant avec la ligne (L_1) comme suit : (le pivot ici est $a_{11}^{(1)} = 2$)

$$\begin{array}{c} (L_1) \leftarrow (L_1) \\ (L_2) \leftarrow (L_2) - \frac{1}{2}(L_1) \\ (L_3) \leftarrow (L_3) - \frac{3}{2}(L_1) \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -\frac{15}{2} \\ \frac{19}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad A^{(2)} \; x \; = \; b^{(2)}$$

Etape 2 :

Garder la ligne (L_1) et (L_2) et éliminer x_2 de la ligne (L_3) en opérant avec la ligne (L_2) comme suit : (le pivot ici est $a_{22}^{(2)} = 3$)

$$\begin{array}{c} (L_1) \leftarrow (L_1) \\ (L_2) \leftarrow (L_2) \\ (L_3) \leftarrow (L_3) + \frac{1}{3}(L_2) \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -\frac{15}{2} \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad A^{(3)} \; x \; = \; b^{(3)}$$

Méthode d'élimination de Gauss

On obtient donc un système linéaire dont la matrice est triangulaire supérieure qu'on résout par une méthode de remontée :

$$
\begin{aligned}
(L_3) &\iff \frac{7}{3}x_3 = 7 \Leftrightarrow \boxed{x_3 = 3} \\
(L_2) &\iff 3x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{15}{2} \Leftrightarrow 3x_2 = -\frac{15}{2} + \frac{1}{2}x_3 = -6 \Leftrightarrow \boxed{x_2 = -2} \\
(L_1) &\iff 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -5 \Leftrightarrow x_1 = \frac{-5 - 2x_2 + x_3}{2} \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 1}
\end{aligned}
$$

Exemple

Soit le système :

$$(L)\begin{cases} 2\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 - 3\,x_4 = 18 \\ 3\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 - x_4 = 12 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3\,x_3 - x_4 = 15 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{c} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \\ (L_4) \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 18 \\ 12 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix}}_{b}$$

Posons : $A^{(1)} = A$ *et* $b^{(1)} = b$, *le système s'écrit alors :*

$$A^{(1)}x = b^{(1)}$$

Etape 1 :

On garde la ligne (L_1) et on élimine x_1 des lignes (L_2), (L_3) et (L_4) en opérant avec (L_1) comme suit (ici le pivot est $a_{11}^{(1)} = 2$) :

$$\begin{array}{lcl} (L_1) & \leftarrow & (L_1) \\ (L_2) & \leftarrow & (L_2) - \frac{3}{2}(L_1) \\ (L_3) & \leftarrow & (L_3) - \frac{1}{2}(L_1) \\ (L_4) & \leftarrow & (L_4) - \frac{1}{2}(L_1) \end{array}$$

c'est à dire $(L_i) = (L_i) - \frac{a_{i,1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}(L_1)$ pour $\quad 2 \leqslant i \leqslant 4$ On obtient le système :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & \frac{-7}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -15 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow A^{(2)}x = b^{(2)}$$

Etape 2 :

Garder les lignes (L_1) et (L_2) et éliminer x_2 des lignes (L_3) et (L_4).

Le pivot ici est $a_{22}^{(2)} = -\dfrac{7}{2}$.

$$
\begin{array}{rcl}
(L_1) & \leftarrow & (L_1) \\
(L_2) & \leftarrow & (L_2) \\
(L_3) & \leftarrow & (L_3) - \dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}(L_2) = (L_3) - \dfrac{1/2}{-7/2}(L_2) = (L_3) + \dfrac{1}{7}(L_2) \\
(L_4) & \leftarrow & (L_4) - \dfrac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}(L_2) = (L_4) - \dfrac{-3/2}{-7/2}(L_2) = (L_4) - \dfrac{3}{7}(L_2)
\end{array}
$$

On obtient le système :

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{7} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{20}{7} & -1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 18 \\ -15 \\ -\frac{71}{7} \\ \frac{87}{7} \end{pmatrix}
$$

$$\iff A^{(3)} \; x \; = \; b^{(3)}$$

Méthode d'élimination de Gauss

Etape 3 :

Garder les lignes (L_1), (L_2) et (L_3) et éliminer x_3 de la ligne (L_4) en opérant avec la ligne (L_4) comme suit (le pivot est $a_{33}^{(3)} = -\frac{16}{7}$) :

$$\begin{array}{lcl}
(L_1) & \leftarrow & (L_1) \\
(L_2) & \leftarrow & (L_2) \\
(L_3) & \leftarrow & (L_3) \\
(L_4) & \leftarrow & (L_4) - \dfrac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}}(L_3) = (L_4) - \dfrac{20/7}{-16/7}(L_3) = (L_4) + \dfrac{5}{4}(L_3)
\end{array}$$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -15 \\ -\frac{71}{7} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad A^{(4)} \; x \; = \; b^{(4)} \quad : \quad \text{système triangulaire supérieur.}$$

Méthode d'élimination de Gauss

$$
\begin{aligned}
(L_4) &\iff \frac{1}{4}x_4 = -\frac{1}{4} \iff \boxed{x_4 = -1} \\
(L_3) &\iff -\frac{16}{7}x_3 + x_4 = -\frac{71}{7} \iff \boxed{x_3 = 4} \\
(L_2) &\iff -\frac{7}{2}x_2 - 2x_3 + \frac{7}{2}x_4 = -15 \iff \boxed{x_2 = 1} \\
(L_1) &\iff 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 18 \iff \boxed{x_1 = 3}
\end{aligned}
$$

La solution du système est donc : $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Description de la méthode dans le cas général :

Considérons le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A\,x \;=\; b$$

Posons : $A^{(1)} = A$ et $b^{(1)} = b$

le système s'écrit alors : $A^{(1)}x = b^{(1)}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

Méthode d'élimination de Gauss

Etape 1 :

On élimine x_1 des lignes $2, 3, \cdots, n$ en opérant comme suit : (le pivot étant $a_{11}^{(1)}$) :

$$\left.\begin{aligned} &L_1 \leftarrow L_1 \\ &L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1 \\ &L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1 \\ &\vdots \\ &L_n \leftarrow L_n - \frac{a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1 \end{aligned}\right\} \text{pour } 2 \leqslant i \leqslant n, \quad \text{c'est-à-dire } L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{1j}^{(1)}$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} b_1^{(1)}$$

On obtient un nouveau système de la forme :

$$A^{(2)}\ x\ = b^{(2)}$$

avec :

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

Méthode d'élimination de Gauss

Etape 2 :

On transforme le système en éliminant x_2 des lignes $3, 4, \cdots, n$ (le pivot ici est $a_{22}^{(2)}$)

$$\left.\begin{aligned}
L_1 &\leftarrow L_1 \\
L_2 &\leftarrow L_2 \\
L_3 &\leftarrow L_3 - \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} L_2 \\
L_4 &\leftarrow L_4 - \frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} L_2 \\
&\vdots \\
L_n &\leftarrow L_n - \frac{a_{n2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} L_2
\end{aligned}\right\} \text{pour } 3 \leqslant i \leqslant n, \quad \text{c'est-à-dire } L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} L_2$$

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} a_{2j}^{(2)}$$

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} b_2^{(2)}$$

Méthode d'élimination de Gauss

On obtient le système :

$$A^{(3)}\ x \ = \ b^{(3)}$$

avec :

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b^{(3)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(3)} \end{pmatrix}$$

Méthode d'élimination de Gauss

Ainsi de suite, pour passer du k-ième système au $(k+1)$-ième système, on opère comme suit :

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)} \qquad \text{pour} \quad i, j = k+1, \cdots, n$$

$$b_{i}^{(k+1)} = b_{i}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_{k}^{(k)} \qquad \text{pour} \quad i = k+1, \cdots, n$$

A l'étape $(n-1)$, on obtient un système triangulaire supérieur de la forme :

$$A^{(n)}\, x \;=\; b^{(n)}$$

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b^{(n)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

qui peut être résolu par une méthode de remontée.

Méthode d'élimination de Gauss : Algorithme

Exercice

Implémenter l'algorithme de pivot de Gauss.

→ Entrée : Matrice A, vecteur second membre b.
→ Sortie : vecteur x solution du système $Ax = b$.

Algorithme :

Pour $k = 1$ à $n-1$ $\longleftarrow$ nombres d'étapes.
Pour $i = k+1$ à n
$$piv = \frac{a(i,k)}{a(k,k)}$$
Pour $j = k$ à n
$$a_{ij} = a_{ij} - piv * a(k,j)$$
Fin
$$b(i) = b(i) - piv * b(k)$$
Fin
Fin

Méthode d'élimination de Gauss : Algorithme

Résolution du système triangulaire :

$x(n) = b(n)/a(n,n)$
For $i = n-1$ à 1
    $S = 0$
    for $j = i+1$ à n
        $S = S + a(i,j) * x(j)$
    Fin
    $x(i) = (b(i) - S)/a(i,i)$
Fin

Proposition

On peut vérifier que la complexité de la méthode de Gauss est de l'ordre :

$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{3} + \frac{3n(n-1)}{2} + n^2$$

Pour n grand, la complexité est de l'ordre de $\boxed{\dfrac{2n^3}{3}}$.

1. Cas de pivot nul

   La méthode de Gauss n'est correctement définie que si tous les pivots $a_{kk}^{(k)}$ $(k = 1, \cdots, n-1)$ sont non nuls.

   Si l'élément diagonal $a_{kk}^{(k)}$ est nul, on cherche dans la même colonne k un élément non nul, puis on échange les lignes correspondantes.

2. Choix du pivot

   Si le pivot $a_{kk}^{(k)}$ est petit alors des erreurs d'arrondi peuvent conduire à des solutions fausses. Dans ce cas, il est préférable de choisir le pivot qui soit le plus grand possible en valeur absolue dans la même colonne k.

Exemple

Utiliser la méthode de pivot de Gauss par résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x_2 + 3\,x_3 = 1 \\ 5\,x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 = 4 \\ 6\,x_1 + 8\,x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Etape 1 :

$piv = 0$

On échange la ligne L_1 avec la ligne de plus grand pivot (ici L_3), le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{6} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{13}{6} \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{18}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Etape 2 :

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - \frac{1}{-\frac{14}{3}} L_2 = L_3 + \frac{3}{14} L_2 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{13}{6} \\ 0 & 0 & \frac{97}{28} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{18}{6} \\ \frac{47}{28} \end{pmatrix}$$

$$(L_3) \iff \frac{97}{28} x_3 = \frac{47}{28} \iff \boxed{x_3 = \frac{47}{97}}$$

$$(L_2) \iff -\frac{14}{3} x_2 + \frac{13}{6} x_3 = \frac{18}{6} \iff \boxed{x_2 = -\frac{44}{97}}$$

$$(L_1) \iff 6\,x_1 + 8\,x_2 + x_3 = 1 \iff \boxed{x_1 = \frac{67}{97}}$$

Méthode de décomposition LU

Définition

On dit que la matrice A admet une décomposition LU s'il existe une matrice triangulaire inférieure L (lower) dont les termes de la diagonale sont égaux à 1 et une matrice triangulaire supérieure U (upper) tel que :

$$A = L\,U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Résolution du système linéaire $Ax = b$

$\longrightarrow$ Si A admet une décomposition LU alors :

$$Ax = b \iff L\,\underbrace{U\,x}_{y} = b$$

Méthode de décomposition LU

1. On commence par résoudre le système triangulaire inférieur :

$$L\,y \;=\; b$$

Pour trouver le vecteur $y \;\longrightarrow\;$ Méthode de descente.

2. On résout le système triangulaire supérieur :

$$U\,x \;=\; y$$

Pour trouver le vecteur solution $x \;\longrightarrow\;$ Méthode de remontée.

Condition nécessaire et suffisante de décomposition LU

Définition

On appelle sous matrice d'ordre k de la matrice A, la matrice définie par :

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

Exemples :

- La sous matrice d'ordre 1 de A est : $A_1 = a_{11}$.
- La sous matrice d'ordre 2 de A est : $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Théorème (Décomposition LU)

Soit A une matrice dont toutes les sous matrices A_k d'ordre k $(k = 1, \cdots, n)$ sont inversibles $(det(A_k) \neq 0)$.

Alors $\exists!$ (L,U) avec L triangulaire inférieure à diagonale $= 1$ et U triangulaire supérieure telles que :

$$A = L\ U$$

Méthode de Décomposition LU

Question : Comment trouver L et U ?

1. Ecrire l'égalité $A = L\,U \longrightarrow$ Système d'équations en l_{ij} et u_{ij}.
2. Remarquer que le système :

$$A\,x = b \iff L\,U\,x = b$$
$$\iff \underbrace{U}_{\text{triang supérieure}} x = \underbrace{L^{-1}\,b}_{b'}$$

En fait, la matrice U n'est rien d'autre que la matrice triangulaire supérieure $A^{(n-1)}$ obtenue après l'étape $(n-1)$ de la méthode de Gauss.

Théorème (L'algorithme de décomposition LU)

Dans la pratique pour déterminer la décomposition LU, on procède en 2 étapes :

1. *On applique la méthode de pivot de Gauss à la matrice A.*
   La matrice triangulaire supérieure obtenue correspond à la matrice U.

2. *On applique en suite la transformation inverse à la matrice I pour obtenir la matrice L.*

Méthode de Décomposition LU

Remarques

- *Attention ! La décomposition LU correspond à la méthode d'élimination de Gauss lorsqu'on ne fait pas de permutation de lignes.*
- *La décomposition LU est intéressante dans le cas où on a à résoudre plusieurs équations $Ax = b$; où seul le second membre change, car dans ce cas la décomposition LU est effectuée une fois pour toute.*

Exemple

Effectuer la décomposition LU de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

$$det(A_1) = 1 \neq 0 \quad ; \quad det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad ; \quad det(A_3) = det(A) = -2 \neq 0$$

Donc A admet une décomposition LU.

Méthode de Décomposition LU

- Utilisons le procédé de pivot de Gauss pour obtenir la matrice U :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = U$$

Méthode de Décomposition LU

- On applique maintenant les transformations inverses à la matrice I :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = L$$

La décomposition est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Méthode de Décomposition LU

Exemple

Décomposition LU de $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$det(A_1) = 2 \neq 0 \;\; ; \;\; det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\; ; \;\; det(A_3) = det(A) = 14 \neq 0$$

Donc A admet une décomposition LU.

- Appliquons le procédé de pivot de Gauss pour trouver U.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 1/2 L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1/2 L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = U$$

- On applique la transformation inverse à I pour trouver L :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 1/2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 1/2L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = L$$

Exemple

Résoudre le système linéaire suivant, en effectuant la décomposition LU :

$$(S) \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}}_{b}$$

Dans l'exemple précédent, nous avons effectué la décomposition LU de A.

$$A = L\,U \quad \text{avec} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(S) \Longleftrightarrow L\,\underbrace{Ux}_{y} = b$$

- **On commence par résoudre** $L\,y = b \Longleftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ \frac{1}{2}y_1 + y_2 = 1 \Longrightarrow y_2 = 0 \\ \frac{1}{2}y_1 + 3y_2 + y_3 = -6 \Longrightarrow y_3 = -7 \end{cases}$$

- **On résout** $U\,x = y \Longleftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases} \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exemple

Résoudre le système linéaire suivant, en effectuant la décomposition LU :

$$(S) \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 13 \\ 28 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}}_{b}$$

U : procédé de Gauss

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & -6 & -2 & -15 \\ 0 & 7 & 6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3/2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 7/4L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -15/2 \\ 0 & 0 & 19/2 & 21/4 \end{pmatrix}$$

Méthode de Décomposition LU

$$\begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 19/10L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -15/2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = U$$

L : procédé inverse sur I

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 19/10L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -19/10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3/2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7/4L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & -7/4 & -19/10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3/2 & 1 & 0 \\ -3 & -7/4 & -19/10 & 1 \end{pmatrix} = L$$

Pour résoudre $Ax = b$, on écrit $L\underbrace{Ux}_{y} = b$

$$Ly = b \xrightarrow{\text{donne}} y = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ -35 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$Ux = y \xrightarrow{\text{donne}} x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Méthode de Cholesky

La méthode de Cholesky est une variante de la décomposition LU dans le cas où la matrice A est symétrique, définie positive.

Définition

- *Une matrice A est dite symétrique si $A^t = A$.*
- *A est dite positive si $< Ax, x > \geqslant 0\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ c.a.d $x^t Ax \geqslant 0$.*
- *A est définie si on a : $(\forall\, x \in \mathbb{R}^n\,,\ < Ax, x >= 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n})$.*

Théorème

Soit A une matrice symétrique définie positive alors toutes les sous matrices A_k de A sont aussi symétriques définies positives.

Théorème (Critère de Sylvester)

Soit A une matrice symétrique.
Pour que A soit définie positive il faut et il suffit que les déterminants de toutes les sous matrices A_k de A $(1 \leqslant k \leqslant n)$ soient strictement positif.

Méthode de Cholesky

Remarque

Le critère de Sylvester fournit une méthode simple permettant de tester le caractère "défini positif" d'une matrice.

Exemple

Pour quelles valeurs de x la matrice $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *est définie positive ?*

On applique le critère de Sylvester.

A est une matrice symétrique.

$$det(A_1) = det(x) = x \,, \quad det(A_2) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2x{-}1 \,, \quad det(A_3) = det(A) = 3x{-}2$$

A est définie positive si et seulement si $x > 0\,,\; x > 1/2$ et $x > 2/3$.

c'est-à-dire $x > 2/3$.

Méthode de Cholesky

Théorème (Décomposition de Cholesky)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, définie positive.

Alors $\exists!$ matrice C triangulaire inférieure dont les termes de la diagonale $c_{ii} > 0$ telle que :

$$A \;=\; C\; C^t$$

C'est la décomposition de Cholesky.

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 8 & 2 \\ -6 & 10 & -15 & -3 \\ 8 & -15 & 26 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 62 \end{pmatrix} \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -1 \\ -13 \end{pmatrix}$$

1) Vérifier que la matrice A est symétrique, définie positive.

2) Donner la décomposition de Cholesky de A.

3) Résoudre le système linéaire $A\,x \;=\; b$.

1) La matrice A est symétrique car $A^t = A$.

A est donc définie positive si et seulement si $det(A_k) > 0 \;\; \forall\; k = 1, \cdots, 4$.

$$det(A_1) = 4 > 0 \quad ; \quad det(A_2) = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad ;$$

$$det(A_3) = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 8 \\ -6 & 10 & -15 \\ 8 & -15 & 26 \end{vmatrix} = 4 > 0 \;\; ; \quad det(A_4) = det(A) = 144 > 0$$

Donc A est symétrique définie positive.

A admet donc une décomposition de Cholesky

$$A \;=\; C\; C^t$$

2) Écrivons l'égalité en détail :

$$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & c_{41} \\ 0 & c_{22} & c_{32} & c_{42} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{43} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 8 & 2 \\ -6 & 10 & -15 & -3 \\ 8 & -15 & 26 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 62 \end{pmatrix}$$

Lignes 1,2,3,4 $\times$ colonne 1

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_{11}^2 = 4 \Leftrightarrow & c_{11} = 2 & & \\ c_{21}c_{11} = -6 \Leftrightarrow & 2c_{21} = -6 & \Leftrightarrow & c_{21} = -3 \\ c_{31}c_{11} = 8 \Leftrightarrow & 2c_{31} = 8 & \Leftrightarrow & c_{31} = 4 \\ c_{41}c_{11} = 2 \Leftrightarrow & 2c_{41} = 2 & \Leftrightarrow & c_{41} = 1 \end{cases}$$

Lignes 2,3,4 $\times$ colonne 2

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_{21}^2 + c_{22}^2 = 10 \Leftrightarrow c_{22} = 10 - c_{21}^2 = 10 - (-3)^2 = 1 \Leftrightarrow c_{22} = 1 \\ c_{31}c_{21} + c_{32}c_{22} = -15 \Leftrightarrow 4 \times (-3) + 1c_{32} = -15 \Leftrightarrow c_{32} = -3 \\ c_{41}c_{21} + c_{42}c_{22} = -3 \Leftrightarrow 1 \times (-3) + 1c_{42} = 26 \Leftrightarrow c_{42} = 0 \end{cases}$$

Lignes 3,4 $\times$ colonne 3

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 = 26 \Leftrightarrow 4^2 + (-3)^2 + c_{33}^2 = 26 \Leftrightarrow c_{33}^2 = 1 \\ \Leftrightarrow c_{33} = 1 \\ c_{41}c_{31} + c_{42}c_{32} + c_{43}c_{33} = -1 \Leftrightarrow 1 \times 4 + 0(-3) + 1c_{43} = -1 \\ \Leftrightarrow c_{43} = -5 \end{cases}$$

Lignes 4 $\times$ colonne 4

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_{41}^2 + c_{42}^2 + c_{43}^2 + c_{44}^2 = 62 \Leftrightarrow 1^2 + 0^2 + (-5)^2 + c_{44}^2 = 62 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow c_{44}^2 = 36 \Leftrightarrow c_{66} = 6 \end{cases}$$

Donc :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

3) **Résolution du système :** $Ax = b$. On écrit :

$$C \underbrace{C^t x}_{y} = b$$

a/ On résout, par la méthode de descente, le système :

$$Cy = b \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -1 \\ -13 \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$y = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b/ On résout, par une méthode de remontée, le système :

$$C^t x = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Principe

On veut résoudre le système :

$$Ax \;=\; b \tag{1}$$

Le principe des méthodes itératives est de construire une suite de vecteur $X^{(k)}$ *qui converge vers un vecteur* X *solution du système 1.*

On commence par un vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$ *puis on calcule le vecteur suivant* $X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}$ *puis* $X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix}$ *jusqu'à obtenir un vecteur* $X^{(k)}$ *satisfaisant un certain critère de précision du type :*

$$\|AX^{(k)} - b\| < \varepsilon \qquad \text{où} \qquad \|X\| \text{ est la norme euclidienne de } X.$$

Comment construire la suite $(X^{(k)})$?

Le système linéaire (1) s'écrit de manière détaillée :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nn}\,x_n = b_n \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 = \dfrac{b_1 - (a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \cdots + a_{1n}x_n)}{a_{11}} & = & \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \displaystyle\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\right) \\ x_2 = \dfrac{b_2 - (a_{21}\,x_1 + a_{23}\,x_3 + \cdots + a_{2n}x_n)}{a_{22}} & = & \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{n} a_{2j}x_j\right) \\ & \vdots & \\ x_n = \dfrac{b_n - (a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1})}{a_{nn}} & = & \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j\right) \end{array}\right.$$

Méthode itérative de Jacobi

Méthode de Jacobi

1. *On choisit tout d'abord un vecteur initial* $X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$

2. *Si on appelle* $X^{(k)}$ *le vecteur à l'itération* k *alors le vecteur* $X^{(k+1)}$ *à l'itération* $k+1$ *est obtenu par le procédé itératif suivant :*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} &= \dfrac{1}{a_{11}} \left(b_1 - \displaystyle\sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j^{(k)} \right) \\ & \vdots \\ x_i^{(k+1)} &= \dfrac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \end{cases}$$

3. *Répéter le procédé itératif jusqu'à ce qu'on converge vers un vecteur* $X^{(k)}$ *solution du système* $AX = b$, *c.a.d tel que* $\|AX^{(k)} - b\| < \underbrace{seuil}$

Méthode itérative de Jacobi

Exemple

Appliquer la méthode de Jacobi pour la résolution du système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Le système s'écrit :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + 3x_2 = 13 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(6 - x_2) \\ x_2 = \dfrac{1}{3}(13 - x_1) \end{cases}$$

Le procédé itératif de Jacobi s'écrit alors :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{2}(6 - x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{3}(13 - x_1^{(k)}) \end{cases}$$

Si par exemple, on choisit un vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}$

Alors le vecteur $X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}$ est obtenu par :

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(6 - x_2^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{3}(13 - x_1^{(0)}) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(6 - 1) = \frac{5}{2} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{3}(13 - 1) = 4 \end{cases} \Longrightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On vérifie $AX^{(1)} \simeq b$? Non.

$\Longrightarrow$ On calcule alors le vecteur suivant $X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(6 - x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}(6 - 4) = 1 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{3}(13 - x_1^{(1)}) = \frac{1}{3}(13 - \frac{5}{2}) = \frac{7}{2} \end{cases} \Longrightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

On vérifie $AX^{(2)} \simeq b$? Non.

Méthode itérative de Jacobi

$\Longrightarrow$ On calcule alors le vecteur suivant $X^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \dfrac{1}{2}(6 - x_2^{(2)}) = \dfrac{1}{2}(6 - \dfrac{7}{2}) = \dfrac{5}{4} \\ x_2^{(3)} = \dfrac{1}{3}(13 - x_1^{(2)}) = \dfrac{1}{3}(13 - 1) = 4 \end{cases} \Longrightarrow X^{(3)} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On vérifie $AX^{(3)} \simeq b$? Non.

On continue. On calcule $X^{(4)} = \begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = \dfrac{1}{2}(6 - x_2^{(3)}) = \dfrac{1}{2}(6 - 4) = 1 \\ x_2^{(4)} = \dfrac{1}{3}(13 - x_1^{(3)}) = \dfrac{1}{3}(13 - \dfrac{5}{4}) = \dfrac{47}{2} \end{cases} \Longrightarrow X^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 47/12 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On a bien

$$AX^{(4)} \simeq b$$

Méthode de Gauss-Seidel

1. *On choisit un vecteur initial* $X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$

2. *Dans le procédé de Gauss-Seidel, une fois une valeur* $x_i^{(k+1)}$ *à l'itération* $(k+1)$ *est calculée, on l'utilise pour calculer les autres valeurs à la même itération.*

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left[b_3 - (a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{34}x_4^{(k)} + \cdots + a_{3n}x_n^{(k)}\right] \\ \vdots \end{cases}$$

3. *Là aussi on itère jusqu'à ce que :* $\quad$ *Résidu* $= \|AX^{(k)} - b\| <$ *seuil fixé*

Méthode itérative de Gauss-Seidel

Remarque

La méthode de Gauss-Seidel permet d'accélérer la convergence de la méthode de Jacobi vers la solution. On aboutit à la solution X du système en moins d'itérations.

Exemple

Appliquer la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution du système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Le système s'écrit :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + 3x_2 = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(6 - x_2) \\ x_2 = \frac{1}{3}(13 - x_1) \end{cases}$$

Le procédé itératif de Gauss-Seidel s'écrit alors :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(6 - x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}(13 - x_1^{(k+1)}) \end{cases}$$

Prenons par exemple comme vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On obtient $X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}$ par :

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(6 - x_2^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{3}(13 - x_1^{(1)}) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(6 - 1) = \frac{5}{2} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{3}(13 - \frac{5}{2}) = \frac{7}{2} \end{cases} \Longrightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

On vérifie : $AX^{(1)} \simeq b$? Non.

$\Longrightarrow$ On calcule alors le vecteur suivant $X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(6 - x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}(6 - \frac{7}{2}) = \frac{5}{4} \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{3}(13 - x_1^{(2)}) = \frac{1}{3}(13 - \frac{5}{4}) = \frac{47}{12} \end{cases} \Longrightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 47/12 \end{pmatrix}$$

On vérifie : $AX^{(2)} \simeq b$? Non.

$\Longrightarrow$ On calcule le vecteur $X^{(3)}$ par :

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \dfrac{1}{2}(6 - x_2^{(2)}) = \dfrac{1}{2}(6 - \dfrac{47}{12}) = \dfrac{25}{24} \\ x_2^{(3)} = \dfrac{1}{3}(13 - x_1^{(3)}) = \dfrac{1}{3}(13 - \dfrac{25}{24}) = \dfrac{13}{3} \end{cases} \Longrightarrow X^{(3)} = \begin{pmatrix} 25/24 \\ 13/3 \end{pmatrix}$$

On vérifie : $AX^{(3)} \simeq b$? Oui.

Définition

Une matrice A est dite à diagonale dominante si et seulement si

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall\, i\,(1 \leq i \leq n)$$

Lorsque l'inégalité est stricte, on dira que A est à diagonale strictement dominante.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |a_{11}| &= |2| = 2 \geq |a_{12}| + |a_{13}| = |1| + |-1| = 2 \\ |a_{22}| &= |-5| = 5 \geq |a_{21}| + |a_{23}| = |1| + |3| = 4 \\ |a_{33}| &= |8| = 8 \geq |a_{31}| + |a_{32}| = |0| + |4| = 4 \end{aligned}$$

La matrice A est donc à diagonale dominante.

Convergence des méthodes itératives

Théorème

Si la matrice A est à diagonale strictement dominante alors les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent quelque soit le choix du vecteur initial $X^{(0)}$.

Exercice

On considère le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) La matrice A est-elle à diagonale dominante ?

2) Ecrire la méthode de Jacobi pour ce système, puis effectuer 3 itérations en partant du vecteur initial $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.

3) Ecrire la méthode de Gauss-Seidel, puis effectuer 3 itérations en partant du vecteur initial $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.

1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |a_{11}| = |2| = 2 \geq |a_{12}| + |a_{13}| = |-1| + |0| = 1 \\ |a_{22}| = |2| = 2 \geq |a_{21}| + |a_{23}| = |-1| + |-1| = 2 \\ |a_{33}| = |2| = 2 \geq |a_{31}| + |a_{32}| = |0| + |-1| = 1 \end{aligned}$$

La matrice A est donc à diagonale dominante.

2) Le système s'écrit :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(7 + x_2) \\ x_2 = \dfrac{1}{2}(1 + x_1 + x_3) \\ x_3 = \dfrac{1}{2}(1 + x_2) \end{cases}$$

Procédé de Jacobi :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(7 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}) \end{cases}$$

Vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(7 + x_2^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + x_1^{(0)} + x_3^{(0)}) \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(0)}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(7 + 0) = \frac{7}{2} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + 0 + 0) = \frac{1}{2} \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(7 + x_2^{(1)}) \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_1^{(1)} + x_3^{(1)}) \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(7 + \frac{1}{2}) = \frac{15}{4} \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + \frac{7}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{5}{2} \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} 15/4 \\ 5/2 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{2}(7 + x_2^{(2)}) \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{2}(1 + x_1^{(2)} + x_3^{(2)}) \\ x_3^{(3)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(2)}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{2}(7 + \frac{5}{2}) = \frac{19}{4} \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{2}(1 + \frac{15}{4} + \frac{3}{4}) = \frac{21}{4} \\ x_3^{(3)} = \frac{1}{2}(1 + \frac{5}{4}) = \frac{9}{8} \end{cases} \Rightarrow X^{(3)} = \begin{pmatrix} 19/4 \\ 21/4 \\ 9/8 \end{pmatrix}$$

Procédé de Gauss-Seidel :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(7 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

Vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(7 + x_2^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + x_1^{(1)} + x_3^{(0)}) \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(7 + 0) = \frac{7}{2} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + \frac{7}{2} + 0) = \frac{9}{4} \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + \frac{9}{4}) = \frac{13}{8} \end{cases} \Rightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 9/4 \\ 13/8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{1}{2}(7 + x_2^{(1)}) \\ x_2^{(2)} = \dfrac{1}{2}(1 + x_1^{(2)} + x_3^{(1)}) \\ x_3^{(2)} = \dfrac{1}{2}(1 + x_2^{(2)}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{1}{2}(7 + \dfrac{9}{4}) = \dfrac{37}{8} \\ x_2^{(2)} = \dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{37}{8} + \dfrac{13}{8}) = \dfrac{29}{8} \\ x_3^{(2)} = \dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{29}{8}) = \dfrac{37}{16} \end{cases} \Rightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} 37/8 \\ 29/8 \\ 37/16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \dfrac{1}{2}(7 + x_2^{(2)}) \\ x_2^{(3)} = \dfrac{1}{2}(1 + x_1^{(3)} + x_3^{(2)}) \\ x_3^{(3)} = \dfrac{1}{2}(1 + x_2^{(3)}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(3)} = \dfrac{1}{2}(7 + \dfrac{29}{8}) = \dfrac{85}{16} \\ x_2^{(3)} = \dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{85}{16} + \dfrac{37}{16}) = \dfrac{69}{16} \\ x_3^{(3)} = \dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{69}{16}) = \dfrac{85}{32} \end{cases} \Rightarrow X^{(3)} = \begin{pmatrix} 85/16 \\ 69/16 \\ 85/32 \end{pmatrix}$$