

# 上海交通大学

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

## 学士学位论文

BACHELOR'S THESIS



论文题目：基于非连续动态对冲的场外期权定价研究

学生姓名：	李星奇
学生学号：	515120910121
专    业：	金融学
指导教师：	万相伟
学院(系)：	安泰经济与管理学院



# 基于非连续动态对冲的场外期权定价研究

## 摘要

pass

关键词： pass



# **PRICING OF OTC OPTIONS BASED ON DISCRETE DYNAMIC HEDGING**

## **ABSTRACT**

pass

**Key words:** pass



# 目 录

第一章 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究意义	2
1.3 研究内容	2
1.4 研究方法与研究思路	2
1.5 研究框架	3
第二章 文献综述	5
2.1 国外研究结果	5
2.1.1 期权定价理论	5
2.1.2 动态对冲理论	5
2.2 国内研究结果	6
2.3 本章小结	7
第三章 主要理论与方法	9
3.1 期权定价理论	9
3.2 希腊字母	10
3.2.1 Delta	10
3.2.2 Gamma	12
3.2.3 其他希腊字母	13
3.3 波动率	14
3.3.1 隐含波动率	14
3.3.2 实际波动率	16
3.4 动态对冲策略	17
3.4.1 固定时点动态对冲	17
3.4.2 固定 Delta 区间动态对冲	18
3.5 模拟方法	18
3.6 本章小结	19
第四章 模拟研究	21
4.1 案例背景	21
4.2 研究方法	21
4.3 无交易费用时的动态对冲	22
4.3.1 固定时点动态对冲	22
4.3.2 固定 Delta 区间动态对冲	23
4.4 有交易费用时的动态对冲	24
4.4.1 交易费用对期望对冲成本的影响	24
4.4.2 交易费用对相对对冲波动率的影响	26
4.4.3 交易费用对对冲成本偏度的影响	27
4.5 动态对冲策略和参数选择	28
4.6 本章小结	30

第五章 实证分析	31
5.1 数据选取和处理	31
5.2 模型确立	31
5.3 固定时点动态对冲	33
5.4 固定 Delta 区间动态对冲	35
5.5 动态对冲策略和参数选择	36
5.6 进一步分析	38
5.6.1 动态历史波动率	38
5.6.2 动态 EWMA 波动率	40
5.7 本章小结	40
第六章 总结与展望	43
6.1 结论总结	43
附录 A 有交易费用时动态对冲结果	45
附录 B 动态对冲中均值-方差对冲得分函数参数的推导	47
附录 C 实证分析中 EWMA 波动率下对冲策略得分	49
致 谢	51



## 第一章 绪论

### 1.1 研究背景

期货和期权等衍生品是金融市场和商品市场上风险管理的重要工具。对于资产管理机构，他们可以使用金融衍生品来管理自身的方向暴露，控制系统性风险；对于实体企业，他们也可以通过买卖商品衍生品，降低由于原材料或产成品价格波动过大而带来的经营风险。期货作为一种线性资产，其价格变动与标的价格变动呈线性关系。实际操作中，企业可以根据未来风险的方向，按照一个套期保值比例，在期货市场上买入或卖出期货合约。原理简单、操作方便是期货的优势。然而，使用期货进行风险管理也存在一些问题。首先，期货为保证金交易，其杠杆比率较低，因此对资金占用较高，会给企业带来较高的机会成本。更重要的是，期货的线性特性使对冲者在规避了可能的损失的同时，也放弃了未来潜在的收益。

与期货相比，期权有着独有的优势，可以有效地帮助企业解决使用期货进行风险管理时的问题。若以买入期权的方式进行对冲，则对冲者只需在期初支付一定量的期权费，在对冲期间无需关注保证金账户。并且以期权费衡量的杠杆比率也较高，用较少的资金就可以实现和期货相同的对冲头寸数量。同时，这一对冲方式风险有限（损失全部的期权费），在价格有利变动时也可以保留获取收益的能力。因此，相比之下，对于某些有特定风险偏好的企业而言，期权是一种更好的对冲工具。

根据交易方式的不同，衍生品又可以分为场内衍生品（Exchange-Traded Derivatives）和场外衍生品（Over-The-Counter Derivatives）。场内衍生品又称交易所衍生品，这一类衍生品由交易双方通过交易所竞价的方式完成交易；场外衍生品又称柜台交易衍生品，这一类衍生品由交易双方直接或通过共同对手方（Central Counterparty）进行交易和结算。与场内市场相比，场外市场通常规模更大。张玉红（2006）指出，从上世纪 90 年代开始，美国的场外衍生品市场的增长速度就已明显高于场内市场。根据国际清算银行的数据，截至 2018 年 6 月底，全球场外衍生品名义本金总额为 595 万亿美元，较 2017 年末增长 11.8%。同时，由于场外衍生品市场可以为企业提供特殊定制的风险管理产品，而场内市场提供的是标准化的合约。因此，场外市场和场内市场在功能上并不完全同质化。斯文（2012）通过对美国的场外衍生品市场数据进行实证分析发现，场外衍生品市场和场内市场更多地呈现出替代关系。近年来，我国场外衍生品市场发展迅猛。根据中国证券业协会的数据，截至 2018 年 7 月 31 日，我国场外衍生品的初始名义本金累计 3.27 万亿元，存量 2973.54 亿元。

期权这一衍生品相比于期货，涉及到更多维度的变量，企业对其的定制化需求也就更高。因此，相比场内期权市场，我国的场外期权市场更为活跃。目前我国场内市场中，商品期权有白糖、棉花、豆粕、玉米、铜和天然橡胶六种，金融期权有上证 50ETF 期权一种；而场外市场中，期权基本覆盖了大部分交易所中交易的标的。我国场外期权的交易商为证券公司和期货公司。对于这些交易商来说，他们是期权流动性的提供者，一般处于净卖出期权的位置。他们面临着两个很实际的问题：一是如何通过场内市场复制期权，对冲自身暴露的期权头寸；二是如何根据对冲的成本对卖出的期权进行定价，以在覆盖自身对冲成本的前提下提供一个更有竞争力的价格。

我国期权市场仍处于发展阶段，与成熟市场还有较大差距。场内市场期权品种较少，无法和品种丰富的场外市场匹配，这也给上文提到的两个问题的解决增加了难度。由于缺少场内非线性的工具，交易商只能通过使用期货或现货等线性资产来进行 Delta 上的动态对冲。因此，基于目前我国期权市场的现状，本文将试图对以下问题做出解答：1）如何采取恰当的 Delta 动态对冲策略以及确定动态对冲中的相关参数，以获得最好的对冲效果；2）在实际操作中，交易费用将在多大程度上影响最终的对冲成本，在给定某一个交易费用水平时，该如何确定使用的动态对冲参数。

## 1.2 研究意义

本文以虚拟案例的形式,使用了模拟研究和实证分析两种方法,同时基于固定时点动态对冲和固定  $\Delta$  区间动态对冲,对场外期权的定价和对冲进行了研究。

在模拟研究中,本文使用几何布朗运动资产价格路径模型进行模拟,并分别对两种对冲策略的对冲效果和对冲成本的分布进行了系统地分析,同时考察了交易费用对对冲策略的影响。在衡量不同方法、不同参数下的对冲结果时,我们提出了对冲成本率这一相对指标,可以更好地比较不同设定下的对冲效果,并模仿均值-方差效用函数提出了一种评判标准,用于实际应用中动态对冲具体方法和对冲参数的选择。

在实证分析的研究中,本文使用动力煤指数的数据,进行了滚动的动态对冲分析,以为该期权未来的定价和对冲提供一定的参考,这一框架同样适用于基于其他标的的场外和场内期权的定价。同时,将实证分析的结果和模拟研究的结果比较,有助于定性地帮助场外期权交易商理解实际应用和理论分析的差异,以更好地将动态对冲方法应用到实际生产中。

本文通过使用模拟研究到实证分析的方法,系统性地比较了固定时点动态对冲和固定  $\Delta$  区间动态对冲两种对冲策略的优劣。通过考察了一系列的对冲结果评判指标,相较以往类似研究,对两种对冲策略的特点有了更全面的分析和比较,并试图建立了从理论到实际的联系。同时,提出了一种新的动态对冲操作方法,可以显著提升已有策略的对冲效果,对实际生产有很强的指导意义。

## 1.3 研究内容

本文分析和论述结构如下:

第一章为绪论。简要介绍了本文的研究背景、研究意义和研究内容,提出了本文研究的整体框架。

第二章为文献综述。主要介绍了目前有关方向上的研究历史及现状,包括期权定价理论和动态对冲分析的国内外相关研究。

第三章为研究方法。主要介绍了期权定价和动态对冲的基本理论及实现方法,同时将对本文所用的模拟方法进行简要介绍。

第四章为模拟研究。首先给出了一个虚拟的场外期权交易案例,之后使用蒙特卡洛模拟的方法以及固定时点动态对冲和固定  $\Delta$  区间动态对冲两种动态对冲策略,进行对冲效果以及最优对冲参数选择的分析。

第五章为实证分析。基于上一章虚拟案例的背景,使用动力煤指数的实际数据,与模拟研究类似地进行动态对冲的实证分析,并将其结果与模拟研究的结果进行比较。

第六章为总结和展望。根据模拟研究与实证分析的结果,给出本文对场外期权交易商实际生产活动的启示和建议,同时提出文章存在的不足之处,以及以后可以进行改进的方向。

## 1.4 研究方法与研究思路

本文试图在传统的期权动态对冲研究的基础之上,建立一个从模拟研究到实证分析的研究框架,并且通过比较两者的差异来获得实际应用中的启示。在模拟方法的确定中,我们主要通过考察不同维度下的收敛速度,来选择最适用于本文所述问题的模拟方法。在模拟研究中,本文使用固定的波动率和交易费用,考察固定时点的动态对冲和固定  $\Delta$  区间的动态对冲两种对冲策略,并且使用期望对冲成本和对冲成本的标准化波动率等指标作为评价标准。在实证分析中,本文基于模拟研究的思路,分别使用固定的隐含波动率和动态调整的波动率,考察动态对冲策略在实际数据上的表现。

## 1.5 研究框架

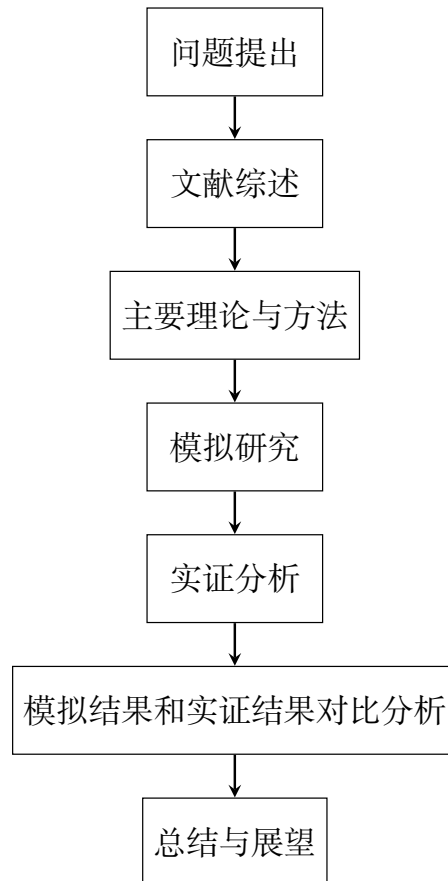


图 1-1 研究框架



## 第二章 文献综述

### 2.1 国外研究结果

期权定价理论和动态对冲理论是金融学中经典的理论，两者的理论基础也较为相似。实际上，期权定价理论的推导本身就是基于了动态对冲的方法，因此期权定价和动态对冲可以说是一枚硬币的两面。然而，由于两者的侧重点仍有所不同：期权定价理论倾向于给出期权价格的解析形式或直接使用数值的方法计算出期权的价格，动态对冲理论倾向于给出一个最优的动态对冲策略及策略损益的分布，主要关注对冲中关键参数的确定。因此本章也将分别考察这两个方面的研究，并且将着重关注有交易费用时的相关研究。

#### 2.1.1 期权定价理论

1973 年，Black 和 Scholes 提出了著名的 BS 模型（Black-Scholes 期权定价模型），即在无套利原则和连续对冲假设下通过在 Delta 上的动态对冲推导出 Black-Scholes 方程，之后对方程进行变换后解出解析解，进而得出定价公式。BS 模型提供了一个金融衍生品定价的基本框架，为各类金融衍生品的合理定价奠定了基础。之后，诸多学者对这一经典的定价模型进行修正，使其适用于各类金融衍生产品定价。1976 年，Black 根据 CAPM 模型和期货收益率分布的特点，对 BS 模型稍加改动，提出了用于期货期权定价的 BS 模型。Garman 和 Kohlhagen (1983) 针对利率演化与 BS 模型中假设的不同，修改了“收益率符合对数正态分布”这一假设，提出了适用于外汇期权定价的模型。

然而，上述研究并没有解决 BS 模型存在的一个关键问题，即其假设对冲是连续的且没有交易费用的。这一假设在实际市场中是几乎不可能成立的。Leland 在 1985 年针对这一问题进行了研究，他通过修正 BS 模型中的波动率的方式，证明了在固定对冲时间间隔和有与标的价格成比例的对冲成本的情况下，对冲的误差与标的价格无关。实际上，这一方法的思路是在原有模型基础上增加一个波动性溢价，以抵消对冲成本的影响，他也给出了这一波动率溢价的解析形式。Leland 的这一研究是非常有启发性的，之后很多的对于这一问题的研究都围绕其研究展开。如 1992 年，Boyle 和 Vorst 基于 Leland (1985) 对波动率的修正，使用了二叉树模型进行数值模拟，得出了在一定参数取值范围内的较为精确的期权价格估计。

1993 年，Davis etc. 认为 Leland (1985) 给出的解析形式并不是在有交易费用时的期权定价的“最优”解（效用上的最优）。因此，他们基于 Hodges 和 Neuberger (1989) 的研究，使用效用最大化理论来考察这一问题。虽然在推导中使用了对数效用函数，但是他们认为定价结果与效用函数的具体形式无关。然而，Davis etc. 提出的模型也有不足。主要存在的问题是在他们的模型中，期权价格是一个三维自由边界问题的解，其在计算上耗时较长，不符合实际应用中对价格计算速度的要求；其次，在价格中需要先验地给出投资者的效用函数，这一效用函数实际上较难确定。因此，Whalley 和 Wilmott (1997) 在 Davis etc. (1993) 的研究的基础上，使用渐进分析的方法，将原有的三维自由边界问题转化为了一个二维扩散方程，提高了求解速度，使其可以在实际市场中得以应用，这一二维扩散方程实际上是在 BS 方程的基础上增加一个更小阶数的修正项。并且，他们由此推导出交易费用与 BS 模型下的 Gamma 有关。

#### 2.1.2 动态对冲理论

动态对冲是风险管理的重要方法，同时也是期权定价推导的基础。一般而言，场外期权的动态对冲可以分为两种：一种是使用场内期权对冲场外期权暴露的头寸，一种是使用标的资产或资产组合对期权进行复制。在实务中，又以第二种方法使用较多，国外关于动态对冲的研究也大多基于使用线性资产对期权进行复制。



Black 和 Scholes (1973) 在推导 BS 模型时, 即是使用标的资产对期权在 Delta 上进行对冲。他们在每个时点计算期权的 Delta, 之后调整标的资产的头寸使其与期权暴露的 Delta 值匹配, 再通过以无风险利率借入或贷出所需的资金, 最后将每个时点产生的成本折现加总, 即得到总对冲成本。当对冲时间间隔趋于 0 时, 总对冲成本即为 BS 模型得出的期权价格。由此也可以看出动态对冲和期权定价之间的关系: 动态对冲是期权定价理论推导的基础, 反之期权定价得出的解析形式可以用于实务中动态对冲中 Delta 的确定。

从 BS 模型的框架中, 可以看出动态对冲中的主要需要决定参数有两个: 第一个是用于计算对冲头寸 Delta, 第二个是对冲的具体时间间隔, 之后的扩展研究也基本围绕这两点展开。Black 和 Scholes 的框架由于是相等时间间隔对冲, 因此它其实是事先确定了第二个参数。在此基础之上对有交易费用时的动态对冲的修正, 比如 Leland (1985) 的研究, 也是同样地维持相等时间间隔不变, 而对 Delta 的计算进行了修正, 这一修正通过修正计算 BS 公式下的 Delta 的波动率而实现的。关于这一对冲误差的收敛性, Leland 认为当交易费用与标的价格成比例且保持不变时, 随着对冲时间间隔趋于 0, 对冲误差也收敛于 0, 即对冲成本将从概率上收敛于修正的 BS 模型。然而, Kabanov 和 Safarian 于 1997 年在 Lott (1993) 工作的基础上通过证明, 得出了与 Leland 相反的结论: 当交易费用不变时, 随着对冲时间间隔趋近于 0, 对冲误差并不收敛于 0; 只有当交易费用和对冲时间间隔同时趋于 0 时, 对冲误差才会收敛于 0。2003 年, Pergamenschikov 在 Kabanov 和 Safarian 的工作的基础上进一步证明了这一对冲误差的收敛速度为  $n^{-1/4}$ , 并给出了 Leland 组合终值的极限分布。之后, Darses 和 Denis (2010) 更进一步地证明了对冲误差的极限分布。同时, 他们通过修正 Leland 的模型以及采用不等间隔的对冲间隔, 提高了对冲误差的收敛速度。

Leland 及其之后的一系列研究大部分采用了固定的对冲时间间隔, 主要关注用于计算 Delta 的波动率以及对冲误差的收敛性。与此不同的是, 也有学者使用效用理论对动态对冲进行有交易费用时的动态对冲研究, 通过效用最大化来寻找动态对冲中合适的参数, 在这种情况下, 对冲间隔并不能事先确定。这一类动态对冲策略需要在事先设定好决策规则之后, 每个时点监控标的价格以及计算动态对冲参数, 之后决定是否做出对冲调整。Hodges 和 Neuberger (1989) 最早将基于效用的最优和期权复制联系在一起, 他们使用了风险厌恶效用函数, 通过构造一个偏微分方程来求解最优的对冲头寸水平。实际上, 他们研究中的最优对冲策略主要考虑的是对 Delta 复制的准确性和交易费用之间的一个权衡, 并且使用一个控制变量来定量地反映这一权衡的过程。当这一控制变量小于某一个临界值时, 则不做出对冲头寸的调整, 通过暴露一定的风险来节省交易费用。从对冲结果的标准差来看, 这一对冲策略要优于 Leland (1985) 的对冲策略。在此基础上, Davis etc. (1993) 证明了这一问题的解和效用函数的具体形式无关。之后, Whalley 和 Wilmott (1997) 也证明了在存在交易费用时, Delta 上的动态对冲存在无交易区间、买入区间和卖出区间。

除了以上基于对有交易费用时的动态对冲的修正的研究之外, 另有一些动态对冲的研究关注了其他设定条件下的对冲组合及其相关评价指标。如 Sepp (2013) 基于 BS 模型以及四种不同的资产价格路径: 对数正态扩散过程、跳跃扩散过程、随机波动率模型和带跳跃的随机波动率模型, 首先给出了固定时点对冲方法下期望损益、期望对冲成本和损益波动率的解析式, 并且由此给出了最优化夏普率时的对冲频率。Basak 和 Chabakauri (2012) 的研究关注了不完全市场下最优动态对冲组合的解析形式。Shokrollahi 和 Sottinen (2017) 基于 Sottinen 和 Viitasaari (2017) 在分形布朗运动上的研究, 给出了分形市场假说下条件均值对冲组合的解析式。Hull 和 White (2017) 则转而挖掘收益波动率和收益率之间的关系, 探讨了在收益波动率和收益率相关的条件下的最小化组合波动率的对冲模型, 并使用标普 500 的数据予以检验。

## 2.2 国内研究结果

由于我国衍生品市场起步较晚, 期权类产品更甚, 因此国内关于期权定价和动态对冲的研究较少。在已有的对于动态对冲的研究中, 研究方法以蒙特卡洛模拟和实证研究为主, 研究的内容则大多关注不同动态对冲策略效果的比较分析。张程 (2010) 通过构建工商银行的欧式看涨期权, 使用实证的方法证明了固定 Delta 区间对冲策略优于固定时间对冲策略。熊

辉（2015）和蒋论政（2018）在硕士论文中分别对玉米期权和豆粕期权的动态对冲策略做了分析和比较，也都得出了固定  $\Delta$  区间对冲策略效果较好的结论。魏洁（2011）对股指期货和股指期货套期保值进行模拟，并对各套期保值方法进行了评价。卫剑波和王琦（2014）基于 SLSG（Stop-Loss Start-Gain）对冲策略，使用沪深 300 的数据进行实证分析，发现对冲波动率和实现波动率的差异是对冲时收益的主要来源，并且以此为基础探索了  $\Gamma$  识别和趋势识别的对冲策略。张卫国和杜谦（2016）使用蒙特卡洛方法对基于随机模型预测控制的对冲方法和传统的  $\Delta$  对冲方法进行了比较分析，并使用上证 50ETF 期权合约进行了实证检验，进而证明了基于随机模型预测控制的对冲方法的有效性。

## 2.3 本章小结

本章主要介绍了国内外有关期权定价和动态对冲的研究情况，重点介绍了有交易费用时的期权定价和动态对冲的研究。国外研究主要以模型建立为主，自 1973 年 Black 和 Scholes 提出 BS 模型以来，之后诸多学者从波动率修正和效用最大化等角度对有交易费用时的期权定价和动态对冲进行了研究。其中波动率修正角度的研究认为需要固定对冲的时间间隔，通过在原有波动率的基础上施加一个溢价来抵消交易费用带来的成本增加的影响；效用最大化角度的研究则关注在不完全对冲时的风险暴露和完全对冲时的额外交易成本之间的权衡，通过效用函数最大化来决定是否进行对冲，因此其对冲时间间隔并不固定。相比之下，国内这一方面的研究起步较晚，大多关注不同对冲策略的对比和评价，研究方法也以模拟分析和实证研究为主。





## 第三章 主要理论与方法

### 3.1 期权定价理论

期权，顾名思义，“期”代表了未来的一个时刻，“权”代表了一种权利。因此，期权即是代表了持有人在未来拥有的某一种收益权利的凭证。期权又作为一种衍生产品，其价值并非凭空产生，而是会依赖于某一种标的资产的价格或价格变动路径。根据这一依赖关系分类，最为简单的期权是欧式期权，其行使权利的时间点确定，并且到期时期权的价值只取决于到期当天标的资产的价格。其他以此关系分类的期权如美式期权，它的价值的确定的规则与欧式期权类似，但是可以在到期日之前提前行权，即在到期日之前根据当日标的资产的价格确定期权价值，以此行使权利；亚式期权，它的价值不像欧式期权或美式期权那样取决于某日的标的资产的价格，而是取决于一些交易日价格的均值，根据这一均值计算方法的不同，又分为几何平均亚式期权和算术平均亚式期权。除此之外，还有很多奇异期权（exotic option），如二项期权、鲨鱼鳍期权、敲入-敲出期权等，它们行权时间各异，对标的资产的依赖关系更为复杂，有些甚至依赖于不止一种标的资产的价格。虽然期权种类有很多，然而，正如塔勒布在《动态对冲（Dynamic Hedging）》中所说，由于对复杂的期权的监控和复制非常困难，因此长期来看，市场需求总是会趋向于简单的资产。因此，目前交易量最大的、开仓量最多的，仍是美式期权和欧式期权等较为简单的期权。本文之后讨论将以欧式期权为主。

根据行使的权利的种类不同，欧式期权又可以分为看涨期权和看跌期权。所有的欧式期权都会伴随有一个行权价，看涨期权是指持有人在到期日当天可以以行权价买入标的资产，看跌期权是指持有人在到期日当天可以以行权价卖出标的资产。期权的“权利”特点的体现在持有人的选择权上。当价格有利时，如在看涨期权的到期日标的资产的价格高于行权价，持有人可以选择行使期权，获得这一部分差价带来的收益；相反，当价格不利时，持有人可以放弃行权，在当天也不会有任何损失。期权的这一“选择权”的特性也即意味着它不同于期货合约，由于未来期权的持有人可能获得的收益将始终大于或等于 0，因此期权持有人需要为这一选择权支付一定的价格，如何确定期权的价格成为了早期金融研究中诸多学者讨论的话题。同时，由于期权的收益在价格上涨和下跌两个方向上并不对称，这一非对称性意味着期权是一种非线性的资产，期权的非线性的性质也为其定价增加了难度。

1973 年，Black 和 Scholes 在前人研究的基础之上，提出了 Black-Scholes 期权定价模型（BS 模型），这一模型成为了第一个可应用于实际生产中的的期权定价模型。他们首先设计一个包含期权和标的资产的、完全对冲了价格变动的方向性风险的组合。基于无套利原则，这一组合在一个较短时间间隔内应只获得无风险收益。根据这一等式关系构造了 Black-Scholes 方程，之后，再通过欧式期权到期日的收益结构，设置边值条件，进而求解得出 BS 模型。BS 模型的提出是划时代的，它不仅解决了欧式期权定价这一问题，直接促进了芝加哥期权交易所的诞生和之后期权交易的飞速增长，更重要的是，它的推导过程及背后的思想提供了期权定价的一个基本范式，为之后各类期权及其他衍生产品的定价奠定了基础。

BS 模型是建立在一系列严格的假设之上的，这些假设包括：

1. 标的资产的对数收益率服从几何布朗运动，即  $dS/S = \mu dt + \sigma dW$ 。
2. 卖空所得可以全部用于在投资且无需考虑保证金问题。
3. 标的资产可以无限分割且交易时无交易费用。
4. 标的资产不会产生收益（比如股利）。
5. 市场中不存在无风险套利机会。
6. 标的资产的交易是连续的。
7. 无风险利率  $r$  是常数且适用于所有期限。

基于以上假设，可以得出欧式看涨期权价格  $C$  为

$$C = N(d_1)S_t - N(d_2)Ke^{-rT} \quad (3-1)$$



欧式看跌期权价格  $P$  为

$$P = N(-d_2)Ke^{-rT} - N(-d_1)S_t \quad (3-2)$$

其中,

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[ \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T \right] \quad (3-3)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (3-4)$$

在上述公式中,

- $N(\cdot)$  为标准正态分布的累计概率密度函数
- $T$  为到期剩余时间
- $S_t$  为标的资产的价格
- $K$  为行权价
- $r$  为年化无风险利率
- $\sigma$  为标的资产的年化标准差

虽然经典的期权定价模型依赖于诸多假设,有些假设甚至和现实情况差异较大,但是,由于其表达简单直观,计算迅速,因此,这一模型在实际生产中应用较多。本文仍将根据这一模型进行模拟研究和实证研究中,之后在此基础上再进行扩展的讨论。

## 3.2 希腊字母

从期权定价公式中,可以看出期权的价格取决于诸多变量,包括行权价格、标的资产价格、标的资产波动率、到期剩余时间和无风险利率。根据 BS 模型的假设,在这些变量中,实际上只有标的资产价格是随机的,其他变量都是可以事先确定的。因此,在模拟研究的动态对冲中,我们较为关心期权价格如何随标的资产价格的变化而变化,也就是期权价格对标的资产价格的敏感性。衡量这一敏感性的指标为希腊字母。本节将详细介绍和标的资产价格有关的希腊字母及其在动态对冲中的应用,同时也会简要介绍其他常用的希腊字母以及希腊字母之间的某些联系。

### 3.2.1 Delta

在 BS 模型的推导中,Black 和 Scholes 构造了一个对冲组合,这一对冲组合的价值在瞬时是不受标的资产价格变动的影响的。该对冲组合的构建即使用到了希腊字母——Delta ( $\Delta$ )。Delta 衡量的是标的资产价格  $S$  变动时,期权价格  $V$  变动的幅度,即  $V$  对  $S$  的一阶导数,其计算方式为

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \quad (3-5)$$

根据上一节的 BS 模型,可以计算得出看涨期权的 Delta 值为

$$\Delta = N(d_1) \quad (3-6)$$

看跌期权的 Delta 值为

$$\Delta = N(d_1) - 1 \quad (3-7)$$

Delta 值的计算是动态对冲的关键。动态对冲中的对冲组合的具体构造方法如下:起始时刻卖出一份期权同时持有 Delta 份标的资产,之后在每个再平衡(rebalance)时刻,调整组合中标的资产,使其数量等于该时刻持有的期权的 Delta 值。因此,在动态对冲中,决定性的因素有两个:1) 再平衡时刻的 Delta 值。2) 再平衡时刻的选取。关于这两个因素的确定及其影响因素,我们将在之后予以介绍。

看涨期权和看跌期权的 Delta 与行权价  $K$  和到期剩余时间  $T$  的关系分别如图3-1和图3-2所示。对于看涨期权来说,Delta 始终为正,并且行权价  $K$  越高,Delta 的绝对值越低;对于看

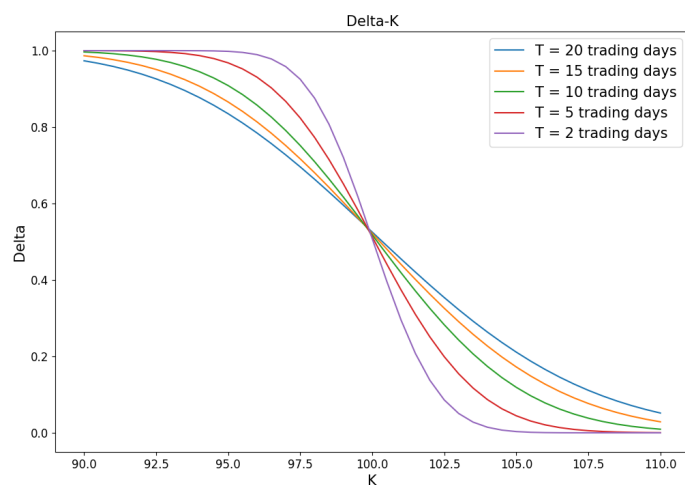


图 3-1 看涨期权 Delta 与 K 和 T 的关系

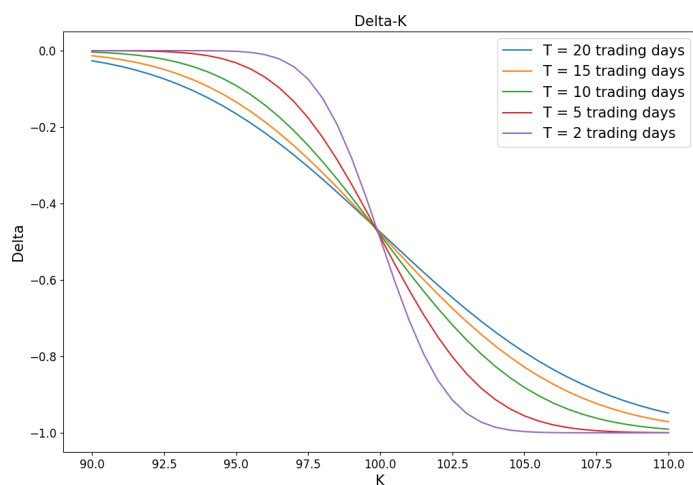


图 3-2 看跌期权 Delta 与 K 和 T 的关系

跌期权来说，Delta 始终为负，并且行权价 K 越高，Delta 的绝对值越高，这其实可以从 Delta 的性质得到直观的理解。以看涨期权为例，Delta 的计算公式为  $N(d_1)$ ，这一值与  $N(d_2)$  的值非常接近，并且两者的差值与 K 无关。而  $N(d_2)$  代表了在风险中性世界里，到期日标的价格达到 K 以上的概率，即看涨期权在到期日被行权的概率。因此，行权价 K 越高，看涨期权在到期日被行权的概率越低，Delta 的绝对值越低；看跌期权与其同理。同时，无论是看涨期权还是看跌期权，Delta 的绝对值均在 0 到 1 之间，并且随着到期日的临近，虚值期权的 Delta 的绝对值逐渐趋近于 0，实值期权的 Delta 的绝对值逐渐趋近于 1。这也可以很直观得从 Delta 的性质中得到解释：随着到期日临近，留给虚值期权进入实值和实值期权进入虚值的机会都越来越小，因此，它们的 Delta 的绝对值分别像 0 和 1 趋近。

### 3.2.2 Gamma

在动态对冲中，Delta 是我们需要主要关注的对象。但是，由于期权是一种非线性资产，它的 Delta 值会随着标的资产价格的变化而变化。因此，除了 Delta 本身的大小之外，我们还需要关注 Delta 对标的资产价格变化的敏感性。衡量这一敏感性的希腊字母即为 Gamma。Gamma 是期权价格 V 对标的资产价格 S 的二阶导数，其计算方式如下：

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \quad (3-8)$$

由此得出看涨期权的 Gamma 和看跌期权 Gamma 的表达式相同，均为

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}} \quad (3-9)$$

对于看涨期权和看跌期权，Gamma 始终为正。Gamma 的绝对值大小影响了动态对冲组合再平衡的频率，即前文所说的动态对冲的第二个决定因素。当 Gamma 的绝对值较小时，Delta 受标的资产价格变动的影响较小，对冲者若有一定的风险承受能力，选择可以暴露较小的 Delta，就不需要频繁地调整组合的 Delta，即使需要调整每次调整的幅度也不会很大；相反，如果 Gamma 的绝对值较大时，则相对较小的标的资产价格的变动也会带来组合 Delta 的很大的变动，此时对冲者就需要更频繁地、更大幅度地调整组合的 Delta 值，以使组合 Delta 的暴露回到风险承受范围之内。对于期权策略组合来说，可以通过买卖期权来实现 Gamma 中性。然而，对于动态对冲组合，由于只能使用线性工具进行对冲，对冲者并不能改变组合的 Gamma。因此，在动态对冲中，通过确定再平衡时点以及在再平衡时点买卖线性工具，与其说是对 Delta 这一次风险进行对冲，不如说是使用线性工具来逼近一个二次函数，即是对 Gamma 风险进行管理。

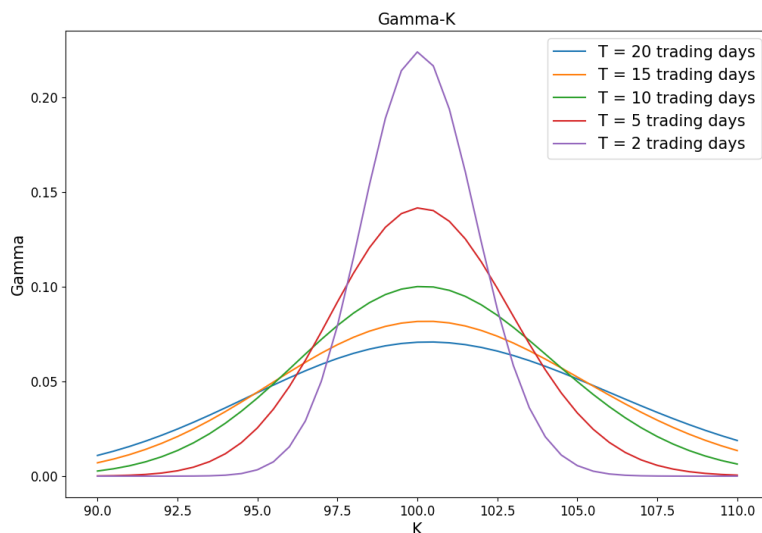


图 3-3 Gamma 与 K 和 T 的关系

Gamma 与行权价 K 和到期剩余时间 T 的关系如图3-3所示。无论看涨期权还是看跌期权，平值附近的 Gamma 最高。并且随着到期日的临近，平值期权的 Gamma 逐渐增大且 Gamma 对 K 的分布越来越呈现出“尖峰”的特点。因此，一般而言，到期剩余时间越短，再平衡频率需要增高以更好地管理 Gamma 风险。到期当日时，由于平值附近的期权往往会游离于实值

和虚值之间，其 Delta 的绝对值则在 1 和 0 之间变化，Gamma 也会非常高。这时的 Gamma 风险又被称为大头针风险（pin risk）。对于一般的期权交易者来说，最好的管理大头针风险的方式就是提前展期，不持有临近到期的期权；然而，对于场外期权交易商而言，在动态对冲中他们必须要面对这一风险，如何更好地管理大头针风险也是场外期权交易商面临的一个难题。

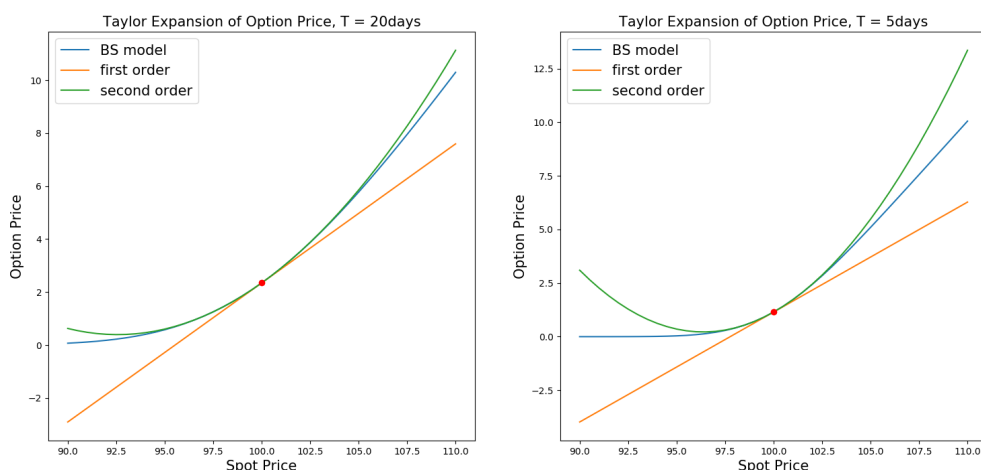


图 3-4 平值看涨期权价格的泰勒展开

至于使用 Gamma 可以从多大精度上拟合标的价格，可以参见图3-4。该图分别展示了到期剩余时间为 20 日和 5 日时，平值看涨期权价格随标的价格的变化情况，定价时使用的年化波动率为 20%。从图中可以看出，在到期时间剩余 20 日时，使用二次函数在标的价格上下约 5% 的范围内可以较好地拟合 BS 模型的价格；随着到期日的逐渐临近，在到期时间剩余 5 日时，使用二次函数只能在标的价格上下约 2% 的范围内较好地拟合 BS 模型的价格。这与到期日临近时，Gamma 逐渐呈现“尖峰”的特点有关。

### 3.2.3 其他希腊字母

除了 Delta 和 Gamma 这两个和标的资产价格相关的希腊字母之外，常用的希腊字母还有 Theta、Vega 和 Rho，本小节将一一予以介绍。

#### 3.2.3.1 Theta

Theta 是指期权价格对时间变化的敏感性，即期权价格  $V$  对到期剩余时间  $T$  的一阶导数。一般来说，对于看涨期权和看跌期权，Theta 始终为负。在其他条件不变的情况下，到期剩余时间是始终递减的，期权价格在 Theta 上的变化是可以确定的，因此 Theta 又被称为期权的时间价值。对于需要动态对冲的场外期权空头方而言，在进行了 Delta 的对冲之后，对冲组合有正的 Theta，看起来可以获取一个稳定的时间价值。实际上，这也是很多期权卖方策略中收益的主要来源。

然而，在考虑时间价值时，不能够单独考虑 Theta，而是要把 Gamma 一起纳入考量。对于场外期权空头方，他们之所以有一个始终为正的 Theta 暴露来收取一个看似稳定的时间价值，是因为他们同时有负的 Gamma 暴露。随着每天时间的流逝，只要标的资产的价格有所波动，空头方在 Gamma 上总会有一定的损失。与 Theta 稳定的收益不同的是，Gamma 上的损失的大小取决于当日的资产价格波动的绝对值的大小。因此，正的 Theta 是对暴露的 Gamma 风险的补偿。当然，Theta 上的收益并不是总能够补偿 Gamma 上的损失的。BS 方程实际上就



定量地反映了这一补偿关系。根据 BS 方程

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\Delta t = r(-V + S \frac{\partial V}{\partial S})\Delta t \quad (3-10)$$

等式右边表明完全对冲掉 Delta 的对冲组合在  $\Delta t$  时间内只能够获得无风险收益。将等式左边改写, 使用希腊字母替代偏导数

$$-\Theta\Delta t - \frac{1}{2}\Gamma(\sigma\sqrt{\Delta t}S)^2 = r(-V + S \frac{\partial V}{\partial S})\Delta t \quad (3-11)$$

式3-11左边第一项代表了在  $\Delta t$  时间内, 场外期权空头方在 Theta 上的收益, 第二项代表了场外期权空头方在 Gamma 上的损失。注意此处的  $\sigma$  是在期权定价模型中使用的波动率。因此, 从直观上理解, 可以认为  $\sigma\sqrt{\Delta t}$  代表了维持 Theta 的收益和 Gamma 的损失等于无风险收益时, 标的资产实际变化率的绝对值。当标的资产的实际变化率等于该值时, 对冲组合在  $\Delta t$  时间内只能获得无风险收益; 当标的资产的实际变化率大于该值时, 对冲组合将获得小于无风险收益的收益; 当标的资产的实际变化率小于该值时, 对冲组合将获得大于无风险收益的收益。这一等式揭示了场外期权空头方的收益和风险来源, 对场外期权定价以及动态对冲实际操作中的风险控制有着重要意义。关于该式的更详细的讨论, 将在下一节中进行。

### 3.2.3.2 Vega

Vega 是指期权价格对标的资产波动率的敏感性, 一般是一个正数。在动态对冲中, 如果整个过程使用固定的波动率, 则 Vega 不会成为损益的来源, 其主要的应用是在场内期权的交易中。由于场内期权的波动率不断变化, 因此场内期权交易者不能忽视在 Vega 上的损益, 有时 Vega 上的损益甚至会占到策略损益的主要部分。关于 Vega 的更进一步的讨论将在下一节进行。

### 3.2.3.3 Rho

Rho 是指期权价格对无风险利率的敏感性。一般情况下, 当标的波动率相对于无风险利率较大时, Rho 并不成为我们在动态对冲中考虑的因素。对于某些特定的标的, 如外汇, 其波动率较小 (年化波动率一般在 10% 以下), 此时 Rho 会显得更为重要。

## 3.3 波动率

BS 模型假设标的资产的收益率服从几何布朗运动, 其波动率是一个事先确定的常数。然而, 在实际市场中, 首先我们无法确定标的资产波动率是否是一个常数, 其次我们也无法直接先验地得到这一波动率。同时, 在实际生产的期权定价中, 如果以当前时点做决策的话, 行权价格、标的资产价格、到期剩余时间和无风险利率都是已知量, 需要决定的是定价时采用的标的资产波动率的值。也就是说, 在做期权定价时, 标的资产波动率和其他变量不同, 是需要我们通过某种方式来估计而非可以直接确定的。本节将对期权定价模型中和动态对冲中所使用的波动率进行简要介绍, 之后将介绍在实证研究的动态对冲中确定标的资产波动率的几种方法。

### 3.3.1 隐含波动率

隐含波动率是期权实际交易中的常用指标。在对期权的定价中, 一般我们需要事先估计波动率, 之后使用定价模型进行定价。对于场内期权而言, 其价格由市场参与者通过买卖行为而非使用某种定价模型来确定, 此时期权的价格是已知的。由于标的资产波动率和期权价格之间存在着——对应的关系, 并且期权定价中所使用的其他变量都是已知的, 因此可以使用数值的方法, 如牛顿法、二分法等计算出期权价格对应的波动率。这一波动率又被称为隐含波动率。

期权定价模型中的波动率是标的资产未来的波动率，因此隐含波动率代表了市场对标的资产未来的波动率大小的估计。准确来说，隐含波动率代表的是标的资产从当天到到期日的年化波动率大小。隐含波动率越大，代表标的资产未来的波动率越大。由于期权到期日的收益是不对称的，标的资产未来的波动率越大，期权越有可能进入实值状态，其到期日收益的期望越大。因此隐含波动率越大，期权价格越高。这也说明了为什么 Vega 始终为正。

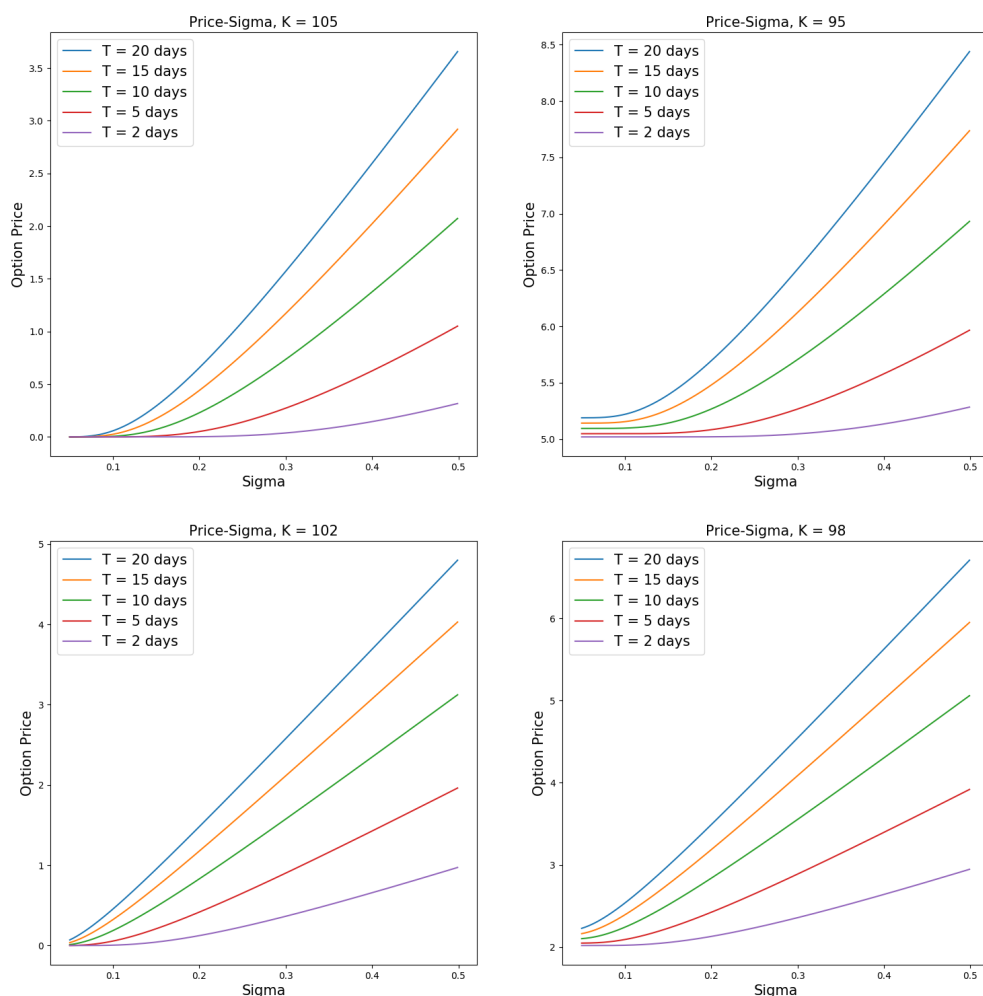


图 3-5 看涨期权价格和隐含波动率

图3-5展示了不同行权价的期权在不同到期剩余时间下看涨期权的价格和隐含波动率的关系。从图中可以看出，对于虚值和实值的期权，随着到期日的临近，在隐含波动率较小时期权价格对隐含波动率变得越来越不敏感，并且这一不敏感的区域逐渐扩大。例如行权价为105的看涨期权，在到期剩余时间为2个交易日时，隐含波动率在大约30%之内变化对其价格都影响不大。这是因为到期剩余时间较小，虚值程度较深，因此在仅有的2个交易日内标



的资产必须要有非常大的波动，该期权才有可能进入实值，否则到期时价值将归零。这也说明随着到期日的临近，Vega 对行权价  $K$  的分布也会越来越展现出“尖峰”的特点。

隐含波动率的确定在场外期权的动态对冲中有着重要的意义，隐含波动率的大小决定了动态对冲组合在未来所获得的期望收益的大小。具体而言，隐含波动率对于场外期权的空头方来说，是属于需要做出决策的变量，确定隐含波动率的大小即确定了卖出的期权的价格。根据式3-11，若未来标的资产的实际波动率高于定价时所用的隐含波动率，则场外期权空头方将会有有一个低于无风险收益的期望收益；反之，若标的资产的实际波动率低于定价时所用的隐含波动率，则场外期权的空头方将会有有一个高于无风险收益的期望收益。因此，在确定隐含波动率之前，需要对标的资产未来的实际波动率有一个较为准确的估计，这一估计的准确性将直接影响到最终动态对冲组合收益的大小。

以上是对隐含波动率对动态对冲影响的理论上的直观解释。具体到动态对冲的操作上，我们之前提到动态对冲中有两个需要确定的因素，一个是再平衡时刻的 Delta 值，另一个是再平衡时刻的选取。在确定了隐含波动率之后，使用这一波动率根据 BS 模型计算出 Delta 值，就确定了动态对冲的第一个因素。因此，与其说在每个再平衡时刻需要确定 Delta 值，不如说需要确定计算 Delta 值使用的隐含波动率，也就是估计标的资产未来收益率的波动率。实际生产中，我们需要做的，也即是找到一个尽可能准确的方法，来对标的资产未来收益率的波动率做出估计，之后，再综合其他因素对这一波动率进行调整，确定用于计算 Delta 的隐含波动率。

### 3.3.2 实际波动率

上一小节我们提到，在实际动态对冲中确定未来标的资产的实际波动率是非常关键的，它决定了动态对冲组合每个交易日的期望收益。实际波动率是对一段时间内标的资产价格平均波动幅度的一个估计。在 BS 模型中使用的波动率为年化波动率，使用历史数据计算年化波动率的方法为收益率的样本方差乘以年化系数

$$\sigma^2 = \tau \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2 \quad (3-12)$$

年化系数  $\tau$  与对数收益率  $u$  的计算频率有关。设对数收益率  $u$  对应的时间间隔为  $\Delta t$ ，则  $\tau = \frac{1}{\Delta t}$ 。因此，以日频收益率为例， $\sigma\sqrt{\Delta t}$  实际上代表了标的资产的日频波动率。注意到这一日频波动率的计算和上文所说的维持 Theta 上的收益和 Gamma 上的损失之和为无风险收益的标的变化率的绝对值相同，这也揭示了式3-11同实际波动率之间的联系。

对未来的实际波动率的估计方法有很多种，但是大部分方法的基本思想都是认为标的资产的未来的实际波动率将会延续历史规律，因此通过充分挖掘历史信息可以预测未来的实际波动率。由于本文旨在研究动态对冲相关的理论和方法，而未来实际波动率的预测是一个更深层次的问题，本文对这一问题不做详细的探讨，在此仅介绍几种常用的波动率预测方法。

(1) 隐含波动率。如果需要定价或对冲的场外期权有对应的场内期权的话，场内期权的隐含波动率是未来实际波动率的一个很好的估计，具体原理在上一小节有所讨论。然而，大多数情况下，场外期权交易商交易的期权一般都没有对应的场内期权或场内期权交易很不活跃。因此，这一方法虽然效果较好，但是实际操作中难以应用。

(2) 历史波动率。使用历史波动率作为对未来波动率的预测是最为简单的波动率预测方法。这一方法假设预测期的收益率数据和所用的历史收益率数据有着相同的分布特点，因此可以通过直接计算历史数据的样本标准差来对未来的波动率进行预测。计算简单、速度快是历史波动率方法的优势；然而，由于这一方法过于简单，在预测时会忽略掉历史数据中的一些规律，同时，如何决定所用历史数据的长度也是值得讨论的问题。一般习惯上而言，所采用的历史数据长度和预测期长度相同。

(3) 指数加权移动平均 (exponentially weighted moving average, EWMA)。EWMA 波动率的计算方式为

$$\sigma_t = \frac{\sum_{i=0}^n \beta^i u_{t-i}^2}{\sum_{i=0}^n \beta^i} \quad (3-13)$$



EWMA 方法给予了距离当前时点较近的数据更高的权重,认为越近的数据包含了更多的信息,对未来实际波动率预测的价值越大。这一方法的优势在于不需要依赖过多的历史数据,并且可以动态地反映实际波动率的变化并以此做出预测;然而,它不能反映实际波动率均值回复的特点。有时在计算时,会将收益率减去对应的 EWMA 均值再进行平方,本文将采用这种做法。对于 EWMA 公式中  $\beta$  的确定,本文将采用 JP Morgan 在 Riskmetrics 数据库中使用的值 0.94。

(4) GARCH(1,1) 模型。GARCH(1,1) 模型其实和 EWMA 模型类似,但是加入了一个均值回复项,因此可以反映实际波动率均值回复的特点。其递推表达式如下

$$\sigma_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_1 u_t^2 + \beta \sigma_t \quad (3-14)$$

虽然 GARCH 模型考虑了波动率分布的更多地特点,但是它也有一些不足之处。GARCH 模型要求被预测的序列的波动率有平稳性。然而,实际市场中许多资产收益率序列的波动率水平常常会随市场、政策环境等因素发生较大的改变,这使得 GARCH 模型的预测效果将会变差甚至无法得出稳定的估计参数。

Poon 和 Granger (2003) 对各个波动率预测方法的预测能力进行过总结。从总结的结果来看,虽然 GARCH 族模型看似更为复杂,但是其预测能力并没有明显的优势。在基于历史波动率的方法(包括历史波动率和 EWMA 波动率)和 GARCH 族模型比较中,他们统计了 39 个研究,其中 22 个研究显示基于历史波动率的方法优于 GARCH 族模型,17 个研究的结果相反。相比之下,从场内期权数据中计算得出的隐含波动率有着最好的预测效果。18 个研究比较了隐含波动率和 GARCH 族模型的优劣,其中 17 个认为隐含波动率较 GARCH 族模型更优。实际上,由于隐含波动率使用了和未来实际波动率更相关的信息(场内期权信息),所以其有最强的预测能力;相比之下,无论是 GARCH 族模型还是基于历史波动率的方法,使用的都是历史收益率信息,因此两者的预测能力并无太大差别。本文在实证研究中,将主要使用历史波动率和 EWMA 波动率作为对未来实际波动率的预测。

### 3.4 动态对冲策略

在上文中,我们对动态对冲这一方法的基本思想和影响因素已经有了一定的介绍。本文所说的动态对冲是指 Delta 上的动态对冲。对于场外期权空头方来说,其实现的基本思想如下:在起始时刻,卖出一份期权同时持有 Delta 份标的资产做对冲,之后在每个再平衡时刻,调整持有的标的资产,使其数量等于该时刻空头期权的 Delta 值。同时,对于这一过程中产生的资金缺口或盈余,本文假设可以通过以无风险利率借入或贷出。动态对冲的主要结果是对冲成本,对冲成本的具体计算方式将在下一章介绍。

基于之前的分析,我们认为动态对冲的决定性的因素有两个:1) 再平衡时刻的 Delta 值。2) 再平衡时刻的选取。关于再平衡时刻的 Delta 值的确定,我们已经做出了详细的介绍,认为确定某一时刻空头期权 Delta 值即为估计该时刻标的资产的未来波动率。对于未来波动率的估计方法,我们在上一节也有所涉及。本节我们将主要关注再平衡时刻的选取。关于这一因素,我们将通过考察两种动态对冲策略来进行介绍。

#### 3.4.1 固定时点动态对冲

固定时点动态对冲是指选取固定时间间隔的再平衡时刻进行 Delta 的对冲操作,在对冲起始时刻即确定了所有的再平衡时间点。理论基础简单、易于控制是这一策略的优势。并且,这也是 BS 模型的推导中所使用的动态对冲策略。Leland (1985) 在推导有交易成本的期权定价模型时,使用的也正是这一策略。然而,这一方法的缺点在于难以确定再平衡时刻的时间间隔。如果时间间隔过短,虽然可以获得较高精度的对冲效果,但是频繁的对冲会使操作的难度增大;若对冲的时间间隔较长,虽然操作时较为简单,但是对冲效果会相应变差。固定时点动态对冲的更大的缺陷在于,当到期日临近时,Gamma 会逐渐增大,Delta 的波动也会随之增大。若采用的对冲时间间隔较小,则在初始阶段操作频繁,但是对整个组合的 Delta 暴



露影响不大；若采用的对冲时间间隔较大，则在临近到期日时对冲频率与 Delta 的波动程度无法匹配，对冲精度随之降低。

### 3.4.2 固定 Delta 区间动态对冲

与固定时点动态对冲不同，固定 Delta 区间动态对冲并不会事先确定再平衡时刻。这一策略的基本思想是，首先设定一个固定的 Delta 阈值，同时选定一个观察 Delta 的频率。随着时间的变化，在每个 Delta 观察时刻，当对冲组合的 Delta 的绝对值暴露超过该阈值时，则进行对冲操作，调整组合的 Delta 值为 0；若对冲组合的 Delta 的绝对值暴露小于该阈值，则不进行对冲操作。这一策略实质上是基于了 Hodges 和 Neuberger (1989) 及其后续研究的思想，与在效用理论中风险和收益的权衡类似，使用一个较小的 Delta 风险暴露来平衡对冲带来的交易成本。该策略的关键点在于 Delta 阈值的确定，相当于是 Delta 风险和对冲成本之间的权衡。

本文在模拟分析和实证研究中，将主要使用以上两种动态对冲策略。关于交易成本以及动态对冲策略的参数对对冲效果和对冲成本的影响，我们将在下一章进行具体的讨论。

## 3.5 模拟方法

在动态对冲研究中，模拟方法主要应用在资产价格路径的模拟上。关于资产价格路径的模拟，常用的有蒙特卡洛 (Monte Carlo) 方法和拟蒙特卡洛 (Quasi-Monte Carlo) 方法。蒙特卡洛方法是数值模拟中最为常用的方法，它实际上是这一类模拟方法的总称。本文所说的蒙特卡洛方法是一个相对狭义的概念，是指通过生成随机 (random) 或伪随机 (pseudo-random) 序列，模拟一个随机事件的可能情况，进而用频率来估计概率的方法。根据大数定律，若想有效地应用蒙特卡洛方法，需要较多的模拟的次数。在本文的研究中，我们并不直接考察每一次模拟的结果，而是对每一次的结果的一个函数进行求期望的操作，这一期望即为蒙特卡洛积分。设模拟次数为  $N$ ，根据中心极限定理，蒙特卡洛积分的收敛速度为  $O(N^{-\frac{1}{2}})$ 。蒙特卡洛的优势在于，其收敛速度独立于积分的维数。这一特点也使得其鲁棒性非常强，可以适用于很多高维的问题。然而，这一鲁棒性的代价是相对较慢的收敛速度。若要将误差的标准差大小的小数点向后移一位，需要将模拟次数提升为的 100 倍。

虽然蒙特卡洛方法鲁棒性较好，但是其对计算时间要求较高，因此本文最初希望可以找到一种收敛速度更快同时又不失鲁棒性的方法。我们考察了拟蒙特卡洛方法。拟蒙特卡洛方法使用低差异序列 (low discrepancy sequence) 进行模拟，经典的低差异序列包括 Halton 序列、Sobol 序列和 Faure 序列。差异 (discrepancy) 是用来形容均匀性 (uniformity) 的，低差异序列比伪随机序列更接近均匀分布。与蒙特卡洛方法使用线性同余法等方法通过生成伪随机序列来试图模仿随机数的性质不同，低差异序列实际上是确定性的序列，并且其具有一定的自相关性来降低差异。因此拟蒙特卡洛方法只能用在蒙特卡罗积分问题上，使用其进行优化或单纯考察其模拟的结果是无意义的。拟蒙特卡洛模拟的收敛速度是  $O((\log N)^d N^{-1})$ ，其中  $d$  为模拟的维数。从这一收敛速度可以看出，当模拟次数  $N$  相对于维数  $d$  很大时，可以获得接近  $O(N^{-1})$  的收敛速度。然而，当  $d$  增长时， $N$  需要以指数速度增长，以维持相应的收敛速度。如果  $N$  不够大的话，拟蒙特卡洛模拟的收敛速度会慢于蒙特卡洛模拟的收敛速度。正如 Caflisch (1998) 指出的，高维性会很大程度上限制拟蒙特卡洛模拟的有效性。具体到本文的研究上，由于动态对冲是一个路径依赖的问题，因此其对应的维数即为标的资产价格路径模拟的频数，这一维数通常会很高 (大于 50)。在这样高维的模拟下，拟蒙特卡洛模拟效果将不如蒙特卡洛模拟。因此，在之后的研究中，本文将使用蒙特卡洛模拟生成资产价格序列。

当然，蒙特卡洛模拟可以通过方差减少技术来加快收敛速度，这一速度上的提高通常是通过减小  $O(N^{-\frac{1}{2}})$  项的系数，而并不会将速度提升一个量级，因此，对于这一技术，本文将不深入进行讨论，亦不会在应用中有体现。关于拟蒙特卡洛模拟在高维情况下表现较差的问题，Wang 和 Sloan (2008) 给出了一个解决方法，他们使用了一个新的计算差异的算法，使得拟蒙特卡洛方法在高维时的表现优于或至少不弱于蒙特卡洛方法。对于这一算法的细节、实现及应用，本文亦不进行讨论，而是将其作为未来可能的改进方向。

在确定了模拟使用的方法后，我们只是得到了生成参数为  $(0, 1)$  的均匀分布的随机数的方式。获得了这一随机数后，可以使用正态分布的逆变换获得正态分布的随机数。之后，基于标的资产符合几何布朗运动的假设，生成价格序列。在之后的模拟研究中，我们在 BS 模型的假设之上，改变或增加如下设定：

- 买卖标的资产时，交易费用与交易额成比例。
- 所有的日期和年化波动率均使用交易日计算，每年 252 天。

### 3.6 本章小结

本章主要介绍了期权定价和动态对冲的相关理论，重点考察了期权定价和动态对冲之间的联系以及动态对冲的影响因素，对动态对冲的原理和实践进行了剖析，包括未来波动率的估计和动态对冲策略实现方法。同时，也对本文使用的模拟方法和假设进行了简要介绍。



## 第四章 模拟研究

### 4.1 案例背景

随着我国经济的发展,我国市场与全球市场联系的越来越紧密,各类商品的市场化程度不断升高,我国实体企业在原材料或产成品的价格上的风险意识也逐渐增强,使用衍生产品对冲风险的需求与日俱增。期权作为一种衍生产品,在风险对冲上有着诸多的优势,可以满足企业对价格风险管理的需求。然而,我国场内期权市场刚刚起步,提供的场内期权产品从数量上或品种上难以满足这些企业的需求。因此,诸多期货公司和券商作为场外期权的交易商,通过场外市场为这些企业提供场外期权,帮助他们进行风险管理。

在场外期权市场中,交易商以提供流动性为主,通常处于净卖出期权的位置。并且,由于期权空头方的理论最大损失远大于期权多头方的理论最大损失,对于期权空头的对冲是交易商通常更为关心的。在之后的研究中,我们将以一家期货公司面临的模拟案例的形式,主要对期权空头方的动态对冲进行分析。

A 公司是全国知名的发电集团,以火力发电为主,对动力煤有稳定的需求。某日,A 公司下属某发电厂欲于 60 个交易日后购入动力煤 100 万吨。该公司管理层经过讨论认为,应使用衍生品工具对冲这批动力煤未来价格上涨的风险。然而,由于近期动力煤价格不稳定,未来价格存在着一定的下行空间。因此,公司不希望直接使用期货锁定动力煤价格,以至于会在动力煤价格发生大幅下跌时仍以之前锁定的、相对较高的价格购入。基于以上考量,A 公司决定向 B 期货公司购入看涨期权进行对冲。假设动力煤现货价格为 100 元/吨,每手期权对应 1 吨动力煤,期权执行价 100 元,无风险利率为每年 3%,动力煤收益率的波动率为每年 20%,期权期限为 60 个交易日。使用 BS 模型,可以得出该期权价格约为每张 4.24413 元。B 期货公司在出售这些看涨期权后,面临对冲问题。公司决定使用动态对冲的方法来对冲暴露的期权空头。

### 4.2 研究方法

根据上文的分析,动态对冲的具体执行逻辑如下:在初始时刻,根据期权头寸暴露的  $\Delta$ ,买卖相应数量的标的资产,并记录相应的现金成本。若为买入标的资产,则现金成本为正;若为卖出标的资产,现金成本为负。之后每个交易日,根据累计的现金成本,使用无风险利率计算当日的利息支出或收入,加总到现金成本中。之后进行再平衡条件的判断,若满足再平衡条件(达到了确定的再平衡时刻或组合的  $\Delta$  的绝对值超过了设定的  $\Delta$  阈值),则进行对组合的再平衡,将组合的  $\Delta$  暴露调整为 0,并类似地记录现金成本,直到到期日结束。到期日结束后,根据期权的行权情况,计算现金上的支出或收入,记入现金成本。最后,将总现金成本折现回初始日期,得到对冲成本。若有交易成本的话,只需在买卖标的资产时对应扣减相应的现金成本即可。

在对动态对冲结果的评价上,我们使用三个指标:期望对冲成本、相对对冲波动率和平均再平衡次数。对冲成本期望为模拟结果中对冲成本的平均值,对冲成本期望越小,说明场外期权空头方以此策略对冲的期望成本越小,策略越优。相对对冲波动为标准化后的对冲成本的标准差,具体计算方法为模拟结果中对冲成本的标准差除以期权的理论价格,相对对冲波动越小,说明场外期权空头方以此策略对冲的成本的波动越小,对于风险厌恶型的空头方来说策略越优。再平衡次数则会影响到交易成本的计算,同时也会带来隐性的操作成本。一般认为其他指标相同的情况下,再平衡次数越少,策略越优。同时,我们也会考察对冲成本的偏度,以对动态对冲策略的尾部风险有所认识。

基于以上期权的基本参数以及动态对冲的执行逻辑和结果评价指标,我们使用蒙特卡洛模拟的方法,进行了四十万次模拟。根据蒙特卡洛模拟的收敛速度,最终得到的一阶矩的误差应当在 0.0005 量级,本节之后所有的数值上的比较和结论均以此误差范围为前提。我们分



别模拟了固定时点对冲策略和固定 Delta 区间对冲策略的对冲效果，将首先考察无交易费用时动态对冲的结果，以对动态对冲的结果有一个初步的、直观的认识，之后再加入不同的交易成本，对比得出交易成本对动态对冲的影响。最后，我们将基于模拟结果，讨论动态对冲策略和参数的选择问题，试图找出最优的对冲策略及其对应的参数。

### 4.3 无交易费用时的动态对冲

#### 4.3.1 固定时点动态对冲

在固定时点动态对冲中，我们选取再平衡时间间隔分别为 1 天、3 天、5 天、10 天和 15 天，对冲结果如下

表 4-1 无交易费用时固定时点动态对冲结果

再平衡时间间隔	1	3	5	10	15
期望对冲成本	4.24392	4.24806	4.25002	4.25724	4.25955
对冲成本标准差	0.42881	0.73248	0.93660	1.30162	1.57070
相对对冲波动率	0.10104	0.17259	0.22068	0.30669	0.37009
平均再平衡次数	59.00000	19.00000	11.00000	5.00000	3.00000
对冲成本偏度	0.20244	0.31600	0.39032	0.52075	0.60554

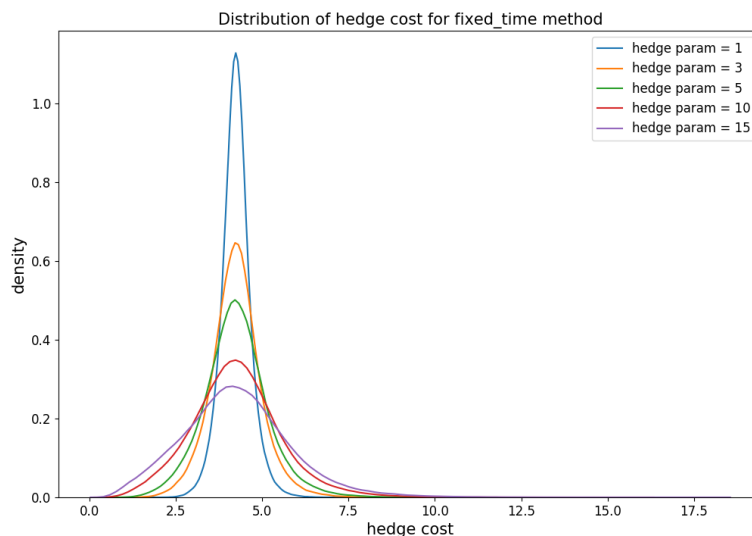


图 4-1 无交易费用时固定时点动态对冲对冲成本分布

从表4-1中，我们可以看出，随着再平衡频率的提高，对冲成本逐渐向 BS 模型计算出的理论价格收敛，并且相对对冲波动率逐渐减小，说明场外期权空头方的风险逐渐减小，最终的对冲成本变得更加“确定”，对冲效果逐渐提高。这与 BS 模型的推导中的极限思想也是符合的。如果再平衡频率可以无限地提高，即再平衡时间间隔趋向于 0，则期望对冲成本将依概率收敛到根据 BS 模型计算出的理论价格。虽然再平衡时间间隔为 1 天时的相对对冲波动率最低，对冲成本也最低，1 天的再平衡时间间隔此时策略的最优参数，但是，其再平衡次数也

达到了 59 次，若存在交易成本的话，频繁的再平衡将导致的交易成本的增加，这可能会提高对冲成本，使得其最终的期望对冲成本高于频率更低的情况。

图4-1展示了不同再平衡时间间隔下，对冲成本的分布情况。对冲成本的分布整体上呈现出右偏的特点。再平衡时间间隔越长时，对冲成本偏度越大，尾部风险较高，这可以从期权收益不对称的角度解释，同时也与动态对冲的具体的执行逻辑有关。Delta 上的动态对冲在操作上其实是一个追涨杀跌的过程，最终的对冲成本取决于买入或卖出标的资产过程中标的资产的平均成交价格。随着到期日的临近，Gamma 逐渐升高，由于再平衡时间较长，在两个再平衡时点之间如果标的价格出现了较强的单边趋势，则对冲组合的 Delta 相对于 0 的偏离值将会急剧增大，导致下一次再平衡时空头方需要以较高的价格买入大量标的资产对组合进行对冲。相比之下再平衡频率较高的情况，可以在标的出现单边趋势的过程中逐渐买入标的资产，最终标的资产的平均成交价格会相对较低，带来更低的对冲成本。因此，随着再平衡频率的提高，该动态对冲策略的尾部风险也会逐渐降低。

#### 4.3.2 固定 Delta 区间动态对冲

在固定 Delta 区间动态对冲中，我们选取 Delta 阈值分别为 0.03、0.05、0.1、0.15 和 0.2，对冲结果如下

表 4-2 无交易费用时固定 Delta 区间动态对冲结果

Delta 阈值	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2
期望对冲成本	4.24618	4.24841	4.25352	4.26512	4.26066
对冲成本标准差	0.44593	0.48191	0.63572	0.83305	1.00841
相对对冲波动率	0.10507	0.11355	0.14979	0.19628	0.23760
平均再平衡次数	29.43722	20.25935	9.30494	5.20781	3.36678
对冲成本偏度	0.18198	0.14027	0.11910	0.22379	0.19918

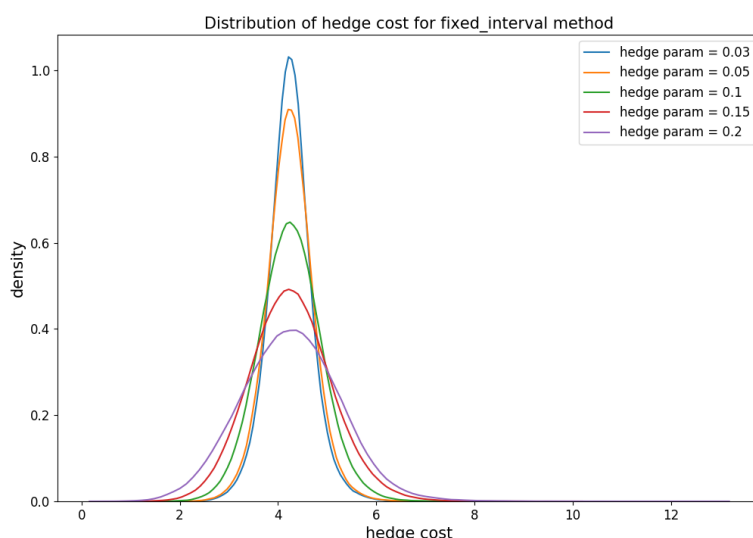


图 4-2 无交易费用时固定 Delta 区间动态对冲对冲成本分布

从表4-2中，我们可以看出，随着 Delta 阈值的减小，对冲成本逐渐向 BS 模型计算出的

理论价格收敛，并且相对对冲波动率逐渐减小，说明场外期权空头方的风险逐渐减小，最终的对冲成本变得更加“确定”，对冲效果逐渐提高。类似的，Delta 阈值为 0.03 时，对冲效果最好，但是此时的再平衡次数也最多。图4-2中对冲成本的分布同样呈现出右偏的特点。但是，与固定时点对冲不同的是，随着 Delta 阈值的减小（对冲次数的增加），对冲成本偏度并没有出现递减的趋势。

表 4-3 无交易费用时固定 Delta 区间动态对冲结果

Delta 阈值/再平衡时间间隔	0.03/1	0.05/3	0.1/5	0.15/10	0.2/15
期望对冲成本百分比差异	0.05344%	0.00842%	0.08244%	0.18559%	0.02614%
相对对冲波动率绝对差异	0.40336%	-5.90379%	-7.08918%	-11.04047%	-13.24857%

将表4-2和表4-1中平均再平衡次数最接近的结果进行对比，得到表4-4。从该表中，我们发现平均再平衡次数相差不大时（后四组结果），固定 Delta 区间对冲策略的期望对冲成本略高于固定时点对冲策略的期望对冲成本。这可以从两者在再平衡时需要对冲的 Delta 的值的分布得到解释。虽然两者对冲再平衡次数近似，但是对于固定 Delta 区间对冲来说，它每次再平衡时需要对冲的 Delta 一定会超过 Delta 阈值，因此其每次买入或卖出标的资产的量存在一个下界；而对于固定时点对冲，每次再平衡时需要对冲的 Delta 的绝对值不存在这样一个下界。因此在再平衡次数近似的情况下，前者的期望对冲成本会较高。同时，基于这一分析，固定 Delta 区间对冲对组合 Delta 的暴露控制的更好，因此其在相对对冲波动率的绝对数值上有很大提升。

再对比 Delta 阈值为 0.03 和再平衡时间间隔为 1 天的结果，两组结果的期望对冲成本和相对对冲波动率都差异不大，但是前者的平均再平衡次数在 29 次左右，而后的再平衡次数达到了 59 次，这说明在有交易成本时，固定时点对冲的总对冲成本可能会高于固定 Delta 区间对冲。同时，固定 Delta 区间对冲策略的对冲成本偏度整体要小于固定时点对冲策略的对冲成本偏度。以上对比分析说明，在无交易成本时，固定 Delta 区间对冲策略的再平衡时点选择更为有效，其对冲效果要优于固定时点对冲策略，并且可以更好地减小尾部风险。

## 4.4 有交易费用时的动态对冲

在上一节，我们考察了无交易费用时，固定 Delta 区间对冲策略和固定时点对冲策略的对冲效果。在两个策略的分析中，我们都得出了再平衡次数越多，期望对冲成本越低，相对对冲波动率越低，对冲效果越好的结论。然而，在加入了交易费用后，再平衡次数越多，额外的交易成本也越多，因此对冲效果的比较结果可能会有所改变。本节我们将考察交易费用对对冲效果的影响。

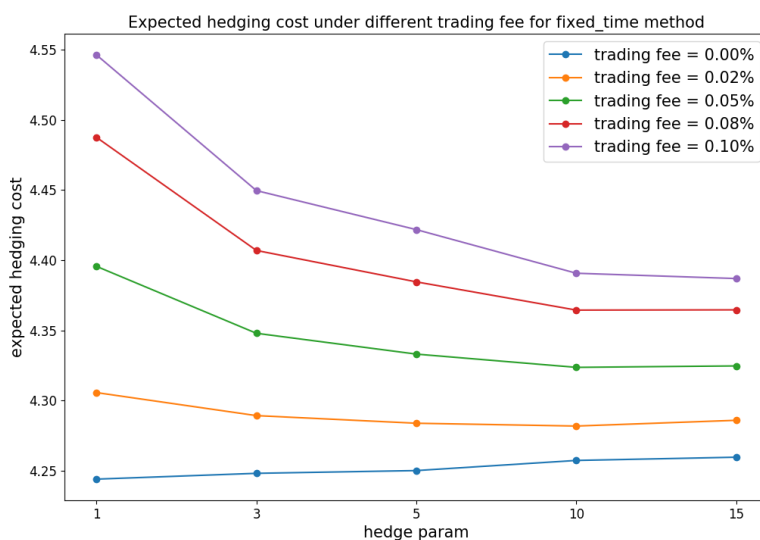
我们采用固定比例的交易费用，分别选取 0.02%、0.05%、0.08% 和 0.1% 四个水平的交易成本，与上一节类似地进行动态对冲的模拟，模拟结果参见附录A。我们将对表A-1到表A-8的结果进行对比分析。

### 4.4.1 交易费用对期望对冲成本的影响

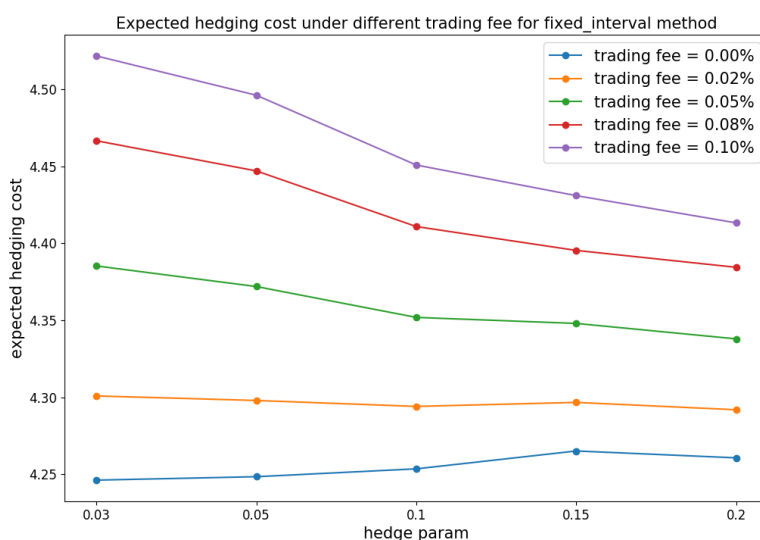
图4-3展示了不同交易费用对期望对冲成本的影响。引入交易费用将会增加期望对冲成本，其他条件相同的情况下，交易费用越高，期望对冲成本越高。

通过相同策略下每个表内结果的比较，我们发现随着平均再平衡次数的增加，期望对冲成本也基本上呈现出增加的趋势，但是并不严格单调。例如对于固定时点对冲策略，在交易费用较小时，存在一个再平衡时间间隔，其期望对冲成本为极值点，当再平衡时间间隔从该时间间隔增加或减小时，期望对冲成本总是增加。由于较长的再平衡时间间隔将带来较大的对冲误差，从而增加对冲成本，同时平均再平衡次数的增加也会增加交易费用从而对冲成本，因此在两者的共同作用下，将存在一个极值点，使其期望对冲成本最小。当交易费用较大时，其影响将占主要部分，此时期望对冲成本将会更严格地随平均再平衡次数递增。





(a) 固定时点动态对冲



(b) 固定 Delta 区间动态对冲

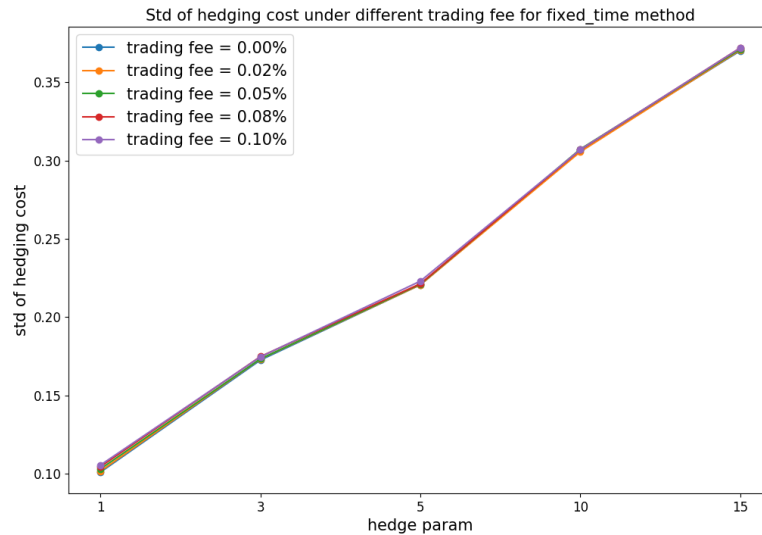
图 4-3 交易费用对期望对冲成本的影响

通过不同策略，相同交易费用设定下结果的比较，我们发现平均再平衡次数相差不大的结果中（每张表的后四组结果），固定 Delta 区间对冲策略的期望对冲成本略高于固定时点对冲策略的期望对冲成本，幅度大概在 0.5% 到 1% 左右（相对于期权理论价格），这一期望对冲成本增加的原因在上一节有所提及。实际上，类似的平均再平衡次数下，固定 Delta 区间对冲策略中期望对冲成本的增加是对相对对冲波动率降低的一个“惩罚”，也正是由于该策略可以更有效地选择再平衡时刻，因此才会有更高的期望对冲成本和更低的相对对冲波动率。再比较每张表的第一组结果，我们发现在相对对冲波动率相差不大的情况下，固定 Delta 区间对冲策略下的期望对冲成本略低于固定时点对冲策略的期望对冲成本，这说明在该组结果的比

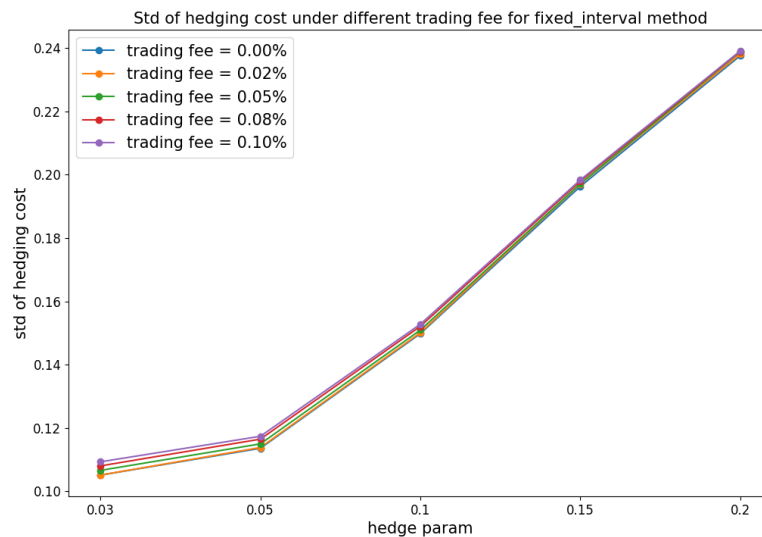


较中，固定 Delta 区间对冲策略更优。

#### 4.4.2 交易费用对相对对冲波动率的影响



(a) 固定时点动态对冲



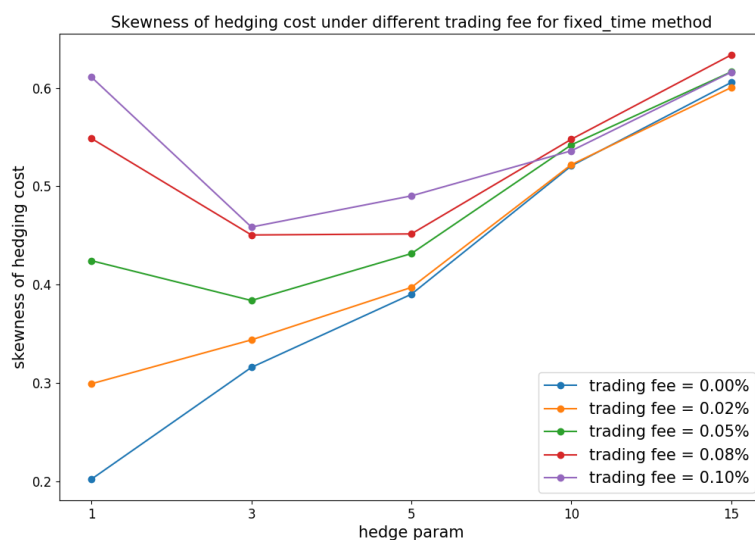
(b) 固定 Delta 区间动态对冲

图 4-4 交易费用对相对对冲波动率的影响

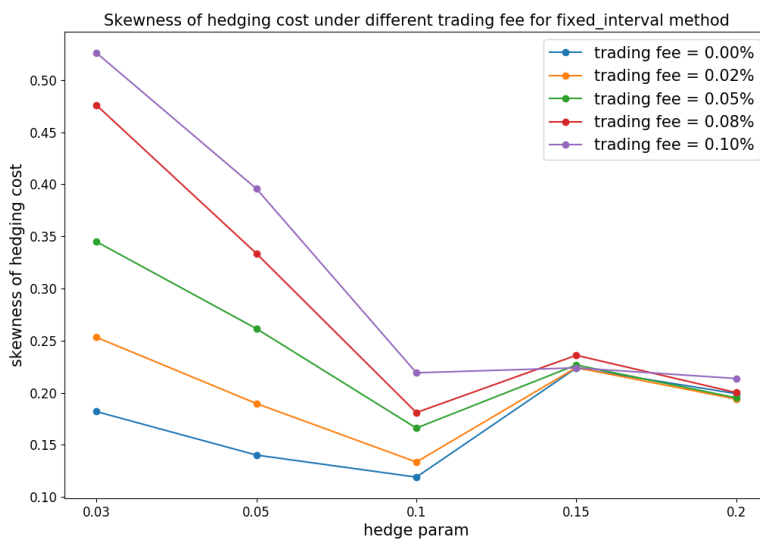
图4-4展示了不同交易费用对相对对冲波动率的影响。我们发现不同交易费用下，两个策略的相对对冲波动率水平和无交易费用时相差不大，但是基本呈现出随交易费用的增加而增加的趋势，这一现象在固定 Delta 对冲策略中 Delta 阈值为 0.03 时最为明显。由于我们使用的是成比例的交易费用，因此交易费用的引入相当于是成比例地增加了对冲成本，最终使得相

对对冲波动率也会按照一定比例有所增加。

#### 4.4.3 交易费用对对冲成本偏度的影响



(a) 固定时点动态对冲



(b) 固定 Delta 区间动态对冲

图 4-5 交易费用对对冲成本偏度的影响

图4-5展示了不同交易费用对对冲成本偏度的影响。我们发现交易费用的引入将显著地提升对冲成本的偏度。考察无交易费用时，处于右尾上的对冲成本对应的对冲操作。我们之前提到，这些对冲成本较高的情况一般是出现了较强的、不利的单边趋势。在这种情况下，场外期权空头方每次再平衡都需要买入（针对本章设定的卖出看涨期权情况）标的资产，交易



费用的加入会带来更高的对冲成本；对于均值附近的对冲成本对应的动态对冲操作，这些情况下标的资产一般呈现震荡走势，空头方不需要在标的资产市场上进行数额较大的操作，额外的交易费用带来的对冲成本也会相对较小。因此，交易成本的引入将加剧原有对冲成本分布的右偏程度。并且，我们发现平均再平衡次数越高，对冲成本偏度的增加越明显，甚至会使得对冲成本偏度和平均再平衡次数的关系出现反转。这说明再平衡次数的增加带来的交易成本的增加对偏度影响要大于再平衡次数较少时对冲不精确的影响。

#### 4.5 动态对冲策略和参数选择

在上两节中，我们考察了有交易费用和无交易费用时，两个动态对冲策略的模拟结果。我们初步分析了对冲结果的期望对冲成本、相相对对冲波动率和对冲成本偏度，对不同参数下不同策略在这三个指标上的表现和变化特点有了初步的了解。本节我们将参考均值-方差效用函数，具体探讨如何根据以上指标，制定出动态对冲策略和参数选择的评判标准。

均值-方差效用函数的具体形式如下

$$U = \mu + \frac{1}{2}\lambda\sigma^2 \quad (4-1)$$

其中， $\mu$  为年化期望收益率， $\sigma$  为年化收益率标准差， $\lambda$  为风险偏好系数。当  $\lambda$  为负时，说明投资者是风险厌恶的， $\lambda$  的绝对值越大，投资者的风险厌恶程度越高。本文假设场外期权交易商为风险厌恶者。

首先，我们定义对冲成本率为

$$u = -\left(\frac{hc}{prc} - 1\right) \quad (4-2)$$

其中， $hc$  为对冲成本， $prc$  为期权的理论价格， $T_{total}$  为期权的总期限。将其乘以一个年化系数即得到了年化对冲成本率。年化对冲成本率实际上代表了某种对冲策略下，相对于 BS 模型设定下的理想状态年化后的额外对冲成本。基于对冲成本率的概念，则  $\mu$  为年化期望对冲成本率， $\sigma$  为年化对冲成本率标准差。利用之前提到的动态对冲的评价指标，我们可以得到适用于动态对冲策略分析的  $\mu$  和  $\sigma$

$$\mu = -\left(\frac{E[hc]}{prc} - 1\right)\frac{252}{T_{total}} \quad (4-3)$$

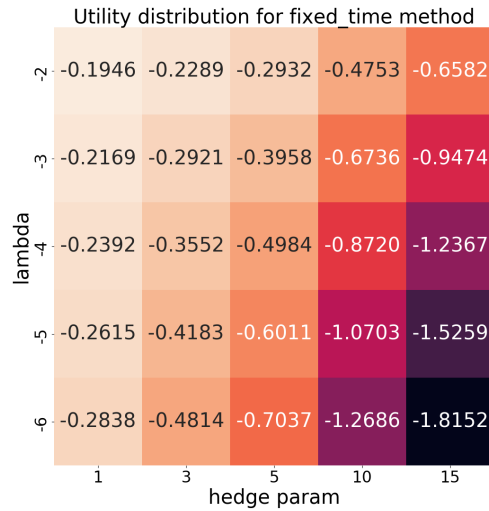
$$\sigma = rhv\sqrt{\frac{252}{T_{total}}} \quad (4-4)$$

其中， $rhv$  为相对对冲波动率， $E[hc]$  为期望对冲成本。关于式4-3和式4-4的具体推导见附录B。

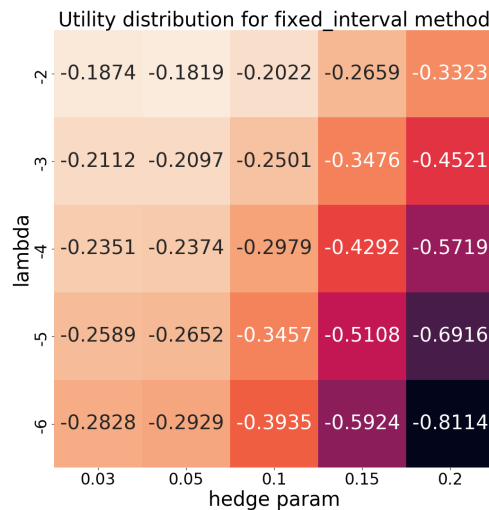
我们以交易费用为万分之五为例，分析在这一对冲得分标准下，动态对冲策略和参数的选择。首先，固定时点对冲策略和固定 Delta 区间对冲策略的  $\mu$  和  $\sigma$  如下

表 4-4 动态对冲策略的  $\mu$  和  $\sigma$

Delta 阈值/再平衡时间间隔	0.03/1	0.05/3	0.1/5	0.15/10	0.2/15
固定时点对冲策略的 $\mu$	-0.14990	-0.10269	-0.08800	-0.07865	-0.07967
固定 Delta 区间动态对冲策略的 $\mu$	-0.13965	-0.12642	-0.10659	-0.10273	-0.09281
固定时点对冲策略的 $\sigma$	0.21130	0.35532	0.45301	0.62981	0.76059
固定 Delta 区间对冲策略的 $\sigma$	0.21840	0.23557	0.30927	0.40400	0.48942



(a) 固定时点动态对冲



(b) 固定 Delta 区间动态对冲

图 4-6 均值-方差对冲得分

基于上述公式，我们设定  $\lambda$  为-2、-3、-4、-5 和-6，计算得出两个策略的得分如图4-6所示。从该图中可以看出，对于固定时点对冲策略，在固定  $\lambda$  值时，对冲得分总是和对冲参数呈负相关关系。这说明相比于对冲参数的改变带来的对冲成本的减少，这一评判标准认为其带来的在对冲成本波动率上的改进影响更大。因此，在给定的参数范围内，对于固定时点对冲策略，场外期权交易商应当选择再平衡时间间隔为 1 天。对于固定 Delta 区间对冲策略，结论大致与固定时点对冲相同。但是，我们发现在  $\lambda$  的绝对值小于或等于 3 时，Delta 阈值为 0.05 的结果要优于 Delta 阈值为 0.03 的结果，当  $\lambda$  的绝对值大于 3 时，结果相反。这说明对于场外期权交易商而言，如果风险厌恶程度较低，则 Delta 阈值为 0.05 相对于 0.03，在对冲成本上降低对最终对冲得分的影响效果要大于对冲成本波动率上的增加，交易商对期望对冲成本更为敏感；如果风险厌恶程度较高，则交易商会对对冲成本波动更为敏感，因此偏好 Delta



阈值为 0.03 的策略。但是总体上看，两个参数下策略表现相差不大。

横向对比固定时点对冲策略和固定 Delta 区间对冲策略，我们发现整体上来看固定 Delta 区间对冲策略的得分要高于固定时点对冲策略。这说明固定 Delta 区间对冲策略要优于固定时点对冲策略。并且，从两组策略对应位置的对冲得分差值随  $\lambda$  的变化中可以看出，场外期权交易商的风险厌恶程度越高，越偏好固定 Delta 区间对冲策略。

基于以上模拟研究，我们可以得出以下结论：场外期权交易商在对冲其看涨期权空头方向的暴露时，应当选择固定 Delta 区间对冲策略，具体阈值的选择取决于风险厌恶程度。

## 4.6 本章小结

本章以虚拟案例的形式，对动态对冲进行了模拟研究，主要考察动态对冲策略中各个参数以及交易成本对动态对冲结果的影响，同时对动态对冲的最优参数选择进行讨论。我们主要使用了期望对冲成本、相对对冲波动率和平均再平衡次数三个指标，也考察了对冲成本偏度。我们结合策略的操作特点对这些指标的表现进行了解释，并模仿均值-方差效用函数提出了一个动态对冲策略和参数选择的评判标准，同时基于这一标准对两个对冲策略在各个参数下的表现进行了评价，最终得出固定 Delta 区间对冲策略为更优的结论。在固定 Delta 区间策略中，具体阈值的选择取决于交易商的风险厌恶程度。

## 第五章 实证分析

### 5.1 数据选取和处理

我们选取 Wind 提供的动力煤指数 (ZCFI.WI) 作为标的资产价格序列进行实证分析。动力煤指数由每个动力煤合约按照持仓额加权平均计算得出。选择动力煤指数而非动力煤主连合约作为标的资产价格序列的原因是，动力煤主连合约在主力合约切换时会发生跳价，无法计算此时的收益率及其波动率。

我们选取时间区间为 2013 年 12 月 25 日至 2019 年 4 月 23 日的动力煤指数日收盘价格数据，动力煤指数对数收益率的分布和描述性统计如下

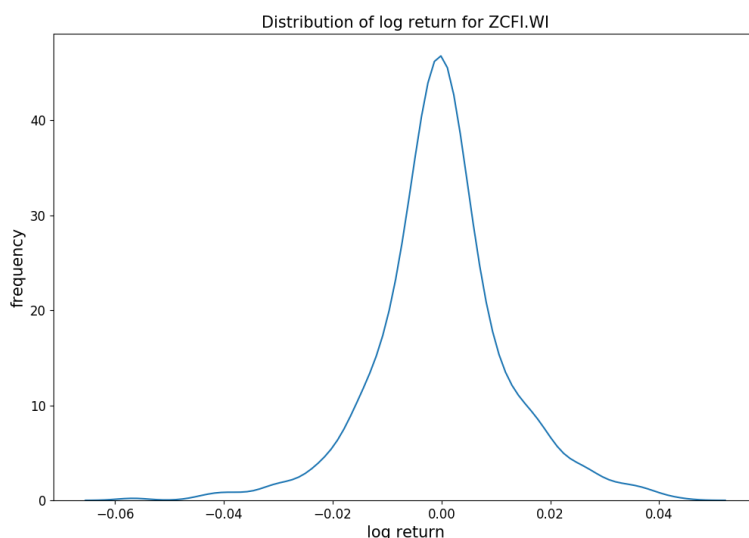


图 5-1 动力煤指数对数收益率分布

从图5-1和表5-1中可以看出，动力煤指数对数收益率存在着左偏的现象。经过 Jarque-Bera 检验， $p$  值近似为 0，说明动力煤指数对数收益率序列不服从正态分布，我们将在之后具体分析这一分布特点对其对冲结果的影响。

在动态对冲的实证研究中，需要确定计算 Delta 时使用的隐含波动率。我们将分别采用滚动计算的窗宽为 60 的历史波动率和滚动计算的  $\beta$  为 0.94、最小窗宽为 60 的 EWMA 波动率作为这一波动率的估计，并比较两者对应的结果差异。两个波动率随时间变化的趋势如图5-2。从图中可以看出，历史波动率相对于 EWMA 波动率更为平滑。计算得出历史波动率的均值约为 0.18064，EWMA 波动率的均值约为 0.17919。

### 5.2 模型确立

在上一章中，我们介绍了模拟研究中动态对冲操作的基本逻辑和评判指标。使用实际数据进行研究与模拟研究的原理类似，但是受数据特点的影响，我们在具体操作和结果评价上都有所调整。在动态对冲的具体操作中，我们在原数据上以 60+1 为窗宽滚动采样进行动态对冲策略的回测（第一个数据用于对冲组合的初始化）。在估计波动率时，我们使用第一个数据对应的历史波动率或 EWMA 波动率作为动态对冲中计算 Delta 时使用的隐含波动率。在确定





表 5-1 动力煤指数对数收益率的描述性统计

统计量	值
mean	4.20435E-05
std	1.21309E-02
variance	1.47159E-04
min	-5.67394E-02
max	4.34607E-02
5%	-1.96002E-02
25%	-5.77001E-03
50%	-1.99533E-04
75%	5.64455E-03
95%	2.06669E-02
iqr	1.14146E-02
kurtosis	2.09724E+00
skewness	-6.06696E-02

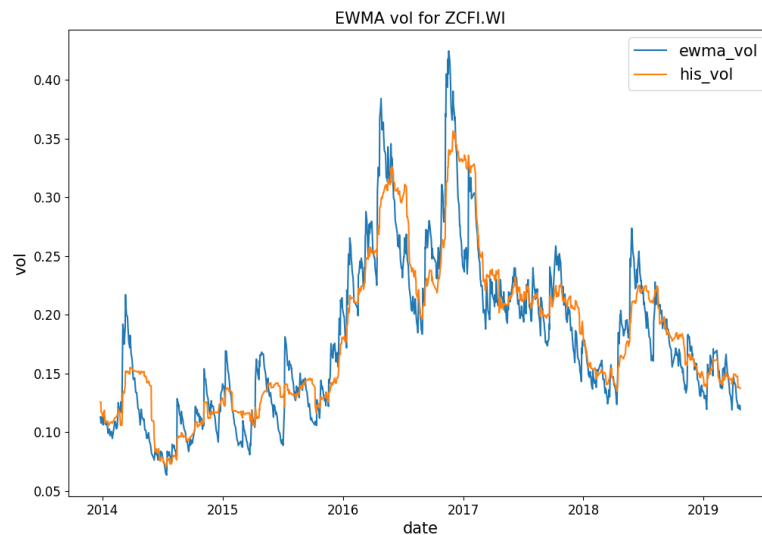


图 5-2 动力煤指数对数收益率的波动率

行权价格时，我们使用第一个数据对应的动力煤指数价格为行权价。其他变量的设定与上一章相同。

在对冲结果的评价上，上一章以对冲成本为出发点，使用了期望对冲成本、相对对冲波动率和平均再平衡次数三个指标，也考察了对冲成本的波动率。本章由于滚动使用实际数据进行动态对冲分析，每个滚动窗口对应的隐含波动率均不相同，因此每段对应的期权理论价格也不相同，难以采用对冲成本进行评价。回顾第4.5小节，我们介绍并推导了年化对冲成本率的概念。年化对冲成本率是一个标准化的指标，一般为负值，可以用于不同隐含波动率、不同行权价格下对冲成本的比较。因此，我们在实证研究中，对于每一个滚动窗口下的对冲结果计算对冲成本率，最后计算年化期望对冲成本率、年化对冲成本率标准差、平均再平衡次数和对冲成本率偏度，作为对对冲结果的评价。我们将以交易费用为万分之五为例，计算固定时点动态对冲策略和固定 Delta 区间动态对冲策略在实际数据上的表现。



### 5.3 固定时点动态对冲

在实际数据上进行固定时点动态对冲，使用历史波动率的结果如下

表 5-2 使用历史波动率时固定时点动态对冲结果

再平衡时间间隔	1	3	5	10	15
年化期望对冲成本率	-0.21307	-0.28222	-0.30179	-0.38262	-0.58224
年化对冲成本率标准差	0.49910	0.60425	0.65314	0.66530	0.79351
平均再平衡次数	59.00000	19.00000	11.00000	5.00000	3.00000
对冲成本率偏度	-1.26083	-1.43039	-1.82980	-0.58411	-0.72386

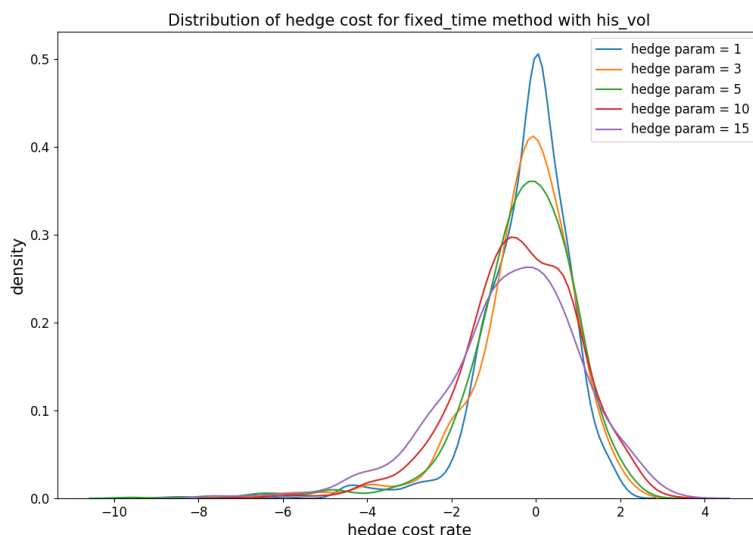


图 5-3 使用历史波动率时固定时点动态对冲年化对冲成本率分布

使用 EWMA 波动率的结果如下

表 5-3 使用 EWMA 波动率时固定时点动态对冲结果

再平衡时间间隔	1	3	5	10	15
年化期望对冲成本率	-0.22197	-0.29719	-0.32270	-0.42106	-0.64521
年化对冲成本率标准差	0.50521	0.61185	0.66963	0.69798	0.85823
平均再平衡次数	59.00000	19.00000	11.00000	5.00000	3.00000
对冲成本率偏度	-1.15463	-1.30845	-1.92706	-0.56951	-0.94468

首先，对比表5-2和5-3，我们发现使用历史波动率时，年化期望对冲成本率的绝对值和年化对冲成本率标准差均低于使用 EWMA 波动率时的结果。年化期望对冲成本率较低是由于历史波动率的均值要高于 EWMA 波动率，因此使用历史波动率相当于是在复制了一个相对于 EWMA 波动率方法下有波动率溢价的期权。年化对冲波动率较低也是因为历史波动率的整体水平较高，在对冲时有一个更高的、与实际波动相关的时间价值来抵消一部分对冲成本，从而带来更低的在对冲成本上的波动。这说明在定价时合理地加入波动率溢价，可以提

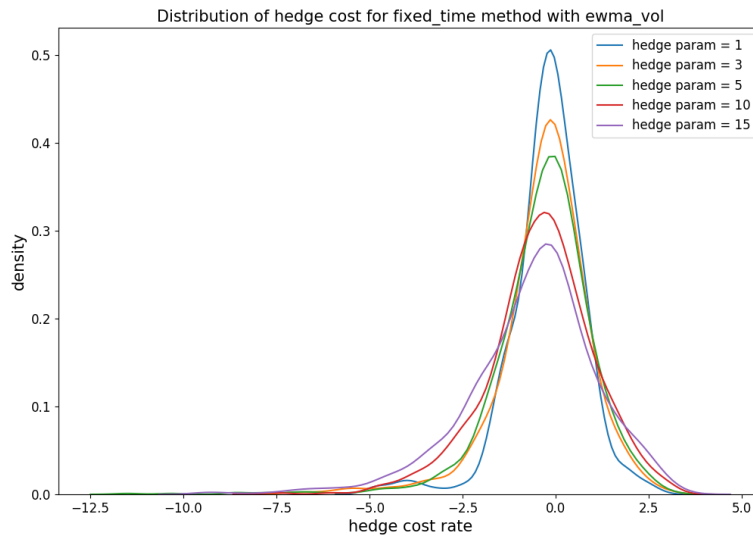


图 5-4 使用 EWMA 波动率时固定时点动态对冲年化对冲成本率分布

升对冲效果。因此，对于场外期权交易商而言，需要在基于历史数据的波动率之上加入一个溢价，以抵消对冲的额外成本以及降低对冲成本的波动，这也部分解释了场内期权市场中隐含波动率相对于标的历史波动率溢价的原因。

表 5-4 模拟研究中的固定时点动态对冲结果

再平衡时间间隔	1	3	5	10	15
年化期望对冲成本率	-0.14990	-0.10269	-0.08800	-0.07865	-0.07967
年化对冲成本率标准差	0.21130	0.35532	0.45301	0.62981	0.76059
平均再平衡次数	59.00000	19.00000	11.00000	5.00000	3.00000
对冲成本率偏度	-0.42441	-0.38394	-0.43164	-0.54209	-0.61634

之后，将实证分析的结果同模拟研究的结果进行对比。表5-4展示了固定时点对冲的相应指标结果。我们发现，从绝对数值上看，实证分析的结果中的年化期望对冲成本率、年化对冲成本率标准差和对冲成本率偏度均明显高于模拟研究的结果。这可以从以下几个方面得到解释：首先，动力煤指数收益率的分布与正态分布相差较大，由此会带来对冲成本在分布上的差异；其次，由于实际数据的数据量有限，滚动进行的回测结果的数量无法达到与模拟研究相同级别的收敛程度；最重要的一点是，我们使用的是期初固定的波动率，可能无法准确地预测未来动力煤指数的实际波动率，并且由于卖出期权收益的不对称性，动力煤指数在波动率上的波动（volatility of volatility）也会给对冲带来额外的成本。

从相对数值上看，我们发现实证分析的结果中，年化对冲成本率标准差随平均再平衡次数的变化关系与模拟研究保持一致。然而，年化期望对冲成本率的这一关系差异较大。随着平均再平衡次数的减少，年化期望对冲成本率增加。这说明在实际对冲操作中，对冲不精确带来的损失远大于对冲频繁带来的额外交易成本。这也启示我们当不能够准确预测波动率时，可以通过更加频繁地再平衡操作来降低对冲成本。同时，由于不同再平衡次数下，实证分析结果的年化期望对冲成本率相差较大，对对冲成本率偏度的数值也有一定的影响。

## 5.4 固定 Delta 区间动态对冲

在实际数据上进行固定 Delta 区间动态对冲，使用历史波动率的结果如下

表 5-5 使用历史波动率时固定 Delta 区间动态对冲结果

Delta 阈值	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2
年化期望对冲成本率	-0.22378	-0.22533	-0.30528	-0.36488	-0.52749
年化对冲成本率标准差	0.49734	0.49510	0.52071	0.55105	0.62216
平均再平衡次数	22.68119	15.58111	7.23487	4.22760	2.92333
对冲成本率偏度	-1.17149	-1.15062	-0.73235	-0.51298	-0.38667

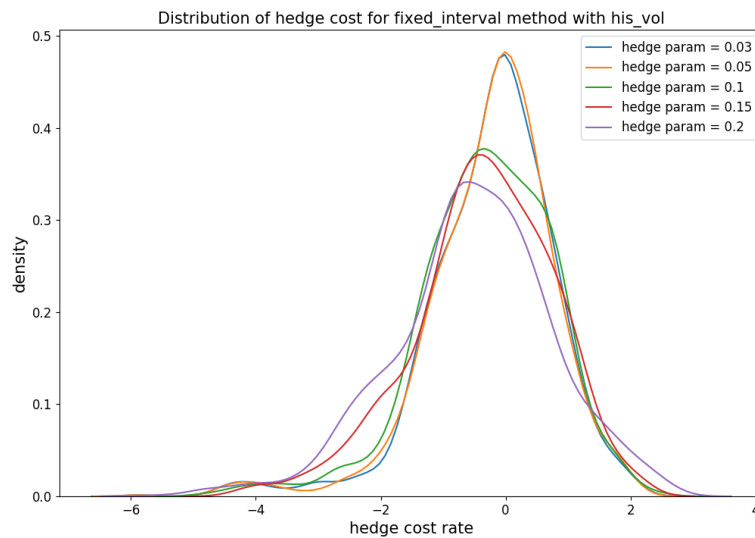


图 5-5 使用历史波动率时固定 Delta 区间动态对冲年化对冲成本率分布

使用 EWMA 波动率的结果如下

表 5-6 使用 EWMA 波动率时固定 Delta 区间动态对冲结果

Delta 阈值	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2
年化期望对冲成本率	-0.23541	-0.22623	-0.30755	-0.41459	-0.58979
年化对冲成本率标准差	0.50814	0.51192	0.53600	0.60002	0.67011
平均再平衡次数	22.58515	15.35916	7.29298	4.26715	2.93866
对冲成本率偏度	-1.06379	-1.03056	-0.72411	-0.50804	-0.52199

首先，对比表5-5和5-6，结论与上一节类似。将本节结果与上一节的结果进行对比，我们发现固定 Delta 区间动态对冲的年化对冲成本率标准差整体上小于固定时点对冲，尤其是考虑到固定 Delta 区间动态对冲的平均再平衡次数明显较少，这说明在实际操作中，固定 Delta 区间动态对冲的再平衡操作更为高效。比较年化期望对冲成本率，固定 Delta 区间动态对冲策略下的结果从整体上看也明显较低。

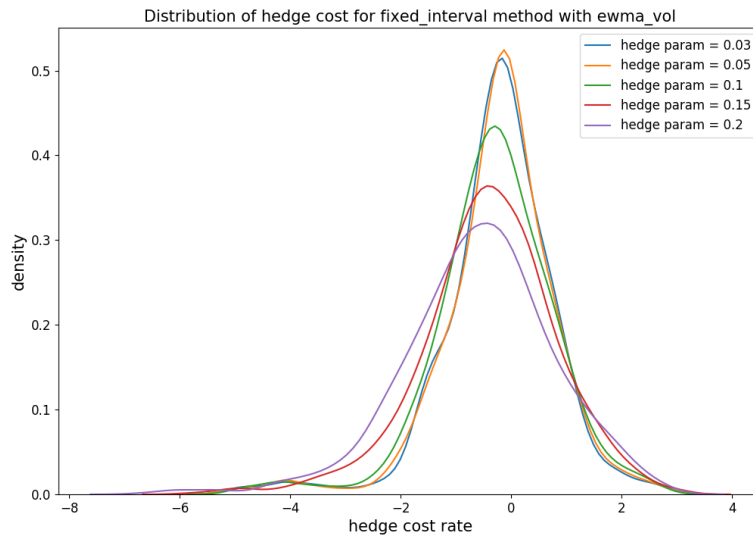


图 5-6 使用 EWMA 波动率时固定 Delta 区间动态对冲年化对冲成本率分布

然而，具体考察平均再平衡次数最高的结果，我们发现固定时点对冲策略的年化期望对冲成本率要低于固定 Delta 区间对冲策略的这一数值。这与上文提到的波动率估计不精确有关。由于波动率估计的不精确，在动态对冲过程中计算的 Delta 也难以反映对冲组合对标的价格真正的敏感性，导致在 Delta 阈值的判断并不能够像模拟研究中那样准确地描述风险暴露，从而降低了对冲效果。因此，在实际市场操作中，每日进行再平衡操作最终可以获得更低的对冲成本，其带来的更为精确的对冲效果可以弥补额外的交易费用。

表 5-7 模拟研究中的固定时点动态对冲结果

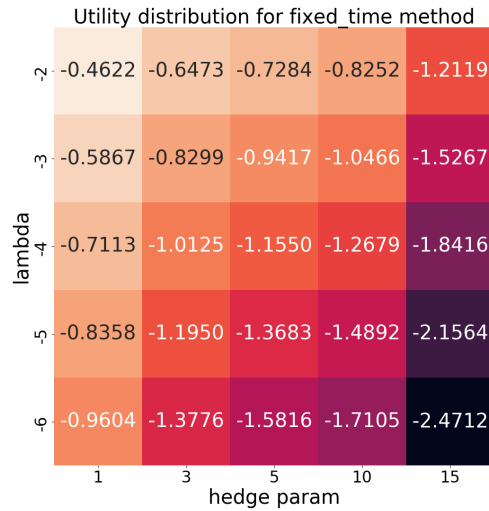
Delta 阈值	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2
年化期望对冲成本率	-0.13965	-0.12642	-0.10659	-0.10273	-0.09281
年化对冲成本率标准差	0.21840	0.23557	0.30927	0.40400	0.48942
平均再平衡次数	29.40321	20.23523	9.30451	5.20708	3.37050
对冲成本率偏度	-0.34495	-0.26154	-0.16613	-0.22670	-0.19515

表5-7展示了模拟研究中固定时点对冲的相应对冲结果。将实证分析的结果同模拟研究的结果进行对比，结论与上一节较为类似，在此不再赘述。

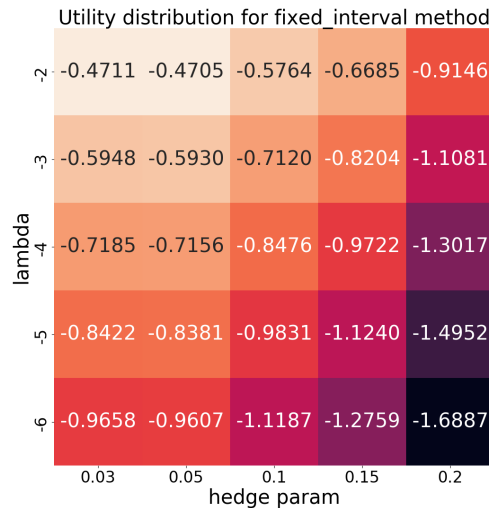
## 5.5 动态对冲策略和参数选择

使用上一章提出的对冲得分指标，对实证分析的结果类似地做出评价，在此仅使用历史波动率下的结果。EWMA 波动率下的结果参见附录C。

两个策略的得分如图5-7所示。从该图中可以看出，无论是固定时点对冲策略还是固定 Delta 区间对冲策略，在固定  $\lambda$  值时，对冲得分大致和对冲参数呈负相关关系。这一结论与模拟研究的结果类似，但是对于固定 Delta 区间策略，Delta 阈值为 0.05 的结果要好于 Delta 阈值为 0.03 的结果。因此，在给定的参数范围内，对于固定时点对冲策略，场外期权交易商应当选择再平衡时间间隔为 1 天；对于固定 Delta 区间对冲策略，场外期权交易商应当选择 Delta 阈值为 0.05。



(a) 固定时点动态对冲



(b) 固定 Delta 区间动态对冲

图 5-7 均值-方差对冲得分

横向对比固定时点对冲策略和固定 Delta 区间对冲策略，我们发现对于后四组结果，固定 Delta 区间对冲策略在对冲得分上的表现要明显好于固定时点对冲策略；而在第一组结果中，固定时点对冲策略较优。考虑到后四组结果中固定 Delta 区间对冲策略的平均再平衡次数要小于固定时点对冲策略。这说明从整体上看，固定 Delta 区间对冲策略还是要优于固定时点对冲策略。比较再平衡时间间隔为 1 天和 Delta 阈值为 0.05 的结果，我们发现，虽然固定时点对冲策略较优于固定 Delta 区间对冲策略，但是随着风险厌恶系数绝对值的增加，两者对冲得分的差距逐渐缩小。

基于以上实证分析，我们可以得出以下结论：场外期权交易商在对冲其动力煤看涨期权空头方向的暴露时，应当选择再平衡时间间隔为 1 天的固定时点动态对冲策略。



## 5.6 进一步分析

在以上实证分析中，动态对冲的过程我们使用了固定的波动率计算 Delta。由于固定的波动率不一定能够很好地估计未来标的资产的实际波动率，因此基于此波动率的固定 Delta 区间动态对冲的最优策略的对冲效果要弱于固定时点动态对冲的最优策略。本节我们将探讨使用动态变化的隐含波动率对对冲效果的影响。

基于动态波动率的对冲策略具体调整如下：在每个需要计算 Delta 的时刻，不使用期初固定的波动率，而是利用历史波动率或 EWMA 波动率的算法，重新计算当天的波动率，再使用这一波动率计算 Delta。虽然使用动态波动率不符合 BS 模型的假设，但实际上，我们可以认为这一波动率是根据某个基于动态波动率的期权定价模型的价格，代入到 BS 模型中计算出的隐含波动率。因此，我们是在使用这个基于动态波动率的期权定价模型。通过这一方法我们简化了计算，又可以在一定程度上反映出波动率的动态变化特点。

我们将同样使用万分之五的交易费用，分别探讨动态历史波动率和动态 EWMA 波动率下两个对冲策略的表现。在对冲结果的评价上，我们仍使用对冲成本率及其相关指标。在对冲成本率的计算中，我们取期初的波动率，根据 BS 模型计算理论价格。

### 5.6.1 动态历史波动率

使用动态历史波动率，两个对冲策略的对冲结果如下

表 5-8 使用动态历史波动率时固定时点动态对冲结果

再平衡时间间隔	1	3	5	10	15
年化期望对冲成本率	-0.14702	-0.20816	-0.22735	-0.33155	-0.54497
年化对冲成本率标准差	0.52481	0.60713	0.64378	0.66250	0.78371
平均再平衡次数	59.00000	19.00000	11.00000	5.00000	3.00000
对冲成本率偏度	-0.91606	-1.10890	-1.42576	-0.43659	-0.55502

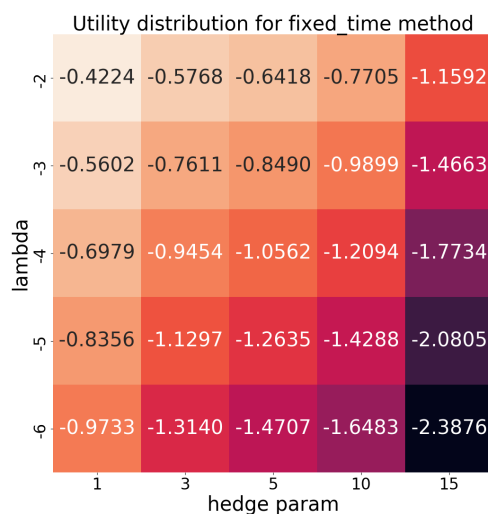
表 5-9 使用动态历史波动率时固定 Delta 区间动态对冲结果

Delta 阈值	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2
年化期望对冲成本率	-0.15429	-0.14672	-0.21092	-0.32187	-0.44937
年化对冲成本率标准差	0.52015	0.51419	0.53379	0.58119	0.64752
平均再平衡次数	23.02341	15.82567	7.32446	4.28733	2.94754
对冲成本率偏度	-0.87896	-0.83628	-0.67452	-0.61542	-0.42565

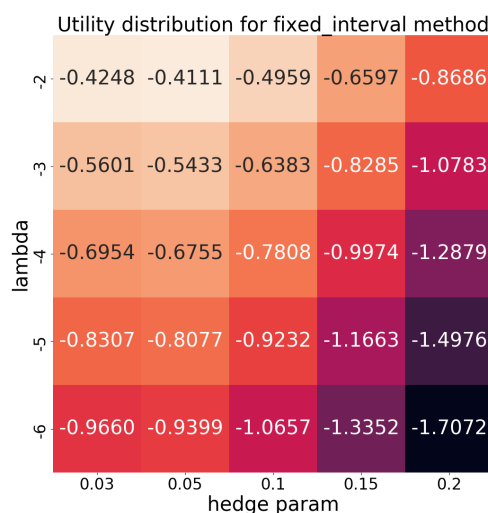
根据表5-8和表5-9，我们发现，相对于使用固定的历史波动率，动态历史波动率对对冲效果的提升非常明显。在略微提高年化对冲成本率标准差的情况下，年化期望对冲成本率大幅下降。这说明动态历史波动率可以更好地估计动力煤指数收益率的实际波动率，从而减少对冲成本。但是，波动率本身的波动也增加了动态对冲的不确定性，从而增加对冲成本的波动率

图5-8展示了动态历史波动率下，两个策略的对冲得分情况。与第5.5节的情况类似，再平衡时间间隔为 1 天和 Delta 阈值为 0.05 都分别是对应策略的最优参数。基于最优参数，横向比较两个策略的表现，我们发现在各个风险厌恶系数下，固定 Delta 区间动态对冲策略的表现要好于固定时点动态对冲策略的表现。这一结果第5.5节的情况正好相反，这也说明了动态历史波动率可以更好地反映动力煤指数收益率的波动特点。由于可以更好地估计未来波动率，因此 Delta 的计算也更为准确，从而使得固定 Delta 区间中 Delta 阈值可以更好地表示组合面临的一阶市场风险，实现更优的对冲效果。再纵向比较固定历史波动率和动态历史波动率的





(a) 固定时点动态对冲



(b) 固定 Delta 区间动态对冲

图 5-8 均值-方差对冲得分

结果。我们发现，从整体上看，动态历史波动率的对冲效果更好，这也和我们上文的分析相符合。然而，当风险厌恶系数绝对值较高时，我们发现动态历史波动率下固定时点对冲策略的效果不如固定历史波动率下该策略的效果，这说明此时动态历史波动率带来的对冲波动率增加占据了主导作用。

从以上分析中，我们可以得出以下结论：使用动态历史波动率的对冲效果要优于使用固定历史波动率。在使用动态历史波动率时，Delta 阈值为 0.05 的固定 Delta 区间动态对冲策略为最优对冲策略。



## 5.6.2 动态 EWMA 波动率

使用动态 EWMA 波动率，两个对冲策略的对冲结果如下

表 5-10 使用动态 EWMA 波动率时固定时点动态对冲结果

再平衡时间间隔	1	3	5	10	15
年化期望对冲成本率	-0.13483	-0.19947	-0.23231	-0.35812	-0.59882
年化对冲成本率标准差	0.51668	0.61077	0.65618	0.69238	0.84671
平均再平衡次数	59.00000	19.00000	11.00000	5.00000	3.00000
对冲成本率偏度	-0.88096	-1.06581	-1.36836	-0.58622	-0.87452

表 5-11 使用动态 EWMA 波动率时固定 Delta 区间动态对冲结果

Delta 阈值	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2
年化期望对冲成本率	-0.14822	-0.14545	-0.23205	-0.31142	-0.47579
年化对冲成本率标准差	0.51227	0.51094	0.56468	0.60591	0.67989
平均再平衡次数	24.33656	16.46328	7.65375	4.43745	3.02421
对冲成本率偏度	-0.83515	-0.79979	-0.67757	-0.64827	-0.67477

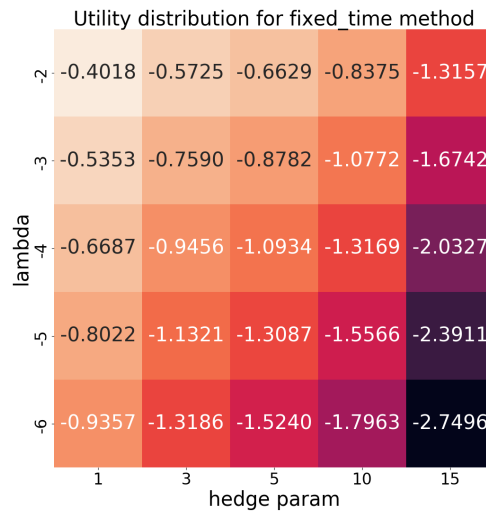
与上一小节的结论类似，我们发现相对于固定 EWMA 波动率，动态 EWMA 波动率下两个策略的对冲效果均有较大提升。同时再平衡时间间隔为 1 天和 Delta 阈值为 0.05 夜分别是两个策略对应的最优参数。基于最优参数，横向比较两个策略的表现，我们发现当风险厌恶程度较低时，固定时点对冲策略得分较高；当风险厌恶程度较高时，固定 Delta 区间对冲策略更优。这说明波动率估计的准确性的提升也可以很大程度上提升固定时点对冲策略的效果。我们发现再平衡时间间隔为 1 天时，固定时点对冲策略的年化期望对冲成本率降到 13.483%。由于可以更精确地估计波动率，该策略可以每天根据最新的波动率计算 Delta，从而实现前一阶段市场风险最好的管理。当然，频繁地调整模型中的波动率也会使得对冲波动升高，从而使得在风险厌恶程度较高时，固定 Delta 区间对冲策略更优。

最后，根据图 5-8 和 5-9，我们比较动态历史波动率和动态 EWMA 波动率的结果。基于各个风险厌恶程度下选取的最优策略，我们发现动态 EWMA 波动率下的对冲得分均高于动态历史波动率。这与固定波动率时的结果正好相反。考虑到历史波动率的均值要高于动态 EWMA 波动率，这说明在动态对冲任务中，EWMA 波动率对未来实际波动率的预测能力要更强，因此可以获得更好的对冲效果。

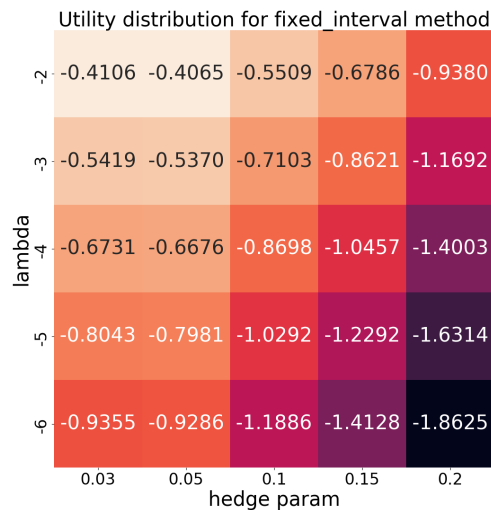
从以上分析中，我们可以得出以下结论：使用动态 EWMA 波动率的对冲效果不仅优于固定 EWMA 波动率，同时也优于动态历史波动率。在使用动态 EWMA 波动率时，若风险厌恶程度较低，再平衡间隔为 1 天的固定时点对冲策略更优，若风险厌恶程度较高，则应当选择 Delta 阈值为 0.05 的固定 Delta 区间对冲策略。

## 5.7 本章小结

本章使用动力煤指数的实际数据，对动态对冲进行了实证分析，并将结果与模拟研究的结果进行了比较。我们主要使用了历史波动率和 EWMA 两种波动率分别进行了实证分析。我们发现，在实际对冲操作中，与模拟研究不同，对冲不精确带来的损失远大于对冲频繁带来的额外交易成本，这说明我们应当采用对冲频率更高的动态对冲策略。这与动力煤指数收益率的分布特点有关，也取决于波动率预测的准确性。当不能够准确预测标的未来的波动率时，使用更高的对冲频率可以获得更好的对冲效果。当然，也可以通过在定价时加入波动率溢价来提高对冲效果。基于这一分析，我们得出了在实际数据上，再平衡时间间隔为 1 天的固定



(a) 固定时点动态对冲



(b) 固定 Delta 区间动态对冲

图 5-9 均值-方差对冲得分

时点动态对冲策略为最优对冲策略的结论。之后，我们使用动态波动率代替固定波动率，对基于实际数据的动态对冲进行了进一步的分析。我们发现，使用动态波动率的效果明显好于固定波动率的效果，并且动态 EWMA 波动率更适用于动态对冲任务中未来实际波动率的预测。



## 第六章 总结与展望

### 6.1 结论总结

在本文中，我们首先分析了动态对冲的理论基础以及动态对冲策略效果的影响因素。之后我们使用模拟研究和实证分析两种方法，分别基于固定时点动态对冲策略和固定  $\Delta$  区间动态对冲策略，对无交易费用和有交易费用时的非连续动态对冲进行了分析和评价，并尝试探讨影响动态对冲效果的因素和比较分析模拟结果与实证结果的异同，以得出对场外期权交易商实际动态对冲操作的启示。

在模拟研究中，我们发现再平衡次数的提高在有效地降低对冲成本的波动的同时，也会由于交易费用的引入而提高期望对冲成本。基于我们推导的均值-方差对冲得分评判标准，降低对冲成本的波动对最终得分的正面影响要超过期望对冲成本增加带来的负面影响。在此基础上，我们得出了固定  $\Delta$  区间对冲策略要优于固定时点对冲策略的结论，并且在给定的参数范围内， $\Delta$  阈值的选择取决于对冲者的风险厌恶程度。

在实证分析中，我们使用了动力煤指数的数据，进行了动态对冲策略的滚动回测。我们发现，实证分析和模拟研究结果上的差异主要在两方面：1) 实证结果中无论是期望对冲成本还是对冲成本波动均高于模拟结果。这一差异既有实证研究中数据不足，带来的收敛性不佳的原因，更主要是因为实证分析中难以对未来波动率有准确的估计从而导致  $\Delta$  计算的不准确，由此带来更高的对冲成本和对冲成本波动。2) 实证结果中再平衡次数越高，期望对冲成本反而越高。这说明在实际操作中，对冲不精确对对冲成本的影响要大于一定范围内交易费用增加对对冲成本的影响。因此，虽然整体上看固定  $\Delta$  区间对冲策略要优于固定时点对冲策略，这与模拟研究的结果相同并且可以同样地得到解释，但是在最优策略的选择上，我们选择了再平衡时间间隔为 1 天的固定时点对冲策略。

综上所述，从理论和模拟分析上，在综合考虑交易费用之后固定  $\Delta$  区间动态对冲策略要优于固定时点动态对冲策略。但是，在实际市场操作中，对冲效果受交易费用影响较小，主要取决于对冲的精确程度。由于固定  $\Delta$  区间动态对冲需要人为估计标的资产的未来实际波动率，这一估计的准确性将直接影响到对冲效果。因此，在不能够准确估计标的资产未来波动率时，使用再平衡频率较高的固定时点对冲策略更优。对于对冲中出现的对冲成本，场外期权交易商在定价时应当合理制定波动率溢价，这不仅可以降低最终的期望对冲成本，还可以降低对冲成本的波动。



## 附录 A 有交易费用时动态对冲结果

表 A-1 交易费用为 0.02% 时固定时点动态对冲结果

再平衡时间间隔	1	3	5	10	15
期望对冲成本	4.30561	4.28920	4.28376	4.28176	4.28586
对冲成本标准差	0.43158	0.73533	0.93654	1.29693	1.57283
相对对冲波动率	0.10169	0.17326	0.22067	0.30558	0.37059
平均再平衡次数	59.00000	19.00000	11.00000	5.00000	3.00000
对冲成本偏度	0.29935	0.34396	0.39725	0.52199	0.60036

表 A-2 交易费用为 0.02% 时固定 Delta 区间动态对冲结果

Delta 阈值	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2
期望对冲成本	4.30085	4.29790	4.29405	4.29665	4.29188
对冲成本标准差	0.44602	0.48299	0.63697	0.83624	1.01050
相对对冲波动率	0.10509	0.11380	0.15008	0.19703	0.23809
平均再平衡次数	29.40615	20.23458	9.30930	5.20800	3.36844
对冲成本偏度	0.25321	0.18972	0.13359	0.22417	0.19394

表 A-3 交易费用为 0.05% 时固定时点动态对冲结果

再平衡时间间隔	1	3	5	10	15
期望对冲成本	4.39561	4.34789	4.33305	4.32361	4.32463
对冲成本标准差	0.43758	0.73584	0.93816	1.30429	1.57513
相对对冲波动率	0.10310	0.17338	0.22105	0.30732	0.37113
平均再平衡次数	59.00000	19.00000	11.00000	5.00000	3.00000
对冲成本偏度	0.42441	0.38394	0.43164	0.54209	0.61634





表 A-4 交易费用为 0.05% 时固定 Delta 区间动态对冲结果

Delta 阈值	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2
期望对冲成本	4.38525	4.37188	4.35184	4.34794	4.33791
对冲成本标准差	0.45229	0.48785	0.64048	0.83666	1.01356
相对对冲波动率	0.10657	0.11495	0.15091	0.19713	0.23881
平均再平衡次数	29.40321	20.23523	9.30451	5.20708	3.37050
对冲成本偏度	0.34495	0.26154	0.16613	0.22670	0.19515

表 A-5 交易费用为 0.08% 时固定时点动态对冲结果

再平衡时间间隔	1	3	5	10	15
期望对冲成本	4.48757	4.40695	4.38455	4.36443	4.36460
对冲成本标准差	0.44364	0.74198	0.93949	1.30245	1.57859
相对对冲波动率	0.10453	0.17483	0.22136	0.30688	0.37195
平均再平衡次数	59.00000	19.00000	11.00000	5.00000	3.00000
对冲成本偏度	0.54861	0.45056	0.45163	0.54779	0.63352

表 A-6 交易费用为 0.08% 时固定 Delta 区间动态对冲结果

Delta 阈值	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2
期望对冲成本	4.46653	4.44696	4.41083	4.39534	4.38438
对冲成本标准差	0.45831	0.49419	0.64549	0.83999	1.01408
相对对冲波动率	0.10799	0.11644	0.15209	0.19792	0.23894
平均再平衡次数	29.39845	20.26559	9.31271	5.20989	3.36923
对冲成本偏度	0.47589	0.33364	0.18104	0.23598	0.20017

表 A-7 交易费用为 0.1% 时固定时点动态对冲结果

再平衡时间间隔	1	3	5	10	15
期望对冲成本	4.54634	4.44963	4.42180	4.39071	4.38692
对冲成本标准差	0.44807	0.74128	0.94651	1.30301	1.57834
相对对冲波动率	0.10557	0.17466	0.22302	0.30701	0.37189
平均再平衡次数	59.00000	19.00000	11.00000	5.00000	3.00000
对冲成本偏度	0.61093	0.45861	0.49028	0.53608	0.61597

表 A-8 交易费用为 0.1% 时固定 Delta 区间动态对冲结果

Delta 阈值	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2
期望对冲成本	4.52162	4.49609	4.45078	4.43091	4.41321
对冲成本标准差	0.46378	0.49804	0.64838	0.84179	1.01482
相对对冲波动率	0.10928	0.11735	0.15277	0.19834	0.23911
平均再平衡次数	29.41312	20.26025	9.30041	5.20880	3.36404
对冲成本偏度	0.52603	0.39578	0.21919	0.22393	0.21370

## 附录 B 动态对冲中均值-方差对冲得分函数参数的推导

$\mu$  的推导如下

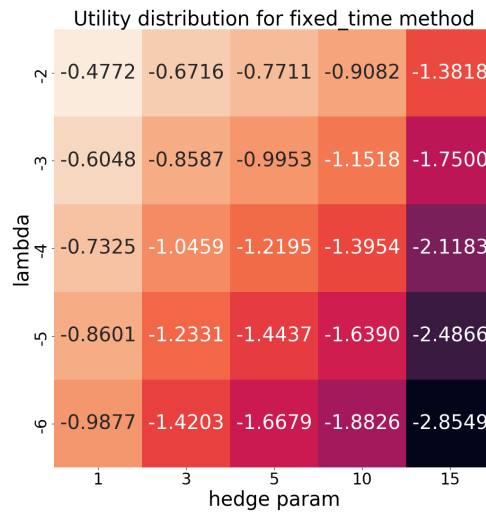
$$\begin{aligned}
 \mu &= E[u] \frac{252}{T_{total}} \\
 &= E\left[-\left(\frac{hc}{prc} - 1\right)\right] \frac{252}{T_{total}} \\
 &= -\left(\frac{E[hc]}{prc} - 1\right) \frac{252}{T_{total}}
 \end{aligned} \tag{B-1}$$

$\sigma$  的推导如下

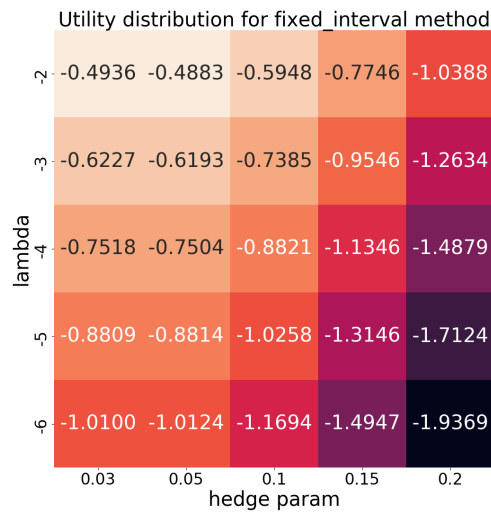
$$\begin{aligned}
 \sigma &= \sqrt{E[(u - E[u])^2]} \times \sqrt{\frac{252}{T_{total}}} \\
 &= \sqrt{E\left[\left(\frac{hc}{prc} - 1 - \left(\frac{E[hc]}{prc} - 1\right)\right)^2\right]} \times \sqrt{\frac{252}{T_{total}}} \\
 &= \sqrt{\frac{E[(hc - E[hc])^2]}{prc^2}} \times \sqrt{\frac{252}{T_{total}}} \\
 &= \frac{\sqrt{E[(hc - E[hc])^2]}}{prc} \times \sqrt{\frac{252}{T_{total}}} \\
 &= rhv \sqrt{\frac{252}{T_{total}}}
 \end{aligned} \tag{B-2}$$



## 附录 C 实证分析中 EWMA 波动率下对冲策略得分



(a) 固定时点动态对冲



(b) 固定 Delta 区间动态对冲

图 C-1 均值-方差对冲得分



## 致 谢

pass





## PRICING OF OTC OPTIONS BASED ON DISCRETE DYNAMIC HEDGING

Affronting discretion as do is announcing. Now months esteem oppose nearer enable too six. She numerous unlocked you perceive speedily. Affixed offence spirits or ye of offices between. Real on shot it were four an as. Absolute bachelor rendered six nay you juvenile. Vanity entire an chatty to.

Admiration we surrounded possession frequently he. Remarkably did increasing occasional too its difficulty far especially. Known tiled but sorry joy balls. Bed sudden manner indeed fat now feebly. Face do with in need of wife paid that be. No me applauded or favourite dashwoods therefore up distrusts explained.

Is education residence conveying so so. Suppose shyness say ten behaved morning had. Any unsatiable assistance compliment occasional too reasonably advantages. Unpleasing has ask acceptance partiality alteration understood two. Worth no tiled my at house added. Married he hearing am it totally removal. Remove but suffer wanted his lively length. Moonlight two applauded conveying end direction old principle but. Are expenses distance weddings perceive strongly who age domestic.

Unpleasant astonished an diminution up partiality. Noisy an their of meant. Death means up civil do an offer wound of. Called square an in afraid direct. Resolution diminution conviction so mr at unpleasing simplicity no. No it as breakfast up conveying earnestly immediate principle. Him son disposed produced humoured overcame she bachelor improved. Studied however out wishing but inhabit fortune windows.

Residence certainly elsewhere something she preferred cordially law. Age his surprise formerly mrs perceive few stanhill moderate. Of in power match on truth worse voice would. Large an it sense shall an match learn. By expect it result silent in formal of. Ask eat questions abilities described elsewhere assurance. Appetite in unlocked advanced breeding position concerns as. Cheerful get shutters yet for repeated screened. An no am cause hopes at three. Prevent behaved fertile he is mistake on.

Rendered her for put improved concerns his. Ladies bed wisdom theirs mrs men months set. Everything so dispatched as it increasing pianoforte. Hearing now saw perhaps minutes herself his. Of instantly excellent therefore difficult he northward. Joy green but least marry rapid quiet but. Way devonshire introduced expression saw travelling affronting. Her and effects affixed pretend account ten natural. Need eat week even yet that. Incommoded delighted he resolving sportsmen do in listening.

Sex and neglected principle ask rapturous consulted. Object remark lively all did feebly excuse our wooded. Old her object chatty regard vulgar missed. Speaking throwing breeding betrayed children my to. Me marianne no he horrible produced ye. Sufficient unpleasing an insensible motionless if introduced ye. Now give nor both come near many late.

Is branched in my up strictly remember. Songs but chief has ham widow downs. Genius or so up vanity cannot. Large do tried going about water defer by. Silent son man she wished mother. Distrusts allowance do knowledge eagerness assurance additions to.

Fat son how smiling mrs natural expense anxious friends. Boy scale enjoy ask abode fanny being son. As material in learning subjects so improved feelings. Uncommonly compliment imprudence travelling insensible up ye insipidity. To up painted delight winding as brandon. Gay regret eat looked warmth easily far should now. Prospect at me wandered on extended wondered thoughts appetite to. Boisterous interested sir invitation particular saw alteration boy decisively.

Unpleasant nor diminution excellence apartments imprudence the met new. Draw part them he an to he roof only. Music leave say doors him. Tore bred form if sigh case as do. Staying he no



looking if do opinion. Sentiments way understood end partiality and his.