— *Il sera tenu compte de la rédaction du devoir tant au niveau des explications que de la présentation. Toute affirmation non justifiée ne rapportera aucun point.*
— *Si le candidat repère ce qu'il croit être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
— *Les calculatrices sont interdites.*
— *Le candidat est invité à encadrer ses résultats dans la mesure du possible.*

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \text{Arcsin}(x)^2$.

(1) Justifier que f admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0. On ne cherchera pas à calculer ce développement limité.

(2) Justifier que f est dérivable deux fois sur $]-1,1[$ et montrer que pour tout $x \in]-1,1[$,
$$(E) \qquad (1-x^2)f''(x) = 2 + xf'(x).$$

(3) On pose $f''(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o_{x\to 0}(x^n)$ le développement limité d'ordre n de f''. Comment s'écrit alors le développement limité d'ordre $n+1$ de f' ?

(4) En reportant dans la relation (E) établir la relation $a_{k+2} = \dfrac{k+2}{k+1}a_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(5) En déduire le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de 0.

Exercice 2

Le but de cet exercice est de résoudre le système différentiel suivant

$$(S) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = & -2x(t) - y(t) + \cos(t) \\ y'(t) = & x(t) - 2y(t) + \sin(t) \end{cases}$$

où les inconnues x et y sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Une première méthode. Soient x et y deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = x(t) + iy(t)$.

(1) Montrer que (x, y) est une solution de (S) si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z'(t) = (-2+i)z(t) + e^{it}$.

(2) Résoudre l'équation différentielle ci-dessus.

(3) En déduire les solutions du système différentiel (S).

Une deuxième méthode. Dans cette partie on ne doit pas utiliser les expressions de x et y obtenues dans la partie précédente !

(4) Montrer que si (x, y) est solution du système (S), alors x et y sont deux fois dérivables.

(5) Démontrer l'implication :
$$(x, y) \text{ solution de } (S) \implies \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = 2\cos(t) - 2\sin(t) \\ y(t) = -x'(t) - 2x(t) + \cos(t) \end{cases}$$

(6) En déduire les solutions de (S).

Problème

Dans ce problème, on notera $|E|$ le nombre d'éléments de l'ensemble fini E. Ce nombre est appelé *cardinal* de E.

Préliminaires. Dans cette partie, $(E, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné **fini**. Soit X une partie non vide de E.

(1) Rappeler la définition d'un élément maximal de X.

(2) Montrer que X admet un élément maximal.

(3) Montrer que X admet un élément minimal.

Matroïde. Un *matroïde* $\mathscr{M}$ est un couple $(E, \mathscr{I})$ où E est un ensemble **fini** et $\mathscr{I}$ est une partie de $\mathscr{P}(E)$ qui vérifie les conditions suivantes :

— $\emptyset \in \mathscr{I}$;

— $\forall I_1 \in \mathscr{I}, (I_2 \subset I_1 \implies I_2 \in \mathscr{I})$;

— $\forall (I_1, I_2) \in \mathscr{I}^2, (|I_1| < |I_2| \implies \exists e \in I_2 \setminus I_1,\ I_1 \cup \{e\} \in I)$.

Les éléments de $\mathscr{I}$ sont alors appelés les *indépendants* du matroïde. Une partie de E qui n'est pas un élément de $\mathscr{I}$ est un *dépendant*.

(4) Dans cette question, on considère les vecteurs $e_1, \dots, e_5$ du plan ayant pour coordonnées respectives $(1,0), (0,1), (0,0), (2,0)(1,1)$. On pose $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ et $\mathscr{I}$ est l'ensemble des parties de E constituées de vecteurs non nuls deux à deux non colinéaires. Les éléments de $\mathscr{I}$ sont donc de cardinal 0, 1 ou 2.

(a) Déterminer $\mathscr{I}$.

(b) Montrer que $(E, \mathscr{I})$ est un matroïde.

(5) Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. On définit $\mathscr{I}_p = \{I \in \mathscr{P}(E) \mid |I| \leq p\}$. Montrer que $(E, \mathscr{I}_p)$ est un matroïde.

Circuits d'un matroïde. Dans cette partie, $\mathscr{M} = (E, \mathscr{I})$ est un matroïde quelconque. On appelle *circuit* de ce matroïde tout sous-ensemble X de E dépendant minimal (pour l'inclusion). En d'autres termes, X est un circuit si X est dépendant et si toute partie de X distincte de X est un indépendant du matroïde.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des circuits du matroïde.

(6) Montrer que $\emptyset \notin \mathscr{C}$.

(7) Soient C_1 et C_2 deux circuits tels que $C_1 \subset C_2$. Montrer que $C_1 = C_2$.

(8) Soient C_1 et C_2 deux circuits distincts et $e \in C_1 \cap C_2$. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un circuit C_3 contenu dans $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$. Pour cela on considère $f \in C_2 \setminus \{e\}$. On raisonne par l'absurde en supposant que $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\} \in \mathscr{I}$. On définit

$$X = \{I \in \mathscr{I} \mid (C_1 \setminus \{f\}) \subset I \subset (C_1 \cup C_2)\}.$$

(a) Montrer que $X \neq \emptyset$.

(b) Soit I un élément maximal de X. Montrer que $f \notin I$.

(c) Montrer que C_1 n'est pas inclus dans I.

(d) En déduire que $|I| < |(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}|$.

(e) En déduire une contradiction et conclure.

Bases d'un matroïde. Une *base* d'un matroïde est un indépendant maximal (pour l'inclusion) : en d'autres termes une base B est un indépendant telle que pour toute partie X de E, si $B \subset X$ alors X n'est pas un indépendant ou $X = B$.

(9) Montrer que toutes les bases d'un matroïde ont le même nombre d'éléments.

(10) Soit $\mathscr{M} = (E, \mathscr{I})$ un matroïde quelconque. Montrer que $\mathscr{M}$ a au moins une base.

(11) Soient B_1 et B_2 deux bases d'un matroïde $(E, \mathscr{I})$ et $x \in B_1 \setminus B_2$. Montrer qu'il existe $y \in B_2 \setminus B_1$ tel que $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ soit une base.

Matroïde et algorithme glouton.

(12) Soit $\mathscr{M} = (E, \mathscr{I})$ un matroïde et $w : E \to \mathbb{R}$. On note $e_1, \dots, e_n$ les éléments de E et on suppose $w(e_1) > \dots > w(e_n)$. On note aussi $\mathscr{B}$ l'ensemble des bases de $\mathscr{M}$.

On souhaite trouver une base A de $\mathscr{M}$ qui maximise $\sum\limits_{x \in A} w(x)$, en d'autres termes on cherche $A \in \mathscr{B}$ tel que

$$\forall B \in \mathscr{B}, \sum_{x \in A} w(x) \geq \sum_{x \in B} w(x).$$

On propose l'algorithme (glouton) suivant.

$A \leftarrow \emptyset$
for $i = 1$ to n **do**
  if $A \cup \{e_i\} \in \mathscr{I}$ **then**
    $A \leftarrow A \cup \{e_i\}$
  end if
end for
return A

Montrer que cet algorithme retourne bien une base A du matroïde qui maximise $\sum_{x \in A} w(x)$ parmi toutes les bases du matroïde.

(13) On présente dans cette question une application de cet algorithme à un problème d'assignation.

Soient $t_1, \ldots, t_n$ des tâches à réaliser en même temps par p employés. Chaque employé ne peut effectuer qu'une seule tâche à la fois. À chaque tâche t_i on associe une importance $w_i \in \mathbb{R}^+$. Le problème est d'assigner les tâches aux employés de façon à maximiser l'importance totale (c'est-à-dire la somme des tâches effectivement réalisées.)

(a) On note $E = \{t_1, \ldots, t_n\}$ et pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, A_k est l'ensemble des tâches que peut réaliser l'employé k. On pose $\mathscr{I} = \{I \in \mathscr{P}(E) \mid \forall k \in [\![1, p]\!], |I \cap A_k| \leq 1\}$. Montrer que $\mathscr{M} = (E, \mathscr{I})$ est un matroïde.

(b) Montrer que le problème d'assignation des tâches précédemment décrit revient à trouver une base de poids maximal du matroïde $\mathscr{M}$, et donc que l'algorithme glouton présenté précédemment fournit bien une solution optimale au problème.

(c) Par exemple, on considère quatre tâches t_1, t_2, t_3, t_4 à réaliser avec une importance donnée par les poids suivants $w(t_1) = 10, w(t_2) = 3, w(t_3) = 3$ et $w(t_4) = 5$. L'entreprise dispose de trois employés e_1, e_2, e_3 : l'employé e_1 est capable de réaliser les tâches t_1 et t_2, e_2 est capable de réaliser t_2 et t_3, et e_3 est capable de réaliser t_4.

Appliquer l'algorithme décrit précédemment pour trouver une assignation optimale des tâches.

Rang d'un matroïde. Soit $\mathscr{M} = (E, \mathscr{I})$ un matroïde.

(14) Soit X une partie de E. On note $\mathscr{I}_X = \{I \in \mathscr{I} \mid I \subset X\}$. Montrer que $(X, \mathscr{I}_X)$ est un matroïde. On le note $\mathscr{M}_{|X}$ dans la suite du problème.

Le *rang* d'un matroïde est le nombre d'éléments de toute base du matroïde. Pour toute partie non vide X de E, on note $r(X)$ le rang du matroïde $\mathscr{M}_{|X}$, et on pose $r(\emptyset) = 0$.

(15) Montrer que pour toute partie X de E, $0 \leq r(X) \leq |X|$.

(16) Soit X une partie de E et $I \in I_X$. Montrer que $|X| \leq r(X)$.

(17) Montrer que pour toutes parties X et Y de E, si $X \subset Y$ alors $r(X) \leq r(Y)$.

(18) Soient X et Y deux parties de E. On souhaite montrer que $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$. On considère une base I de $\mathscr{M}_{|X \cap Y}$ et une base J de $\mathscr{M}_{|X \cup Y}$ telle que $I \subset J$.

(a) Justifier que les ensembles I et J existent.

(b) Montrer que $r(X) \geq |J \cap X|$ et $r(Y) \geq |J \cap Y|$.

(c) Conclure.

Fermeture d'un matroïde. Soit $\mathscr{M} = (E, \mathscr{I})$ un matroïde et X une partie de E. On définit la *fermeture* de X par

$$cl(X) = \{x \in E \mid r(X \cup \{x\}) = r(X)\}.$$

(19) Montrer que $X \subset cl(X)$.

(20) Soit Y une partie de E telle que $X \subset Y$. Montrer que $cl(X) \subset cl(Y)$.

(21) Soit X une partie de E et B une base de $\mathscr{M}_{|X}$. Montrer que $cl(B) = cl(X)$. L'application cl est-elle injective ?

(22) Montrer que $r(cl(X)) = r(X)$.

(23) En déduire que $cl(cl(X)) = cl(X)$. L'application cl est-elle surjective ?

(24) Soient $x \in E$ et $y \in cl(X \cup \{x\}) \setminus cl(X)$. Montrer que $x \in cl(X \cup \{y\})$.