

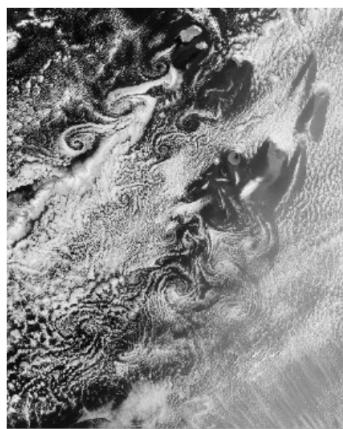
Devoir surveillé de sciences physiques n°3

MPI - Samedi 23 novembre 2024 – 4 heures*

- I. Mesure dans une lame de savon (CCS, PC, 2021)**
- II. Étude des pixels de l'écran d'un smartphone (CCS, MPI, 2023)**

Problème n°1 : mesure dans un lame de savon (CCS, PC, 2021)

L'étude d'écoulements tourbillonnaires plans, dits aussi bi-dimensionnels, s'applique dans de nombreux domaines, dont les écoulements géophysiques. Parmi ceux-ci, une thématique particulièrement riche est celle des écoulements tourbillonnaires océaniques et atmosphériques de fluide (eau ou air) sur des distances horizontales grandes devant l'épaisseur de la couche de fluide concernée. L'image satellite de la figure 1 présente une allée tourbillonnaire dans le sillage des îles du Cap Vert (image NASA).



1

Figure 1

Sous certaines conditions, ces écoulements peuvent être modélisés par l'étude des écoulements tourbillonnaires plans dans une lame de savon. Ce sujet propose d'aborder quelques aspects de ces écoulements.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.

Des données et relations utiles sont disponibles dans le document réponse.

I Interféromètre de Michelson et épaisseur d'une lame de savon

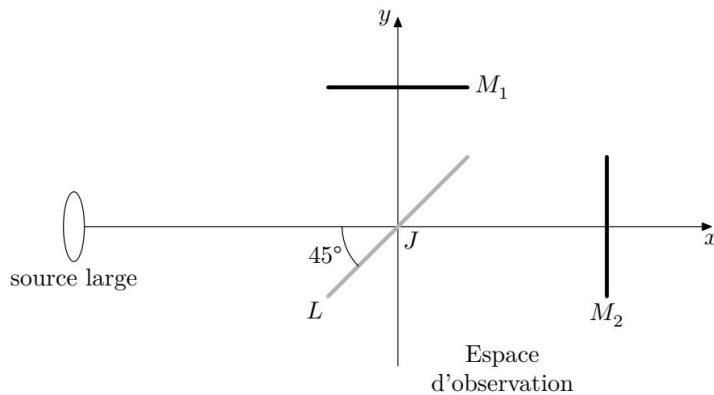
Le but de cette partie est de quantifier, par l'étude de la figure d'interférence à la surface d'une lame de savon, l'écart que présente celle-ci à un écoulement rigoureusement plan. On procédera par analogie avec la figure d'interférence obtenue à l'aide d'un interféromètre Michelson réglé en coin d'air.

I.A – On considère un interféromètre de Michelson dans lequel l'ensemble {lame séparatrice + compensatrice} est assimilé à une unique lame semi-réfléchissante d'épaisseur négligeable. On la note par la suite lame séparatrice (L).

L'interféromètre, éclairé par une source étendue monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 est réglé comme schématisé sur la figure 2 : les deux bras sont dissymétriques du fait de la position relative des miroirs : M_1 est parallèle à (J, x) et M_2 est parallèle à (J, y) mais ils ne sont pas à égale distance de J . On considère que les deux ondes qui émergent de l'interféromètre vers l'espace d'observation ont le même éclairement I_0 .

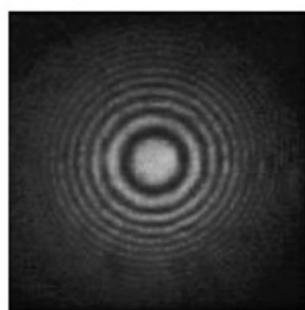
Q 1. Sur la figure A du document réponse, à rendre avec la copie, tracer avec soin les deux rayons issus du rayon incident qui émergent de l'interféromètre dans l'espace d'observation. Sur le même schéma, dans l'espace réservé à cet effet, montrer graphiquement que l'on peut considérer que ces deux rayons sont issus d'une « lame d'air » d'épaisseur e que l'on présentera. On supposera que l'indice de l'air est égal à 1.

Q 2. Établir la différence de marche introduite par le système en fonction de l'angle d'incidence θ sur cette lame et de son épaisseur e .

**Figure 2** Schéma de l'interféromètre éclairé par une source large

Q 3. Où est localisée la figure d'interférence ? Comment l'observer dans de bonnes conditions si l'on dispose d'un jeu complet de lentilles convergentes de distances focales comprises entre 20 cm et 1 m ? Un schéma clair de la situation expérimentale correspondante est attendu.

Q 4. Montrer que la figure d'interférence est formée d'anneaux d'égale inclinaison (justifier ce terme). On observe sur l'écran la figure d'interférence présentée figure 3.

**Figure 3** Figure d'interférence : anneaux d'égale inclinaison

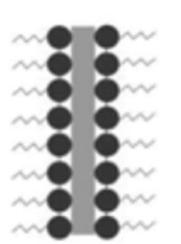
On souhaite maintenant régler l'appareil au contact optique.

Q 5. Décrire l'opération : faut-il tourner ou translater un miroir ? Comment savoir dans quel sens ? Décrire l'évolution de la figure d'interférence au cours de l'opération. Quel est l'aspect de l'éclairement sur l'écran une fois ce réglage réalisé ?

Q 6. Partant de cette situation on incline un des miroirs d'un petit angle α pour former un coin d'air. On éclaire le système en incidence quasi-normale de telle sorte que l'on observe des franges d'interférences rectilignes parallèles entre elles. Où sont-elles localisées ? Préciser les conditions de leur observation.

Q 7. On admet que la différence de marche introduite par le coin d'air en un point M de la surface de localisation situé à une distance x de l'arête commune des deux miroirs est $\delta(M) \approx \pm 2n\alpha x$ avec $n = 1$. Déterminer l'interfrange i sur la surface de localisation, en fonction de α et λ_0 . Comment évolue la figure d'interférence si l'angle α varie ?

I.B – Une lame de savon est constituée d'une mince couche d'eau entourée de part et d'autre par une couche de savon. Cette configuration est due aux tensio-actifs contenus dans le savon. Ces molécules sont constituées de deux parties distinctes : une tête hydrophile, généralement ionique, et une queue hydrophobe, généralement constituée d'une chaîne carbonée (figure 4).

**Figure 4**

Cette propriété amène ainsi les tensio-actifs à se concentrer et à se fixer les uns aux autres aux interfaces entre l'eau et l'air. En éclairage monochromatique, cette lame fait apparaître des franges d'interférence (figure 5), dont l'interfrange diminue vers le bas de la lame. Ces franges sont liées à un phénomène d'interférence se produisant sur une couche mince. On suppose ici que l'indice de cette fine couche est $n \approx 1,4$. L'épaisseur de cette couche est variable de haut en bas sans dépasser une épaisseur maximum d'environ 1 µm. La masse volumique et la viscosité du liquide savonneux sont pris égaux à ceux de l'eau.

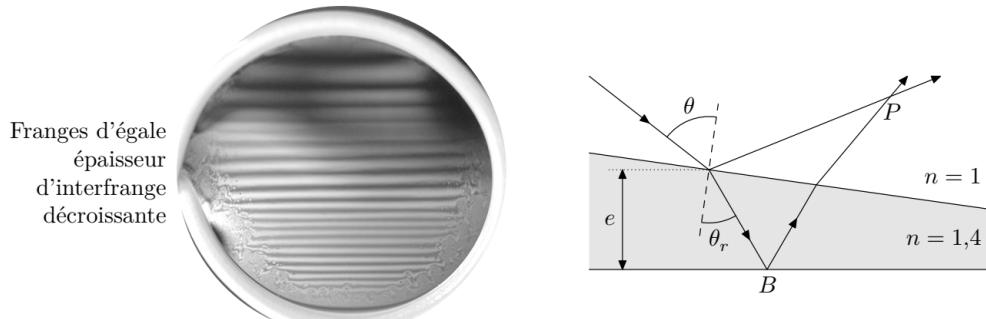


Figure 5 Interférences sur le film (à gauche) et modélisation des rayons lumineux (à droite)

Le trajet d'un rayon lumineux arrivant sous incidence θ sur une lame d'indice n et d'épaisseur locale e , doit tenir compte du phénomène de réfraction à l'intérieur de la lame. On note θ_r l'angle de réfraction et θ l'angle d'incidence. Une division d'amplitude se produit sur la face avant, suivie d'une réflexion sur la face arrière, produisant deux rayons réfléchis par la lame qui interfèrent au point P . On admet que la réflexion sur un milieu plus réfringent s'accompagne d'un déphasage de π .

Q 8. Justifier qu'en incidence quasi-normale, le déphasage entre les deux ondes qui interfèrent peut s'écrire $\Delta\phi = 2\frac{\pi}{\lambda_0} \left(2ne + \frac{\lambda_0}{2} \right)$.

En l'absence de perturbation extérieures (telles que celles qui seront abordées par la suite) la lame n'est le siège que de son écoulement gravitaire (du haut vers le bas sous l'effet de la gravité). Dans le cadre d'un modèle simplifié, dit d'interface sans interaction, la pression P au sein du fluide en écoulement gravitaire entre l'interface de tensioactifs est supposée uniforme. Le phénomène de drainage des tensioactifs est alors négligé. L'axe (Oz) sera pris vertical ascendant. La figure 6 présente la figure d'interférence observée sur un film de savon, ainsi que les notations introduites.

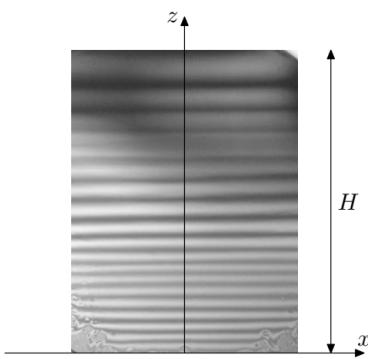


Figure 6 Vue de face de la lame de savon

On note $H = 5,0$ cm la hauteur de la lame de savon. On note $e(z, t)$ l'épaisseur de la lame, dans la direction (Oy), à l'altitude z et à l'instant t . Du fait de l'écoulement de drainage gravitaire, cette épaisseur varie au cours du temps à z fixé et à t fixé elle augmente vers le bas.

Q 9. Compte tenu de la topographie des franges observées sur la figure 6, discuter qualitativement l'écart du profil de la lame à une portion de coin d'angle constant, induit par son drainage gravitaire.

Afin d'interpréter ces différences, une modélisation de mécanique des fluides, non détaillée ici, aboutit à l'expression suivante pour l'épaisseur e de la lame en fonction de z et du temps :

$$e(z, t) = \sqrt{\frac{2\eta(H-z)}{\rho g t}}.$$

| Q 10. Discuter qualitativement la validité de cette expression en regard de la figure 6.

Pour aller plus loin dans la caractérisation de la variation de l'épaisseur de la lame, on se propose d'effectuer une approche semi-empirique de la loi de variation de l'épaisseur de la lame. On se place à t fixé et on suppose une loi de puissance semi-empirique de la forme

$$e(z, t) = K(H - z)^\beta$$

où β et K sont des constantes. On relève pour cela expérimentalement la position des premières franges brillantes. Le tableau 1 présente les résultats obtenus en indiquant la position z de ces franges, pour un éclairage monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ et un film de savon d'indice optique $n = 1,4$.

| | | | | | | | | |
|-------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Numéro de la fringe brillante | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Position z (cm) | 4,5 | 4,1 | 3,7 | 3,4 | 3,2 | 3,0 | 2,8 | 2,6 |

Tableau 1

Q 11. Compte tenu de ces valeurs numériques, analyser graphiquement, à l'aide du support fourni en figure B du document réponse, si cette loi semi-empirique est conforme aux observations. Si c'est le cas, donner la valeur numérique de β .

Problème n°2 : étude des pixels de l'écran d'un smartphone (CCS, MPI, 2023)

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'expliquer clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions. Certaines données numériques sont regroupées en fin d'énoncé ; d'autres relèvent de l'initiative du candidat.

Ce sujet utilise la syntaxe des annotations pour préciser le type des arguments et du résultat des fonctions Python. Ainsi,

```
def maFonction(n:int, x:float) -> (int, np.ndarray):
```

signifie que la fonction `maFonction` admet deux arguments, le premier est un entier, le second un nombre à virgule flottante et qu'elle renvoie un couple dont le premier élément est un entier et le deuxième un tableau numpy. Il n'est pas demandé aux candidats de recopier les entêtes avec annotations telles qu'elles sont fournies dans ce sujet, ils peuvent utiliser des entêtes classiques.

Cet énoncé est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie. Ce document réponse regroupe une liste de fonctions Python et certaines données utiles.

Instructions Python : opérations sur les tableaux numpy

- `np.zeros(n)`, `np.zeros((n, m))` crée respectivement un vecteur à `n` éléments ou une matrice à `n` lignes et `m` colonnes dont les coefficients sont tous nuls.
- `np.ones(n)`, `np.ones((n, m))` fonctionne comme `np.zeros` en initialisant chaque coefficient à la valeur un.
- `np.min(a)`, `np.max(a)` renvoie la valeur du plus petit (respectivement plus grand) élément du tableau `a`.
- `np.abs(a)` crée un tableau similaire au tableau `a` dont les coefficients sont les valeurs absolues des coefficients de `a`.

Données

Appareil photographique d'un téléphone portable

| | |
|---|---------------------------|
| Résolution du capteur | 4000×3000 pixels |
| Nombre d'ouverture | $N = 2,2$ |
| Diagonale du capteur | 1/3 de pouce |
| Indice de réfraction de l'air | $n_{\text{air}} = 1,0$ |
| Indice de réfraction de la lentille | $n = 1,52$ |
| Rayon de courbure de la lentille | $R = 4,0$ mm |
| Diamètre réel la lentille | $\Phi = 5,0$ mm |
| Distance focale effective de l'objectif | $f' = 9,0$ mm |

Propriétés de l'œil humain

| | |
|--|-----------------------------------|
| Distance normale d'observation d'un téléphone portable | 30 cm |
| Pouvoir de résolution d'un œil « normal » | $\alpha = 3,0 \times 10^{-4}$ rad |

Conversions d'unités

$$1 \text{ pouce} = 25,4 \text{ mm}$$

Estimation d'une incertitude-type composée

Si la grandeur y calculée est un produit ou un quotient du type $y = x_1 x_2$ ou $y = x_1/x_2$, alors l'incertitude-type sur y , notée $u(y)$ est reliée à l'incertitude-type sur chacun des facteurs par

$$\left(\frac{u(y)}{y} \right)^2 = \left(\frac{u(x_1)}{x_1} \right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2} \right)^2$$

II.A – Estimation de la taille d'un pixel

Depuis l'apparition des premiers smartphones, la qualité des écrans a fait des progrès considérables. Un célèbre constructeur de téléphones affirme que « la densité de pixels des écrans est si élevée qu'à l'œil nu et à une distance normale, il est impossible de discerner les pixels individuels ».

L'objectif de cette sous-partie est de vérifier si l'écran de l'objet d'étude vérifie ou non ce critère.

Q 11. Montrer qu'il existe une taille de pixel maximale pour satisfaire à la description précédente. Calculer sa valeur numérique.

Q 12. Estimer la dimension a d'un pixel de l'écran présenté dans la figure 5, ainsi que l'incertitude $u(a)$ de cette mesure. La photographie a été grossie 10 fois par rapport à l'image réelle.



Figure 5 Écran de téléphone (source wikimediacommons)

II.B – Dispositif expérimental de mesure d'un pixel

Dans cette sous-partie, on souhaite concevoir une expérience qui permet de mesurer expérimentalement la distance qui sépare les pixels de l'écran d'un téléphone portable. Pour cela, on dispose du matériel suivant au laboratoire :

- un banc optique et divers supports ;
- une lampe spectrale à sodium ;
- un laser ;
- deux lentilles convergentes \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 de distances focales respectives $f'_1 = 10,5 \text{ mm}$, $f'_2 = 45,5 \text{ mm}$;
- un écran percé d'un trou ;
- un téléphone portable.

L'idée est d'étudier les interférences observées par réflexion sur les pixels de l'écran. Ceux-ci sont modélisés dans la suite comme de petits miroirs.

II.B.1) Premier montage

On envisage tout d'abord le dispositif expérimental présenté en figure B du document réponse. Une lampe spectrale, considérée monochromatique de longueur d'onde λ , éclaire l'écran percé d'un très petit trou. Celui-ci peut être considéré comme une source ponctuelle (S) qui est initialement placée sur l'axe optique, au point O . Les rayons issus de (S) traversent la lentille \mathcal{L}_2 et arrivent en incidence normale sur deux pixels, considérés comme de petits miroirs positionnés parallèlement à l'axe (Oy). Les rayons sont alors réfléchis et diffractés par les deux miroirs P_1 et P_2 , traversent à nouveau la lentille \mathcal{L}_2 et viennent interférer au point M : une figure d'interférence est visible sur l'écran. On note (y, z) les coordonnées du point M dans le plan Oyz formé par l'écran et on ne considère que les points voisins de l'axe : $|y| \ll f'_2$ et $|z| \ll f'_2$.

Q 13. À quelle distance de la lentille \mathcal{L}_2 doit-on placer l'écran pour que les rayons issus de (S) ressortent parallèles à l'axe après la lentille \mathcal{L}_2 ? Sur la figure B du document réponse, compléter le trajet des deux rayons issus de (S) interférant au point M placé sur l'écran. Justifier que les rayons issus de P_1 et de P_2 convergeant au point M sont parallèles entre eux avant d'atteindre la lentille \mathcal{L}_2 .

Q 14. En utilisant notamment le théorème de Malus, montrer que $\delta(M)$, la différence de marche des deux rayons au point M , est égale à la distance P_1H (figure B). Montrer que cette différence de marche s'écrit

$$\delta(M) = \frac{ay}{f'_2}.$$

Q 15. En déduire l'ordre d'interférence $p(M)$ au point M . Décrire la figure d'interférence observée. Définir et exprimer l'interfrange i de cette figure d'interférence.

Q 16. Après avoir déterminé son expression, tracer sur votre copie l'intensité lumineuse $I(y)$ sur l'écran en fonction de y , la coordonnée du point M sur l'axe (Oy). On notera I_0 l'intensité que l'on obtiendrait avec un miroir seulement.

Q 17. Le point source (S) est déplacé dans le plan de l'écran, ses coordonnées deviennent (y_S, z_S) . En s'appuyant sur un schéma, déterminer l'expression de la différence de marche au point M en fonction de y , y_S , a et f'_2 . Décrire le changement que le déplacement de la source (S) induit sur la figure d'interférence observée sur l'écran.

Pour obtenir une figure plus lumineuse, on souhaite remplacer le petit trou pratiqué dans l'écran par une fente de largeur c , parallèle à l'axe Oz . Cette fente est éclairée par la lampe spectrale. Dans un modèle simple, on peut considérer que chaque petit élément de surface de la fente se comporte comme une source ponctuelle, incohérente avec les autres éléments de la fente.

Q 18. À l'aide d'un critère semi-quantitatif, basé par exemple sur l'ordre d'interférence au point M , déterminer l'expression de la largeur maximale c_{\max} au-delà de laquelle la figure d'interférence sera brouillée. Calculer numériquement c_{\max} dans le cas de la lampe à sodium en prenant $f'_2 = 45,5$ cm, $a = 400$ µm et une longueur d'onde $\lambda = 589$ nm. Conclure.

II.B.2) Modélisation numérique de l'expérience du premier montage

Afin d'étudier plus précisément l'effet de l'élargissement de la fente source, on adopte un modèle numérique discret dans lequel la fente large est modélisée par un grand nombre de sources ponctuelles incohérentes entre elles, uniformément réparties entre les ordonnées $y = -c/2$ et $y = c/2$.

Pour calculer l'intensité résultante, on suppose les variables correspondant aux constantes f'_2 , a , λ , c et i déclarées en Python. De plus, on dispose de la fonction `intensite(y, yS)`, d'arguments d'entrée y l'ordonnée d'un point M situé sur l'écran et yS l'ordonnée de la source (S). La fonction `intensite(y, yS)` renvoie un flottant correspondant au calcul de l'intensité lumineuse au point M due à une source ponctuelle unique de position yS .

Q 19. Écrire en langage Python une fonction d'entête

```
def Itot(y:float, c:float, K:int) -> float:
```

qui, à partir de la position y du point M , de la distance c et du nombre de sources ponctuelles K , permet de calculer l'intensité résultante au point M .

Q 20. On s'intéresse à présent au contraste de chaque figure d'interférence. Écrire en langage Python une fonction d'entête

```
def contraste(I:np.ndarray) -> float:
```

qui, à partir d'un vecteur (ou d'une liste) I (correspondant aux valeurs d'intensité sur l'écran pour différentes positions du point M), renvoie un flottant correspondant au calcul du contraste de la figure d'interférence.

Grâce à la fonction `Itot`, on étudie l'intensité résultante en fonction de l'ordonnée y du point M sur l'écran. Le résultat est donné en figure 6 pour $K = 500$ sources. On choisit quatre extensions spatiales de la lampe : $5,5 c_{\max}$, c_{\max} , $0,5 c_{\max}$ et $0,1 c_{\max}$.

La figure 6a représente $I/(4I_0)$ en fonction de y/i avec I_0 l'intensité due à un seul miroir et i la valeur de l'interfrange telle que définie en question 15.

La figure 6b représente le contraste obtenu en fonction de la largeur relative c/c_{\max} .

Q 21. Commenter les figures 6a et 6b. Le calcul semi-quantitatif effectué en question 18 est-il confirmé par les résultats de la figure 6b ?

II.B.3) Montage avec laser

Afin d'éviter les problèmes inhérents à l'utilisation d'une lampe spectrale précédemment décrits, celle-ci est remplacée par un laser comme indiqué en figure 7. De plus, on insère une lentille \mathcal{L}_1 entre le laser et l'écran.

Q 22. Soit d_{laser} le diamètre du faisceau laser avant sa traversée de la lentille \mathcal{L}_1 et D_{laser} le diamètre du faisceau laser après sa traversée de la lentille \mathcal{L}_2 . Exprimer le rapport de ces deux grandeurs en fonction des paramètres du système.

On envisage à présent l'utilisation de $N = 4$ miroirs (représentant 4 pixels) disposés selon un carré de côté a (figure 8). Ces miroirs sont notés P_1 à P_4 . Les interférences sont observées en un point M de l'écran, de coordonnées (y, z) .

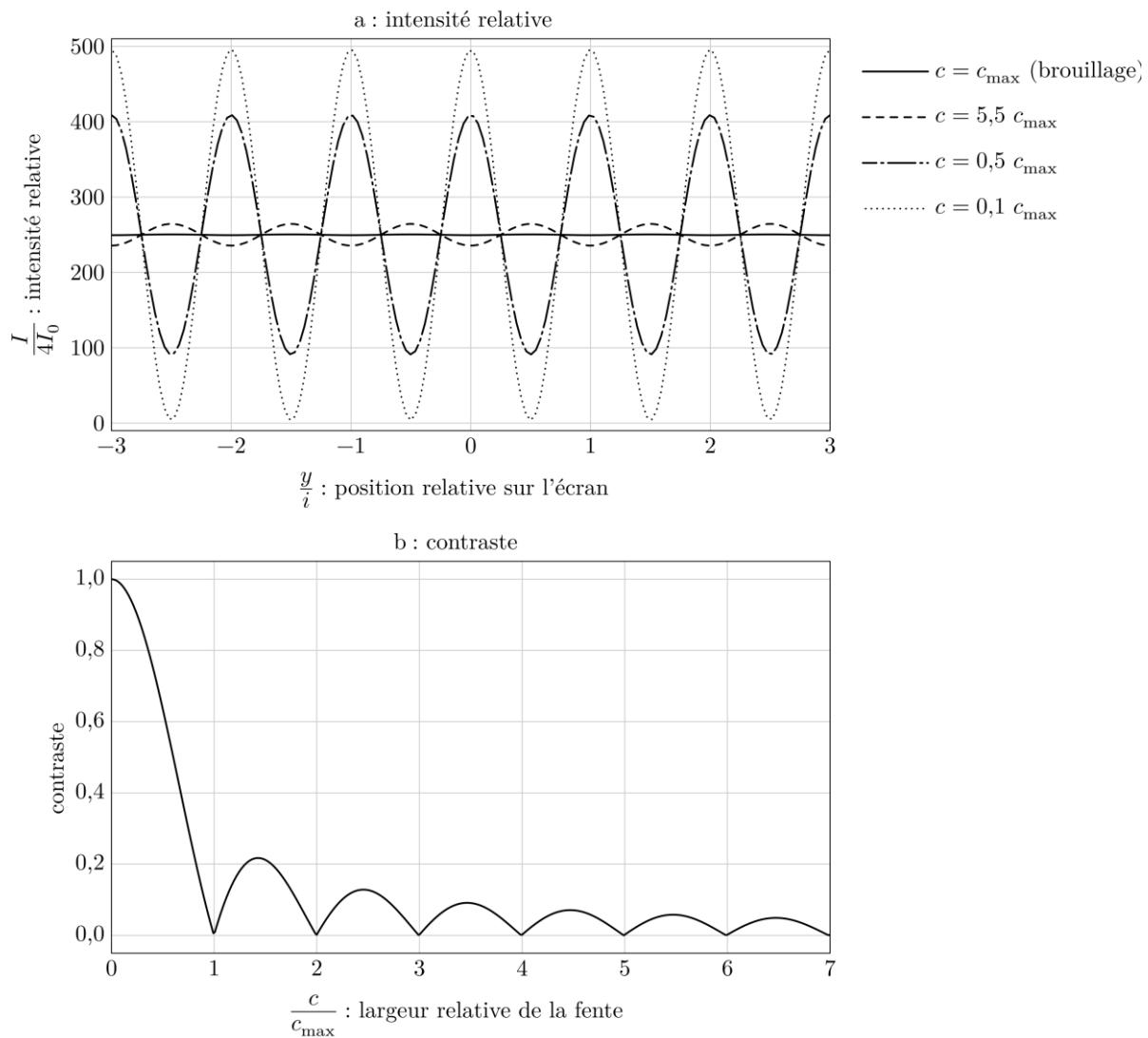
Q 23. En utilisant les résultats de la question 14, exprimer sans calculs les différences de marches au point M , $\delta_{i/1}(M)$ avec $i = 2, 3, 4$, entre l'onde passant par le miroir P_i et celle passant par le miroir P_1 , en fonction de y , z , a et f'_2 . Déterminer les coordonnées des points de l'écran pour lesquels les ondes issues des 4 miroirs sont en phase. Montrer que ces maxima d'éclairement forment un réseau carré de points de coordonnées

$$\left(y_k = k\lambda \frac{f'_2}{a}, \quad z_m = m\lambda \frac{f'_2}{a} \right),$$

où k et m sont deux nombres entiers.

Q 24. On modélise l'écran du téléphone par un réseau carré de N pixels assimilés à de petits miroirs répartis périodiquement avec une période a selon y et selon z . Montrer que l'éclairement obtenu est maximal aux points de coordonnées (y_k, z_m) déterminés à la question précédente et qu'il vaut $I_{\max} = N^2 I_0$, I_0 étant l'éclairement que l'on obtiendrait avec un miroir seul.

Q 25. Exprimer, en fonction de N , le rapport entre l'éclairement maximal et l'éclairement moyen observé sur l'écran. Que peut-on en conclure sur l'allure de la figure d'interférence observée lorsque N est très grand ?

**Figure 6**

a : intensité résultante en un point de l'écran M d'ordonnée y due à $K = 500$ sources ponctuelles uniformément réparties entre les ordonnées $-c/2$ et $c/2$
b : contraste pour différentes extensions spatiales de la source

II.B.4) Détermination de la taille d'un pixel

Le réseau bidimensionnel de N miroirs considéré dans la section précédente modélise l'écran d'un téléphone comportant N pixels. Le montage est représenté sur la figure 9 et est réalisé comme suit.

- On place sur un banc optique, dans l'ordre de la droite vers la gauche, un laser, une lentille \mathcal{L}_1 , un écran troué en son centre, une lentille \mathcal{L}_2 et le téléphone.
- On s'assure du centrage du système, la tache du laser est visible sur l'écran du smartphone.
- Sur la face gauche de l'écran, une figure géométrique caractéristique d'un phénomène de diffraction est visible, cette figure est exploitée ci-après.
- Les distances focales utilisées sont $f'_1 = 10,50\text{cm}$ et $f'_2 = 45,50\text{cm}$. Leur incertitude-type vaut $u(f') = 0,30\text{cm}$. La figure 10 présente une image obtenue au cours de cette expérience, avec un laser vert ($\lambda_v = 532\text{ nm}$ avec son incertitude-type $u(\lambda_v) = 10\text{ nm}$). Le trou au centre est celui par lequel passe le laser, il possède un diamètre de 4,0 mm.

Q 26. Déterminer la distance entre deux pixels avec une estimation de son incertitude-type. Comparer ce résultat à celui de la question 12 par le calcul d'un écart normalisé et conclure.

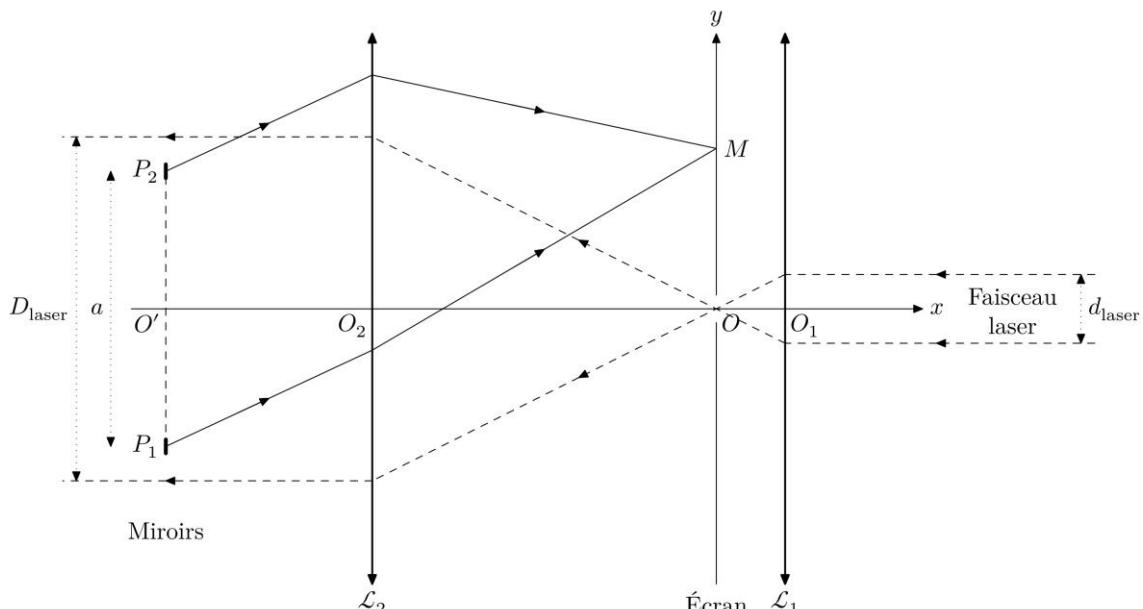


Figure 7 Deuxième montage : laser et miroirs

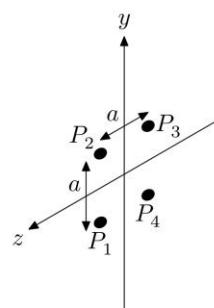


Figure 8 Disposition des 4 miroirs



Figure 9 Dernier montage : détermination de la taille d'un pixel

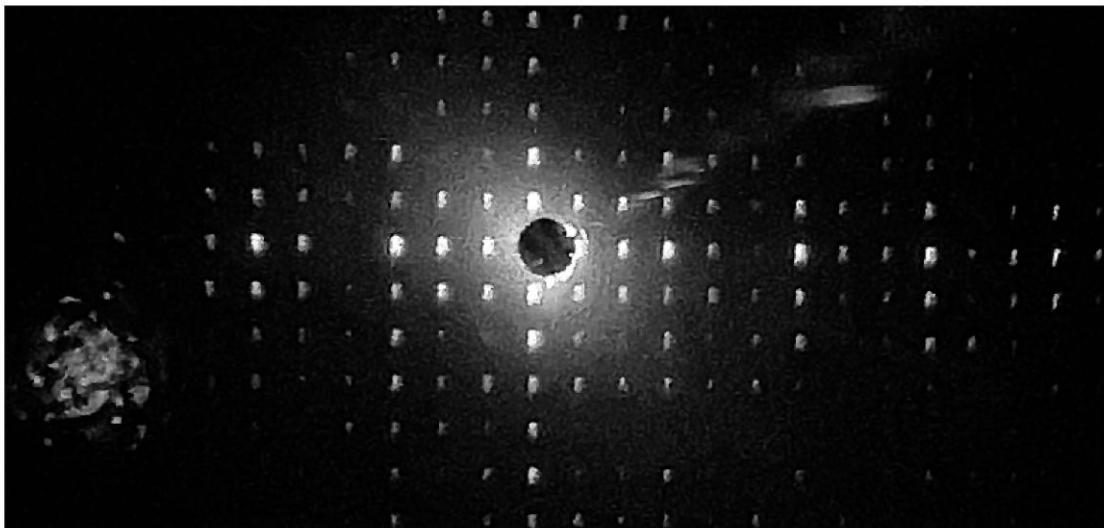
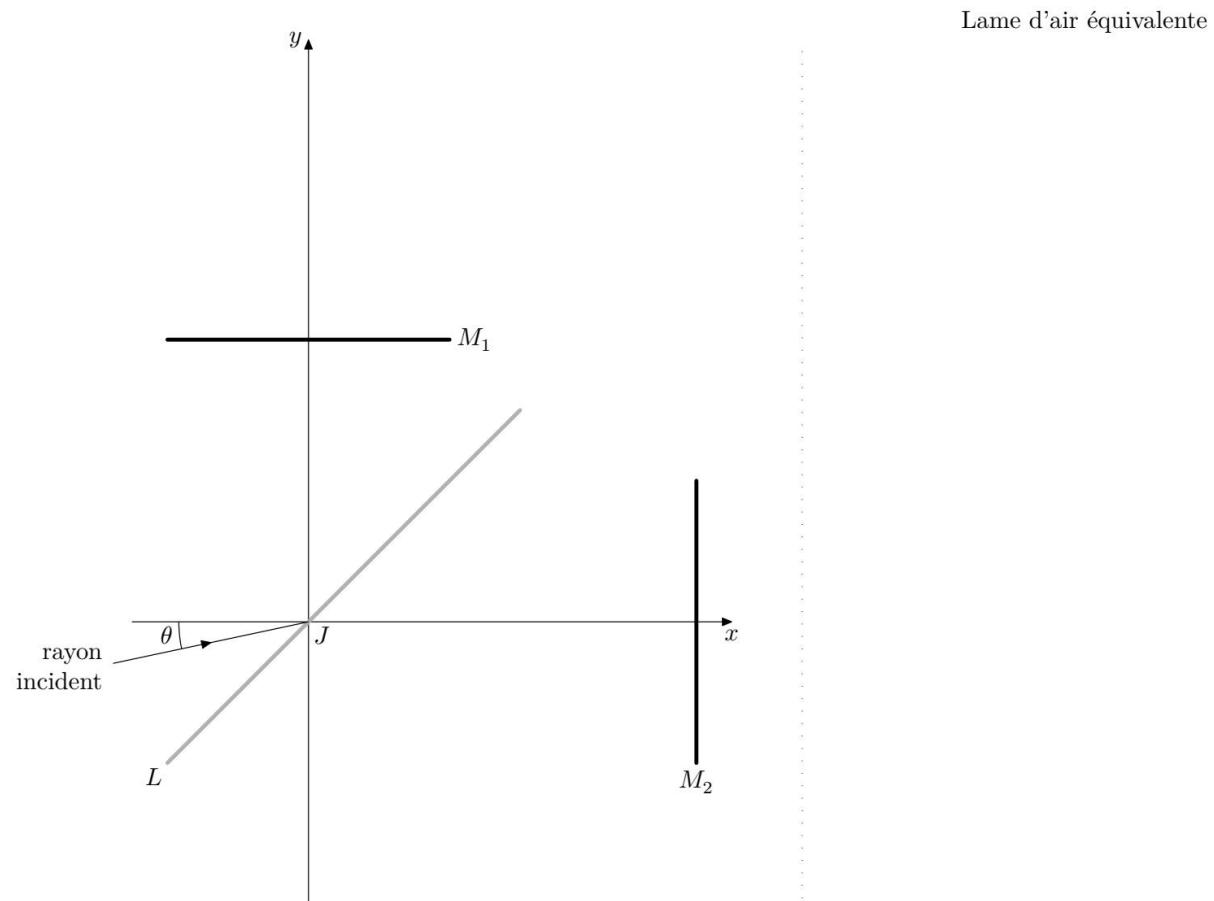
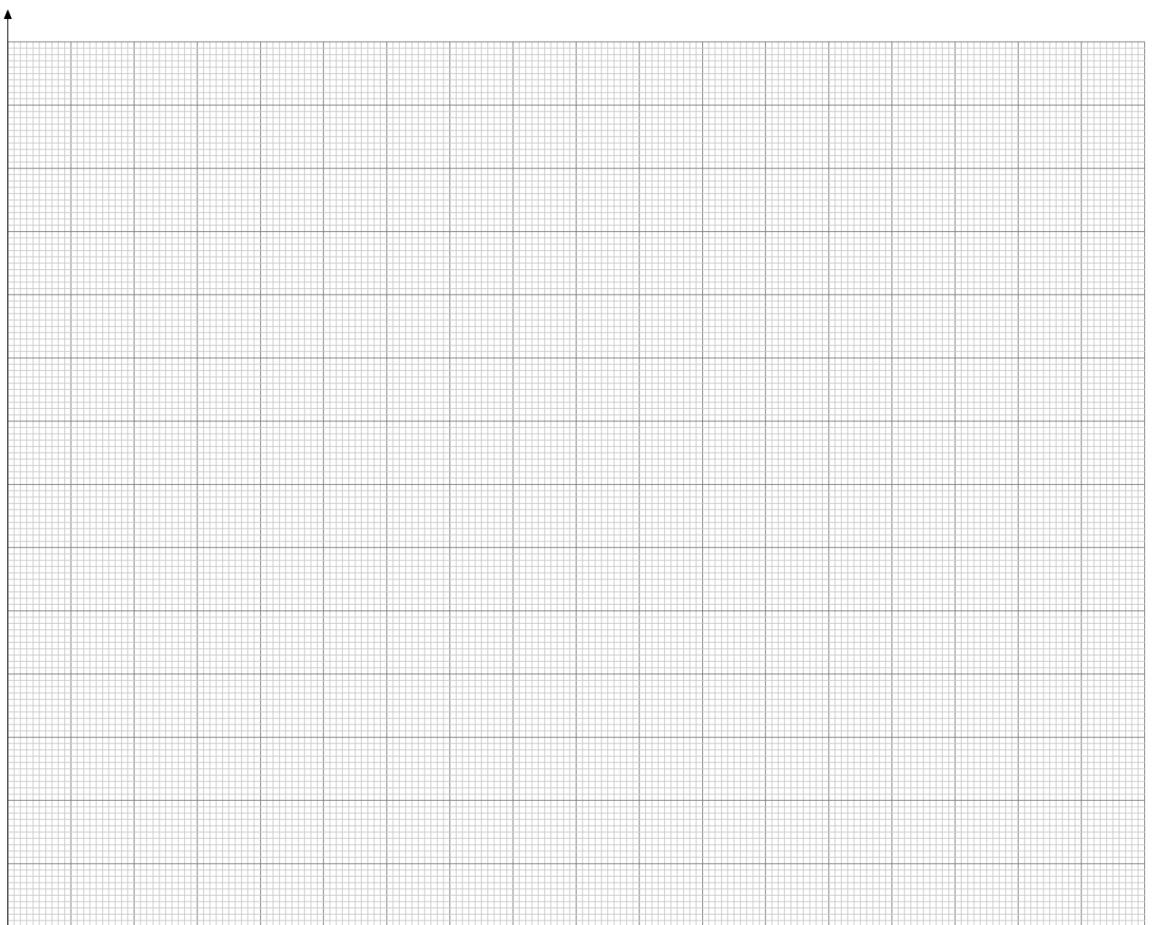


Figure 10 Image visible sur l'écran

• • • Fin de l'énoncé • • •

Documents réponses du problème n°1**Question 1****Figure A**

Question 11



12

Figure B

Document réponse du problème n°2

Question 13

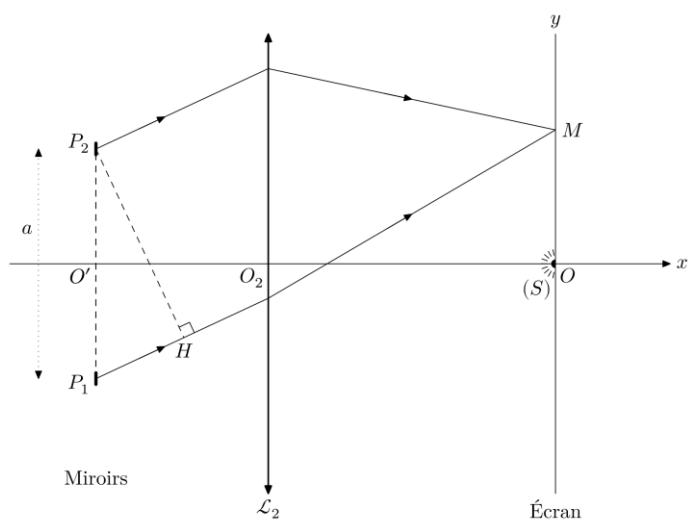


Figure B Premier montage : lampe spectrale et miroirs