

Appunti di Sistemi Dinamici

Andrea Starrantino

6 dicembre 2025

Indice

| | |
|---|-----------|
| 1 Algebra lineare | 4 |
| 1.1 Spazi vettoriali | 4 |
| 1.1.1 Esempio | 5 |
| 1.2 Matrici | 5 |
| 1.2.1 Esempio matrice complementi | 5 |
| 1.2.2 Esempio matrice inversa | 5 |
| 1.3 Determinante | 6 |
| 1.3.1 Esempio | 6 |
| 1.4 Sistemi lineari | 6 |
| 1.4.1 Esercizio | 7 |
| 1.5 Autovalori e autovettori | 7 |
| 1.5.1 Esempio | 7 |
| 1.6 Jordan | 8 |
| 1.7 Equazioni differenziali | 9 |
| 1.7.1 Esempio casareccio | 9 |
| 1.7.2 Equazioni differenziali elementari | 9 |
| 1.7.3 Problema di Cauchy | 9 |
| 1.7.4 Coefficienti costanti | 10 |
| 2 Introduzione e notazione | 11 |
| 2.1 Notazione | 11 |
| 3 Sistemi lineari | 11 |
| 3.1 Sistemi a tempo continuo lineari stazionari | 11 |
| 3.1.1 Sistema Massa-Molla-Smorzatore | 12 |
| 3.1.2 Modello implicito | 13 |
| 3.1.3 Modello esplicito | 13 |
| 3.1.4 Risposta libera e forzata | 13 |
| 3.1.5 Ipotesi di linearità | 13 |
| 3.1.6 Ipotesi di stazionarietà | 14 |
| 3.1.7 Forma generale | 14 |
| 3.2 Sistemi a tempo discreto | 15 |
| 3.2.1 Modello implicito | 15 |
| 3.3 Evoluzione libera | 16 |
| 3.4 Cambio coordinate del sistema | 17 |
| 3.4.1 Autovalori complessi | 19 |
| 3.4.2 Cambio di base da \mathbb{C} a \mathbb{R} | 20 |
| 3.4.3 Autovalori misti | 20 |
| 3.4.4 Moti aperiodici e pseudoperiodici | 21 |
| 3.4.5 Tempo discreto | 22 |
| 3.4.6 Organo di ritenuta | 23 |
| 3.5 Osservabilità e eccitabilità | 24 |
| 3.5.1 Autovalori multipli | 25 |
| 3.6 Esercizi | 26 |
| 4 Stabilità | 28 |
| 4.1 Il pendolo | 28 |
| 4.2 Sistemi | 28 |
| 4.2.1 Definizioni di stabilità | 28 |
| 4.3 Criterio di Routh | 29 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.4 | Stabilità nei punti di equilibrio | 30 |
| 4.5 | Dominio di Laplace | 31 |
| 4.5.1 | Calcoli delle trasformate utili | 31 |
| 4.5.2 | Proprietà | 32 |
| 4.5.3 | Applicazione al Modello implicito | 32 |
| 4.5.4 | Sviluppo in frazioni parziali | 33 |
| 4.5.5 | Pulsazione e fase | 35 |
| 4.5.6 | Segnali | 36 |
| 4.5.7 | Esercitazione | 37 |
| 4.6 | Risposta transitoria e a regime permanente | 39 |
| 4.6.1 | Ingresso sinusoidale | 39 |
| 4.6.2 | Ingresso polinomiale | 40 |
| 5 | Risposta forzata | 41 |
| 5.1 | Diagramma di Bode | 41 |
| 5.1.1 | Guadagno | 42 |
| 5.1.2 | Termine monomio | 42 |
| 5.1.3 | Termine binomio | 43 |
| 5.1.4 | Termine trinomio | 44 |
| 5.2 | Diagramma polare | 44 |
| 5.3 | Risposta forzata a tempo discreto | 46 |
| 5.3.1 | Trasformata Z | 46 |
| 5.4 | Modello esplicito tempo discreto | 47 |
| 5.5 | Esercizi | 48 |
| 5.5.1 | Esercitazione | 48 |
| 6 | Prorietà dello stato | 49 |
| 6.1 | Osservabilità | 49 |
| 6.1.1 | Caso discreto | 49 |
| 6.1.2 | Caso continuo | 50 |
| 6.2 | Raggiungibilità | 51 |
| 6.3 | Scomposizione di Kalman | 53 |
| 7 | Appendice | 53 |
| 7.1 | Trasformate di Laplace | 53 |

1 Algebra lineare

Ripasso di algebra lineare estratto dal test di autovalutazione.

1.1 Spazi vettoriali

Definizione 1.1 (Combinazione lineare).

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

$$a \in R, x \in R^n$$

Definizione 1.2 (Spazio vettoriale). Uno spazio vettoriale V su un campo \mathbb{F} è un insieme dotato di due operazioni: l'addizione di vettori e la moltiplicazione per scalari, che soddisfano le seguenti proprietà per ogni $u, v, w \in V$ e ogni scalare $a, b \in \mathbb{F}$:

1. Chiusura sotto l'addizione: $u + v \in V$
2. Commutatività dell'addizione: $u + v = v + u$
3. Associatività dell'addizione: $(u + v) + w = u + (v + w)$
4. Elemento neutro dell'addizione: Esiste un elemento $0 \in V$ tale che $u + 0 = u$ per ogni $u \in V$
5. Elemento inverso dell'addizione: Per ogni $u \in V$, esiste un elemento $-u \in V$ tale che $u + (-u) = 0$
6. Chiusura sotto la moltiplicazione per scalari: $au \in V$
7. Distributività della moltiplicazione per scalari rispetto all'addizione di vettori: $a(u + v) = au + av$
8. Distributività della moltiplicazione per scalari rispetto all'addizione di scalari: $(a + b)u = au + bu$
9. Associatività della moltiplicazione per scalari: $a(bu) = (ab)u$
10. Elemento neutro della moltiplicazione per scalari: $1u = u$

Definizione 1.3 (Vettori dipendenti).

$$\exists a, b, c \neq 0 : av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$$

Definizione 1.4 (Base di uno spazio vettoriale).

$$(v_1, \dots, v_n) = \{\dots, \alpha_n v_n\}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Definizione 1.5 (Kernel).

$$\ker(F) = \{v \in V : F(v) = 0\}$$

Definizione 1.6 (Immagine).

$$\text{Im}(F) = \{F(v) : v \in V\}$$

1.1.1 Esempio

Scrivere $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nella base definita da $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \Rightarrow \text{ricavo } \alpha_1, \alpha_2$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 1 = -\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow 3\alpha_2 = 2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{2}{3}, \alpha_1 = -\frac{1}{3}$$

$$w_1 = -\frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2$$

1.2 Matrici

Definizione 1.7 (Matrice dei complementi algebrici).

$$A^c : a_{ij}^c = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}^T), i \text{ e } j \text{ soppressi}$$

1.2.1 Esempio matrice complementi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^c = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} * \det(4) & (-1)^{1+2} * \det(-1) \\ (-1)^{2+1} * \det(3) & (-1)^{2+2} * \det(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Definizione 1.8 (Matrice inversa).

$$A^{-1} = \frac{A^c}{\det(A)}$$

Teorema 1.1 (Esistenza matrice inversa). *La matrice inversa esiste se e solo se $\det(A) \neq 0$*

1.2.2 Esempio matrice inversa

Calcolare, se esiste, la matrice inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifica esistenza matrice inversa

$$\det(A) = 6 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^c = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -6 \\ -2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = A^c / 6 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ -1/3 & -1/6 & 4/3 \end{pmatrix}$$

1.3 Determinante

Definizione 1.9 (Determinante 2x2).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc$$

Definizione 1.10 (Metodo di Sarrus).

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Definizione 1.11 (Laplace).

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a * \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b * \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c * \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

generalizzato:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} * (-1)^{i+j} * \det(M_{ij})$$

con i-esima riga e j-esima colonna eliminata

Teorema 1.2 (Teorema degli orlati).

1.3.1 Esempio

Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usiamo Laplace che sarà il metodo usato per tutte le matrici di dimensione superiore a 3

$$\det(A) = 3 * (2 - 0) - (-1) * (2 - 2) + 0 * (0 - 2) = 6$$

1.4 Sistemi lineari

Definizione 1.12 (Matrice Completa).

$$A = (\dots), B = (\dots), Ax = B$$

Matrice completa

$$A|B$$

Teorema 1.3 (Teorema di Rouché-Capelli).

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A|B) \Rightarrow \text{il sistema ammette soluzioni}$$

$$\text{incognite libere} = n - \text{rank}(A)$$

1.4.1 Esercizio

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = 0, x \in \mathbb{R}^2 \\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2x_2 \Rightarrow x = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1.5 Autovalori e autovettori

Definizione 1.13 (Autowettore di F). $F(v)$ endomorfismo

$$\underline{v} \text{ autovettore di } F \Rightarrow \underline{v} \neq 0 : F(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$$

Definizione 1.14 (Autovalore di F).

$$\lambda \text{ autovalore di } F \Leftrightarrow \text{zeri di } \det(F - \lambda I) = 0$$

Definizione 1.15 (Polinomio caratteristico).

$$P(\lambda) = \det(F - \lambda I) = |F - \lambda I|$$

Definizione 1.16 (Spettro di F).

$$\sigma(F) = \{v : F(v) = \lambda v\}$$

Definizione 1.17 (Molteplicità algebrica m_a). La molteplicità algebrica di un autovalore è la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico.

Definizione 1.18 (Molteplicità geometrica m_g). $\dim(\ker(F - \lambda I))$

Teorema 1.4 (Diagonalizzabilità). *A diagonalizzabile se ha n autovalori distinti*

Teorema 1.5 (Indipendenza autovettori). *Gli autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.*

Definizione 1.19 (Matrice diagonalizzata). Una matrice D è diagonalizzata se esiste una matrice invertibile P tale che $D = P^{-1}AP$ per una matrice A .

1.5.1 Esempio

Diagonalizzare la matrice

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ P_A(\delta) &= \det(A - \delta I) = P_A(\delta) = \det \begin{pmatrix} 3 - \delta & 1 & -1 \\ 1 & 3 - \delta & -1 \\ 0 & 0 & 2 - \delta \end{pmatrix} \\ P_A(\delta) &= (2 - \delta)((3 - \delta)^2 - 1) = (\delta - 2)^2(\delta - 4) = 0 \end{aligned}$$

$$\delta_1 = 2, \delta_2 = 2, \delta_3 = 4, m_a(2) = 2, m_a(4) = 1$$

troviamo gli autovettori

$$(A - 2I)x = 0 \Rightarrow V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(A - 4I)x = 0 \Rightarrow x_1 = x_2, x_3 = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{1/2}$$

Teorema 1.6 ($A^n = PD^nP^{-1}$).

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Ogni elemento sarà la combinazione lineare degli autovettori destri elevati alla n

$$A_{ij}^n = \sum_i c_i \lambda_i^n$$

1.6 Jordan

Teorema 1.7 (Teorema di Jordan).

$\forall \Phi \in End(v), \dim_c V, \Phi$ è rappresentabile da una matrice diagonale a blocchi di Jordan

Definizione 1.20 (Blocco di Jordan).

$$B_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

Esempio 1.1 ($B_3(2)$).

$$B_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Definizione 1.21.

$$m_a(\lambda) = \sum \dim B_k(\lambda)$$

Definizione 1.22 (N blocchi $\geq j$ associati a λ).

$$N_j(\lambda)$$

$$\dim \ker(A - \lambda I)^J = \sum_{k \geq j} N_k(\lambda)$$

Esempio 1.2 (Calcolo \tilde{J}).

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_a(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)^2$$

So che $m_a(1) = 1, m_a(2) = 1, m_a(4) = 2$, quindi devo capire se ho un blocco di ordine 2 o due blocchi di ordine 1 per l'autovalore 4.

$$\dim \ker(A - 4I) = 1 \Rightarrow \text{un blocco di ordine 2}$$

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1.7 Equazioni differenziali

Definizione 1.23 (Ordine dell'equazione). L'ordine di un'equazione differenziale è l'ordine della derivata con ordine maggiore

1.7.1 Esempio casareccio

$f'(x) = x$ è del 1 ordine

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int xdx = \frac{x^2}{2} + c$$

Definizione 1.24 (Soluzione generale). La soluzione generale di un'equazione differenziale è l'insieme di tutte le sue soluzioni, spesso espresso in termini di una funzione che include costanti arbitrarie. Dall'esempio di prima, $\frac{x^2}{2} + c$ è la soluzione generale.

1.7.2 Equazioni differenziali elementari

$$1. \quad y' = f(x)$$

$$y' = f(x) \Leftrightarrow y = \int f(x)dx = F(x) + c$$

$$\text{esempio } y' = 3e^{2x} \Leftrightarrow y = \int 3e^{2x}dx = \frac{3}{2}e^{2x} + c$$

$$2. \quad y'' = f(x)$$

$$y' = \int f(x)dx = F(x) + c_1, \quad y = \int [F(x) + c_1]dx = F(x) + c_1x + c_2$$

1.7.3 Problema di Cauchy

Equazione differenziale con condizioni iniziali.

$$\begin{cases} y' = -e^{-x} \\ y(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow y = e^{-x} + c$$

La condizione iniziale ci dice che la funzione per $x = 0$ vale 3, quindi:

$$e^{-0} + c = 3 \Leftrightarrow c = 2 \Rightarrow y(x) = e^{-x} + 2$$

esempio 2 ordine

$$\begin{cases} y'' = x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

soluzione

$$y' = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c_1, y = \int \left(\frac{x^2}{2} + c_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

avendo due condizioni iniziali possiamo calcolare c_1 e c_2

$$\begin{aligned} 1 &= 0^3/6 + c_1 \cdot 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 1 \\ 4 &= 0^2 + c_1 \Rightarrow c_1 = 4 \\ y(x) &= \frac{x^3}{6} + 4x + 1 \end{aligned}$$

1.7.4 Coefficienti costanti

Notazione $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$, forma generale $ay''(x) + by'(x) + cx(x) = 0$

Teorema 1.8 (Insieme soluzioni). *L'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 2. La soluzione generale sarà $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. c_1 e c_2 sono parametri liberi, y_1 e y_2 sono una base.*

Definizione 1.25 (Equazione caratteristica).

$$az^2 + bz + c = 0, z \in \mathbb{C}$$

Teorema 1.9 (Soluzione generale). *La soluzione è la soluzione dell'equazione caratteristica.*

- radici distinte reali

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{\delta_1 x}, z_2 = e^{\delta_2 x} \\ y(x) &= c_1 z_1 + c_2 z_2 \end{aligned}$$

- radici coincidenti reali

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 = e^{\delta x} \\ y(x) &= c_1 e^{\delta x} + c_2 x e^{\delta x} \end{aligned}$$

- radici complesse coniugate

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \alpha \pm i\beta, z_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), z_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x) \\ y(x) &= c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{aligned}$$

Esempio 1.3. $y'' - 5y' + 4y = 0$

$$z^2 - 5z + 4 = 0 \Rightarrow (z - 4)(z - 1) = 0, z_1 = 4, z_2 = 1$$

base dello spazio

$$e^{4x}, e^{1x} \Rightarrow y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{1x}$$

Esempio 1.4 (Problema di Cauchy).

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

equazione caratteristica

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \Rightarrow (z + 1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow z_1 = -1 + i, z_2 = -1 - i$$

$$\alpha = -1, \beta = 1$$

base

$$e^{-x} \cos(x), e^{-x} \sin(x), y(x) = c_1 e^{-x} \cos(x) + c_2 e^{-x} \sin(x)$$

sappiamo y'

$$y'(x) = -e^{-x}(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)) + e^{-x}(-c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x))$$

sostituendo le coordinate troviamo

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow y(x) = e^{-x}(\cos(x) + 2 \sin(x))$$

2 Introduzione e notazione

In questa prima sezione introduciamo i concetti base e la notazione usata negli appunti.

Definizione 2.1 (Sistema dinamico). Insieme di elementi interconnessi che evolvono nel tempo e su cui in genere è possibile intervenire modificandone il comportamento.



Figura 1: Elementi circuituali: Resistenza e Condensatore

2.1 Notazione

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

3 Sistemi lineari

3.1 Sistemi a tempo continuo lineari stazionari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Definizione 3.1 (Matrici e vettori). Diamo le dimensioni delle matrici e dei vettori

- $A^{n \times n}$ matrice dinamica
- $B^{n \times p}$ degli ingressi
- $C^{q \times n}$ legame stato-uscita
- $D^{q \times p}$ legame ingresso-uscita
- x^n stato
- u^p ingresso
- y^q uscita

3.1.1 Sistema Massa-Molla-Smorzatore

Di seguito il sistema massa-molla-smorzatore con ingresso esterno u e posizione y .

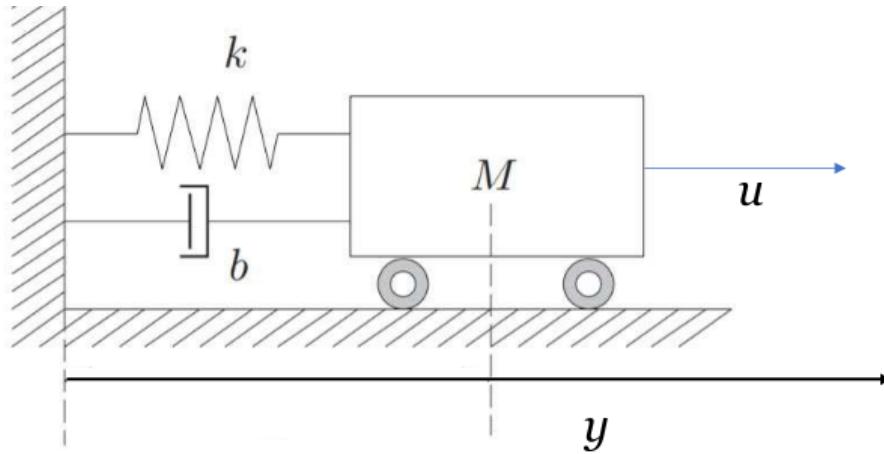


Figura 2: Carrello di massa M con molla k e smorzatore viscoso b .

legge che descrive il movimento

$$M\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

vogliamo passare allo spazio di stato

$$x_1(t) = y(t), x_2(t) = \dot{y}(t)$$

Essendo $\dot{x}_1(t)$ lo spazio e $\dot{x}_2(t)$ la velocità

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = \frac{1}{M}(u(t) - b\dot{y}(t) - ky(t))$$

adesso abbiamo la forma $\dot{x}(t) = \dots$ e $y(t) = \dots$

Possiamo riscriverlo in forma matriciale

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

3.1.2 Modello implicito

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Teorema 3.1 (Soluzioni del sistema).

$$\begin{cases} x(t) = e^{a(t-t_0)x_0} & , \dot{x} = ax \\ x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau & , \dot{x} = ax + bu \end{cases}$$

[Osservazione] La soluzione non dipende da t o t_0 ma solo dalla differenza $t - t_0$.

3.1.3 Modello esplicito

$$\begin{cases} x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \\ y(t) = c \left(e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \right) + du(t) \end{cases}$$

3.1.4 Risposta libera e forzata

Definizione 3.2 (Risposta libera). Dipende dalle condizioni iniziali

$$x_l(t) = e^{a(t-t_0)}x_0$$

Definizione 3.3 (Risposta forzata). Dipende dall'ingresso

$$x_f(t) = \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

3.1.5 Ipotesi di linearità

Definiamo $x_{01}(t)$ e $x_{02}(t)$ come gli stati raggiungi a tempo t partendo da $x_{01}(t_0)$ e $x_{02}(t_0)$ con ingressi $u_1(t)$ e $u_2(t)$ rispettivamente. Possiamo dire allora che

$$x_0(t) = c_1x_{01}(t_0) + c_2x_{02}(t_0), u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$$

e che lo stato raggiunto sarà

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

Siano

1. $x_{01}(t_0) = x_0(t_0)$ e $u_1 = 0$, $x_1(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 = x_l$
2. $x_{02}(t_0) = 0$ e $u_2 = u$, $x_2(t) = \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau = x_f$

Allora possiamo combinarle

$$\bar{x}_0 = c_1x_{01}(t_0) + c_2x_{02}(t_0), \bar{u} = c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$$

$$\bar{x}(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

Concludiamo ponendo $c_1 = c_2 = 1$

$$\bar{x}(t) = x_1(t) + x_2(t) = x_l(t) + x_f(t) = x(t)$$

3.1.6 Ipotesi di stazionarietà

Definizione 3.4 (Sistema stazionario). Un sistema è stazionario se spostando $u(t)$ nel tempo, anche l'uscita si sposta, senza cambiare forma.

Teorema 3.2 (Condizione di stazionarietà). Se

$$u(t - \Delta) \Rightarrow y(t - \Delta)$$

allora il sistema è stazionario.

Prova Facciamo un esperimento all'istante t_0 e dopo a t_1 . Avremo $\bar{x}_0(t_1) = x_0$ e $\bar{u}(t) = u(t - \Delta) = u(t - t_1 + t_0)$. Idealmente avremo $u(t) = \bar{u}(t - \Delta)$. Prendiamo la soluzione esplicita

$$\bar{x}(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_1}^{\bar{t}} e^{a(\bar{t}-\tau)} b \bar{u}(\tau) d\tau$$

Siano $\xi = \tau - \Delta$, $\bar{t} = t + \Delta$

$$\bar{x}(t + \Delta) = e^{a(\bar{t}-t_0)}x_0 + \int_{t_1}^{t+\Delta} e^{a(t+\Delta-\tau)} b \bar{u}(\tau) d\tau$$

- $\tau \rightarrow t_1 \Rightarrow \xi \rightarrow t_0$
- $\tau \rightarrow \bar{t} \Rightarrow \xi \rightarrow t$

Dovendo integrare sostituiamo

$$\bar{x}(t + \Delta) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\xi)} b u(\xi) d\xi = x(t)$$

3.1.7 Forma generale

Definiamo le seguenti matrici

- $\Phi = e^{a(t-t_0)}$ matrice di transizione di stato
- $H = e^{At}B = \Phi B$ matrice risposte impulsive dello stato, colonne = risposta a impulso
- $\Psi = Ce^{At}$ matrice trasformazione dello stato
- $W = Ce^{At}B = C\Phi B = \Psi B$ matrice risposte impulsive dell'uscita

La forma esplicita diventa

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau) d\tau \\ y(t) = W(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^t W(t - \tau)u(\tau) d\tau + Du(t) \end{cases}$$

che nel caso scalare diventa, con $t_0 = 0$

$$\begin{cases} x(t) = e^{at}x_0 + \int^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \\ y(t) = ce^{at}x_0 + \int^t ce^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau + \int^t d\delta(t - \tau)u(\tau) d\tau \end{cases}$$

Definizione 3.5 (Impulso di Dirac).

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ +\infty & t = 0 \end{cases}$$

3.2 Sistemi a tempo discreto

3.2.1 Modello implicito

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad x(0) = x_0, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$$

Esempio 3.1 (Laurea triennale). L'idea è che ogni anno una percentuale α di studenti non finisce gli esami del 1o anno, mentre $1 - \alpha$ inizia gli esami del 2o anno.

Possiamo formalizzare il primo anno in questo modo

$$x_1(k+1) = \alpha_1 x_1(k) + u(k)$$

quindi gli studenti che entrano e quelli che ripetono gli esami.

Nel secondo ci andranno quelli che passano dal primo e quelli che ripetono

$$x_2(k+1) = \alpha_2 x_2(k) + (1 - \alpha_1) x_1(k)$$

Quelli che si laureano sono l'output del sistema

$$y(k) = (1 - \alpha_3) x_3(k)$$

Nel complesso il sistema è

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \alpha_1 x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = (1 - \alpha_1) x_1(k) + \alpha_2 x_2(k) \\ x_3(k+1) = (1 - \alpha_2) x_2(k) + \alpha_3 x_3(k) \\ y(k+1) = (1 - \alpha_3) x_3(k) \end{cases}$$

in forma matriciale

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 1 - \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 - \alpha_3 \end{pmatrix} x(k) \end{cases} \quad D = 0$$

Teorema 3.3. $D = 0 \Rightarrow$ no legame diretto tra input e output.

Esempio 3.2 (Calcolo radice quadrata con metodo tangenti). Con il metodo delle tangenti cerchiamo la radice di a , ovvero la soluzione di

$$f(x) = x^2 - a$$

dove $x = k + 1, x_0 = k$.

Sviluppando con Taylor otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ \Rightarrow x_{k+1} - x_k &= \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{f'(x_k)} \end{aligned}$$

mettiamo k nella formula

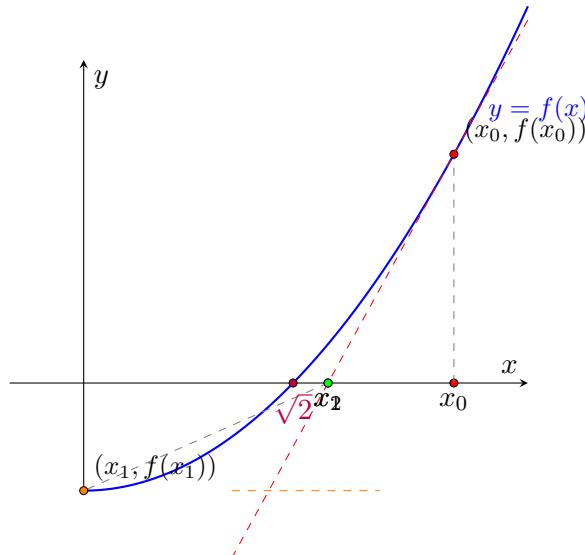
$$\begin{aligned} f(x_k) &= x_k^2 - a \\ f'(x_k) &= 2x_k \end{aligned}$$

$$f(x_{k+1}) = x_{k+1}^2 - a$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k + \frac{-x_k^2 + a}{2x_k} = x_k - \frac{x_k}{2} + \frac{a}{2x_k}, \quad f(x_{k+1}) \text{ approssimato}$$

e otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{1}{2}x_k + \frac{a}{2x_k} = \frac{1}{2}x_k + \frac{a}{2x_k} \\ y_k = x_k \end{cases}$$



3.3 Evoluzione libera

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

1. evoluzione libera: $e^{A(t-\tau)}x(t_0)$
2. evoluzione forzata: $\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$

Dall'ipotesi di linearità:

$$\begin{cases} x_{01} \\ u_1[t_0, t] \end{cases} \rightarrow x_1(t) = e^{a(t-t_0)}x_{01} + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu_1(\tau)d\tau$$

$$\begin{cases} x_{02} \\ u_2[t_0, t] \end{cases} \rightarrow x_2(t) = e^{a(t-t_0)}x_{02} + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu_2(\tau)d\tau$$

x_0 è la combinazione lineare di x_{01} e x_{02} , u è la combinazione lineare di u_1 e u_2 . Abbiamo quindi

$$\begin{cases} x_0 = c_1x_{01} + c_2x_{02} \\ u = c_1u_1 + c_2u_2 \end{cases}$$

allora riscriviamo $X(t)$

$$X(t) = e^{a(t-t_0)}(c_1x_{01} + c_2x_{02}) + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}b(c_1u_1(\tau) + c_2u_2(\tau))d\tau = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

Abbiamo ora due casi

- $c_2 = 0, x_0 = x_{01}, u = u_1 = 0 \Rightarrow$ risposta libera (non dipende da u)
- $c_1 = 0, c_2 = 1, x_0 = x_{02} = 0, u = u_2 \Rightarrow$ risposta forzata (dipende da u)

Teorema 3.4 (Sovrapposizione delle risposte (degli effetti)).

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), c_1 = c_2 = 1$$

Secondo questa condizione posso studiare separatamente la risposta libera e quella forzata.

Definizione 3.6 (Costante di tempo). $\tau = -\frac{1}{a}$

Allora riscriviamo la risposta libera

$$x_l(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 = e^{-\frac{t}{\tau}} x(0)$$

che essendo un esponenziale avrà questo andamento

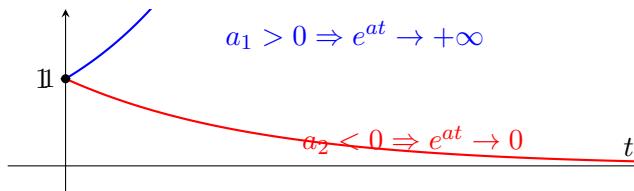


Figura 3: Comportamento dell'esponenziale e^{at} in funzione del segno di a .

3.4 Cambio coordinate del sistema

Per cambiare le coordinate definiamo $z = Tx : \exists T^{-1}$. Da qui ci rifacciamo al sistema classico

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Abbiamo poi che $\dot{z} = T\dot{x} = TAx + TBu$, $x = zT^{-1}$ e quindi risulta (con y stessa cosa)

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = TAT^{-1}z(t) + TBu(t) \\ y(t) = CT^{-1}z(t) + Du(t) \end{cases}$$

Definizione 3.7 ($\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$).

$$\tilde{A} = TAT^{-1}, \tilde{B} = TB, \tilde{C} = CT^{-1}, \tilde{D} = D$$

Definizione 3.8 (Autowettori destri e sinistri). Gli autovalori sono gli stessi, ma cambiano gli autovettori

- destro $Au = \lambda u$, u vettore colonna
- sinistro $A^T v = \lambda v$, v vettore riga

Per trovarli

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix}$$

Date queste informazioni possiamo riscrivere

$$e^{At} = I_d + At + \frac{A^2 t^2}{2} = T^{-1}T + T^{-1}\tilde{A}Tt + T^{-1}\tilde{A}^2T\frac{t^2}{2}$$

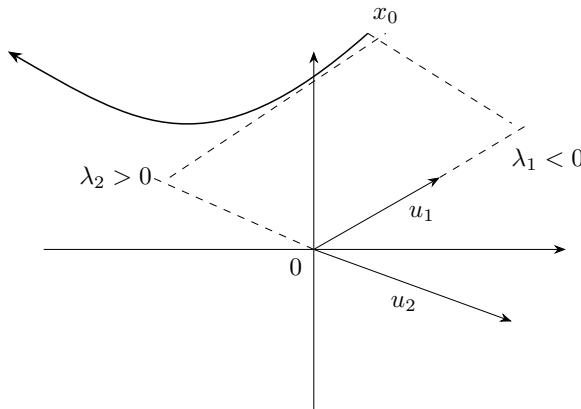
Sappiamo inoltre da algebra che $A^k = T^{-1}\tilde{A}^kT$ e quindi e^{At} diventa

$$e^{At} = T^{-1}(I_d + \tilde{A}t + \dots)T = T^{-1}e^{\tilde{A}t}T$$

Teorema 3.5 (Evoluzione sistema). *Essendo $e^{\tilde{A}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$*

$$e^{At} = T^{-1}e^{\tilde{A}t}T = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} u_1 & e^{\lambda_2 t} u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T & v_2^T \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t} u_1 v_1^T + e^{\lambda_2 t} u_2 v_2^T$$

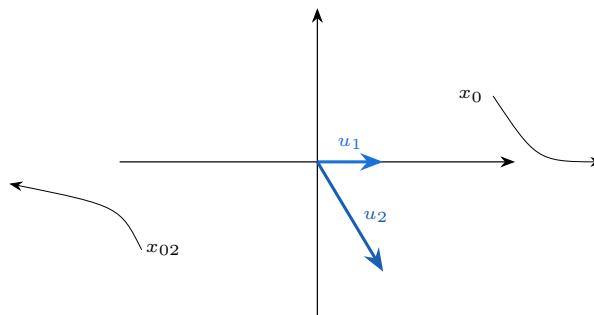
$$x_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2 \Rightarrow x(t) = e^{\lambda_1 t} c_1 u_1 + e^{\lambda_2 t} c_2 u_2$$



Esempio 3.3.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Casi particolari



- x_0 su $u_1 \Rightarrow c_2 = 0$ diverge
- x_0 su $u_2 \Rightarrow c_1 = 0$ converge

3.4.1 Autovalori complessi

Poniamo che il polinomio caratteristico abbia radici complesse coniugate $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$. Sostituendo nell'equazione avremo

$$(A - \alpha I - jwI)(u_a + ju_b) = 0 \Leftrightarrow (A - \alpha I)u_a - jwIu_a + J(A - \alpha I)u_b + jwIu_b = 0$$

$$\begin{cases} (A - \alpha I)u_a + wu_b = 0 \\ (A - \alpha I)u_b - wu_a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Au_a = \alpha u_a - wu_b \\ Au_b = wu_a + \alpha u_b \end{cases}$$

$$A \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -w \\ w & \alpha \end{pmatrix}$$

Sappiamo che

$$TAT^{-1} = \tilde{A}, T^{-1} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -w \\ w & \alpha \end{pmatrix}$$

Teorema 3.6 (Evoluzione libera con autovalori complessi).

$$e^{\tilde{A}t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(wt) & -\sin(wt) \\ \sin(wt) & \cos(wt) \end{pmatrix}$$

con α che determina l'andamento esponenziale e w la frequenza di rotazione.

$$X_l(t) = T^{-1} e^{\tilde{A}t} T x_0$$

sostituiamo tutto nella formula

$$X_l(t) = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(wt) & -\sin(wt) \\ \sin(wt) & \cos(wt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix} (c_a u_a + c_b u_b)$$

Portando $e^{\alpha t}$ all'inizio

$$X_l(t) = e^{\alpha t} \left(\cos(wt)u_a + \sin(wt)u_b \quad -\sin(wt)u_a + \cos(wt)u_b \right) \begin{pmatrix} v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix} (c_a u_a + c_b u_b)$$

$$\Leftrightarrow X_l(t) = e^{\alpha t} \left[\cos(wt)u_a v_a^T + \sin(wt)u_b v_a^T - \sin(wt)u_a v_b^T + \cos(wt)u_b v_b^T \right] (c_a u_a + c_b u_b)$$

$$\Leftrightarrow X_l(t) = e^{\alpha t} \left[\cos(wt)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(wt)(u_b v_a^T - u_a v_b^T) \right] (c_a u_a + c_b u_b)$$

Prendiamo il Delta di Kronecker $\delta_{ij} = v_i^T u_j$ (se $i = j$ vale 1, altrimenti 0), e facciamo le seguenti osservazioni

- $(u_a v_a^T + u_b v_b^T)u_a = u_a$
- $(u_a v_a^T + u_b v_b^T)u_b = u_b$

e il primo membro diventa x_0 ,

- $(u_b v_a^T - u_a v_b^T)u_a = -u_b$
- $(u_b v_a^T - u_a v_b^T)u_b = u_a$

quindi sostituiamo ancora

$$X_l(t) = e^{\alpha t} [\cos(wt)(c_a u_a + c_b u_b) + \sin(wt)(-c_a u_b + c_b u_a)]$$

$$\Leftrightarrow X_l(t) = e^{\alpha t} [u_a(c_a \cos(wt) + c_b \sin(wt)) + u_b(c_b \cos(wt) - c_a \sin(wt))]$$

Passaggio ad ampiezza-fase

$$c_a = m \sin(\varphi), c_b = m \cos(\varphi)$$

Date le formule di prostafesi (a detta del prof)

$$\begin{cases} \sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B) \\ \cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B) \end{cases}$$

allora riscriviamo tutto come

$$X_l(t) = m e^{\alpha t} [u_a \sin(wt + \varphi) + u_b \cos(wt + \varphi)]$$

Pulsazione naturale e smorzamento

Definizione 3.9 (Pulsazione naturale).

$$w_n = \sqrt{\alpha^2 + w^2}$$

Definizione 3.10 (Smorzamento).

$$\xi = -\frac{\alpha}{w_n}$$

3.4.2 Cambio di base da \mathbb{C} a \mathbb{R}

Ora siamo nella seguente situazione: abbiamo una coppia di autovalori complessi coniugati $\alpha \pm j\beta$ e un autovettore complesso coniugato $u_a \pm ju_b$. Dunque avremo u_a e u_b come autovettori reali. L'obiettivo è usare una base reale al posto di u e u^* .

$$\begin{pmatrix} u & u^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}$$

Definizione 3.11 (Forma canonica reale). \tilde{A} sarà diagonale a blocchi con

- $\lambda_i \forall$ autovalore reale
- $\begin{pmatrix} \alpha_j & w_j \\ -w_j & \alpha_j \end{pmatrix} \forall$ coppia di autovalori coniugati

3.4.3 Autovalori misti

Nel caso generico avremo autovalori reali e complessi. Dall'ultima definizione sappiamo come si trasforma \tilde{A} , dunque nel caso di una matrice A 3x3 con autovalori misti avremo la seguente situazione

$$\lambda_1 \in \mathbb{R} = u_1, \lambda_{2,3} = \alpha \pm jw = u_a, u_b$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -w \\ 0 & w & \alpha \end{pmatrix}$$

prendiamo lo sviluppo di $e^{A_2 t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos wt & -\sin wt \\ \sin wt & \cos wt \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & -w \\ w & \alpha \end{pmatrix}$ e quindi otteniamo \tilde{A} finale in forma canonica reale

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \cos wt & -e^{\alpha t} \sin wt \\ 0 & e^{\alpha t} \sin wt & e^{\alpha t} \cos wt \end{pmatrix}$$

Ora riprendiamo i 3 autovettori reali u_1, u_a, u_b e riscriviamo e^{At} con \tilde{A}

$$e^{At} = T^{-1} e^{\tilde{A}t} T = \begin{pmatrix} u_1 & u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \cos wt & -e^{\alpha t} \sin wt \\ 0 & e^{\alpha t} \sin wt & e^{\alpha t} \cos wt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix}$$

Osservazione 3.1 (Gli autovettori moltiplicano solo con autovalori corrispondenti).

$$\Leftrightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} u_1 & e^{\alpha t} \cos(wt) u_a - e^{\alpha t} \sin(wt) u_b & e^{\alpha t} \sin(wt) u_a + e^{\alpha t} \cos(wt) u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow e^{At} &= e^{\lambda_1 t} u_1 v_1^T + e^{\alpha t} (\cos(wt) u_a v_a^T - \sin(wt) u_b v_a^T) + \sin(wt) u_a v_b^T + \cos(wt) u_b v_b^T \\ \Leftrightarrow e^{At} &= e^{\lambda_1 t} u_1 v_1^T + e^{\alpha t} [\cos(wt)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(wt)(u_a v_b^T - u_b v_a^T)] \end{aligned}$$

Definizione 3.12 (Forma spettrale di e^{At}).

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} u_1 v_1^T + e^{\alpha t} [\cos(wt)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(wt)(u_a v_b^T - u_b v_a^T)]$$

Lemma 3.1 (Forma generale risposta libera).

$$X_l(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} u_i v_i^T + \sum_j e^{\alpha_j t} [\cos(w_j t)(u_{ja} v_{ja}^T + u_{jb} v_{jb}^T) + \sin(w_j t)(u_{ja} v_{jb}^T - u_{jb} v_{ja}^T)]$$

3.4.4 Moti aperiodici e pseudoperiodici

x_0 nella base degli autovettori $= c_1 u_1 + c_a u_a + c_b u_b$, dobbiamo calcolare $X_l(t)$. Ricordiamo che

- $v_1^T \times u_1 = 1$
- $v_1^T \times u_a = 0$
- $v_1^T \times u_b = 0$

dato che

$$T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_a & u_b \end{pmatrix} \quad T \cdot T^{-1} = I$$

e anche gli altri prodotti verranno semplificati, dunque

$$e^{At} x_0 = e^{\lambda_1 t} c_1 u_1 + e^{\alpha t} [\cos(wt)(c_a u_a + c_b u_b) + \sin(wt)(-c_a u_b + c_b u_a)]$$

raccogliamo u_a e u_b

$$\Leftrightarrow e^{At} x_0 = e^{\lambda_1 t} c_1 u_1 + e^{\alpha t} [u_a (c_a \cos(wt) + c_b \sin(wt)) + u_b (c_b \cos(wt) - c_a \sin(wt))]$$

come già fatto in precedenza, passiamo ad ampiezza-fase con $c_a = n \sin(\varphi)$ e $c_b = n \cos(\varphi)$

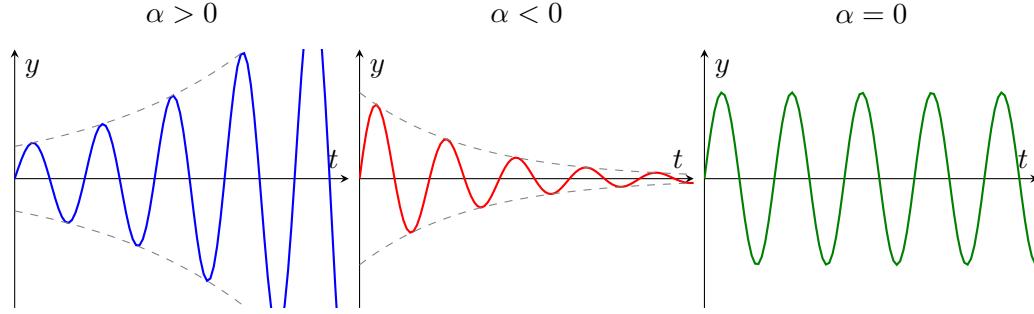
$$\Leftrightarrow e^{At} x_0 = e^{\lambda_1 t} c_1 u_1 + n e^{\alpha t} [u_a \sin(wt + \varphi) + u_b \cos(wt + \varphi)]$$

Definizione 3.13 (Moto aperiodico).

$$e^{\lambda_i} u_i c_i$$

Definizione 3.14 (Moto pseudoperiodico).

$$n e^{\alpha t} [u_a \sin(wt + \varphi) + u_b \cos(wt + \varphi)]$$



In un grafico a 3 dimensioni, partiamo da $x_0 = (3, 3, 3)$ e prendiamo come esempio i vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ora il moto deve seguire la convergenza/divergenza lungo u_1 e la rotazione sul piano $u_a - u_b$, prendiamo solo il caso in cui $\lambda_1 < 0$. Nb: i vettori sono gli assi, non sono della loro effettiva dimensione.

3.4.5 Tempo discreto

Definiamo di nuovo le matrici di trasformazione

$$\begin{cases} \phi = A^k \\ \psi = B^k \\ H = A^{k-1}B \\ W = \begin{cases} CA^{k-1}B & k > 0 \\ D & k = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Prendiamo una matrice 3x3 A diagonalizzabile $\Rightarrow \exists u_1, u_a, u_b : T^{-1} = (u_1 u_a u_b)$. Abbiamo quindi che $A^k = T^{-1} \tilde{A}^k T$.

$$\tilde{A}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & w \\ 0 & -w & \alpha \end{pmatrix}^k$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & w \\ -w & \alpha \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \sigma \cos(\theta) & \sigma \sin(\theta) \\ -\sigma \sin(\theta) & \sigma \cos(\theta) \end{pmatrix}^k = \sigma^k \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^k$$

Definizione 3.15. $\sigma = \sqrt{\alpha^2 + w^2}$ e $\theta = \arctan(\frac{w}{\alpha})$

Teorema 3.7 (A^k).

$$A^k = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^k \cos(k\theta) & \sigma^k \sin(k\theta) \\ 0 & -\sigma^k \sin(k\theta) & \sigma^k \cos(k\theta) \end{pmatrix} T$$

si dimostra per induzione.

$$A^k = \lambda_1^k u_1 v_1^T + \sigma^k [\cos(k\theta)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(k\theta)(u_a v_b^T - u_b v_a^T)]$$

$$x_0 = c_1 \lambda_1 + c_a \lambda_a + c_b \lambda_b$$

$$X_l(k) = \lambda_1^k c_1 u_1 + \sigma^k [\cos(k\theta)(u_a c_a + u_b c_b) + \sin(k\theta)(u_a c_b - u_b c_a)]$$

che sempre con le formule di prostaferesi diventa

$$X_l(k) = \lambda_1^k c_1 u_1 + \sigma^k (n \sin(\theta k + \varphi) u_a + n \cos(\theta k + \varphi) u_b)$$

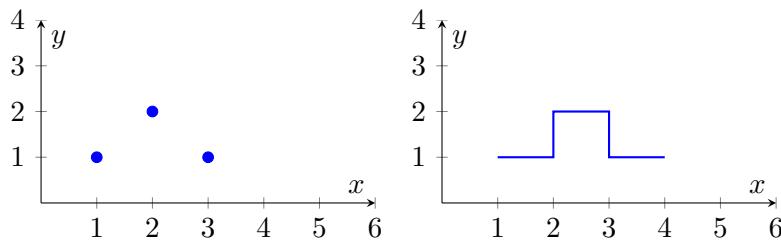
Definizione 3.16 (Moto alternante). Dato $\lambda_i < 0$, allora il moto aperiodico associato si dice alternante. In sostanza avendo il $-$ nell'elevamento a potenza, il segno del moto cambia ad ogni passo.

Teorema 3.8 (Evoluzione moti pseudoperiodici). *Non guardiamo α ma il modulo*

- $\sigma > 0$ divergente
- $\sigma = 0$
- $\sigma < 0$ convergente

3.4.6 Organo di ritenuta

Prendiamo un segnale in ingresso discreto, il compito dell'organo di ritenuta è di mantenere il valore dell'ultimo campione fino al successivo. Ora prendiamo un sistema a tempo continuo,



definiamo $T = t - t_0$, $t_0 = kT$ e $t = (k + 1)T$.

Definizione 3.17 (Tempo di campionamento T). Ogni quanto campionare un segnale continuo, è definito come $T = t - t_0$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^A(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \\ x((k+1)T) &= e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(kT)d\tau \end{aligned}$$

da qua definiamo le matrici discrete

- $A_d = e^{AT}$
- $B_d = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(kT)d\tau = A^{-1}(e^{AT} - I_d)B$
- $C_d = C$
- $D_d = D$

sia $\xi = (k + 1)T - \tau$ allora

$$B_d = - \int_T^0 e^{A\xi} Bd\xi = \int_0^T e^{A\xi} Bd\xi$$

Forma implicita

$$\begin{cases} x((k+1)T) = A_d x(kT) + B_d u(kT) \\ y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) \end{cases}$$

Per gli autovalori reali o complessi usiamo T al posto di t e otteniamo

$$\lambda_i \rightarrow e^{\lambda_i T}, \quad \alpha_j \pm jw_j \rightarrow e^{\alpha_j T}(\cos(w_j T) \pm j \sin(w_j T))$$

3.5 Osservabilità e eccitabilità

Prendiamo un sistema con 1 autovalore reale e 1 coppia di autovalori complessi coniugati

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} u_1 v_1^T + e^{\alpha t} [\cos(wt)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(wt)(u_a v_b^T - u_b v_a^T)]$$

prendiamo la matrice B e calcoliamo $H = e^{At}B$

$$H(t) = e^{\lambda_1 t} u_1 v_1^T B + e^{\alpha t} [\cos(wt)(u_a v_a^T + u_b v_b^T)B + \sin(wt)(u_a v_b^T - u_b v_a^T)B]$$

Notiamo che se $v_1^T B = 0$ il moto non comparirà nell'espressione di $H(t)$ che è definita come matrice risposte impulsive dello stato, di conseguenza si dice che il moto non è eccitabile da un impulso in ingresso.

Definizione 3.18 (Eccitabilità). Definizione per ogni moto

- Un moto aperiodico è eccitabile se $v_i^T B \neq 0$.
- Un moto pseudoperiodico è eccitabile se $v_{ja}^T B \neq 0$ o $v_{jb}^T B \neq 0$.

Teorema 3.9 (Moto eccitabile). *Se $u_i \in \text{Im}\{B\}$ allora il moto è eccitabile.*

Esempio 3.4 (Esercizio stile esonero).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} D = 0$$

1. schema di simulazione

$$2. \text{ evoluzione libera con } x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. determinare gli stati tc $X_L(t) \rightarrow 0$

4. determinare gli stati tc $X_L(t)$ limitata

Soluzione. 1. Riscriviamo il sistema nella forma implicita e poi $X(t)$ per componenti

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

ha 2 ingressi (colonne di B) quindi per componenti diventa

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = 2x_2(t) + u_1(t) - u_2(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Il disegno prima o poi arriverà (se mi ricordo) (aprite una issue o fate una PR)

2. Calcoliamo gli autovalori di A

$$P_a(A) = \det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda + \lambda^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 2, -1$$

Ora per $X_L(t) = e^{At}x_0 = (\sum e^{\lambda_i t} u_i v_i^T) x_0$ ci servono gli autovettori destri e sinistri.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Dato $\lambda = (0, 2, -1)$, calcoliamo $X_L(t)$, ricordando che $c_i = v_i^T x_0$

$$X_L(t) = u_1 c_1 + e^{2t} u_2 c_2 + e^{-t} u_3 c_3$$

3. $x_0 = c_3 u_3$ essendo l'unico moto che converge

4. $x_0 = c_1 u_1 + c_3 u_3$ essendo gli unici moti che non divergono

Prendiamo l'uscita Y e facciamo dei calcoli veloci:

$$W = C \left(\sum_i e^{\lambda_i t} u_i v_i^T + \sum_j e^{\alpha_j t} (\cos(w_j t)(u_{ja} v_{ja}^T + u_{jb} v_{jb}^T) + \sin(w_j t)(u_{ja} v_{jb}^T - u_{jb} v_{ja}^T)) \right) B$$

Definizione 3.19 (Osservabilità). Definizione per ogni moto

- Un moto aperiodico è osservabile se $Cu_i \neq 0$.
- Un moto pseudoperiodico è osservabile se $Cu_{ja} \neq 0$ o $Cu_{jb} \neq 0$.

Osservazione 3.2 (In W compaiono solo i moti osservabili ed eccitabili).

3.5.1 Autovalori multipli

Prendiamo queste due matrici che sono molto simili tra di loro

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Entrambe le matrici hanno un autovalore doppio, però A non è diagonalizzabile, infatti l'unico autovettore associato è $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. \hat{A} invece è diagonalizzabile con autovettori $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nel caso normale con $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$, $\lambda_1 = -2 \rightarrow e^{-2t}$. Se la matrice non è diagonalizzabile usiamo la forma di Jordan. Dato che compare un blocco di Jordan, compaiono i modi polinomiali-esponenziali. k è la dimensione del blocco di Jordan associato a λ_i .

$$\lambda_i \rightarrow e^{\lambda_i t}, \quad te^{\lambda_i t}, \dots, \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_i t}$$

per $\lambda_i \rightarrow 0$

$$\lim_{\lambda_i \rightarrow 0} \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_i t} = 0$$

per $\lambda_i \rightarrow \infty$

$$\lim_{\lambda_i \rightarrow \infty} \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_i t} = \infty$$

caso critico $\lambda_i = 0$

- $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \Rightarrow$ moto limitato
- $m_a(\lambda_i) > m_g(\lambda_i) \Rightarrow$ moto divergente

3.6 Esercizi

Esercizio 3.1 (Schema di simulazione, eccitabilità, osservabilità e matrici a tempo discreto).

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(k) + u(k) \end{cases}$$

Soluzione. 1. Riscriviamo il sistema nella forma implicita e poi $X(t)$ per componenti

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_1 + 3x_2 + x_3 + u_1(k) \\ x_2(k+1) = x_2 - x_3 \\ x_3(k+1) = x_2 + x_3 + u_3(k) \end{cases}$$

e si fa il grafico (aspetto PR)

2. A diagonale a blocchi $\Rightarrow \lambda_1 = -1$

$$(1 - \lambda)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = 1 \pm j$$

Per l'autovettore associato a $\lambda_1 = -1$ il calcolo è semplice e viene $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (1 incognita libera), per gli autovalori complessi coniugati si usa la forma

$$A \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & w \\ -w & \alpha \end{pmatrix}$$

con $\alpha = 1$ e $w = 1$, dunque

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -a_1 + 3a_2 + a_3 = a_1 - b_1 \\ a_2 - a_3 = a_2 - b_2 \\ a_2 + a_3 = b_2 + b_3 \\ -b_1 + 3b_2 + b_3 = a_1 + b_1 \\ b_2 - b_3 = a_2 + b_2 \\ b_2 + b_3 = a_3 + b_3 \end{cases}$$

ora dobbiamo capire quali sono le 2 equazioni linearmente dipendenti. Dalla 6a equazione ricaviamo che $a_3 = b_2$, dalla 3a che $a_2 = -b_3$. Sostituendo nel sistema togliamo le equazioni 2 e 5 rimanendo con

$$\begin{cases} -a_1 + 3a_2 + a_3 = a_1 - b_1 \\ -b_1 + 3b_2 + b_3 = a_1 + b_1 \\ 2a_1 - b_1 = 3a_2 + a_3 \\ a_1 + 2b_1 = 3b_2 + b_3 \end{cases}$$

sappiamo da prima che $a_2 = -b_3$ e $a_3 = b_2$, dunque

$$\begin{cases} 2a_1 - b_1 = 3(-b_3) + b_2 \\ a_1 + 2b_1 = 3b_2 + b_3 \end{cases}$$

scegliamo $b_2 = 1$ e $b_3 = 0$ per semplicità, dunque

$$\begin{cases} 2a_1 - b_1 = 1 \\ a_1 + 2b_1 = 3 \end{cases}$$

risolvendo otteniamo $a_1 = 1, b_1 = 1$, dunque

$$u_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Osservabilità

$$Cu_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{non osservabile}$$

$$Cu_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{osservabile (basta che uno dei 2 sia non nullo)}$$

$$Cu_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{osservabile}$$

Per l'eccitabilità calcoliamo gli autovettori sinistri

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

facciamo i calcoli con v^T e B

$$v_1^T B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{non eccitabile}$$

$$v_a^T B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{eccitabile (basta che uno dei 2 sia non nullo)}$$

$$v_b^T B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

4. Matrici a tempo discreto

$$\Phi(k) = \lambda_1^k u_1 v_1^T + \sigma^k (\cos(\theta k)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(\theta k)(u_a v_b^T - u_b v_a^T))$$

$$\text{con } \sigma = \sqrt{\alpha^2 + w^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{e } \theta = \arctan\left(\frac{w}{\alpha}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Phi(k) = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + (\sqrt{2})^k (\dots)$$

$$H(k) = \Phi(k)B, \quad v_1^T B = 0, v_a^T B = 1, v_b^T B = 0$$

$$H(k) = (\sqrt{2})^{k-1} (\cos(\theta(k-1))u_a - \sin(\theta(k-1))u_b)$$

4 Stabilità

4.1 Il pendolo

Consideriamo un pendolo, ha due posizioni in cui può stare fermo:

- la posizione con il pendolo verso il basso (posizione di equilibrio stabile);
- la posizione con il pendolo verso l'alto (posizione di equilibrio instabile).

I sistemi dinamici li descriviamo con $\dot{x} =$ una funzione, che dipende da x e da u . La \dot{x} nel caso del pendolo è la velocità, quindi se trovassimo $\dot{x} = f(x_e, u_e) = 0$, avremmo trovato un punto dove il pendolo sta fermo, cioè un punto di equilibrio.

4.2 Sistemi

Prendiamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

Teorema 4.1 (Soluzioni equilibrio di un sistema). *Devono valere le seguenti condizioni:*

$$\begin{cases} \text{rank}(A) = n & x_e = 0 \text{ unico punto di equilibrio} \\ \text{rank}(A) = q < n & \text{numero soluzioni} = \infty^{n-q} \end{cases}$$

4.2.1 Definizioni di stabilità

Le seguenti definizioni valgono per $u = 0$, cioè il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(t) = e^{At}x_0 \\ \Phi(t) = e^{At} \end{cases}$$

Definizione 4.1 (Sistema stabile). Devono valere le seguenti condizioni:

1. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 : \|x_0 - x_e\| < \delta_\epsilon, \|x(t) - x_e\| < \epsilon \forall t > 0$
2. $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$ equiasintoticità

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} x_e &= (0, 0) \Rightarrow \|x_0\| < \delta_\epsilon \\ \|x(t)\| &= \|\Phi(t)x_0\| < \epsilon \\ \|\Phi(t)x_0\| &\leq \|\Phi(t)\| \|x_0\| \leq \|\Phi(t)\| \delta_\epsilon < \epsilon \end{aligned}$$

□

Definizione 4.2 (Stabilità asintotica). Devono valere le seguenti condizioni:

1. $\nexists Re(\lambda_i) > 0$ (traiettoria divergente)
2. $\exists Re(\lambda_i) = 0$ (traiettoria limitata)

Definizione 4.3 (Stabilità). Devono valere le seguenti condizioni:

- $Re(\lambda_i) \leq 0$
- $Re(\lambda_i) = 0$ e $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$

Definizione 4.4 (Instabilità). Devono valere le seguenti condizioni:

- $\exists Re(\lambda_i) > 0$
- $\exists Re(\lambda_i) = 0$ e $m_a(\lambda_i) > m_g(\lambda_i)$

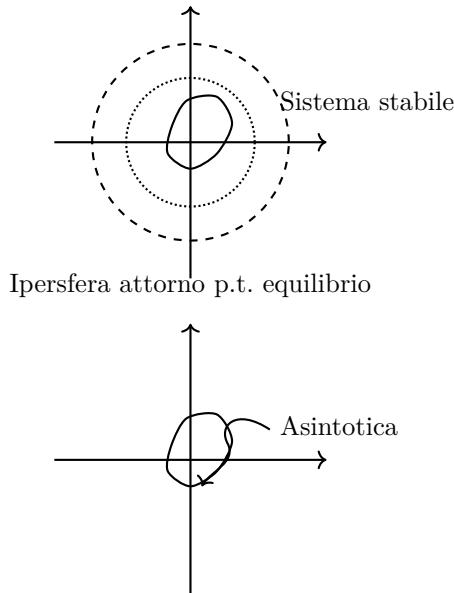


Figura 4: Stabilità e stabilità asintotica attorno all'origine

4.3 Criterio di Routh

Condizione necessaria: i coefficienti del $P_a(\lambda)$ devono essere tutti dello stesso segno. Costruiamo la tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} s^n & a_n & a_{n-2} & \dots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots \\ s^{n-2} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots \\ s^{n-3} & c_{n-3} & c_{n-4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Dove:

$$b_{n-2} = \frac{\begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix}}{-a_{n-1}} \quad b_{n-3} = \frac{\begin{bmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{bmatrix}}{-a_{n-1}}$$

Se campo mancante $\rightarrow 0$.

Teorema 4.2 (Riga invariante (nome di fantasia)). *Posso moltiplicare una riga per $n > 0$ senza cambiare il risultato.*

Teorema 4.3 (Numero radici con parte reale positiva). *Il numero di cambi di segno nella prima colonna della tabella di Routh è uguale al numero di radici del polinomio caratteristico con parte reale positiva.*

Esempio 4.1 (Routh + verifica radici < -3).

$$P(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 3\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda + 1$$

tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} 5 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & \end{array}$$

La presenza di una riga di zeri indica la presenza di radici simmetriche rispetto l'asse reale. Costruiamo il polinomio ausiliario:

$$P(\lambda) = P_1(\lambda)P_2(\lambda), P_2(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 = 1$$

$$\mathcal{P}_2 = 4\lambda^3 + 6\lambda$$

Costruiamo la tabella di Routh per \mathcal{P}_2 :

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 4 | 6 |
| 2 | 6 | 4 |
| 1 | 1 | |
| 0 | 4 | |

No cambi di segno \Rightarrow radici di P_2 con parte reale ≤ 0 . Verifica radici < -3 :

1. origine portata in -3
2. $\lambda = z - \alpha$, con $\alpha = 3$
3. $p(z) = z + 3 - 3 = z$

Costruisco il polinomio con z e uso di nuovo Routh, se non ci sono cambi di segno avrò le radici < -3 (perchè l'asse è spostato).

4.4 Stabilità nei punti di equilibrio

Sviluppiamo la funzione $\dot{x} = f(x, u)$ in serie di Taylor attorno al punto di equilibrio (x_e, u_e) :

Definizione 4.5 (Matrice Jacobiana). Matrice delle derivate parziali

$$\dot{x} = f(x_e, u_e) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_e, u_e)} (x - x_e) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_e, u_e)} (u - u_e)$$

$f(x_e, u_e) = 0$ che è il punto di equilibrio.

$$\dot{x} = A(x - x_e) + B(u - u_e) = A(x - x_e) + B\tilde{u}$$

Sostuiamo $z = x - x_e$ e diventa lineare

$$\dot{z} = Az + B\tilde{u}$$

Teorema 4.4 (Stabilità con la matrice Jacobiana). *Possiamo studiare la stabilità con gli autovalori della matrice Jacobiana calcolata nel punto di equilibrio.*

- $\forall \operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0$ sistema asintoticamente stabile
- $\exists \operatorname{Re}\{\lambda_i\} > 0$ sistema instabile
- $\exists \operatorname{Re}\{\lambda_i\} = 0$ e $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$ sistema stabile

Teorema 4.5 (Regola di Cartesio). *Il numero di radici con parte reale positiva è uguale al numero di cambi di segno nei coefficienti del polinomio caratteristico, o minore di un numero pari.*

- Nessun cambiamento di segno \Rightarrow nessuna radice con parte reale positiva
- Un cambiamento di segno $\Rightarrow \exists \operatorname{Re} > 0$

Esempio 4.2 (Pendolo).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 + \frac{1}{ml}u \end{cases}$$

Capiamo dove sono i punti di equilibrio:

- $x_1 = k\pi \Rightarrow -\frac{g}{l} \sin(x_1) = 0$
- $x_2 = 0 \Rightarrow -\frac{k}{m}x_2 = 0$
- $u = 0 \Rightarrow -\frac{1}{ml}x_2 = 0$

Quindi i punti di equilibrio sono $(k\pi, 0)$, quindi ci sono $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$. Matrice Jacobiana

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(x_1) & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{pmatrix}$$

1. Calcoliamo la Jacobiana nel punto di equilibrio $(0, 0)$:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{pmatrix}$$

$$P_a(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda + \frac{g}{l}$$

Cartesio \Rightarrow sistema stabile asintoticamente localmente.

2. Calcoliamo la Jacobiana nel punto di equilibrio $(\pi, 0)$:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{pmatrix}$$

Autovalori matrice Jacobiana:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{m} - \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow P_a(\lambda) = \lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda - \frac{g}{l}$$

Cartesio \Rightarrow sistema instabile

4.5 Dominio di Laplace

Possiamo spostare nel dominio complesso una funzione tramite la trasformata di Laplace che è così definita

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

(tutte le trasformate sono riassunte nell'appendice)

4.5.1 Calcoli delle trasformate utili

Moti naturali aperiodici

$$\mathcal{L}(e^{\lambda t}) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-t(s-\lambda)} dt = \left[\frac{e^{-t(s-\lambda)}}{-(s-\lambda)} \right]_0^\infty = \frac{1}{s-\lambda}$$

Gradino

$$\mathcal{L}(\delta_{-1}) = \mathcal{L}(e^{\lambda t}) \Big|_{\lambda=0} = \frac{1}{s}$$

Impulso

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

Moti pseudo-periodici

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\sin(wt)) &= \mathcal{L}\left(\frac{e^{jw t}-e^{-j w t}}{j t}\right)=\int_0^{\infty} \frac{e^{j w t}-e^{-j w t}}{j t} e^{-s t} d t \\
 &=\frac{1}{2 j}\left(\int_{0}^{\infty} e^{j w t} e^{-s t} d t-\int_0^{\infty} e^{-j w t} e^{-s t} d t\right) \\
 &=\frac{1}{2 j}\left(\frac{1}{s-j w}-\frac{1}{s+j w}\right) \\
 &=\frac{1}{2 j} \frac{s+j w-s+j w}{s^2+w^2}=\frac{w}{s^2+w^2} \\
 \mathcal{L}(\cos(wt)) &=\frac{s}{s^2+w^2}
 \end{aligned}$$

4.5.2 Proprietà

$$\mathcal{L}(x(t)) = x(s)$$

$$\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = sx(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}(u(t)) = u(s)$$

4.5.3 Applicazione al Modello implicito

Partiamo dall'espressione di $\dot{x}(t)$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\dot{x}(t)) &= \mathcal{L}(Ax(t) + Bu(t)) \\
 \Leftrightarrow sx(s) - x(0) &= Ax(s) + Bu(s) \\
 \Leftrightarrow x(s)(sI - A) &= x(0) + Bu(s) \\
 \Rightarrow x(s) &= (sI - A)^{-1}(x(0) + Bu(s))
 \end{aligned}$$

Ponendo $t_0 = 0$

$$\mathcal{L}(x(t)) = \mathcal{L}(\Phi(t)x(0)) + \mathcal{L}\left(\int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau\right)$$

vale $\forall x(0)$ che ammettono la trasformata. Ponendo $u = 0$

$$\begin{aligned}
 (sI - A)^{-1}x(0) &= \mathcal{L}(\Phi(t)x(0)) \\
 \Rightarrow \mathcal{L}(\Phi(t)) &= (sI - A)^{-1}
 \end{aligned}$$

Poi l'evoluzione forzata

$$(sI - A)^{-1}Bu(s) = \mathcal{L}\left(\int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau\right)$$

e la matrice

$$H(t) = e^{At}B \rightarrow H(s) = (sI - A)^{-1}B$$

In uscita abbiamo $y(s) = cx(s) + Du(s)$

$$\begin{aligned}
 y(s) &= C\left((sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}Bu(s)\right) + Du(s) \\
 &= \mathcal{L}\left(Ce^{At}x(0)\right) + \mathcal{L}\left(\int_{t_0}^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau\right)
 \end{aligned}$$

abbiamo le altre due matrici

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\Psi(t)) &= c(sI - A)^{-1} \\
 W(t) &= Ce^{At}B + D\delta(t)
 \end{aligned}$$

Definizione 4.6 (Matrice delle funzioni di trasferimento).

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

dato che $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$

4.5.4 Sviluppo in frazioni parziali

Prendiamo un sistema in forma implicita

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}x + u \end{cases}$$

L'obiettivo (a quanto pare) è scrivere $\Phi(s)$ nella forma $\frac{R_1}{s+\lambda_1} + \frac{R_2}{s+\lambda_2}$

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= (sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s+1 & -2 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} s+2 & 2 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \\ \Phi(s) &= \frac{R_1(s+2) + R_2(s+1)}{(s+1)(s+2)} \\ &\Leftrightarrow \frac{\begin{pmatrix} s+2 & 2 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2} \end{aligned}$$

Ricaviamo R_1 e R_2 facendo il limite rispettivamente per $s \rightarrow -1$ e $s \rightarrow -2$ e otteniamo

$$\dots = \lim_{s \rightarrow -1} (R_1 + R_2 \frac{s+1}{s+2}) = R_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{1}$$

e

$$R_2 = -\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

essendo $\Phi(t) = e^{At}$ l'antitrasformata di $\Phi(s)$

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{1}{s-\lambda_1} u_1 v_1^T + \frac{1}{s-\lambda_2} u_2 v_2^T \\ &= R_1 \frac{1}{s-\lambda_1} + R_2 \frac{1}{s-\lambda_2} \end{aligned}$$

e dunque so come scrivere $\Phi(t)$ perchè al denominatore ho gli autovalori e $R_i = u_i v_i^T$

Teorema 4.6 ($\Phi(t)$ formula chiusa).

$$\Phi(t) = R_1 e^{\lambda_1 t} + R_2 e^{\lambda_2 t}$$

Calcoliamo le altre matrici H , Ψ e W

$$H(s) = (sI - A)^{-1}B$$

$$\Psi(s) = C(sI - A)^{-1}$$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Nota d'onore al burino che è entrato in aula e ha fatto sclerare la Califano interrompendo la lezione

Definizione 4.7 (Poli). Quando una funzione è nella forma poli-zeri, i poli sono i valori di s che annullano il denominatore.

$$Y_f(s) = W(s)u(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)s} \Rightarrow \text{poli in } s = -1, s = -2, s = 0$$

Definizione 4.8 (Guadagno). R_i sono i guadagni associati ai poli p_i della funzione di trasferimento $y_f(s)$. Un esempio è la voce che esce amplificata dal microfono.

Teorema 4.7 (Metodo veloce per calcolare i residui/il guadagno). *Calcolare guadagno per poli di grado 1*

$$R_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) y_f(s)$$

Teorema 4.8 (Poli di grado > 2). *sia p un polo*

1. parto dal termine di grado maggiore $\lim_{s \rightarrow p} Y(s)(s - p)$
2. moltiplico per s^{grado} e derivo entrambi
3. continuo a derivare per il numero del grado

Esempio 4.3 (Studio y_f per il gradino).

$$W(s) = \frac{s-1}{(s-3)(s+2)}$$

$$u(s) = 1/s$$

Residui

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3}{s-3} \\ R_1 &= \left[\frac{s-1}{(s-3)(s+2)} \right]_{s=0} = 1/6, R_2 = -3/10 \\ R_3 &= \left[\frac{s-1}{s(s+2)} \right]_{s=3} = \frac{2}{3(3+2)} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

Uscita

$$y_f(t) = R_1 e^{0t} + R_2 e^{-2t} + R_3 e^{3t} = \frac{1}{6} - \frac{3}{10} e^{-2t} + \frac{2}{15} e^{3t}$$

Teorema 4.9 (Residui per polinomi di grado maggiore di 1). *Grado numeratore < grado denominatore, generalmente $n - 1$*

$$y_f(s) = \dots + \frac{R_{n-1}s^{n-1} + \dots + R_1}{q(s)}$$

grado $q(s) = n$

Teorema 4.10 (Trasformata). *Usata per la rampa*

$$t \frac{k}{k!} \rightarrow \frac{1}{s^{k+1}}$$

Esempio 4.4 (Studio y_f per altri ingressi).

$$W(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

1. sinusoida

$$u(t) = \sin(wt) \Rightarrow u(s) = \frac{1}{s^2 + 1}, w = 1$$

$$\begin{aligned} y_f(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)(s^2+1)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3s + R_4}{s^2+1} \\ R_1 &= 1/2, R_2 = -1/3 \end{aligned}$$

$$y_f(s) = \frac{1/2}{s+1} + \frac{-1/3}{s+2} + \frac{R_3 s + R_4}{s^2 + 1} \quad \text{per ogni } s \text{ che non annulla il denominatore}$$

Scelgo $s = 0$

$$\frac{1}{(0+1)(0+2)(0^2+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} + R_4 \Rightarrow R_4 = 1/10$$

Scelgo $s = 1$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{15} + \frac{R_3}{2} + \frac{1}{20} \Rightarrow R_3 = \frac{13}{2}$$

2. rampa

$$u(t) = t\delta_{-1}(t), u(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$R_1 = 1, R_2 = -1/4, R_4 = -3/4$$

Moltiplico per s^2 e derivo per s , cerco R_3

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{R_1 s^2}{s+1} + \frac{R_2 s^2}{s+2} + R_3 s + R_4 \right)$$

R_3 è il residuo per s , quindi ora faccio il limite per $s \rightarrow 0$

$$\lim_{s \rightarrow 0} -\frac{2s+3}{(s+1)^2(s+2)} = \lim_{s \rightarrow 0} (\dots + R_3) = 0 + 0 + R_3 = -3/4$$

4.5.5 Pulsazione e fase

Esempio 4.5 (Pulsazione $w = 1$).

$$w(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, u(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$y_f(s) = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3 s + R_4}{s^2 + 1}$$

Prendendo le trasformate di sin e cos

$$\sin(wt) \rightarrow \frac{w^2}{s^2 + w^2}, \cos(wt) \rightarrow \frac{s^2}{s^2 + w^2}$$

dividiamo il termine con $sR_3 + R_4$ e moltiplichiamo R_4 per w/w , che risulta in

$$s \frac{R_3}{s^2 + 1} + \frac{R_4}{s^2 + 1} w/w = R_3 \mathcal{L} \cos(t) + R_4 \mathcal{L} \sin(t)$$

considerando che $w = 1$ esce così. Quindi ora sappiamo la $y_f(t)$.

$$y_f(t) = R_1 e^{-t} + R_2 e^{-2t} + R_3 \cos(t) + R_4 \sin(t)$$

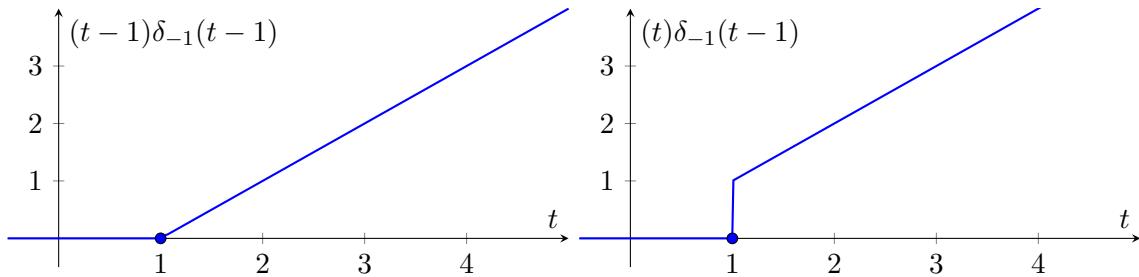
Ora il nostro obiettivo è scrivere R_3 e R_4 e useremo le formule di prostaferesi.

$$n \sin(t + \varphi) = M \sin(t) \cos(\varphi) + M \cos(t) \sin(\varphi)$$

$\Rightarrow R_3 = M \sin(\varphi)$ e $R_4 = M \cos(\varphi)$.

$$\sqrt{R_3^2 + R_4^2} = \sqrt{M^2(\sin^2 + \cos^2)} = M, \varphi = \arctan \frac{R_3}{R_4}$$

essendo M il guadagno di W , $M = |W(s)|_{s=jw}, \varphi = \angle w(s)|_{s=jw}$



4.5.6 Segnali

Prendiamo un segnale rampa sfasato di 1 in positivo, $(t - 1)\delta_{-1}(t - 1)$ e uno che inoltre è sfasato in altezza di 1, possiamo fare un cambio di variabile sulla seconda $t - 1 = \xi \Rightarrow (\xi + 1)\delta_{-1}(\xi) = \xi\delta_{-1}(\xi) + \delta_{-1}(\xi)$

Definizione 4.9 (Trasformata gradino traslato). La trasformata traslata si calcola come

$$\int_0^\infty \delta^{-1}(t-1)e^{-st}dt = \int_1^\infty e^{-st}dt$$

$$t-1=\xi, t\rightarrow 1\Rightarrow\xi\rightarrow 0, t\rightarrow\infty\Rightarrow\xi\rightarrow\infty, dt=d\xi$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-s(\xi+1)d\xi} &= e^{-s} \int_0^\infty e^{-s\xi}d\xi \\ &= e^{-s}\mathcal{F}(\delta_{-1}(t)) = \frac{e^{-s}}{s} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(t-a)\delta_{-1}(t-a) \rightarrow F(s)e^{-as}$$

Definizione 4.10 (Calcolo segnale traslato). Calcolo segnale non traslato, traslo $y_f(t)$

$$\begin{aligned} w(s) &= \frac{s+1}{s+3}, u(t) = \delta_{-1}(t-2) \\ \hat{u}(t) &= \delta_{-1}(t), \hat{y}_f(t) \\ y_f(s) &= \frac{s+1}{(s+3)s}, \hat{y}_f(t) = (1/3 + 2/3e^{-3t})\delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

Ora però abbiamo un segnale non traslato, però sappiamo che $y_f(t) = \hat{y}_f(t-2)$

$$y_f(t) = (1/3 + 2/3e^{-3(t-2)})\delta_{-1}(t-2)$$

ci sarebbe un altro metodo ma è inutile e più complicato.

Esempio 4.6 (Segnali "composti"). L'obiettivo è che dato il grafico di $u(t)$ sappiamo ricavare la funzione. In questo caso è un insieme di rampe traslate.

$$u'(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 & 1 < t < 2 \\ 0 & 2 < t < 4 \\ -1 & 4 < t < 5 \\ 0 & t > 5 \end{cases}$$

la formula finale viene un'unione di rampe che essendo sfasate modificano la pendenza nei vari t

$$u(t) = (t-1)\delta_{-1}(t-1) - (t-2)\delta_{-1}(t-2) - (t-4)\delta_{-1}(t-4) + (t-5)\delta_{-1}(t-5)$$

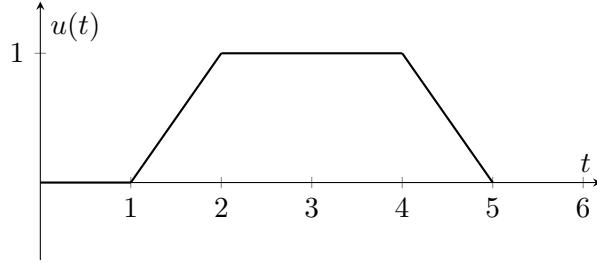


Figura 5: Segnale "composto"

Dobbiamo calcolare adesso $y_f(t)$ e facciamo con il metodo descritto prima.

$$\hat{u} = t\delta_{-1}(t) \rightarrow \hat{u} = 1/s^2$$

$$\hat{y}_f(s) = \frac{1}{(s+1)s^2} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s^2} + \frac{R_3}{s}$$

$$\hat{y}_f(\xi) = (R_1 e^{-3} + R_2 e \xi + R_3) \delta_{-1} \xi$$

$$y_f(t) = \hat{y}_f(t-1) - \hat{y}_f(t-2) - \hat{y}_f(t-4) + \hat{y}_f(t-5)$$

con $R_1 = 1$, $R_2 = 1$, $R_3 = -1$

4.5.7 Esercitazione

Da ora in poi $w(s) = \frac{s+1}{s+3}$

1.

$$u(t) = \delta_{-1}(t), u(s) = 1/s, y_f(s) = \frac{s+1}{s(s+3)} = \frac{R_1}{s+3} + \frac{R_2}{s}$$

$$R_1 = \left[\frac{s+1}{s} \right]_{s=-3} = 2/3$$

$$R_2 = \left[\frac{s+1}{s+3} \right]_{s=0} = 1/3$$

$$y_f(t) = \frac{2}{3}e^{-3t} + 1/3$$

2.

$$u(t) = t\delta_{-1}(t), u(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$y_f(s) = \frac{s+1}{s^2(s+3)} = \frac{R_1}{s+3} + \frac{R_2 s + R_3}{s^2}$$

Calcoliamo gli immediati (R_1, R_3)

$$R_1 = \left[\frac{s+1}{s^2} \right]_{s=-3} = -2/9$$

$$R_3 = \left[\frac{s+1}{s+3} \right]_{s=0} = 1/3$$

Moltiplico per s^2 e derivo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \frac{s+1}{s+3} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{s^2 R_1}{s+3} + R_2 s + R_3 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{2}{(s+3)^2} &= \frac{2R_1 s(s+3) + s^2 R_1}{(s+3)^2} + R_2 \\ &= \frac{s^2 R_1 + 6s R_1}{(s+3)^2} + R_2 \end{aligned}$$

Ora si può riapplicare la definizione con il limite applicato a entrambi i membri

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{(s+3)^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 R_1 + 6sR_1}{(s+3)^2} + R_2$$

$$\Leftrightarrow 2/9 = 0/9 + R_2 \Rightarrow R_2 = \frac{2}{9}$$

3.

$$u(t) = \sin(2t)\delta_{-1}(t), u(s) = \frac{2}{s^2 + 4}, w = 2$$

$$y_f(s) = \frac{s+1}{s+3} \frac{2}{s^2 + 4} = \frac{R_1}{s+3} + \frac{R_2 s + R_3}{s^2 + 4}$$

$$R_1 = \left[\frac{2(s+1)}{s^2 + 4} \right]_{s=-3} = -4/13$$

Riprendendo 'Esempio 4.4' la subsubsection 'Pulsazione e fase', sappiamo che

$$y_f(s) = R_1/(s+3) + \dots \quad \forall s \text{ che non annullano il denominatore}$$

Quindi ora ho questa situazione

$$\frac{2(s+1)}{(s+3)(s^2 + 4)} = -\frac{4}{13(s+3)} + \frac{R_2 s + R_3}{s^2 + 4}$$

Prendendo $s = 0$ diventa

$$\frac{2}{12} = -\frac{4}{39} + \frac{R_3}{4} \Rightarrow R_3 = 4(4/39 + 2/12) = \frac{16}{39} + \frac{1}{6} = \frac{14}{13}$$

Sostituendo R_3 e ponendo $s = 1$ troviamo che $R_2 = \frac{4}{13}$, ora come nell'esempio dobbiamo ricondurci alla trasformata di sin e cos

$$\frac{4}{13} \left(\frac{s}{s^2 + 4} \right) + \frac{14}{13} \left(\frac{1}{s^2 + 4} \right) = \dots + \frac{14}{13 \cdot 2} \left(\frac{2}{s^2 + s^2} \right)$$

moltiplicando per 2/2 abbiamo messo nella forma della trasformata di $\cos(2t)$ e $\sin(2t)$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}(y_f(s)) = \left(-\frac{4}{13}e^{-3} + \frac{4}{13} \cos(2t) + \frac{7}{13} \sin(2t) \right) \delta_{-1}(t)$$

4.

$$y^{(3)} + 3y^{(2)} + (2+k)y + ky = u$$

rappresentare spazio di stato e determinare stabilità

$$y = x_1, \dot{y} = x_2, y^{(2)} = x_3$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_3 - (2+k)x_2 - kx_1 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -(2+k) & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per la stabilità si usa l'equazione differenziale con Routh

$$P_a(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + (2+k)\lambda + k$$

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 2+k \\ 2 & 3 & k \\ 1 & 6+2k & 0 \\ 0 & k & \end{array}$$

condizioni

$$\begin{cases} 2+k > 0 \Leftrightarrow k > -2 \\ k > 0 \\ 6+2k > 0 \Leftrightarrow k > -3 \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema AS } \forall k > 0$$

per $k = 0$

$$P_a(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 2)$$

che ha $\lambda = 0$ e per cartesio $\lambda < 0 \Rightarrow$ stabilità semplice, $k < 0 \Rightarrow$ instabile

4.6 Risposta transitoria e a regime permanente

Definizione 4.11 (Risposta a regime permanente). Condizioni necessarie

1. sistema stabile
2. modi osservabili convergenti

$$y_r(t) = \int_{-\infty}^t w(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

4.6.1 Ingresso sinusoidale

$$u(t) = \sin(wt) = \frac{e^{jw\tau} - e^{-jw\tau}}{2j}$$

$$y_r(t) = \frac{1}{2j} \left(\int_{-\infty}^t w(t-\tau)e^{jw\tau}d\tau - \int_{-\infty}^t w(t-\tau)e^{-jw\tau}d\tau \right)$$

cambio di variabile $t - \tau = \xi$

$$- \int_{\infty}^0 w(\xi)e^{jw(t-\xi)}d\xi = e^{jw\tau} \int_0^{\infty} w(\xi)e^{-jw\xi}\xi$$

prendendo la definizione della trasformata $\int_0^{\infty} w(t)e^{-st}dt$ diventa

$$= e^{jw\tau}w(s)|_s = jw$$

$$\Rightarrow y_r(t) = \frac{1}{2j}(e^{jw\tau}w(jw) - e^{-jw\tau}w(-jw))$$

- $w(jw) = M(jw)e^{j\varphi(w)}$
- $w(-jw) = M(jw)e^{-j\varphi(w)}$

$$y_r(t) = \frac{1}{2j}(e^{jw\tau}M e^{j\varphi} - e^{-jw\tau}M e^{-j\varphi}) = M \frac{e^{j(wt+\varphi)} - e^{-j(wt-\varphi)}}{2j} = M \sin(wt + \phi)$$

Esempio 4.7 ($w=1$).

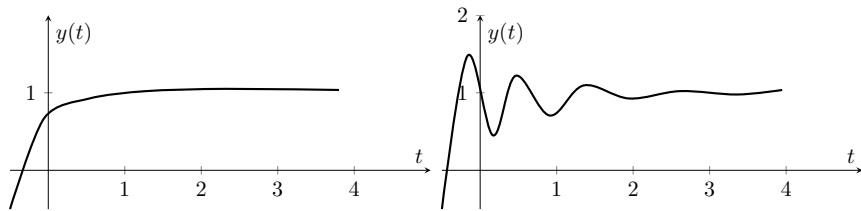
$$w(s) = \frac{1}{s+1}, u(t) = \sin(t), u(s) = \frac{w^2}{s^2 + w^2}$$

$$y_t(s) = M \sin(t + \varphi)$$

$$w(jw) = \frac{1}{j+1} = \frac{1-j}{2}$$

(razionalizzando)

$$M = \sqrt{1/4 + 1/4} = \sqrt{1/2}, \varphi = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$



4.6.2 Ingresso polinomiale

1. $\delta_{-1}(t)$, $u(s) = 1/s$

$$y_f(s) = w(s) \frac{1}{s} = \sum_{i=1} \frac{R_i}{s - \lambda_i} + \frac{R_0}{s}$$

Definizione 4.12 (Guadagno). R_0 è il guadagno di $W(s)$

se $\operatorname{Re} s < 0 \Rightarrow \sum_{i=1} R_i e^{\lambda_i t} \rightarrow 0$

Definizione 4.13 (Risposta indiciale). Risposta al gradino

Definizione 4.14 (Valore di regime). $w(s = 0)$

Definizione 4.15 (t_s tempo di salita). • se \exists il primo istante in cui assume valore regime

- temp che impiega per passare dal 10/100 al 90/100 del valore di regime

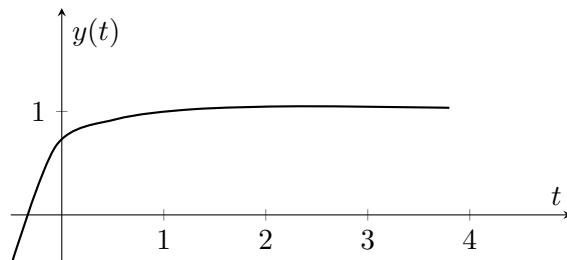
Definizione 4.16 (\hat{s} sovraelongazione). valore max di differenza con valore di regime

Definizione 4.17 (t_a tempo di assestamento). t per entrare in un range limitato (simile definizione di limite)

Esempio 4.8 (Risposta al gradino).

$$y_f(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$y_f(t) = (1 - e^{-t})\delta_{-1}(t)$$



$$\hat{s} = 0$$

$$y_f(t_1) = 1 - e^{-t_1} = 10/100$$

$$y_f(t_2) = 1 - e^{-t_2} = 90/100$$

t_a con soglia 2/100. Nel caso con k_0 generico viene

$$\begin{cases} y_{f1} = k_0 - e^{\lambda t_1} = 10/100k_0 \\ y_{f2} = k_0 - e^{\lambda t_2} = 90/100k_0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{\lambda t_1} = 90/100k_0 \\ e^{\lambda t_2} = 10/100k_0 \end{cases}$$

$$\frac{e^{\lambda t_1}}{e^{\lambda t_2}} = e^{\lambda(t_1 - t_2)} = 9$$

$$\Rightarrow t_1 - t_2 = \frac{\ln(9)}{\lambda} \Leftrightarrow t_2 - t_1 = -\frac{\ln(9)}{\lambda}$$

abbiamo $\lambda = -1$ quindi $t_s = \ln(9)$

$$y_f(t_a) = (1 - 2/100)k_0 = 1 - e^{-\lambda t_a} = 98/100$$

$$e^{-\lambda t_a} = 2/100 \Rightarrow t_a = \ln\left(\frac{2}{100}\right)$$

Esempio 4.9 (Approssimazione). se abbiamo $\operatorname{Re}(\lambda_2) << \operatorname{Re}(\lambda_1)$, λ_2 è trascurabile nel t_s

$$y_f(s) = \frac{1}{(s+1)(s+100)s} = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+100}$$

$$k = w(s)|_{s=0} = 1/100$$

$$y_f(t) = (R_0 + R_1 e^{-t} + R_2 e^{-100}) \delta_{-1}(t)$$

Poniamo che sia trascurabile

$$y_f(t_1) \approx R_0 + R_1 e^{-t_1} 10/100 \cdot R_0$$

$$y_f(t_2) \approx R_0 + R_1 e^{-t_2} = 90/100 \cdot R_0$$

$$2. u(t) = \frac{t^k}{k!}$$

$$y_r(t) = \int_{-\infty}^t w(t-\tau) \frac{\tau^k}{k!} d\tau$$

cambio variabile $t - \tau = \xi$

$$- \int_{\infty}^0 w(\xi) \frac{(t-\xi)^k}{k!} d\xi$$

prendendo lo sviluppo del polinomio di newton $(a+b)^k = \sum_{\eta=0}^k \binom{k}{\eta} a^{(k-\eta)} b^\eta$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty w(s) \frac{1}{k!} \sum_{\eta} \binom{k}{\eta} t^{k-\eta} (-\xi)^\eta d\xi \\ &= \sum_{\eta} \int_0^\infty w(\xi) \frac{1}{k!} \frac{k!}{\eta!(k-\eta)!} t^{k-\eta} (-xi)^\eta d\xi \\ &= \sum_{\eta} \frac{t^{k-\eta}}{(k-\eta)!} \int_0^\infty w(\xi) (-1)^\eta \frac{\xi^\eta}{\eta!} d\xi \end{aligned}$$

con $c_\eta = \int_0^\infty w(\xi) (-1)^\eta \frac{\xi^\eta}{\eta!} d\xi$. Un modo veloce per calcolarlo è

$$c_0 = w(s)|_{s=0}, \quad c_1 = \frac{dw}{ds}|_{s=0}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2w}{ds^2}|_{s=0}, \quad \dots$$

5 Risposta forzata

5.1 Diagramma di Bode

I diagrammi di Bode sono un modo per rappresentare la funzione di trasferimento di un sistema in forma grafica. Otteniamo due grafici, uno per la parte reale e uno per la parte immaginaria. Per fare questi grafici la funzione va messa in forma $\frac{N(s)}{D(s)}$ con $s = jw$.

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\prod(s - z_i)}{\prod(s - p_i)} = k \frac{\prod_i (1 + \tau_i s) \prod_k \left(1 + 2 \frac{z_k}{w_{n_k}} s + \frac{s^2}{w_{n_k}^2}\right)}{s^r \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_k \left(1 + \frac{2z_k}{w_{n_k}} s + \frac{s^2}{w_{n_k}^2}\right)}$$

dove

- k gain
- s termine monomio

- $1 + \tau s$ termine binomio
- $1 + \frac{2z}{w_n} s + \frac{s^2}{w_n^2}$ termine trinomio
- τ costante di tempo

Ricordando poi $\xi = -\frac{\alpha}{w_n}$ e $w_n = \sqrt{\alpha^2 + w^2}$. Scriviamo il termine trinomio in questa forma

$$1 + as + bs^2$$

così facendo possiamo considerare $w_n^2 = \frac{1}{b}$ e $w_n = \frac{1}{\sqrt{b}}$, analogamente $a = \frac{2z}{w_n}$.

Definizione 5.1 (Gain). Si misura in dB (decibel).

$$|F(jw)| = 20 \log_{10}(|F(jw)|)$$

Definizione 5.2 (Fase). Si misura in gradi/radianti.

$$\angle F(jw)$$

5.1.1 Guadagno

Il guadagno è la k di $F(s)$. Il grafico è relativamente semplice.

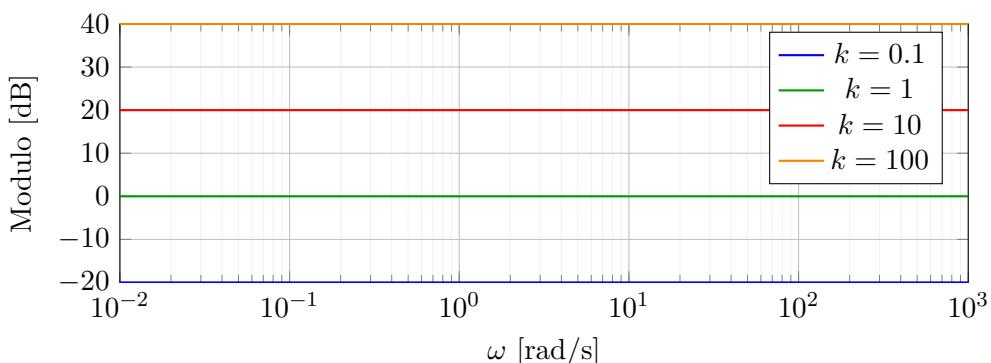


Figura 6: Diagramma di Bode - Modulo del guadagno k

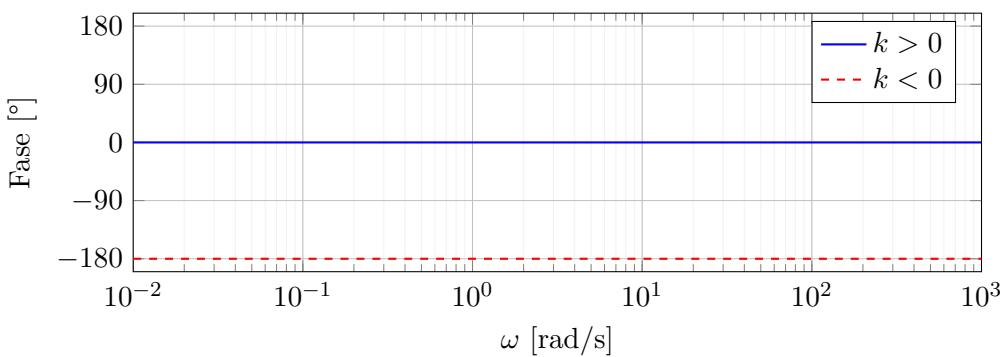


Figura 7: Diagramma di Bode - Fase del guadagno k

5.1.2 Termine monomio

In questo caso distinguiamo se il termine monomio è al numeratore o al denominatore. Primo passo trovare il punto di rottura.

Definizione 5.3 (Punto di rottura).

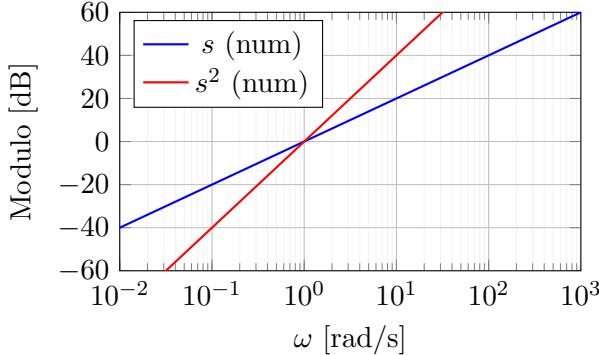
$$\frac{1}{\tau}$$

dove interseca l'asse delle frequenze.

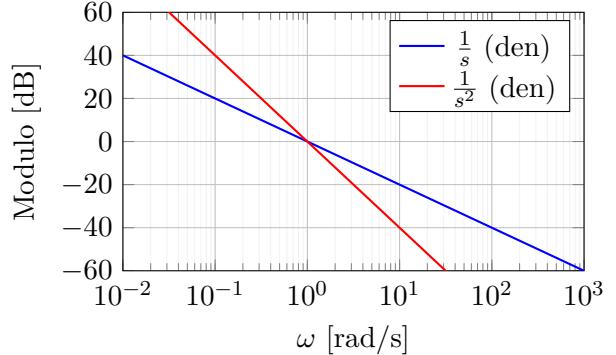
Analizziamo i due casi:

- numeratore: $M = 20 \log_{10}(w)$ retta con pendenza positiva 20 dB/dec
- denominatore: $M = -20 \log_{10}(w)$ retta con pendenza negativa -20 dB/dec

tutte e due centrate in $\frac{1}{\tau}$.

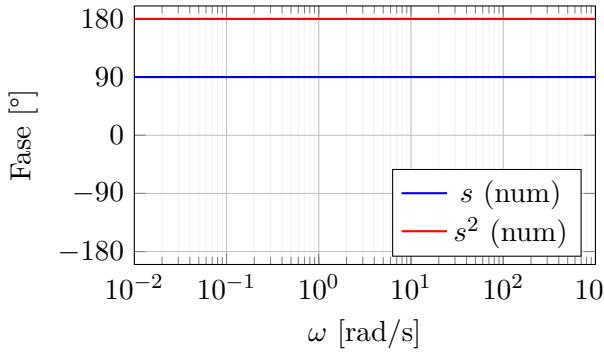


Numeratore

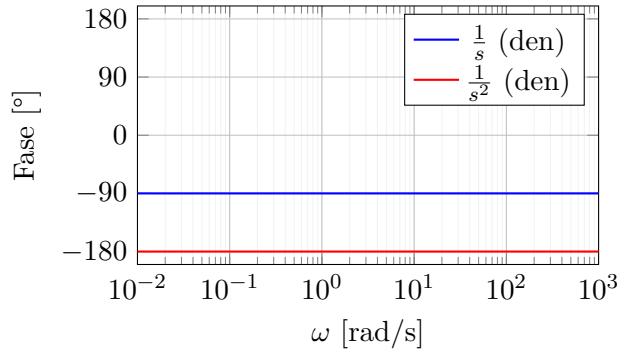


Denominatore

Figura 8: Diagramma di Bode - Modulo del termine monomio s^r



Numeratore



Denominatore

Figura 9: Diagramma di Bode - Fase del termine monomio s^r

Osservazione 5.1 (Somma dei grafici). Notiamo che con il termine s^2 la pendenza raddoppia, questo perchè i grafici di fatto vengono sommati. Questo vale in generale per tutti i termini, quindi il grafico finale sarà la somma dei grafici individuali. Questo perchè il modulo è espresso in dB, dunque le proprietà dei logaritmi ci permettono di sommare e i grafici. Vale anche per la fase.

5.1.3 Termine binomio

Espresso nella forma $1 + \tau s$, abbiamo che modulo e fase sono

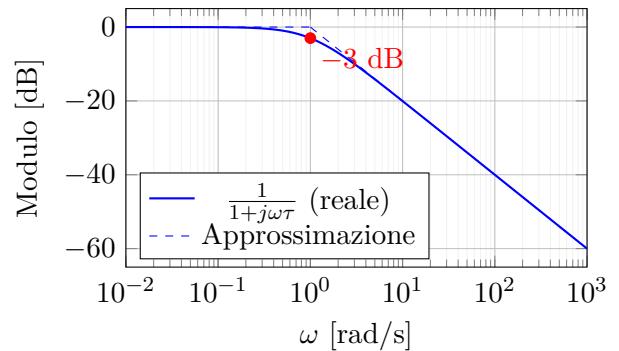
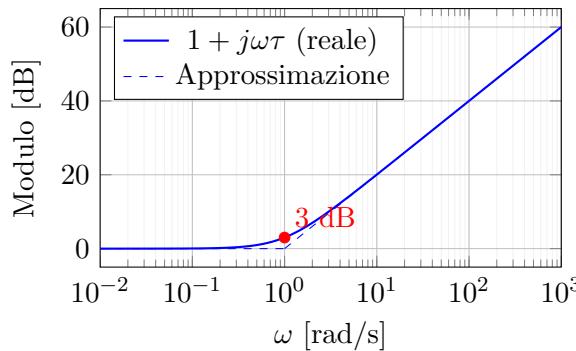
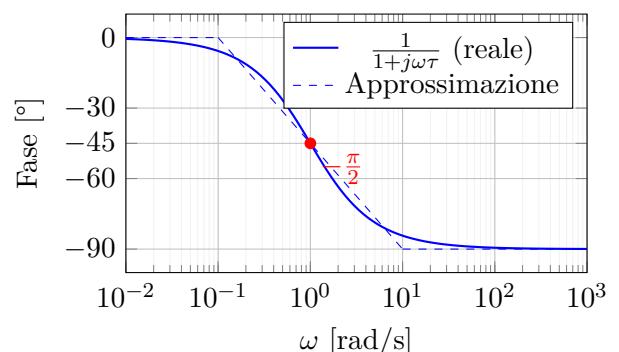
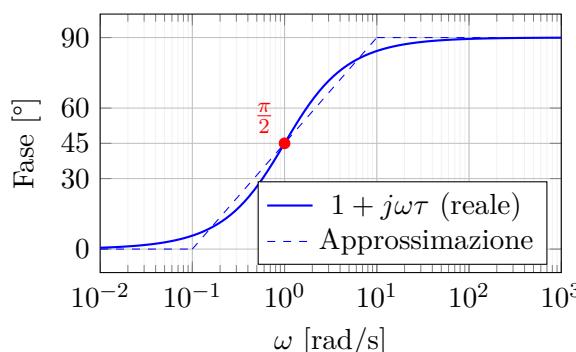
$$M = 20 \log_{10}(\sqrt{1 + w^2 \tau^2})$$

$$\varphi = -\arctan(w\tau)$$

Analizziamo come evolve questa funzione per capire il grafico

- $w = \frac{1}{|\tau|} \Rightarrow M = 20 \log_{10}(\sqrt{1 + \frac{1}{|\tau|^2} \tau^2}) = 20 \log_{10}(\sqrt{2}) \approx 3\text{dB}$
- $w \ll \frac{1}{|\tau|} \Rightarrow M \approx 0$
- $w \gg \frac{1}{|\tau|} \Rightarrow M \approx 20 \log_{10}(w) + 20 \log_{10}(|\tau|)$

Da qui si vede che nel punto di rottura c'è un errore di approssimazione, essendo $M \approx 3\text{dB}$.

Figura 10: Diagramma di Bode - Modulo del termine binomio $1 + j\omega\tau$ Figura 11: Diagramma di Bode - Fase del termine binomio $1 + j\omega\tau$

5.1.4 Termine trinomio

$$1 + 2\xi \frac{jw}{w_n} + \frac{(jw)^2}{w_n^2}$$

il modulo risulta come

$$M = 20 \log_{10} \left(\sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{w}{w_n}\right)^2} \right)$$

- $w \ll w_n \Rightarrow M \approx 20 \log_{10}(1) = 0$
- $w \gg w_n \Rightarrow M \approx -40 \log_{10}(\frac{w}{w_n})$
- $w = w_n \Rightarrow M \approx -20 \log_{10}(2|\xi|)$

In particolare nel caso $w = w_n$, M si annulla per $\xi = \frac{1}{2}$ e il termine trinomio si riduce a binomio se $|\xi| = 1 \Rightarrow M = -20 \log_{10}(2) = -6$ (x2 binomio). Per $\xi = 0$ l'amplificazione è infinita.

5.2 Diagramma polare

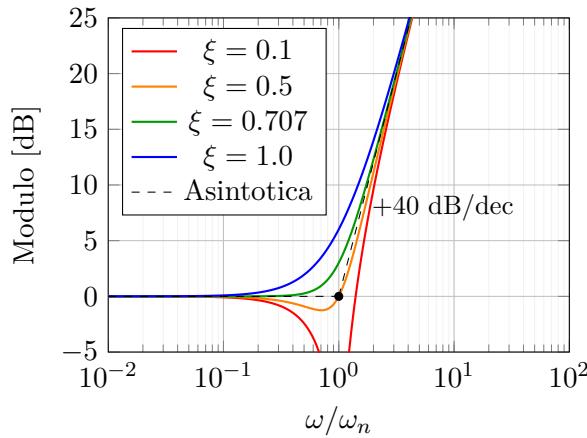
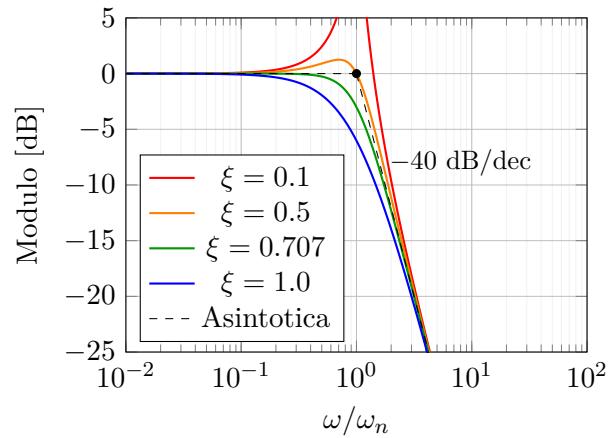
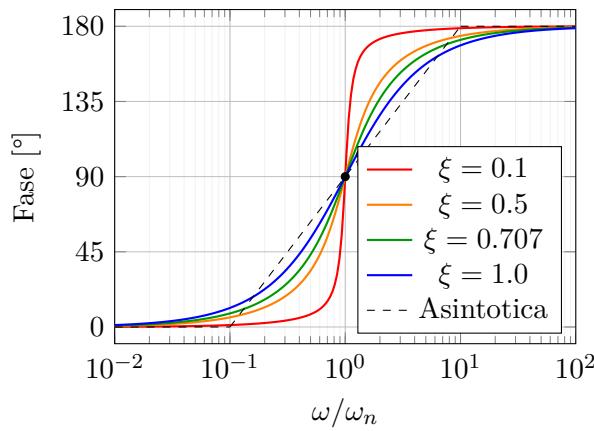
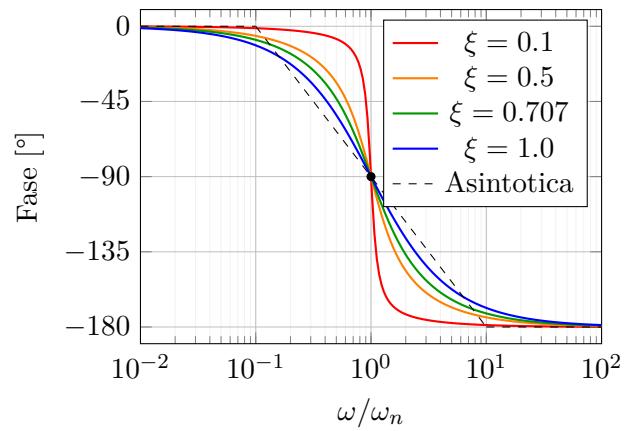
Partiamo con l'osservare che il modulo è una funzione pari, mentre la fase dispari. Il diagramma polare ha l'asse immaginario sulle y e reale sulle x.

Esempio 5.1.

$$F(s) = \frac{s+10}{s(s+5)} = \frac{10(1+s/10)}{5s(1+s/5)} = 2 \frac{1+s/10}{s(1+s/5)}$$

Analizziamo i componenti:

- Guadagno $k = 2 \Rightarrow 20 \log_{10}(2) \approx 6$ dB.

Numeratore ($\omega_n = 1$)Denominatore ($\omega_n = 1$)Figura 12: Diagramma di Bode - Modulo del termine trinomio $1 + 2\xi \frac{jw}{\omega_n} + \frac{(jw)^2}{\omega_n^2}$ Numeratore ($\omega_n = 1$)Denominatore ($\omega_n = 1$)Figura 13: Diagramma di Bode - Fase del termine trinomio $1 + 2\xi \frac{jw}{\omega_n} + \frac{(jw)^2}{\omega_n^2}$

- Polo nell'origine $1/s$: pendenza -20 dB/dec, fase fissa -90° .
- Polo in $\omega_p = 5$: pendenza scende di altri 20 dB/dec (totale -40), fase scende.
- Zero in $\omega_z = 10$: pendenza sale di 20 dB/dec (totale torna a -20), fase sale.

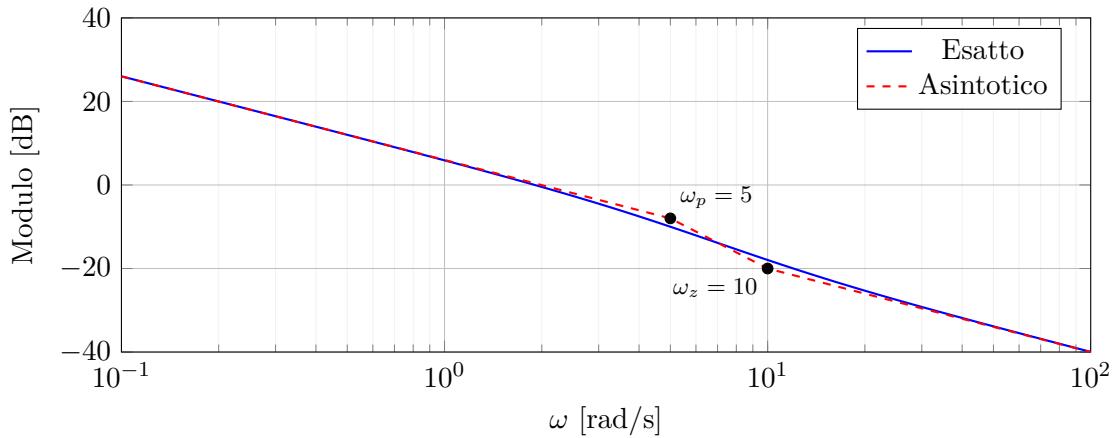


Figura 14: Diagramma di Bode - Modulo

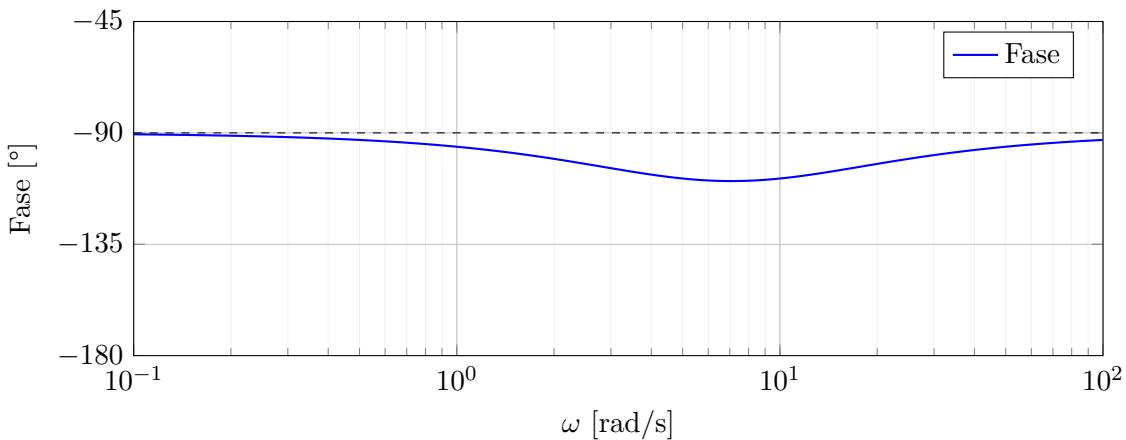


Figura 15: Diagramma di Bode - Fase

Proposizione 5.1 (Mezzi giri). *Servono a chiudere il diagramma polare.*
 n mezzi giri = n poli in zero

Il mezzo giro chiude il diagramma sulla destra, da 0^- a 0^+ .

Figura 16: Diagramma polare

5.3 Risposta forzata a tempo discreto

5.3.1 Trasformata Z

Definizione 5.4 (Trasformata Z).

$$\mathcal{Z}[f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)}{z^k} = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots$$

$$\mathcal{Z}[x(k+1)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x(k+1)}{z^k} = \frac{x(1)}{1} + \frac{x(2)}{z} + \frac{x(3)}{z^2} + \dots = z \left(\frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \dots + x(0) - x(0) \right) = z(x(z) - x(0))$$

Da qui ricaviamo il seguente teorema per riscrivere la forma implicita in forma esplicita

Teorema 5.1 (Teorema della traslazione a sinistra).

$$\begin{aligned} \begin{cases} zx(z) - z(x(0)) = Ax(z) + Bu(z) \\ y(z) = Cx(z) + Du(z) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (zI_d - A)x(z) = zx(0) + Bu(z) \\ y(z) = Cx(z) + Du(z) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (zI_d - A)x(z) - Bu(z) = zx(0) \\ y(z) = Cx(z) + Du(z) \end{cases} \\ \begin{cases} x(z) = (zI - A)^{-1}zx(0) + (zI - A)^{-1}Bu(z) \\ y(z) = C(zI - A)^{-1}zx(0) + (C(zI - A)^{-1}B + D)u(z) \end{cases} \end{aligned}$$

Trasformate importanti

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\delta(k)] &= 1 \\ \mathcal{Z}[\delta_{-1}(k)] &= 1 + 1/z + 1/z^2 + \dots = \frac{z}{z-1} \\ \mathcal{Z}[\lambda^k] &= 1 + \frac{\lambda}{z} + \frac{\lambda^2}{z^2} + \dots = 1 + \frac{1}{z/\lambda} + \dots = \frac{z/\lambda}{z/\lambda - 1} = \frac{z}{z-\lambda} \\ \mathcal{Z}[\sin(wk)] &= \frac{e^{jwk} - e^{-jwk}}{2j} = \frac{1}{2j} \mathcal{Z}[e^{jwk} - e^{-jwk}] = \frac{1}{2j} \left(\frac{z}{z - e^{jw}} - \frac{z}{z - e^{-jw}} \right) = \frac{z \sin(w)}{z^2 - 2z \cos(w) + 1} \end{aligned}$$

5.4 Modello esplicito tempo discreto

Definizione 5.5 (Modello esplicito).

$$\begin{cases} x(k) = A^k x(0) + \sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-1-\tau} B u(\tau) \\ y(k) = C A^k x(0) + \sum_{\tau=0}^{k-1} C A^{k-1-\tau} B u(\tau) + D u(k) \end{cases}$$

Da qui torniamo all'espressione del modello esplicito con la trasformata Z e possiamo dedurre le antitrasformate

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[A^k x(0)] &= (zI_d - A)^{-1} zx(0) \\ \mathcal{Z}[A^k] &= (zI_d - A)^{-1} z \\ \mathcal{Z}[f(k-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k-1)}{z^k} = f(-1) + \frac{f(0)}{z} + \frac{f(1)}{z^2} + \dots = \frac{f(z)}{z} \end{aligned}$$

considerando che $f(-1) = 0$

$$\mathcal{Z}[A^{k-1} B] = \frac{1}{z} (zI_d - A)^{-1} z B = (zI_d - A)^{-1} B$$

usando la formula di sopra

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[CA^k x(0)] &= C(zI_d - A)^{-1} zx(0) \\ \mathcal{Z}[CA^k] &= C(zI_d - A)^{-1} z \\ \mathcal{Z}[W(k)] &= c(zI_d - A)^{-1} B + D \end{aligned}$$

Esempio 5.2 (Risposta forzata). il meccanismo è lo stesso del tempo continuo, useremo l'antitrasformata di $f(z)u(z)$ con le frazioni parziali

$$f(z) = \frac{z}{(2z-1)(3z+1)}, \quad u(z) = \frac{z}{z-1} \text{ gradino}$$

$$\begin{aligned} y_f(z) &= f(z)u(z) = \frac{z}{(2z-1)(3z+1)} \frac{z}{z-1} = \frac{R_1}{z-1/2} + \frac{R_2}{z+1/3} + \frac{R_3}{z-1} \\ \frac{y_f(z)}{z} &= \frac{z}{(2z-1)(3z+1)(z-1)} = \dots \end{aligned}$$

ricaviamo le frazioni parziali come nel tempo continuo

$$R_1 = -\frac{1}{5}, R_2 = -\frac{1}{20}, R_3 = \frac{1}{4}$$

moltiplichiamo di nuovo per z e facciamo l'antitrasformata, essendo tornata nella forma per fare l'antitrasformata della risposta forzata.

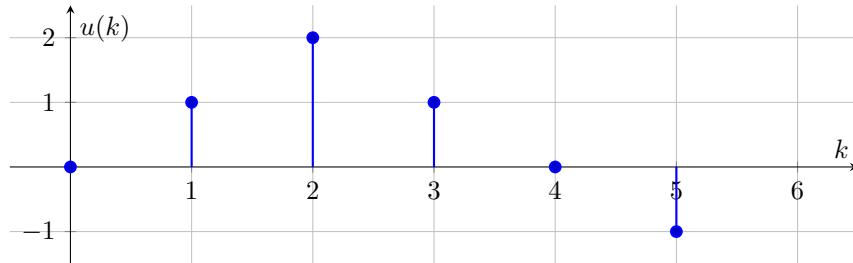
$$y_f(k) = -\frac{1}{5}\delta(k) - \frac{1}{20}\delta_{-1}(k) + \frac{1}{4}\delta_{-2}(k)$$

Definizione 5.6 (Guadagno).

$$G = F(z=1) = \frac{1}{4}$$

Esempio 5.3 (Da grafico a risposta forzata).

$$F(z) = \frac{1}{2z-1}$$



$u(z)$ si può vedere come dice la definizione, quindi come una sommatoria. $u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k}$. Essendo a tempo discreto invece di infinito possiamo direttamente mettere l'ultimo valore dove la funzione è diversa da zero, tanto gli altri termini saranno nulli. $u(z) = \frac{u(0)}{z^0} + \frac{u(1)}{z^1} + \frac{u(2)}{z^2} + \dots$, abbiamo i valori di u per gli istanti richiesti, sostituiamolo nella formula.

$$u(z) = 1/z + 2/z^2 + 1/z^3 - 1/z^5$$

$$y_f(z) = \frac{1}{2z-1} \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^5} \right)$$

$$\frac{y_f(z)}{z} = \frac{1}{2z-1} \left(\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^6} \right)$$

si risolve calcolando i poli, frazioni parziali, riportando z a destra e facendo l'antitrasformata.

5.5 Esercizi

5.5.1 Esercitazione

- Tracciare diagramma di bode e polare

$$F(s) = k \frac{s-10}{(1+5s)(s^2+1)}$$

- Calcolare risposta forzata e a regime permanente (se esiste)

$$F(z) = \begin{pmatrix} \frac{z+1}{2z-1} & \frac{1}{(2z-1)(3z+1)} \end{pmatrix}$$

- Studio stabilità interna/esterna e stato zero

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} u(t)y(t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

- Calcolare funzione di trasferimento a tempo discreto con $T = 1$ sec

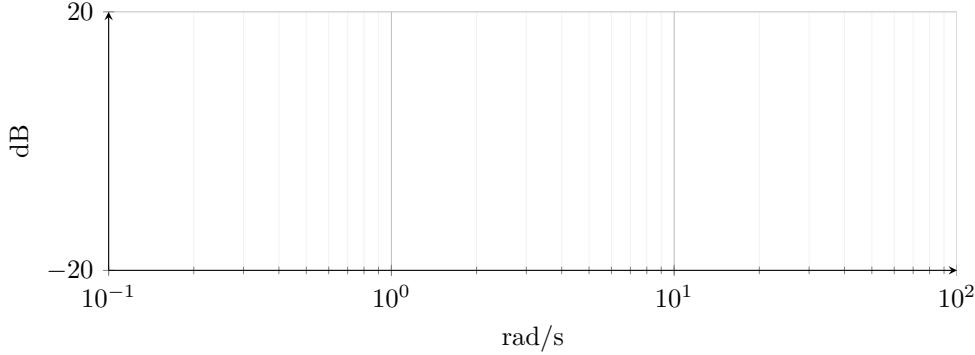
$$F(s) = \frac{1}{s+1}$$

Soluzione

1 Mettiamo in forma di Bode (poli-zeri)

$$F(s) = k \frac{-10(1 - s/10)}{(1 + 5s)(s^2 + 1)}$$

Quindi abbiamo un termine binomio al numeratore con $\tau = 10^{-1}$, uno al denominatore con $\tau = 5^{-1}$ e un termine trinomio con $\xi = 0$. I punti di rottura sono 10 e 5. Per il trinomio dobbiamo calcolare w_n ma per come è scritto sappiamo che $w_n = 1$, quindi l'ultimo punto di rottura è 10^0 . Bode:



6 Proprietà dello stato

6.1 Osservabilità

Definizione 6.1 (Indistinguibilità degli stati). x_{0a} e x_{0b} si dicono indistinguibili se, indipendentemente da un sistema di controllo, l'uscita che dipende da x_{0a} è uguale a quella che dipende da x_{0b}

6.1.1 Caso discreto

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Dati x_{0a} e x_{0b} indistinguibili $\Rightarrow y_a(k+j) = y_b(k+j) \forall j \geq 0 \forall u$ Possiamo porre $u = 0$, quindi avremo che

$$y_a(0) = Cx_{0a} = Cx_{0b} = y_b(0)$$

$$y_a(1) = CAx_{0a} = CAx_{0b} = y_b(1)$$

$$y_a(1) = CA^2x_{0a} = CA^2x_{0b} = y_b(1)$$

fino a

$$y_a(1) = CA^jx_{0a} = CA^jx_{0b} = y_b(1) \forall j \geq 0$$

$$\Leftrightarrow CA^j(x_{0a} - x_{0b}) = 0$$

Poniamo $\bar{x} = x_{0a} - x_{0b}$ che risulta essere "indistinguibile da zero". Questo implica che $CA\bar{x} = 0$ ecc...

Teorema 6.1 (Teorema di Hamilton).

$$A^n = -a_0 I_d - a_1 A - \dots - a_{n-1} A^{n-1}$$

dove a_0, \dots, a_{n-1} sono i coefficienti del polinomio caratteristico di A

$$\Rightarrow CA^n = -a_0 C - a_1 CA - \dots - a_{n-1} CA^{n-1}$$

Definizione 6.2 (Matrice di osservabilità).

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{O}\bar{X} = 0$$

Se ha rango pieno la soluzione è quella banale \rightarrow il sistema è tutto osservabile.

6.1.2 Caso continuo

L'approccio è analogo (prendiamo $t = 0$)

$$\begin{aligned} y_a(y) &= Ce^{At}x_{0a} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = y_b(y) = Ce^{At}x_{0b} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &\Leftrightarrow Ce^{At}x_{0a} = Ce^{At}x_{0b} \\ &\Leftrightarrow Ce^{At}(x_{0a} - x_{0b}) = 0 \forall t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow Ce^{At}\bar{X} = 0 \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

deriviamo e notiamo che ogni derivata è uguale a 0

$$CAe^{At}\bar{x} = 0 \Rightarrow CA\bar{x} = 0$$

ecc... quindi come prima abbiamo $CA^j\bar{x} = 0 \forall j \geq 0$.

Definizione 6.3 (Matrice del cambio di coordinate).

$$T^{-1} = (\text{completamento } \bar{x}), \text{rank}(T^{-1}) = n - k$$

dove il completamento ha $n - k$ colonne, \bar{x} ha k colonne e \bar{x} è la base del kernel.

quando cambiamo le coordinate possiamo riscrivere le matrici come $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{B} = TB$, $\tilde{C} = CT^{-1}$

$$\tilde{C} = [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2] = C (\text{completamento base } \bar{x})$$

sappiamo che $c\bar{x} = 0 \Rightarrow \tilde{C}_2 = 0$

$$\Rightarrow \tilde{C}_1 = C [\tilde{C}_1 \quad 0]$$

Per la matrice \tilde{A} c'è un approccio simile.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}$$

Proposizione 6.1 (A invarianza).

$$\bar{x} \in \ker \Rightarrow A\bar{x} \in \ker$$

Se usiamo una base \bar{x} in I_d del kernel, $z = T\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_d \end{pmatrix}$ e quindi

$$\begin{aligned} \tilde{A} \begin{pmatrix} 0 \\ I_d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \tilde{A}_{12} &= 0 \end{aligned}$$

quindi ora

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}$$

Possiamo dividere il sistema originario in 2 sistemi

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{pmatrix} z + \tilde{D}u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \tilde{A}_{11}z_1 + \tilde{B}_1u \\ \dot{z}_2 = \tilde{A}_{21}z_1 + \tilde{A}_{22}z_2 + \tilde{B}_2u \\ y = \tilde{C}_1z_1 + \tilde{D}u \end{cases}$$

siano s_1 e s_2 i due sottosistemi

$$s_1 = \begin{cases} \dot{z}_1 = \tilde{A}_{11}z_1 + \tilde{B}_1u \\ y = \tilde{C}_1z_1 + \tilde{D}u \end{cases} \quad s_2 = \begin{cases} \dot{z}_2 = \tilde{A}_{21}z_1 + \tilde{A}_{22}z_2 + \tilde{B}_2u \\ y = \tilde{C}_2z_2 \end{cases}$$

riscrivendo per componenti il sistema possiamo determinare i modi osservabili

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \tilde{A}_{11}z_1 + \tilde{B}_1u \\ \dot{z}_2 = \tilde{A}_{21}z_1 + \tilde{A}_{22}z_2 + \tilde{B}_2u \\ y = \tilde{C}_1z_1 + \tilde{D}u \end{cases}$$

ricordando che gli autovalori di \tilde{A} sono quelli di A , che $\tilde{A}_{12} = 0$, sappiamo che gli autovalori di \tilde{A} sono quelli dei blocchi sulla diagonale. Nella scomposizione l'uscita y dipende solo da z_1 , quindi i modi osservabili sono in \tilde{A}_{11} , quelli non osservabili in \tilde{A}_{22} .

Corollario 6.1. *gli autovalori di \tilde{A}_{11} sono osservabili, quelli di \tilde{A}_{22} non osservabili*

Teorema 6.2 ($W(t) = \tilde{C}e^{\tilde{A}t}\tilde{B} + \tilde{D}\delta(t)$). *Dimostrazione.*

$$W(s) = \tilde{C}(sI_d - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} = (\tilde{C}_1 \quad 0) \begin{pmatrix} (sI_d - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1 & 0 \\ 0 & (sI_d - \tilde{A}_{22})^{-1}\tilde{B}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} + \tilde{D}$$

$$\begin{pmatrix} sI_d - \tilde{A}_{11} & 0 \\ 0 & sI_d - \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (sI_d - \tilde{A}_{11})^{-1} & 0 \\ * & (sI_d - \tilde{A}_{22})^{-1} \end{pmatrix}$$

e facendo i calcoli si arriva alla tesi (nella matrice c'è la trasformata di $e^{\tilde{A}t}$) \square

6.2 Raggiungibilità

Prendiamo un sistema a tempo discreto e consideriamo $x(0) = 0$. Da qui derivano

- $x(1) = Bu(0)$
- $x(2) = Ax(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1)$
- ecc...

che appartengono tutti a $\text{Im}(B)$. Quindi in l passi posso raggiungere $x \in \text{Im}\{B, AB, \dots, A^{l-1}B\}$

Definizione 6.4 (Matrice di raggiungibilità). $\mathcal{R} = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{l-1}B)$

Definizione 6.5 (Cambio coordinate).

$$T^{-1} = (\text{base } R \quad \text{completamento})$$

dove la base di R è nella forma $\begin{pmatrix} I_d \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è una base che genera il sottospazio di raggiungibilità.

Proposizione 6.2 (A invarianza).

$$\bar{x} \in \text{span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} \Rightarrow A\bar{x} \in \text{span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\}$$

\bar{z} è nel sottospazio di raggiungibilità perchè abbiamo T^{-1} con il completamento, scegliendo la forma $\begin{pmatrix} I_d \\ 0 \end{pmatrix}$ possiamo esprimere i vettori \bar{z} come $\begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi usando solo le componenti della base di \mathcal{R} .

$$\bar{z} \in \tilde{R} \Rightarrow \tilde{A}\bar{z} \in \tilde{R}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A}_{21} = 0$$

questo zero si chiama "zero strutturale"

$$\tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 6.3 ($W(z)$ è indipendente dalle coordinate). *Dimostrazione.* $W(z) = C(zI_d - A)^{-1}B + D$, $\tilde{A} = TAT^{-1}$, $\tilde{B} = TB$, $\tilde{C} = CT^{-1}$, $\tilde{D} = D$ e sostituendo otteniamo

$$\tilde{W}(z) = CT^{-1}(zI_d - TAT^{-1})^{-1}TB + D$$

$I_d = TT^{-1}$, sostituiamo e mettiamo le T ai lati della parentesi interna

$$\tilde{W}(z) = CT^{-1}(T(zI_d - A)T^{-1})^{-1}TB + D$$

ora con un'altra semplice proprietà $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ eleviamo e avremo due T

$$CT^{-1}(T(T(zI_d - A))^{-1})TB + D$$

andiamo avanti con queste due proprietà che ci portano a

$$c(zI_d - A)^{-1}T^{-1}TB + D = C(zI_d - A)^{-1} + D = W(z)$$

□

Come nei casi precedenti possiamo dividere il sistema in due sottosistemi

$$\begin{cases} z_1(k+1) = \tilde{A}_{11}z_1(k) + \tilde{A}_{22}z_2(k) + \tilde{B}_1u(k) \\ z_2(k+1) = \tilde{A}_{22}z_2(k) \\ y(k) = \tilde{C}_1z_1(k) + z_2(k) + \tilde{D}u(k) \end{cases}$$

Esempio 6.1 (caso semplice).

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}u(k)$$

gli stati raggiungibili sono nell'immagine di $(B \ AB) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dividiamo lo stato in

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = 0 \end{cases}$$

sia $x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$x_1(1) = b + u, \quad x_2(1) = 0$$

⇒ basta porre $u = -b$ per ottenere $x_1(1) = 0$, in questo caso quindi per ogni punto x_0 esiste un u tale che posso tornare all'origine.

Esempio 6.2 (Studio osservabilità, raggiungibilità, decomposizioni, stabilità).

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ - & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}u \\ y = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

gli autovalori sono sulla diagonale ⇒ $\lambda = \{-3, -1, 1\}$ ⇒ instabile internamente. Raggiungibilità:

$$\mathcal{R} = (B \ AB \ A^B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathcal{R}) = 1$$

Il rango ci indica che la dimensione dell'immagine è 1, quindi \tilde{A}_{11} è 1×1 .

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

quindi $\lambda_1 = 1$ raggiungibile, $\lambda_2 = -3$ non raggiungibile, $\lambda_3 = -1$ non raggiungibile.

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Osservabilità: $\text{rank}(\mathcal{O}) = 2 \Rightarrow$ la dimensione del kernel è 1, $\bar{x} \in \ker(\mathcal{O}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$ osservabile.

6.3 Scomposizione di Kalman

Definizione 6.6 (Sottospazi di R e O). Siano \mathcal{R} e \mathcal{O} le matrici, possiamo definire dei sottospazi per dividere moti osservabili e raggiungibili

$$I = \text{span}\{\dots, w_{n-2}\}, \quad R = \text{span}\{\dots, w_k\}$$

- $\chi_1 = R \cap I$ raggiungibili e inosservabili
- $\chi_2 : \chi_1 \oplus \chi_2 = R$ raggiungibili e osservabili
- $\chi_3 : \chi_1 \oplus \chi_3 = I$ inosservabili e irraggiungibili
- $\chi_4 : \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 = R^n$ irraggiungibili e osservabili

Definizione 6.7 (Matrice del cambio di base con ξ).

$$T^{-1} = (\text{base}\xi_1 \quad \text{base}\xi_2 \quad \text{base}\xi_3 \quad \text{base}\xi_4)$$

Ora abbiamo di nuovo la possibilità di riscrivere A, B, C in altre coordinate, quindi per lo stesso motivo di sopra avremo gli stessi autovalori, nelle matrici sulla diagonale, con un blocco di zeri.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{14} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{C}_2 & 0 & \tilde{C}_4 \end{pmatrix}$$

scrivendolo in forma implicita si nota che abbiamo 4 sottosistemi

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \tilde{A}_{11}z_1 + \tilde{A}_{12}z_2 + \tilde{A}_{13}z_3 + \tilde{A}_{14}z_4 + \tilde{B}_1 u \\ \dot{z}_2 = \tilde{A}_{21}z_2 + \tilde{A}_{34}z_4 + \tilde{B}_2 u \\ \dot{z}_3 = \tilde{A}_{33}z_3 + \tilde{A}_{34}z_4 \\ \dot{z}_4 = \tilde{A}_{44}z_4 \\ y = \tilde{C}_2z_2 + \tilde{C}_4z_4 + Du \end{cases}$$

7 Appendice

Materiali di riferimento, dimostrazioni tecniche, e tabelle utili (es. trasformata di Laplace, formule di integrazione).

7.1 Trasformate di Laplace

Rubata dall'eserciziario

| Funzione $f(t)$ | Trasformata di Laplace $F(s)$ |
|--|----------------------------------|
| $\delta_{-1}(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| $e^{\alpha t} \delta_{-1}(t)$ | $\frac{1}{s-\alpha}$ |
| $\sin \omega t \delta_{-1}(t)$ | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ |
| $\cos \omega t \delta_{-1}(t)$ | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ |
| $\delta(t)$ | 1 |
| $\frac{t^n}{n!} \delta_{-1}(t)$ | $\frac{1}{s^{n+1}}$ |
| $\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t} \delta_{-1}(t)$ | $\frac{1}{(s-\alpha)^{n+1}}$ |
| $f(t-a) \delta_{-1}(t-a)$ | $e^{-as} F(s)$ |
| $f(t) e^{\alpha t} \delta_{-1}(t)$ | $F(s-\alpha)$ |
| $\frac{1}{\omega} \frac{t}{2!} \sin \omega t \delta_{-1}(t)$ | $\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$ |
| $\frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - t \cos \omega t) \delta_{-1}(t)$ | $\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$ |

Tabella 1: Tabella delle trasformate di Laplace