Appunti di Sistemi Dinamici

Andrea Starrantino

19 ottobre 2025

Indice

1 Algebra lineare

Ripasso di algebra lineare estratto dal test di autovalutazione.

1.1 Spazi vettoriali

Definizione 1.1 (Combinazione lineare).

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

$a \in R, x \in R^n$

Definizione 1.2 (Spazio vettoriale). Uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{F}$ è un insieme dotato di due operazioni: l'addizione di vettori e la moltiplicazione per scalari, che soddisfano le seguenti proprietà per ogni $u, v, w \in V$ e ogni scalare $a, b \in \mathbb{F}$:

1. Chiusura sotto l'addizione: $u + v \in V$
2. Commutatività dell'addizione: $u + v = v + u$
3. Associatività dell'addizione: $(u + v) + w = u + (v + w)$
4. Elemento neutro dell'addizione: Esiste un elemento $0 \in V$ tale che $u + 0 = u$ per ogni $u \in V$
5. Elemento inverso dell'addizione: Per ogni $u \in V$, esiste un elemento $-u \in V$ tale che $u + (-u) = 0$
6. Chiusura sotto la moltiplicazione per scalari: $au \in V$
7. Distributività della moltiplicazione per scalari rispetto all'addizione di vettori: $a(u + v) = au + av$
8. Distributività della moltiplicazione per scalari rispetto all'addizione di scalari: $(a + b)u = au + bu$
9. Associatività della moltiplicazione per scalari: $a(bu) = (ab)u$
10. Elemento neutro della moltiplicazione per scalari: $1u = u$

Definizione 1.3 (Vettori dipendenti).

$$\exists a, b, c \neq 0 : av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$$

Definizione 1.4 (Base di uno spazio vettoriale).

$$(v_1, \cdots, v_n) = \{\cdots, \alpha_n v_n\}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Definizione 1.5 (Kernel).

$$\ker(F) = \{v \in V : F(v) = 0\}$$

Definizione 1.6 (Immagine).

$$\mathrm{Im}(F) = \{F(v) : v \in V\}$$

1.1.1 Esempio

Scrivere $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nella base definita da $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \Rightarrow \text{ricavo } \alpha_1, \alpha_2$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 1 = -\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow 3\alpha_2 = 2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{2}{3}, \alpha_1 = -\frac{1}{3}$$

$$w_1 = -\frac{1}{3} v_1 + \frac{2}{3} v_2$$

1.2 Matrici

Definizione 1.7 (Matrice dei complementi algebrici)**.**

$$A^c : a^c_{ij} = (-1)^{i+j} det(A^T_{ij}), \text{i e j soppressi}$$

1.2.1 Esempio matrice complementi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^c = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} * det(4) & (-1)^{1+2} * det(-1) \\ (-1)^{2+1} * det(3) & (-1)^{2+2} * det(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Definizione 1.8 (Matrice inversa)**.**

$$A^{-1} = \frac{A^c}{det(A)}$$

Teorema 1.1 (Esistenza matrice inversa)**.** *La matrice inversa esiste se e solo se* $det(A) \neq 0$

1.2.2 Esempio matrice inversa

Calcolare, se esiste, la matrice inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifica esistenza matrice inversa

$$det(A) = 6 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^c = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -6 \\ -2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = A^c/6 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ -1/3 & -1/6 & 4/3 \end{pmatrix}$$

1.3 Determinante

Definizione 1.9 (Determinante 2x2)**.**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$det(A) = ad - bc$$

Definizione 1.10 (Metodo di Sarrus)**.**

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Definizione 1.11 (Laplace)**.**

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$det(A) = a * det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b * det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c * det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

generalizzato:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * (-1)^{i+j} * det(M_{ij})$$

con i-esima riga e j-esima colonna eliminata

1.3.1 Esempio

Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usiamo Laplace che sarà il metodo usato per tutte le matrici di dimensione superiore a 3

$$det(A) = 3 * (2 - 0) - (-1) * (2 - 2) + 0 * (0 - 2) = 6$$

1.4 Sistemi lineari

Definizione 1.12 (Matrice Completa)**.**

$$A = \begin{pmatrix} \cdots \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cdots \end{pmatrix}, Ax = B$$

Matrice completa

$$A|B$$

Teorema 1.2 (Teorema di Rouché-Capelli)**.**

$$rank(A) = rank(A|B) \Rightarrow \textit{il sistema ammette soluzioni}$$

$$\textit{incognite libere} = n - rank(A)$$

1.4.1 Esercizio

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = 0, x \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2x_2 \Rightarrow x = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

1.5 Autovalori e autovettori

Definizione 1.13 (Autovettore di F)**.** $F(v)$ endomorfismo

$$\underline{\mathrm{v}} \text{ autovettore di F} \Rightarrow \underline{\mathrm{v}} \neq 0 \ : \ F(\underline{\mathrm{v}}) = \lambda \underline{\mathrm{v}}$$

Definizione 1.14 (Autovalore di F)**.**

$$\lambda \text{ autovalore di F} \Leftrightarrow \text{zeri di } det(F - \lambda I) = 0$$

Definizione 1.15 (Polinomio caratteristico)**.**

$$P(\lambda) = det(F - \lambda I) = |F - \lambda I|$$

Definizione 1.16 (Spettro di F)**.**

$$\sigma(F) = \{v : F(v) = \lambda v\}$$

Definizione 1.17 (Molteplicità algebrica m_a)**.** La molteplicità algebrica di un autovalore è la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico.

Definizione 1.18 (Molteplicità geometrica m_g)**.** dim $(\ker(F - \lambda I))$

Teorema 1.3 (Diagonalizzabilità)**.** *A diagonalizzabile se ha n autovalori distinti*

Teorema 1.4 (Indipendenza autovettori)**.** *Gli autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.*

Definizione 1.19 (Matrice diagonalizzata)**.** Una matrice D è diagonalizzata se esiste una matrice invertibile P tale che $D = P^{-1}AP$ per una matrice A.

1.5.1 Esempio

Diagonalizzare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\delta) = det(A - \delta I) = P_A(\delta) = det \begin{pmatrix} 3-\delta & 1 & -1 \\ 1 & 3-\delta & -1 \\ 0 & 0 & 2-\delta \end{pmatrix}$$

$$P_A(\delta) = (2-\delta)((3-\delta)^2 - 1) = (\delta - 2)^2(\delta - 4) = 0$$

$$\delta_1 = 2, \delta_2 = 2, \delta_3 = 4, m_a(2) = 2, m_a(4) = 1$$

troviamo gli autovettori

$$(A-2I)x = 0 \Rightarrow V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(A-4I)x = 0 \Rightarrow x_1 = x_2, x_3 = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} 1/2$$

Teorema 1.5 ($A^n = PD^nP^{-1}$)**.**

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Ogni elemento sarà la combinazione lineare degli autovettori destri elevati alla n

$$A_{ij}^n = \sum_i c_i \lambda_i^n$$

1.6 Jordan

Teorema 1.6 (Teorema di Jordan)**.**

$\forall \Phi \in End(v), dim_c V, \Phi$ *è rappresentabile da una matrice diagonale a blocchi di Jordan*

Definizione 1.20 (Blocco di Jordan)**.**

$$B_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

Esempio 1.1 ($B_3(2)$)**.**

$$B_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Definizione 1.21.

$$m_a(\lambda) = \sum \dim B_k(\lambda)$$

Definizione 1.22 (N blocchi $\geq j$ associati a λ)**.**

$$N_j(\lambda)$$

$$\dim \ker (A - \lambda I)^J = \sum_{k \geq j} N_k(\lambda)$$

Esempio 1.2 (Calcolo $\tilde{J}$)**.**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_a(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)^2$$

So che $m_a(1) = 1, m_a(2) = 1, m_a(4) = 2$, quindi devo capire se ho un blocco di ordine 2 o due blocchi di ordine 1 per l'autovalore 4.

$$\dim \ker(A - 4I) = 1 \Rightarrow \text{un blocco di ordine 2}$$

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1.7 Equazioni differenziali

Definizione 1.23 (Ordine dell'equazione)**.** L'ordine di un'equazione differenziale è l'ordine della derivata con ordine maggiore

1.7.1 Esempio casareccio

$f'(x) = x$ è del 1 ordine

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int xdx = \frac{x^2}{2} + c$$

Definizione 1.24 (Soluzione generale)**.** La soluzione generale di un'equazione differenziale è l'insieme di tutte le sue soluzioni, spesso espresso in termini di una funzione che include costanti arbitrarie. Dall'esempio di prima, $\frac{x^2}{2} + c$ è la soluzione generale.

1.7.2 Equazioni differenziali elementari

1. $y' = f(x)$

$$y' = f(x) \Leftrightarrow y = \int f(x)dx = F(x) + c$$

   esempio $y' = 3e^{2x} \Leftrightarrow y = \int 3e^{2x}dx = \frac{3}{2}e^{2x} + c$

2. $y'' = f(x)$

$$y' = \int f(x)dx = F(X) + c_1, y = \int [F(x) + c_1]dx = F(x) + c_1x + c_2$$

1.7.3 Problema di Cauchy

Equazione differenziale con condizioni iniziali.

$$\begin{cases} y' = -e^{-x} \\ y(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow y = e^{-x} + c$$

La condizione iniziale ci dice che la funzione per x = 0 vale 3, quindi:

$$e^{-0} + c = 3 \Leftrightarrow c = 2 \Rightarrow y(x) = e^{-x} + 2$$

esempio 2 ordine

$$\begin{cases} y'' = x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

soluzione

$$y' = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c_1, y = \int \left(\frac{x^2}{2} + c_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

avendo due condizioni iniziali possiamo calcolare c_1 e c_2

$$1 = 0^3/6 + c_1 \cdot 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 1$$
$$4 = 0^2 + c_1 \Rightarrow c_1 = 4$$
$$y(x) = \frac{x^3}{6} + 4x + 1$$

1.7.4 Coefficenti costanti

Notazione $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$, forma generale $ay''(x) + by'(x) + cx(x) = 0$

Teorema 1.7 (Insieme soluzioni)**.** *L'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 2. La soluzione generale sarà $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. c_1 e c_2 sono parametri liberi, y_1 e y_2 sono una base.*

Definizione 1.25 (Equazione caratteristica)**.**

$$az^2 + bz + c = 0, z \in \mathbb{C}$$

Teorema 1.8 (Soluzione generale)**.** *La soluzione è la soluzione dell'equazione caratteristica.*

- *radici distinte reali*
$$z_1 = e^{\delta_1} x, z_2 = e^{\delta_2} x$$
$$y(x) = c_1 z_1 + c_2 z_2$$

- *radici coincidenti reali*
$$z_1 = z_2 = e^{\delta x}$$
$$y(x) = c_1 e^{\delta x} + c_2 x e^{\delta x}$$

- *radici complesse coniugate*
$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, z_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x), x_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$
$$y(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

Esempio 1.3. $y'' - 5y' + 4y = 0$

$$z^2 - 5z + 4 = 0 \Rightarrow (z-4)(z-1) = 0, z_1 = 4, z_2 = 1$$

base dello spazio

$$e^{4x}, e^{1x} \Rightarrow y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{1x}$$

Esempio 1.4 (Problema di Cauchy)**.**

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

equazione caratteristica

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \Rightarrow (z+1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow z_1 = -1 + i, z_2 = -1 - i$$
$$\alpha = -1, \beta = 1$$

base

$$e^{-x}\cos(x), e^{-x}\sin(x), y(x) = c_1 e^{-x}\cos(x) + c_2 e^{-x}\sin(x)$$

sappiamo y'

$$y'(x) = -e^{-x}(c_1\cos(x) + c_2\sin(x)) + e^{-x}(-c_1\sin(x) + c_2\cos(x))$$

sostituendo le coordinate troviamo

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow y(x) = e^{-x}(\cos(x) + 2\sin(x))$$

2 Introduzione e notazione

In questa prima sezione introduciamo i concetti base e la notazione usata negli appunti.

Definizione 2.1 (Sistema dinamico)**.** Insieme di elementi interconnessi che evolvono nel tempo e su cui in genere è possibile intervenire modificandone il comportamento.

Legame statico: $v_R(t) = R\,i(t)$ Legame dinamico: $\dfrac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{C}i(t)$

Figura 1: Elementi circuitali: Resistenza e Condensatore

2.1 Notazione

$$\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$$

3 Sistemi lineari

3.1 Sistemi a tempo continuo lineari stazionari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in R^m \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Come ottenere m dalla matrice B:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow m$ è il numero di colonne di B.

3.1.1 Sistema Massa-Molla-Smorzatore

Di seguito il sistema massa-molla-smorzatore con ingresso esterno u e posizione y.

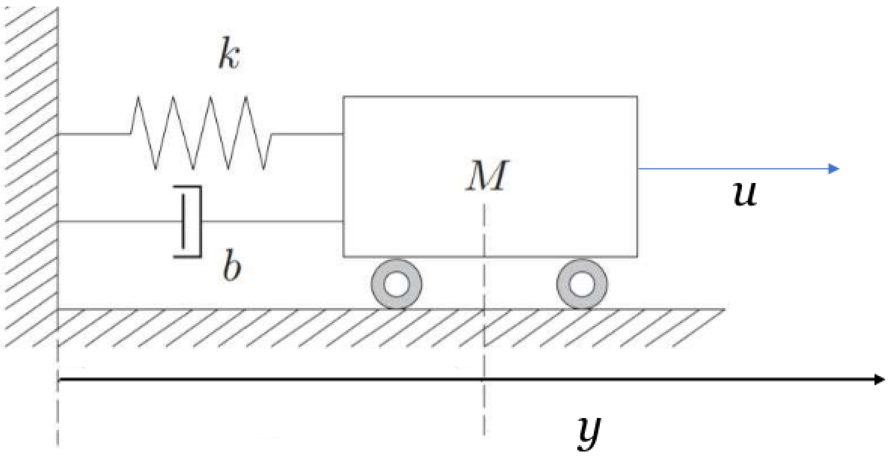


Figura 2: Carrello di massa M con molla k e smorzatore viscoso b.

legge che descrive il movimento

$$M\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

vogliamo passare allo spazio di stato

$$x_1(t) = y(t), x_2(t) = \dot{y}(t)$$

Essendo $\dot{x_1}(t)$ lo spazio e $\dot{x_2}(t)$ la velocità

$$\dot{x_1}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x_2}(t) = \ddot{y}(t) = \frac{1}{M}(u(t) - b\dot{y}(t) - ky(t))$$

adesso abbiamo la forma $\dot{x}(t) = \dots$ e $y(t) = \dots$.
Possiamo riscriverlo in forma matriciale

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

3.1.2 Modello implicito

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Teorema 3.1 (Soluzioni del sistema)**.**

$$\begin{cases} x(t) = e^{a(t-t_0)x_0} & , \dot{x} = ax \\ x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau & , \dot{x} = ax + bu \end{cases}$$

[Osservazione] La soluzione non dipende da t o t_0 ma solo dalla differenza $t - t_0$.

3.1.3 Modello esplicito

$$\begin{cases} x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \\ y(t) = c \left(e^{a(t-t_0)}x_0 + \int^{t} + t_0 e^{a(t-\tau)bu(\tau)d\tau} \right) + du(t) \end{cases}$$

3.1.4 Risposta libera e forzata

Definizione 3.1 (Risposta libera)**.** Dipende dalle condizioni iniziali

$$x_l(t) = e^{a(t-t_0)}x_0$$

Definizione 3.2 (Risposta forzata)**.** Dipende dall'ingresso

$$x_f(t) = \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

3.1.5 Ipotesi di linearità

Definiamo $x_{01}(t)$ e $x_{02}(t)$ come gli stati raggiungi a tempo t partendo da $x_{01}(t_0)$ e $x_{02}(t_0)$ con ingressi $u_1(t)$ e $u_2(t)$ rispettivamente. Possiamo dire allora che

$$x_0(t) = c_1 x_{01}(t_0) + c_2 x_{02}(t_0), u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$$

e che lo stato raggiunto sarà

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

Siano

1. $x_{01}(t_0) = x_0(t_0)$ e $u_1 = 0$, $x_1(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 = x_l$
2. $x_{02}(t_0) = 0$ e $u_2 = u$, $x_2(t) = \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau = x_f$

Allora possiamo combinarle

$$\bar{x}_0 = c_1 x_{01}(t_0) + c_2 x_{02}(t_0), \ \bar{u} = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$$

$$\bar{x}(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

Concludiamo ponendo $c_1 = c_2 = 1$

$$\bar{x}(t) = x_1(t) + x_2(t) = x_l(t) + x_f(t) = x(t)$$

3.1.6 Ipotesi di stazionarietà

Definizione 3.3 (Sistema stazionario)**.** Un sistema è stazionario se spostando $u(t)$ nel tempo, anche l'uscita si sposta, senza cambiare forma.

Teorema 3.2 (Condizione di stazionarietà)**.** *Se*

$$u(t-\Delta) \Rightarrow y(t-\Delta)$$

allora il sistema è stazionario.

Prova Facciamo un esperimento all'istante t_0 e dopo a t_1. Avremo $\bar{x_0}(t_1) = x_0$ e $\bar{u}(t) = u(t-\Delta) = u(t-t_1+t_0)$. Idealmente avremo $u(t) = \bar{u}(t-\Delta)$. Prendiamo la soluzione esplicita

$$\bar{x}(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_1}^{\bar{t}} e^{a(\bar{t}-\tau)} b\bar{u}(\tau)d\tau$$

Siano $\xi = \tau - \Delta$, $\bar{t} = t + \Delta$

$$\bar{x}(t+\Delta) = e^{a(\bar{t}-t_0)}x_0 + \int_{t_1}^{t+\Delta} e^{a(t+\Delta-\tau)} b\bar{u}(\tau)d\tau$$

- $\tau \to t_1 \Rightarrow \xi \to t_0$
- $\tau \to \bar{t} \Rightarrow \xi \to t$

Dovendo integrare sostituiamo

$$\bar{x}(t+\Delta) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\xi)} bu(\xi)d\xi = x(t)$$

3.1.7 Forma generale

Definiamo le seguenti matrici

- $\Phi = e^{a(t-t_0)}$ matrice di transizione di stato
- $H = e^{At}B = \Phi B$ matrice risposte impulsive dello stato, colonne = risposta a impulso
- $\Gamma = e^{At}D$ matrice trasformazione dello stato
- $W = Ce^{At} = C\Phi$ matrice risposte impulsive dell'uscita

La forma esplicita diventa

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} H(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ y(t) = W(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)d\tau + Du(t) \end{cases}$$

che nel caso scalare diventa, con $t_0 = 0$

$$\begin{cases} x(t) = e^{at}x_0 + \int^{t} e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \\ y(t) = ce^{at}x_0 + \int^{t} ce^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + \int^{t} d\delta(t-\tau)u(\tau)d\tau \end{cases}$$

Definizione 3.4 (Impulso di Dirac)**.**

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ +\infty & t = 0 \end{cases}$$

3.2 Sistemi a tempo discreto

3.2.1 Modello implicito

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad x(0) = x_0, x \in \mathbb{R}^n, u \in R^m, y \in R^p$$

Esempio 3.1 (Laurea triennale)**.** L'idea è che ogni anno una percentuale α di studenti non finisce gli esami del 1o anno, mentre $1 - \alpha$ inizia gli esami del 2o anno.

Possiamo formalizzare il primo anno in questo modo

$$x_1(k+1) = \alpha_1 x_1(k) + u(k)$$

quindi gli studenti che entrano e quelli che ripetono gli esami.

Nel secondo ci andranno quelli che passano dal primo e quelli che ripetono

$$x_2(k+1) = \alpha_2 x_2(k) + (1 - \alpha_1)x_1(k)$$

Quelli che si laureano sono l'output del sistema

$$y(k) = (1 - \alpha_3)x_3(k)$$

Nel complesso il sistema è

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \alpha_1 x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = (1 - \alpha_1)x_1(k) + \alpha_2 x_2(k) \\ x_3(k+1) = (1 - \alpha_2)x_2(k) + \alpha_3 x_3(k) \\ y(k+1) = (1 - \alpha_3)x_3(k) \end{cases}$$

in forma matriciale

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 1-\alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 1-\alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-\alpha_3 \end{pmatrix} x(k) \end{cases} \quad D = 0$$

Teorema 3.3. *$D = 0 \Rightarrow$ no legame diretto tra input e output.*

Esempio 3.2 (Calcolo radice quadrata con metodo tangenti)**.** Con il metodo delle tangenti cerchiamo la radice di a, ovvero la soluzione di

$$f(x) = x^2 - a$$

dove $x = k+1, x_0 = k$.

Sviluppando con Taylor otteniamo

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Rightarrow x_{k+1} - x_k = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{f'(x_k)}$$

mettiamo k nella formula

$$f(x_k) = x_k^2 - a$$

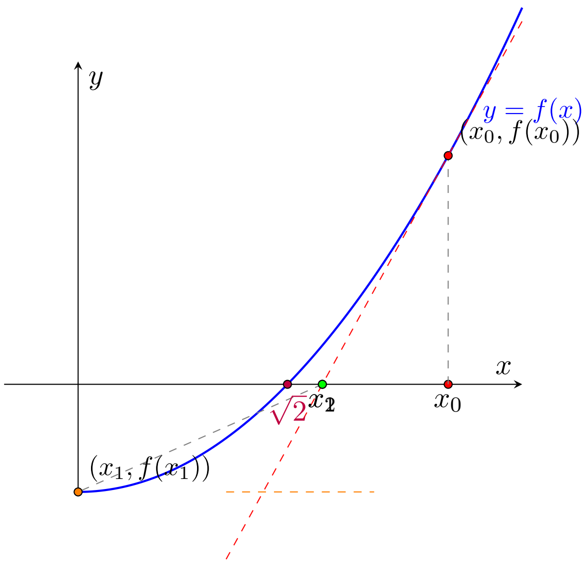
$$f'(x_k) = 2x_k$$

$$f(x_{k+1}) = x_{k+1}^2 - a$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k + \frac{-x_k^2 + a}{2x_k} = x_k - \frac{x_k}{2} + \frac{a}{2x_k}, \ f(x_{k+1}) \text{ approssimato}$$

e otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{1}{2}x_k + \frac{a}{2x_k} = \frac{1}{2}x_k + \frac{a}{2x_k} \\ y_k = x_k \end{cases}$$



3.3 Evoluzione libera

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

1. evoluzione libera: $e^{A(t-\tau)}$
2. evoluzione forzata: $\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} bu(\tau)d\tau$

Dall'ipotesi di linearità:

$$\begin{cases} x_{01} \\ u_1[t_0, t) \end{cases} \rightarrow x_1(t) = e^{a(t-t_0)}x_01 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu_1(\tau)d\tau$$

$$\begin{cases} x_{02} \\ u_2[t_0, t) \end{cases} \rightarrow x_2(t) = e^{a(t-t_0)}x_02 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu_2(\tau)d\tau$$

x_0 è la combinazione lineare di x_{01} e x_{02}, u è la combinazione lineare di u_1 e u_2. Abbiamo quindi

$$\begin{cases} x_0 = c_1x_{01} + c_2x_{02} \\ u = c_1u_1 + c_2u_2 \end{cases}$$

allora riscriviamo $X(t)$

$$X(t) = e^{a(t-t_0)}(c_1x_{01} + c_2x_{02}) + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}b(c_1u_1(\tau) + c_2u_2(\tau))d\tau = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

Abbiamo ora due casi

- $c_2 = 0$, $x_0 = x_{01}$, $u = u_1 = 0 \Rightarrow$ risposta libera (non dipende da u)
- $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $x_0 = x_{02} = 0$, $u = u_2 \Rightarrow$ risposta forzata (dipende da u)

Teorema 3.4 (Sovrapposizione delle risposte (degli effetti))**.**

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), c_1 = c_2 = 1$$

Secondo questa condizione posso studiare separatamente la risposta libera e quella forzata.

Definizione 3.5 (Costante di tempo)**.** $\tau = -\frac{1}{a}$

Allora riscriviamo la risposta libera

$$x_l(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 = e^{-\frac{t}{\tau}}x(0)$$

che essendo un esponenziale avrà questo andamento

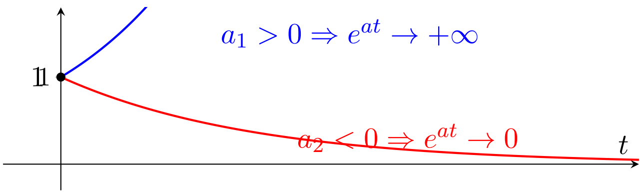


Figura 3: Comportamento dell'esponenziale e^{at} in funzione del segno di a.

3.4 Cambio coordinate del sistema

Per cambiare le coordinate definiamo $z = Tx : \exists T^{-1}$. Da qui ci rifacciamo al sistema classico

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Abbiamo poi che $\dot{z} = T\dot{x} = TAx + TBu$, $x = zT^{-1}$ e quindi risulta (con y stessa cosa)

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = TAT^{-1}z(t) + TBu(t) \\ y(t) = CT^{-1}z(t) + Du(t) \end{cases}$$

Definizione 3.6 ($\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$)**.**

$$\tilde{A} = TAT^{-1}, \tilde{B} = TB, \tilde{C} = CT^{-1}, \tilde{D} = D$$

Definizione 3.7 (Autovettori destri e sinistri)**.** Gli autovalori sono gli stessi, ma cambiano gli autovettori

- destro $Au = \lambda u$, u vettore colonna
- sinistro $A^T v = \lambda v$, v vettore riga

Per trovarli

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix}$$

Date queste informazioni possiamo riscrivere

$$e^{At} = I_d + At + \frac{A^2t^2}{2} = T^{-1}T + T^{-1}\tilde{A}Tt + T^{-1}\tilde{A}^2T\frac{t^2}{2}$$

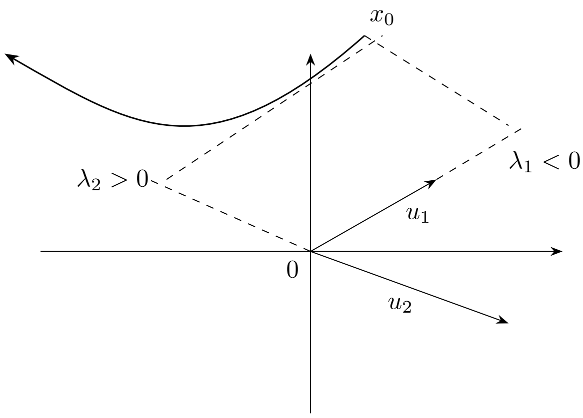
Sappiamo inoltre da algebra che $A^k = T^{-1}\tilde{A}^kT$ e quindi e^{At} diventa

$$e^{At} = T^{-1}(I_d + \tilde{A}t + \dots)T = T^{-1}e^{\tilde{A}t}T$$

Esempio 3.3 (Evoluzione sistema)**.** Essendo $e^{\tilde{A}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$

$$e^{At} = T^{-1}e^{\tilde{A}t}T = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}u_1 & e^{\lambda_2 t}u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T v_2^T \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t}u_1v_1^T + e^{\lambda_2 t}u_2v_2^T$$

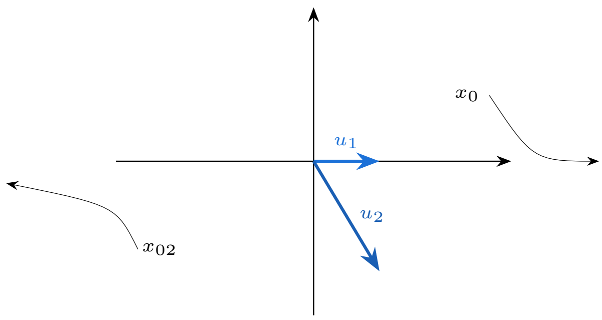
$$x_0 = c_1u_1 + c_2u_2 \Rightarrow x(t) = e^{\lambda_1 t}c_1u_1 + e^{\lambda_2 t}c_2u_2$$



Esempio 3.4.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Casi particolari



- x_0 su $u_1 \Rightarrow c_2 = 0$ diverge
- x_0 su $u_2 \Rightarrow c_1 = 0$ converge

3.4.1 Autovalori complessi

Poniamo che il polinomio caratteristico abbia radici complesse coniugate $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$. Sostituendo nell'equazione avremo

$$(A - \alpha I - jwI)(u_a + ju_b) = 0 \Leftrightarrow (A - \alpha I)u_a - jwIu_a + J(A - \alpha I)u_b + jwIu_b = 0$$

$$\begin{cases} (A - \alpha I)u_a + wu_b = 0 \\ (A - \alpha I)u_b - wu_a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Au_a = \alpha u_a - wu_b \\ Au_b = wu_a + \alpha u_b \end{cases}$$

$$A \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -w \\ w & \alpha \end{pmatrix}$$

Sappiamo che

$$TAT^{-1} = \tilde{A}, T^{-1} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -w \\ w & \alpha \end{pmatrix}$$

Teorema 3.5 (Evoluzione libera con autovalori complessi)**.**

$$e^{\tilde{A}t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(wt) & -\sin(wt) \\ \sin(wt) & \cos(wt) \end{pmatrix}$$

con α che determina l'andamento esponenziale e w la frequenza di rotazione.

$$X_l(t) = T^{-1} e^{\tilde{A}t} T x_0$$

sostituiamo tutto nella formula

$$X_l(t) = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(wt) & -\sin(wt) \\ \sin(wt) & \cos(wt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix} (c_a u_a + c_b u_b)$$

Portando $e^{\alpha t}$ all'inizio

$$X_l(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(wt)u_a + \sin(wt)u_b & -\sin(wt)u_a + \cos(wt)u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix} (c_a u_a + c_b u_b)$$

$$\Leftrightarrow X_l(t) = e^{\alpha t} \left[\cos(wt)u_a v_a^T + \sin(wt)u_b v_a^T - \sin(wt)u_a v_b^T + \cos(wt)u_b v_b^T \right] (c_a u_a + c_b u_b)$$

$$\Leftrightarrow X_l(t) = e^{\alpha t} \left[\cos(wt)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(wt)(u_b v_a^T - u_a v_b^T) \right] (c_a u_a + c_b u_b)$$

Prendiamo il Delta di Kronecker $\delta_{ij} = v_i^T u_j$ (se $i = j$ vale 1, altrimenti 0), e facciamo le seguenti osservazioni

- $(u_a v_a^T + u_b v_b^T)u_a = u_a$
- $(u_a v_a^T + u_b v_b^T)u_b = u_b$

e il primo membro diventa x_0,

- $(u_b v_a^T - u_a v_b^T)u_a = -u_b$
- $(u_b v_a^T - u_a v_b^T)u_b = u_a$

quindi sostituiamo ancora

$$X_l(t) = e^{\alpha t}[\cos(wt)(c_a u_a + c_b u_b) + \sin(wt)(-c_a u_b + c_b u_a)]$$

$$\Leftrightarrow X_l(t) = e^{\alpha t}[u_a(c_a \cos(wt) + c_b \sin(wt)) + u_b(c_b \cos(wt) - c_a \sin(wt))]$$

Passaggio ad ampiezza-fase

$$c_a = m\sin(\varphi), c_b = m\cos(\varphi)$$

Date le formule di prostaferesi (a detta del prof)

$$\begin{cases} \sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B) \\ \cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B) \end{cases}$$

allora riscriviamo tutto come

$$X_l(t) = me^{\alpha t}[u_a \sin(wt+\varphi) + u_b \cos(wt+\varphi)]$$

3.4.2 Cambio di base da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$

Ora siamo nella seguente situazione: abbiamo una coppia di autovalori complessi coniugati $\alpha \pm j\beta$ e un autovettore complesso coniugato $u_a \pm ju_b$. Dunque avremo u_a e u_b come autovettori reali. L'obiettivo è usare una base reale al posto di u e u^*.

$$\begin{pmatrix} u & u^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}$$

Definizione 3.8 (Forma canonica reale)**.** $\tilde{A}$ sarà diagonale a blocchi con

- $\lambda_i \forall$ autovalore reale
- $\begin{pmatrix} \alpha_j & w_j \\ -w_j & \alpha_j \end{pmatrix} \forall$ coppia di autovalori coniugati

3.4.3 Autovalori misti

Nel caso generico avremo autovalori reali e complessi. Dall'ultima definizione sappiamo come si trasforma $\tilde{A}$, dunque nel caso di una matrice A 3x3 con autovalori misti avremo la seguente situazione

$$\lambda_1 \in \mathbb{R} = u_1, \lambda_{2,3} = \alpha \pm jw = u_a, u_b$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -w \\ 0 & w & \alpha \end{pmatrix}$$

prendiamo lo sviluppo di $e^{A_2 t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos wt & -\sin wt \\ \sin wt & \cos wt \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & -w \\ w & \alpha \end{pmatrix}$ e quindi otteniamo $\tilde{A}$ finale in forma canonica reale

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha t}\cos wt & -e^{\alpha t}\sin wt \\ 0 & e^{\alpha t}\sin wt & e^{\alpha t}\cos wt \end{pmatrix}$$

Ora riprendiamo i 3 autovettori reali u_1, u_a, u_b e riscriviamo e^{At} con $\tilde{A}$

$$e^{At} = T^{-1}e^{\tilde{A}t}T = \begin{pmatrix} u_1 & u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha t}\cos wt & -e^{\alpha t}\sin wt \\ 0 & e^{\alpha t}\sin wt & e^{\alpha t}\cos wt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix}$$

Osservazione 3.1 (Gli autovettori moltiplicano solo con autovalori corrispondenti)**.**

$$\Leftrightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}u_1 & e^{\alpha t}\cos(wt)u_a - e^{\alpha t}\sin(wt)u_b & e^{\alpha t}\sin(wt)u_a + e^{\alpha t}\cos(wt)u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow e^{At} = e^{\lambda_1 t}u_1 v_1^T + e^{\alpha t}(\cos(wt)u_a v_a^T - \sin(wt)u_b v_a^T + \sin(wt)u_a v_b^T + \cos(wt)u_b v_b^T)$$

$$\Leftrightarrow e^{At} = e^{\lambda_1 t}u_1 v_1^T + e^{\alpha t}[\cos(wt)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(wt)(u_a v_b^T - u_b v_a^T)]$$

Definizione 3.9 (Forma spettrale di e^{At})**.**

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t}u_1 v_1^T + e^{\alpha t}[\cos(wt)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(wt)(u_a v_b^T - u_b v_a^T)]$$

Lemma 3.1 (Forma generale risposta libera)**.**

$$X_l(t) = \sum_i e^{\lambda_i t}u_i v_i^T + \sum_j e^{\alpha_j t}[\cos(w_j t)(u_{ja} v_{ja}^T + u_{jb} v_{jb}^T) + \sin(w_j t)(u_{ja} v_{jb}^T - u_{jb} v_{ja}^T)]$$

3.4.4 Moti aperiodici e pseudoperiodici

x_0 nella base degli autovettori $= c_1 u_1 + c_a u_a + c_b u_b$, dobbimao calcolare $X_l(t)$. Ricordiamo che

- $v_1^T \times u_1 = 1$
- $v_1^T \times u_a = 0$
- $v_1^T \times u_b = 0$

dato che

$$T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_a & u_b \end{pmatrix} \quad T \cdot T^{-1} = I$$

e anche gli altri prodotti verranno semplificati, dunque

$$e^{At}x_0 = e^{\lambda_1 t}c_1 u_1 + e^{\alpha t}[\cos(wt)(c_a u_a + c_b u_b) + \sin(wt)(-c_a u_b + c_b u_a)]$$

raccogliamo u_a e u_b

$$\Leftrightarrow e^{At}x_0 = e^{\lambda_1 t}c_1 u_1 + e^{\alpha t}[u_a(c_a\cos(wt) + c_b\sin(wt)) + u_b(c_b\cos(wt) - c_a\sin(wt))]$$

come già fatto in precedenza, passiamo ad ampiezza-fase con $c_a = n\sin(\varphi)$ e $c_b = n\cos(\varphi)$

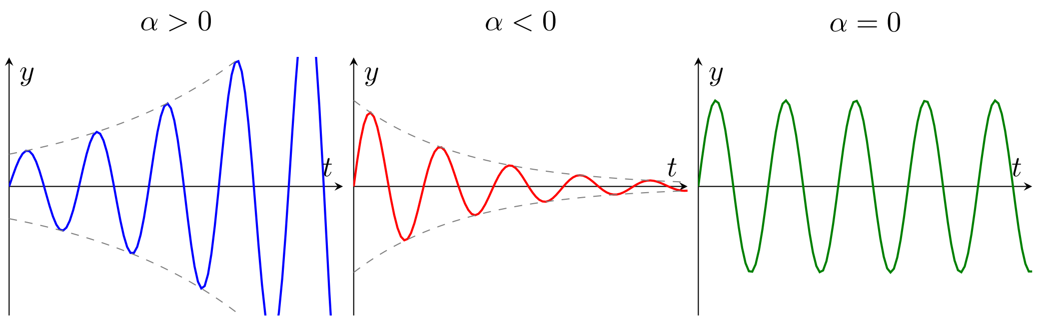
$$\Leftrightarrow e^{At}x_0 = e^{\lambda_1 t}c_1 u_1 + ne^{\alpha t}[u_a\sin(wt+\varphi) + u_b\cos(wt+\varphi)]$$

Definizione 3.10 (Moto aperiodico)**.**

$$e^{\lambda_i}u_i c_i$$

Definizione 3.11 (Moto pseudoperiodico)**.**

$$ne^{\alpha t}[u_a\sin(wt+\varphi) + u_b\cos(wt+\varphi)]$$



In un grafico a 3 dimensioni, partiamo da $x_0 = (3, 3, 3)$ e prendiamo come esempio i vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ora il moto deve seguire la convergenza/divergenza lungo u_1 e la rotazione sul piano $u_a - u_b$, prendiamo solo il caso in cui $\lambda_1 < 0$. Nb: i vettori sono gli assi, non sono della loro effettiva dimensione.

3.4.5 Tempo discreto

Definiamo di nuovo le matrici di trasformazione

$$\begin{cases} \phi = A^k \\ \psi = B^k \\ H = A^{k-1}B \\ W = \begin{cases} CA^{k-1}B & k > 0 \\ D & k = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Prendiamo una matrice 3x3 A diagonalizzabile $\Rightarrow \exists u_1, u_a, u_b : T^{-1} = (u_1 u_a u_b)$. Abbiamo quindi che $A^k = T^{-1}\tilde{A}^k T$.

$$\tilde{A}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & w \\ 0 & -w & \alpha \end{pmatrix}^k$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & w \\ -w & \alpha \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \sigma\cos(\theta) & \sigma\sin(\theta) \\ -\sigma\sin(\theta) & \sigma\cos(\theta) \end{pmatrix}^k = \sigma^k \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^k$$

Definizione 3.12. $\sigma = \sqrt{\alpha^2 + w^2}$ e $\theta = \arctan\left(\frac{w}{\alpha}\right)$

Teorema 3.6 (A^k)**.**

$$A^k = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^k\cos(k\theta) & \sigma^k\sin(k\theta) \\ 0 & -\sigma^k\sin(k\theta) & \sigma^k\cos(k\theta) \end{pmatrix} T$$

si dimostra per induzione.

$$A^k = \lambda_1^k u_1 v_1^T + \sigma^k[\cos(k\theta)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(k\theta)(u_a v_b^T - u_b v_a^T)]$$

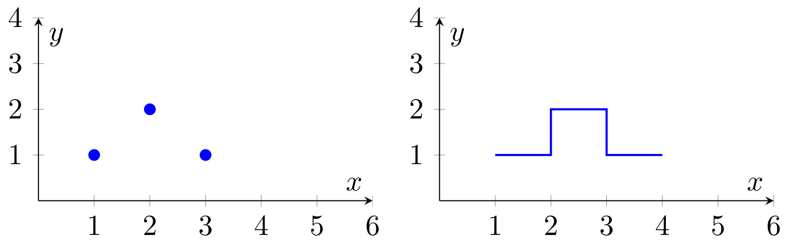
$$x_0 = c_1\lambda_1 + c_a\lambda_a + c_b\lambda_b$$

$$X_l(k) = \lambda_1^k c_1 u_1 + \sigma^k[\cos(k\theta)(u_a c_a + u_b c_b) + \sin(k\theta)(u_a c_b - u_b c_a)]$$

che sempre con le formule di prostaferesi diventa

$$X_l(k) = \lambda_1^k c_1 u_1 + \sigma^k(n\sin(\theta k + \varphi)u_a + n\cos(\theta k + \varphi)u_b)$$

Definizione 3.13 (Moto alternante)**.** Dato $\lambda_i < 0$, allora il moto aperiodico associato si dice alternante. In sostanza avendo il $-$ nell'elevamento a potenza, il segno del moto cambia ad ogni passo.



3.4.6 Organo di ritenuta

Prendiamo un segnale in ingresso discreto, il compito dell'organo di ritenuta è di mantenere il valore dell'ultimo campione fino al successivo. Ora prendiamo un sistema a tempo continuo, definiamo $T = t - t_0$, $t_0 = kT$ e $t = (k+1)T$.

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A}(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(kT)d\tau$$

da qua definiamo le matrici discrete

- $A_d = e^{At}$
- $B_d = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(kT)d\tau$
- $C_d = C$
- $D_d = D$

sia $\xi = (k+1)T - \tau$ allora

$$B_d = -\int_{T}^{0} e^{A\xi}Bd\xi = \int_{0}^{T} e^{A\xi}Bd\xi$$

Per gli autovalori reali o complessi usiamo T al posto di t e otteniamo

$$\lambda_i \to e^{\lambda_i T}, \quad \alpha_j \pm jw_j \to e^{\alpha_j T}(\cos(w_jT) \pm j\sin(w_jT))$$

3.5 Osservabilità e eccitabilità

Prendiamo un sistema con 1 autovalore reale e 1 coppia di autovalori complessi coniugati

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t}u_1v_1^T + e^{\alpha t}[\cos(wt)(u_av_a^T + u_bv_b^T) + \sin(wt)(u_av_b^T - u_bv_a^T)]$$

prendiamo la matrice B e calcoliamo $H = e^{At}B$

$$H(t) = e^{\lambda_1 t}u_1v_1^TB + e^{\alpha t}[\cos(wt)(u_av_a^T + u_bv_b^T)B + \sin(wt)(u_av_b^T - u_bv_a^T)B]$$

Notiamo che se $v_1^TB = 0$ il moto non comparirà nell'espressione di $H(t)$ che è definita come matrice risposte impulsive dello stato, di conseguenza si dice che il moto non è eccitabile da un impulso in ingresso.

Definizione 3.14 (Eccitabilità)**.** Definizione per ogni moto

- Un moto aperiodico è eccitabile se $v_i^TB \neq 0$.
- Un moto pseudoperiodico è eccitabile se $v_{ja}^TB \neq 0$ o $v_{jb}^TB \neq 0$.

Teorema 3.7 (Moto eccitabile)**.** *Se $u_i \in \text{Im}\{B\}$ allora il moto è eccitabile.*

Esempio 3.5 (Esercizio stile esonero)**.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} D = 0$$

1. schema di simulazione
2. evoluzione libera con $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. determinare gli stati tc $X_L(t) \to 0$
4. determinare gli stati tc $X_L(t)$ limitata

Soluzione. 1. Riscriviamo il sistema nella forma implicita e poi X(t) per componenti

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

ha 2 ingressi (colonne di B) quindi per componenti diventa

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = 2x_2(t) + u_1(t) - u_2(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Il disegno prima o poi arriverà (se mi ricordo) (aprite una issue o fate una PR)
2. Calcoliamo gli autovalori di A

$$P_a(A) = \det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda + \lambda^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 2, -1$$

Ora per $X_L(t) = e^{At}x_0 = \left(\sum e^{\lambda_i t} u_i v_i^T\right) x_0$ ci servono gli autovettori destri e sinistri.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Dato $\lambda = (0, 2, -1)$, calcoliamo $X_L(t)$, ricordando che $c_i = v_i^T x_0$

$$X_L(t) = u_1 c_1 + e^{2t} u_2 c_2 + e^{-t} u_3 c_3$$

3. $x_0 = c_3 u_3$ essendo l'unico moto che converge
4. $x_0 = c_1 u_1 + c_3 u_3$ essendo gli unici moti che non divergono

Prendiamo l'uscita Y e facciamo dei calcoli veloci:

$$W = C\left(\sum_i e^{\lambda_i t} u_i v_i^T + \sum_j e^{\alpha_j t}\left(\cos(w_j t)(u_{ja}v_{ja}^T + u_{jb}v_{jb}^T) + \sin(w_j t)(u_{ja}v_{jb}^T - u_{jb}v_{ja}^T)\right)\right)$$

Definizione 3.15 (Osservabilità)**.** Definizione per ogni moto

- Un moto aperiodico è osservabile se $Cu_i \neq 0$.
- Un moto pseudoperiodico è osservabile se $Cu_{ja} \neq 0$ o $Cu_{jb} \neq 0$.

Osservazione 3.2 (In W compaiono solo i moti osservabili ed eccitabili)**.**

3.6 Esercizi

Esercizio 3.1 (Schema di simulazione, eccitabilità, osservabilità e matrici a tempo discreto)**.**

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(k) + u(k) \end{cases}$$

Soluzione. *1. Riscriviamo il sistema nella forma implicita e poi X(t) per componenti*

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_1 + 3x_2 + x_3 + u_1(k) \\ x_2(k+1) = x_2 - x_3 \\ x_3(k+1) = x_2 + x_3 + u_3(k) \end{cases}$$

e si fa il grafico (aspetto PR)
2. A diagonale a blocchi $\Rightarrow \lambda_1 = -1$

$$(1-\lambda)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = 1 \pm j$$

Per l'autovettore associato a $\lambda_1 = -1$ *il calcolo è semplice e viene* $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *(1 incognita libera), per gli autovalori complessi coniugati si usa la forma*

$$A\begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & w \\ -w & \alpha \end{pmatrix}$$

con $\alpha = 1$ *e* $w = 1$*, dunque*

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -a_1 + 3a_2 + a_3 = a_1 - b_1 \\ a_2 - a_3 = a_2 - b_2 \\ a_2 + a_3 = b_2 + b_3 \\ -b_1 + 3b_2 + b_3 = a_1 + b_1 \\ b_2 - b_3 = a_2 + b_2 \\ b_2 + b_3 = a_3 + b_3 \end{cases}$$

ora dobbiamo capire quali sono le 2 equazioni linearmente dipendenti. Dalla 6a equazione ricaviamo che $a_3 = b_2$, dalla 3a che $a_2 = -b_3$. Sostituendo nel sistema togliamo le equazioni 2 e 5 rimanendo con

$$\begin{cases} -a_1 + 3a_2 + a_3 = a_1 - b_1 \\ -b_1 + 3b_2 + b_3 = a_1 + b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 - b_1 = 3_a 2 + a_3 \\ a_1 + 2b_1 = 3b_2 + b_3 \end{cases}$$

sappiamo da prima che $a_2 = -b_3$ e $a_3 = b_2$, dunque

$$\begin{cases} 2a_1 - b_1 = 3(-b_3) + b_2 \\ a_1 + 2b_1 = 3b_2 + b_3 \end{cases}$$

scegliamo $b_2 = 1$ e $b_3 = 0$ per semplicità, dunque

$$\begin{cases} 2a_1 - b_1 = 1 \\ a_1 + 2b_1 = 3 \end{cases}$$

risolvendo otteniamo $a_1 = 1, b_1 = 1$, dunque

$$u_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Osservabilità

$$Cu_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \textit{non osservabile}$$

$$Cu_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \textit{osservabile (basta che uno dei 2 sia non nullo)}$$

$$Cu_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \textit{osservabile}$$

Per l'eccitabilità calcoliamo gli autovettori sinistri

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

facciamo i calcoli con v^T e B

$$v_1^T B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \textit{non eccitabile}$$

$$v_a^T B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \textit{eccitabile (basta che uno dei 2 sia non nullo)}$$

$$v_b^T B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

4. Matrici a tempo discreto

$$\Phi(k) = \lambda_1^k u_1 v_1^T + \sigma^k(\cos(\theta k)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(\theta k)(u_a v_b^T - u_b v_a^T))$$

con $\sigma = \sqrt{\alpha^2 + w^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ *e* $\theta = \arctan\left(\frac{w}{\alpha}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

$$\Phi(k) = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + (\sqrt{2})^k(\ldots)$$

$$H(k) = \Phi(k)B, \quad v_1^T B = 0, v_a^T B = 1, v_b^T B = 0$$

$$H(k) = (\sqrt{2})^{k-1}(\cos(\theta(k-1))u_a - \sin(\theta(k-1))u_b)$$

4 Appendice

Materiali di riferimento, dimostrazioni tecniche, e tabelle utili (es. trasformata di Laplace, formule di integrazione).