

# **Appunti di Sistemi Dinamici**

Andrea Starrantino

2 novembre 2025

## Indice

<b>1 Algebra lineare</b>	<b>4</b>
1.1 Spazi vettoriali . . . . .	4
1.1.1 Esempio . . . . .	5
1.2 Matrici . . . . .	5
1.2.1 Esempio matrice complementi . . . . .	5
1.2.2 Esempio matrice inversa . . . . .	5
1.3 Determinante . . . . .	6
1.3.1 Esempio . . . . .	6
1.4 Sistemi lineari . . . . .	6
1.4.1 Esercizio . . . . .	7
1.5 Autovalori e autovettori . . . . .	7
1.5.1 Esempio . . . . .	7
1.6 Jordan . . . . .	8
1.7 Equazioni differenziali . . . . .	9
1.7.1 Esempio casareccio . . . . .	9
1.7.2 Equazioni differenziali elementari . . . . .	9
1.7.3 Problema di Cauchy . . . . .	9
1.7.4 Coefficienti costanti . . . . .	10
<b>2 Introduzione e notazione</b>	<b>11</b>
2.1 Notazione . . . . .	11
<b>3 Sistemi lineari</b>	<b>11</b>
3.1 Sistemi a tempo continuo lineari stazionari . . . . .	11
3.1.1 Sistema Massa-Molla-Smorzatore . . . . .	12
3.1.2 Modello implicito . . . . .	13
3.1.3 Modello esplicito . . . . .	13
3.1.4 Risposta libera e forzata . . . . .	13
3.1.5 Ipotesi di linearità . . . . .	13
3.1.6 Ipotesi di stazionarietà . . . . .	14
3.1.7 Forma generale . . . . .	14
3.2 Sistemi a tempo discreto . . . . .	15
3.2.1 Modello implicito . . . . .	15
3.3 Evoluzione libera . . . . .	16
3.4 Cambio coordinate del sistema . . . . .	17
3.4.1 Autovalori complessi . . . . .	19
3.4.2 Cambio di base da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$ . . . . .	20
3.4.3 Autovalori misti . . . . .	20
3.4.4 Moti aperiodici e pseudoperiodici . . . . .	21
3.4.5 Tempo discreto . . . . .	22
3.4.6 Organo di ritenuta . . . . .	23
3.5 Osservabilità e eccitabilità . . . . .	23
3.5.1 Autovalori multipli . . . . .	25
3.6 Esercizi . . . . .	25
<b>4 Stabilità</b>	<b>28</b>
4.1 Il pendolo . . . . .	28
4.2 Sistemi . . . . .	28
4.2.1 Definizioni di stabilità . . . . .	28
4.3 Criterio di Routh . . . . .	29

4.4	Stabilità nei punti di equilibrio . . . . .	30
4.5	Dominio di Laplace . . . . .	31
4.5.1	Calcoli delle trasformate utili . . . . .	31
4.5.2	Proprietà . . . . .	32
4.5.3	Applicazione al Modello implicito . . . . .	32
4.5.4	Sviluppo in frazioni parziali . . . . .	33
4.5.5	Pulsazione e fase . . . . .	35
4.5.6	Segnali . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Appendice</b>	<b>37</b>

## 1 Algebra lineare

Ripasso di algebra lineare estratto dal test di autovalutazione.

### 1.1 Spazi vettoriali

**Definizione 1.1** (Combinazione lineare).

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

$$a \in R, x \in R^n$$

**Definizione 1.2** (Spazio vettoriale). Uno spazio vettoriale  $V$  su un campo  $\mathbb{F}$  è un insieme dotato di due operazioni: l'addizione di vettori e la moltiplicazione per scalari, che soddisfano le seguenti proprietà per ogni  $u, v, w \in V$  e ogni scalare  $a, b \in \mathbb{F}$ :

1. Chiusura sotto l'addizione:  $u + v \in V$
2. Commutatività dell'addizione:  $u + v = v + u$
3. Associatività dell'addizione:  $(u + v) + w = u + (v + w)$
4. Elemento neutro dell'addizione: Esiste un elemento  $0 \in V$  tale che  $u + 0 = u$  per ogni  $u \in V$
5. Elemento inverso dell'addizione: Per ogni  $u \in V$ , esiste un elemento  $-u \in V$  tale che  $u + (-u) = 0$
6. Chiusura sotto la moltiplicazione per scalari:  $au \in V$
7. Distributività della moltiplicazione per scalari rispetto all'addizione di vettori:  $a(u + v) = au + av$
8. Distributività della moltiplicazione per scalari rispetto all'addizione di scalari:  $(a + b)u = au + bu$
9. Associatività della moltiplicazione per scalari:  $a(bu) = (ab)u$
10. Elemento neutro della moltiplicazione per scalari:  $1u = u$

**Definizione 1.3** (Vettori dipendenti).

$$\exists a, b, c \neq 0 : av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$$

**Definizione 1.4** (Base di uno spazio vettoriale).

$$(v_1, \dots, v_n) = \{\dots, \alpha_n v_n\}, \alpha \in \mathbb{R}$$

**Definizione 1.5** (Kernel).

$$\ker(F) = \{v \in V : F(v) = 0\}$$

**Definizione 1.6** (Immagine).

$$\text{Im}(F) = \{F(v) : v \in V\}$$

### 1.1.1 Esempio

Scrivere  $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  nella base definita da  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  e  $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \Rightarrow \text{ricavo } \alpha_1, \alpha_2$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 1 = -\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow 3\alpha_2 = 2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{2}{3}, \alpha_1 = -\frac{1}{3}$$

$$w_1 = -\frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2$$

## 1.2 Matrici

**Definizione 1.7** (Matrice dei complementi algebrici).

$$A^c : a_{ij}^c = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}^T), i \text{ e } j \text{ soppressi}$$

### 1.2.1 Esempio matrice complementi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^c = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} * \det(4) & (-1)^{1+2} * \det(-1) \\ (-1)^{2+1} * \det(3) & (-1)^{2+2} * \det(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

**Definizione 1.8** (Matrice inversa).

$$A^{-1} = \frac{A^c}{\det(A)}$$

**Teorema 1.1** (Esistenza matrice inversa). *La matrice inversa esiste se e solo se  $\det(A) \neq 0$*

### 1.2.2 Esempio matrice inversa

Calcolare, se esiste, la matrice inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifica esistenza matrice inversa

$$\det(A) = 6 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^c = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -6 \\ -2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = A^c / 6 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ -1/3 & -1/6 & 4/3 \end{pmatrix}$$

### 1.3 Determinante

**Definizione 1.9** (Determinante 2x2).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc$$

**Definizione 1.10** (Metodo di Sarrus).

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

**Definizione 1.11** (Laplace).

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a * \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b * \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c * \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

generalizzato:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} * (-1)^{i+j} * \det(M_{ij})$$

con i-esima riga e j-esima colonna eliminata

#### 1.3.1 Esempio

Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usiamo Laplace che sarà il metodo usato per tutte le matrici di dimensione superiore a 3

$$\det(A) = 3 * (2 - 0) - (-1) * (2 - 2) + 0 * (0 - 2) = 6$$

### 1.4 Sistemi lineari

**Definizione 1.12** (Matrice Completa).

$$A = (\dots), B = (\dots), Ax = B$$

Matrice completa

$$A|B$$

**Teorema 1.2** (Teorema di Rouché-Capelli).

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A|B) \Rightarrow \text{il sistema ammette soluzioni}$$

$$\text{incognite libere} = n - \text{rank}(A)$$

### 1.4.1 Esercizio

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = 0, x \in \mathbb{R}^2 \\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2x_2 \Rightarrow x = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

### 1.5 Autovalori e autovettori

**Definizione 1.13** (Autovettore di F).  $F(v)$  endomorfismo

$$\underline{v} \text{ autovettore di } F \Rightarrow \underline{v} \neq 0 : F(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$$

**Definizione 1.14** (Autovalore di F).

$$\lambda \text{ autovalore di } F \Leftrightarrow \text{zeri di } \det(F - \lambda I) = 0$$

**Definizione 1.15** (Polinomio caratteristico).

$$P(\lambda) = \det(F - \lambda I) = |F - \lambda I|$$

**Definizione 1.16** (Spettro di F).

$$\sigma(F) = \{v : F(v) = \lambda v\}$$

**Definizione 1.17** (Molteplicità algebrica  $m_a$ ). La molteplicità algebrica di un autovalore è la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico.

**Definizione 1.18** (Molteplicità geometrica  $m_g$ ).  $\dim(\ker(F - \lambda I))$

**Teorema 1.3** (Diagonalizzabilità). *A diagonalizzabile se ha n autovalori distinti*

**Teorema 1.4** (Indipendenza autovettori). *Gli autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.*

**Definizione 1.19** (Matrice diagonalizzata). Una matrice  $D$  è diagonalizzata se esiste una matrice invertibile  $P$  tale che  $D = P^{-1}AP$  per una matrice  $A$ .

### 1.5.1 Esempio

Diagonalizzare la matrice

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ P_A(\delta) &= \det(A - \delta I) = P_A(\delta) = \det \begin{pmatrix} 3 - \delta & 1 & -1 \\ 1 & 3 - \delta & -1 \\ 0 & 0 & 2 - \delta \end{pmatrix} \\ P_A(\delta) &= (2 - \delta)((3 - \delta)^2 - 1) = (\delta - 2)^2(\delta - 4) = 0 \end{aligned}$$

$$\delta_1 = 2, \delta_2 = 2, \delta_3 = 4, m_a(2) = 2, m_a(4) = 1$$

troviamo gli autovettori

$$(A - 2I)x = 0 \Rightarrow V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(A - 4I)x = 0 \Rightarrow x_1 = x_2, x_3 = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{1/2}$$

**Teorema 1.5** ( $A^n = PD^nP^{-1}$ ).

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Ogni elemento sarà la combinazione lineare degli autovettori destri elevati alla  $n$

$$A_{ij}^n = \sum_i c_i \lambda_i^n$$

## 1.6 Jordan

**Teorema 1.6** (Teorema di Jordan).

$\forall \Phi \in End(v), \dim_c V, \Phi$  è rappresentabile da una matrice diagonale a blocchi di Jordan

**Definizione 1.20** (Blocco di Jordan).

$$B_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

**Esempio 1.1** ( $B_3(2)$ ).

$$B_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Definizione 1.21.**

$$m_a(\lambda) = \sum \dim B_k(\lambda)$$

**Definizione 1.22** (N blocchi  $\geq j$  associati a  $\lambda$ ).

$$N_j(\lambda)$$

$$\dim \ker(A - \lambda I)^J = \sum_{k \geq j} N_k(\lambda)$$

**Esempio 1.2** (Calcolo  $\tilde{J}$ ).

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_a(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)^2$$

So che  $m_a(1) = 1, m_a(2) = 1, m_a(4) = 2$ , quindi devo capire se ho un blocco di ordine 2 o due blocchi di ordine 1 per l'autovalore 4.

$$\dim \ker(A - 4I) = 1 \Rightarrow \text{un blocco di ordine 2}$$

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

## 1.7 Equazioni differenziali

**Definizione 1.23** (Ordine dell'equazione). L'ordine di un'equazione differenziale è l'ordine della derivata con ordine maggiore

### 1.7.1 Esempio casareccio

$f'(x) = x$  è del 1 ordine

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int xdx = \frac{x^2}{2} + c$$

**Definizione 1.24** (Soluzione generale). La soluzione generale di un'equazione differenziale è l'insieme di tutte le sue soluzioni, spesso espresso in termini di una funzione che include costanti arbitrarie. Dall'esempio di prima,  $\frac{x^2}{2} + c$  è la soluzione generale.

### 1.7.2 Equazioni differenziali elementari

$$1. \ y' = f(x)$$

$$y' = f(x) \Leftrightarrow y = \int f(x)dx = F(x) + c$$

$$\text{esempio } y' = 3e^{2x} \Leftrightarrow y = \int 3e^{2x}dx = \frac{3}{2}e^{2x} + c$$

$$2. \ y'' = f(x)$$

$$y' = \int f(x)dx = F(x) + c_1, y = \int [F(x) + c_1]dx = F(x) + c_1x + c_2$$

### 1.7.3 Problema di Cauchy

Equazione differenziale con condizioni iniziali.

$$\begin{cases} y' = -e^{-x} \\ y(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow y = e^{-x} + c$$

La condizione iniziale ci dice che la funzione per  $x = 0$  vale 3, quindi:

$$e^{-0} + c = 3 \Leftrightarrow c = 2 \Rightarrow y(x) = e^{-x} + 2$$

esempio 2 ordine

$$\begin{cases} y'' = x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

soluzione

$$y' = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c_1, y = \int \left( \frac{x^2}{2} + c_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

avendo due condizioni iniziali possiamo calcolare  $c_1$  e  $c_2$

$$\begin{aligned} 1 &= 0^3/6 + c_1 \cdot 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 1 \\ 4 &= 0^2 + c_1 \Rightarrow c_1 = 4 \\ y(x) &= \frac{x^3}{6} + 4x + 1 \end{aligned}$$

#### 1.7.4 Coefficienti costanti

Notazione  $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ , forma generale  $ay''(x) + by'(x) + cx(x) = 0$

**Teorema 1.7** (Insieme soluzioni). *L'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 2. La soluzione generale sarà  $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ .  $c_1$  e  $c_2$  sono parametri liberi,  $y_1$  e  $y_2$  sono una base.*

**Definizione 1.25** (Equazione caratteristica).

$$az^2 + bz + c = 0, z \in \mathbb{C}$$

**Teorema 1.8** (Soluzione generale). *La soluzione è la soluzione dell'equazione caratteristica.*

- radici distinte reali

$$z_1 = e^{\delta_1 x}, z_2 = e^{\delta_2 x}$$

$$y(x) = c_1 z_1 + c_2 z_2$$

- radici coincidenti reali

$$z_1 = z_2 = e^{\delta x}$$

$$y(x) = c_1 e^{\delta x} + c_2 x e^{\delta x}$$

- radici complesse coniugate

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, z_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), z_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

**Esempio 1.3.**  $y'' - 5y' + 4y = 0$

$$z^2 - 5z + 4 = 0 \Rightarrow (z - 4)(z - 1) = 0, z_1 = 4, z_2 = 1$$

base dello spazio

$$e^{4x}, e^{1x} \Rightarrow y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{1x}$$

**Esempio 1.4** (Problema di Cauchy).

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

equazione caratteristica

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \Rightarrow (z + 1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow z_1 = -1 + i, z_2 = -1 - i$$

$$\alpha = -1, \beta = 1$$

base

$$e^{-x} \cos(x), e^{-x} \sin(x), y(x) = c_1 e^{-x} \cos(x) + c_2 e^{-x} \sin(x)$$

sappiamo  $y'$

$$y'(x) = -e^{-x}(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)) + e^{-x}(-c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x))$$

sostituendo le coordinate troviamo

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow y(x) = e^{-x}(\cos(x) + 2 \sin(x))$$

## 2 Introduzione e notazione

In questa prima sezione introduciamo i concetti base e la notazione usata negli appunti.

**Definizione 2.1** (Sistema dinamico). Insieme di elementi interconnessi che evolvono nel tempo e su cui in genere è possibile intervenire modificandone il comportamento.



Figura 1: Elementi circuituali: Resistenza e Condensatore

### 2.1 Notazione

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

## 3 Sistemi lineari

### 3.1 Sistemi a tempo continuo lineari stazionari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Come ottenere  $m$  dalla matrice  $B$ :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow m$  è il numero di colonne di  $B$ .

### 3.1.1 Sistema Massa-Molla-Smorzatore

Di seguito il sistema massa-molla-smorzatore con ingresso esterno  $u$  e posizione  $y$ .

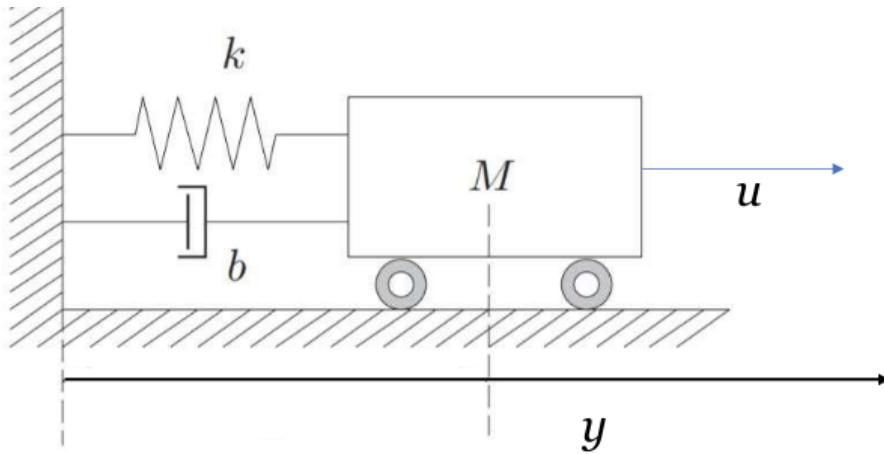


Figura 2: Carrello di massa  $M$  con molla  $k$  e smorzatore viscoso  $b$ .

legge che descrive il movimento

$$M\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

vogliamo passare allo spazio di stato

$$x_1(t) = y(t), x_2(t) = \dot{y}(t)$$

Essendo  $x_1(t)$  lo spazio e  $x_2(t)$  la velocità

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = \frac{1}{M}(u(t) - b\dot{y}(t) - ky(t))$$

adesso abbiamo la forma  $\dot{x}(t) = \dots$  e  $y(t) = \dots$

Possiamo riscriverlo in forma matriciale

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

### 3.1.2 Modello implicito

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

**Teorema 3.1** (Soluzioni del sistema).

$$\begin{cases} x(t) = e^{a(t-t_0)x_0} & , \dot{x} = ax \\ x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau & , \dot{x} = ax + bu \end{cases}$$

[Osservazione] La soluzione non dipende da  $t$  o  $t_0$  ma solo dalla differenza  $t - t_0$ .

### 3.1.3 Modello esplicito

$$\begin{cases} x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \\ y(t) = c \left( e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \right) + du(t) \end{cases}$$

### 3.1.4 Risposta libera e forzata

**Definizione 3.1** (Risposta libera). Dipende dalle condizioni iniziali

$$x_l(t) = e^{a(t-t_0)}x_0$$

**Definizione 3.2** (Risposta forzata). Dipende dall'ingresso

$$x_f(t) = \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

### 3.1.5 Ipotesi di linearità

Definiamo  $x_{01}(t)$  e  $x_{02}(t)$  come gli stati raggiungi a tempo  $t$  partendo da  $x_{01}(t_0)$  e  $x_{02}(t_0)$  con ingressi  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  rispettivamente. Possiamo dire allora che

$$x_0(t) = c_1x_{01}(t_0) + c_2x_{02}(t_0), u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$$

e che lo stato raggiunto sarà

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

Siano

1.  $x_{01}(t_0) = x_0(t_0)$  e  $u_1 = 0$ ,  $x_1(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 = x_l$
2.  $x_{02}(t_0) = 0$  e  $u_2 = u$ ,  $x_2(t) = \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau = x_f$

Allora possiamo combinarle

$$\bar{x}_0 = c_1x_{01}(t_0) + c_2x_{02}(t_0), \bar{u} = c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$$

$$\bar{x}(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

Concludiamo ponendo  $c_1 = c_2 = 1$

$$\bar{x}(t) = x_1(t) + x_2(t) = x_l(t) + x_f(t) = x(t)$$

### 3.1.6 Ipotesi di stazionarietà

**Definizione 3.3** (Sistema stazionario). Un sistema è stazionario se spostando  $u(t)$  nel tempo, anche l'uscita si sposta, senza cambiare forma.

**Teorema 3.2** (Condizione di stazionarietà). Se

$$u(t - \Delta) \Rightarrow y(t - \Delta)$$

allora il sistema è stazionario.

**Prova** Facciamo un esperimento all'istante  $t_0$  e dopo a  $t_1$ . Avremo  $\bar{x}_0(t_1) = x_0$  e  $\bar{u}(t) = u(t - \Delta) = u(t - t_1 + t_0)$ . Idealmente avremo  $u(t) = \bar{u}(t - \Delta)$ . Prendiamo la soluzione esplicita

$$\bar{x}(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_1}^{\bar{t}} e^{a(\bar{t}-\tau)} b \bar{u}(\tau) d\tau$$

Siano  $\xi = \tau - \Delta$ ,  $\bar{t} = t + \Delta$

$$\bar{x}(t + \Delta) = e^{a(\bar{t}-t_0)}x_0 + \int_{t_1}^{t+\Delta} e^{a(t+\Delta-\tau)} b \bar{u}(\tau) d\tau$$

- $\tau \rightarrow t_1 \Rightarrow \xi \rightarrow t_0$
- $\tau \rightarrow \bar{t} \Rightarrow \xi \rightarrow t$

Dovendo integrare sostituiamo

$$\bar{x}(t + \Delta) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\xi)} b u(\xi) d\xi = x(t)$$

### 3.1.7 Forma generale

Definiamo le seguenti matrici

- $\Phi = e^{a(t-t_0)}$  matrice di transizione di stato
- $H = e^{At}B = \Phi B$  matrice risposte impulsive dello stato, colonne = risposta a impulso
- $\Gamma = e^{At}D$  matrice trasformazione dello stato
- $W = Ce^{At} = C\Phi$  matrice risposte impulsive dell'uscita

La forma esplicita diventa

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau) d\tau \\ y(t) = W(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^t W(t - \tau)u(\tau) d\tau + Du(t) \end{cases}$$

che nel caso scalare diventa, con  $t_0 = 0$

$$\begin{cases} x(t) = e^{at}x_0 + \int^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \\ y(t) = ce^{at}x_0 + \int^t ce^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau + \int^t d\delta(t - \tau)u(\tau) d\tau \end{cases}$$

**Definizione 3.4** (Impulso di Dirac).

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ +\infty & t = 0 \end{cases}$$

## 3.2 Sistemi a tempo discreto

### 3.2.1 Modello implicito

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad x(0) = x_0, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$$

**Esempio 3.1** (Laurea triennale). L'idea è che ogni anno una percentuale  $\alpha$  di studenti non finisce gli esami del 1o anno, mentre  $1 - \alpha$  inizia gli esami del 2o anno.

Possiamo formalizzare il primo anno in questo modo

$$x_1(k+1) = \alpha_1 x_1(k) + u(k)$$

quindi gli studenti che entrano e quelli che ripetono gli esami.

Nel secondo ci andranno quelli che passano dal primo e quelli che ripetono

$$x_2(k+1) = \alpha_2 x_2(k) + (1 - \alpha_1) x_1(k)$$

Quelli che si laureano sono l'output del sistema

$$y(k) = (1 - \alpha_3) x_3(k)$$

Nel complesso il sistema è

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \alpha_1 x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = (1 - \alpha_1) x_1(k) + \alpha_2 x_2(k) \\ x_3(k+1) = (1 - \alpha_2) x_2(k) + \alpha_3 x_3(k) \\ y(k+1) = (1 - \alpha_3) x_3(k) \end{cases}$$

in forma matriciale

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 1 - \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 - \alpha_3 \end{pmatrix} x(k) \end{cases} \quad D = 0$$

**Teorema 3.3.**  $D = 0 \Rightarrow$  no legame diretto tra input e output.

**Esempio 3.2** (Calcolo radice quadrata con metodo tangenti). Con il metodo delle tangenti cerchiamo la radice di  $a$ , ovvero la soluzione di

$$f(x) = x^2 - a$$

dove  $x = k + 1, x_0 = k$ .

Sviluppando con Taylor otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ \Rightarrow x_{k+1} - x_k &= \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{f'(x_k)} \end{aligned}$$

mettiamo  $k$  nella formula

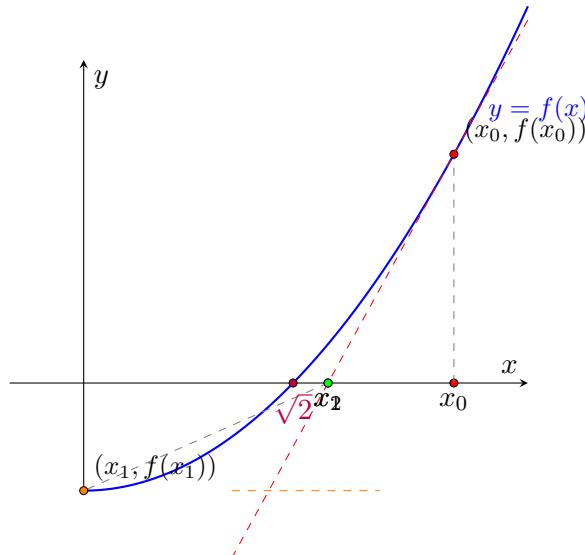
$$\begin{aligned} f(x_k) &= x_k^2 - a \\ f'(x_k) &= 2x_k \end{aligned}$$

$$f(x_{k+1}) = x_{k+1}^2 - a$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k + \frac{-x_k^2 + a}{2x_k} = x_k - \frac{x_k}{2} + \frac{a}{2x_k}, \quad f(x_{k+1}) \text{ approssimato}$$

e otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{1}{2}x_k + \frac{a}{2x_k} = \frac{1}{2}x_k + \frac{a}{2x_k} \\ y_k = x_k \end{cases}$$



### 3.3 Evoluzione libera

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

1. evoluzione libera:  $e^{A(t-\tau)}$
2. evoluzione forzata:  $\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau$

Dall'ipotesi di linearità:

$$\begin{cases} x_{01} \\ u_1[t_0, t] \end{cases} \rightarrow x_1(t) = e^{a(t-t_0)}x_{01} + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu_1(\tau)d\tau$$

$$\begin{cases} x_{02} \\ u_2[t_0, t] \end{cases} \rightarrow x_2(t) = e^{a(t-t_0)}x_{02} + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu_2(\tau)d\tau$$

$x_0$  è la combinazione lineare di  $x_{01}$  e  $x_{02}$ ,  $u$  è la combinazione lineare di  $u_1$  e  $u_2$ . Abbiamo quindi

$$\begin{cases} x_0 = c_1x_{01} + c_2x_{02} \\ u = c_1u_1 + c_2u_2 \end{cases}$$

allora riscriviamo  $X(t)$

$$X(t) = e^{a(t-t_0)}(c_1x_{01} + c_2x_{02}) + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}b(c_1u_1(\tau) + c_2u_2(\tau))d\tau = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

Abbiamo ora due casi

- $c_2 = 0, x_0 = x_{01}, u = u_1 = 0 \Rightarrow$  risposta libera (non dipende da  $u$ )
- $c_1 = 0, c_2 = 1, x_0 = x_{02} = 0, u = u_2 \Rightarrow$  risposta forzata (dipende da  $u$ )

**Teorema 3.4** (Sovrapposizione delle risposte (degli effetti)).

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), c_1 = c_2 = 1$$

Secondo questa condizione posso studiare separatamente la risposta libera e quella forzata.

**Definizione 3.5** (Costante di tempo).  $\tau = -\frac{1}{a}$

Allora riscriviamo la risposta libera

$$x_l(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 = e^{-\frac{t}{\tau}} x(0)$$

che essendo un esponenziale avrà questo andamento

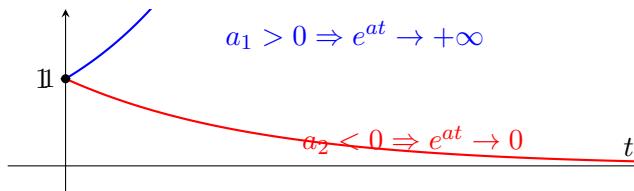


Figura 3: Comportamento dell'esponenziale  $e^{at}$  in funzione del segno di  $a$ .

### 3.4 Cambio coordinate del sistema

Per cambiare le coordinate definiamo  $z = Tx : \exists T^{-1}$ . Da qui ci rifacciamo al sistema classico

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Abbiamo poi che  $\dot{z} = T\dot{x} = TAx + TBu$ ,  $x = zT^{-1}$  e quindi risulta (con  $y$  stessa cosa)

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = TAT^{-1}z(t) + TBu(t) \\ y(t) = CT^{-1}z(t) + Du(t) \end{cases}$$

**Definizione 3.6** ( $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ ).

$$\tilde{A} = TAT^{-1}, \tilde{B} = TB, \tilde{C} = CT^{-1}, \tilde{D} = D$$

**Definizione 3.7** (Autowettori destri e sinistri). Gli autovalori sono gli stessi, ma cambiano gli autovettori

- destro  $Au = \lambda u$ ,  $u$  vettore colonna
- sinistro  $A^T v = \lambda v$ ,  $v$  vettore riga

Per trovarli

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix}$$

Date queste informazioni possiamo riscrivere

$$e^{At} = I_d + At + \frac{A^2 t^2}{2} = T^{-1}T + T^{-1}\tilde{A}Tt + T^{-1}\tilde{A}^2T\frac{t^2}{2}$$

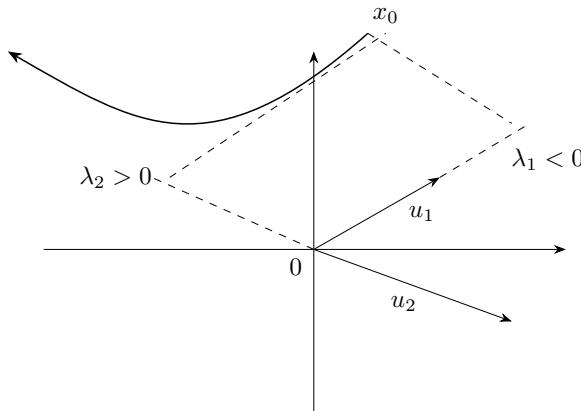
Sappiamo inoltre da algebra che  $A^k = T^{-1}\tilde{A}^kT$  e quindi  $e^{At}$  diventa

$$e^{At} = T^{-1}(I_d + \tilde{A}t + \dots)T = T^{-1}e^{\tilde{A}t}T$$

**Esempio 3.3** (Evoluzione sistema). Essendo  $e^{\tilde{A}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$

$$e^{At} = T^{-1}e^{\tilde{A}t}T = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}u_1 & e^{\lambda_2 t}u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T & v_2^T \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t}u_1v_1^T + e^{\lambda_2 t}u_2v_2^T$$

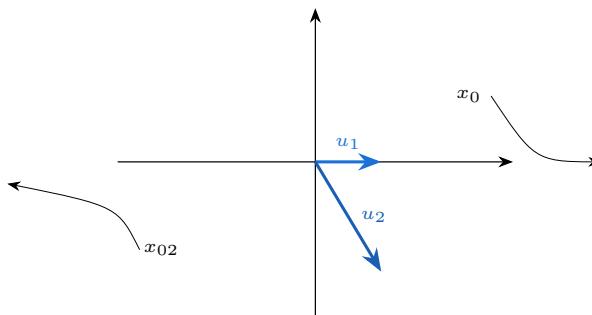
$$x_0 = c_1u_1 + c_2u_2 \Rightarrow x(t) = e^{\lambda_1 t}c_1u_1 + e^{\lambda_2 t}c_2u_2$$



**Esempio 3.4.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Casi particolari



- $x_0$  su  $u_1 \Rightarrow c_2 = 0$  diverge
- $x_0$  su  $u_2 \Rightarrow c_1 = 0$  converge

### 3.4.1 Autovalori complessi

Poniamo che il polinomio caratteristico abbia radici complesse coniugate  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ . Sostituendo nell'equazione avremo

$$(A - \alpha I - jwI)(u_a + ju_b) = 0 \Leftrightarrow (A - \alpha I)u_a - jwIu_a + J(A - \alpha I)u_b + jwIu_b = 0$$

$$\begin{cases} (A - \alpha I)u_a + wu_b = 0 \\ (A - \alpha I)u_b - wu_a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Au_a = \alpha u_a - wu_b \\ Au_b = wu_a + \alpha u_b \end{cases}$$

$$A \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -w \\ w & \alpha \end{pmatrix}$$

Sappiamo che

$$TAT^{-1} = \tilde{A}, T^{-1} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -w \\ w & \alpha \end{pmatrix}$$

**Teorema 3.5** (Evoluzione libera con autovalori complessi).

$$e^{\tilde{A}t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(wt) & -\sin(wt) \\ \sin(wt) & \cos(wt) \end{pmatrix}$$

con  $\alpha$  che determina l'andamento esponenziale e  $w$  la frequenza di rotazione.

$$X_l(t) = T^{-1} e^{\tilde{A}t} T x_0$$

sostituiamo tutto nella formula

$$X_l(t) = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(wt) & -\sin(wt) \\ \sin(wt) & \cos(wt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix} (c_a u_a + c_b u_b)$$

Portando  $e^{\alpha t}$  all'inizio

$$\begin{aligned} X_l(t) &= e^{\alpha t} \left( \cos(wt)u_a + \sin(wt)u_b \quad -\sin(wt)u_a + \cos(wt)u_b \right) \begin{pmatrix} v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix} (c_a u_a + c_b u_b) \\ &\Leftrightarrow X_l(t) = e^{\alpha t} \left[ \cos(wt)u_a v_a^T + \sin(wt)u_b v_a^T - \sin(wt)u_a v_b^T + \cos(wt)u_b v_b^T \right] (c_a u_a + c_b u_b) \\ &\Leftrightarrow X_l(t) = e^{\alpha t} \left[ \cos(wt)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(wt)(u_b v_a^T - u_a v_b^T) \right] (c_a u_a + c_b u_b) \end{aligned}$$

Prendiamo il Delta di Kronecker  $\delta_{ij} = v_i^T u_j$  (se  $i = j$  vale 1, altrimenti 0), e facciamo le seguenti osservazioni

- $(u_a v_a^T + u_b v_b^T)u_a = u_a$
- $(u_a v_a^T + u_b v_b^T)u_b = u_b$

e il primo membro diventa  $x_0$ ,

- $(u_b v_a^T - u_a v_b^T)u_a = -u_b$
- $(u_b v_a^T - u_a v_b^T)u_b = u_a$

quindi sostituiamo ancora

$$X_l(t) = e^{\alpha t} [\cos(wt)(c_a u_a + c_b u_b) + \sin(wt)(-c_a u_b + c_b u_a)]$$

$$\Leftrightarrow X_l(t) = e^{\alpha t} [u_a(c_a \cos(wt) + c_b \sin(wt)) + u_b(c_b \cos(wt) - c_a \sin(wt))]$$

### Passaggio ad ampiezza-fase

$$c_a = m \sin(\varphi), c_b = m \cos(\varphi)$$

Date le formule di prostaferesi (a detta del prof)

$$\begin{cases} \sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B) \\ \cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B) \end{cases}$$

allora riscriviamo tutto come

$$X_l(t) = m e^{\alpha t} [u_a \sin(wt + \varphi) + u_b \cos(wt + \varphi)]$$

### 3.4.2 Cambio di base da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$

Ora siamo nella seguente situazione: abbiamo una coppia di autovalori complessi coniugati  $\alpha \pm j\beta$  e un autovettore complesso coniugato  $u_a \pm ju_b$ . Dunque avremo  $u_a$  e  $u_b$  come autovettori reali. L'obiettivo è usare una base reale al posto di  $u$  e  $u^*$ .

$$\begin{pmatrix} u & u^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}$$

**Definizione 3.8** (Forma canonica reale).  $\tilde{A}$  sarà diagonale a blocchi con

- $\lambda_i \forall$  autovalore reale
- $\begin{pmatrix} \alpha_j & w_j \\ -w_j & \alpha_j \end{pmatrix} \forall$  coppia di autovalori coniugati

### 3.4.3 Autovalori misti

Nel caso generico avremo autovalori reali e complessi. Dall'ultima definizione sappiamo come si trasforma  $\tilde{A}$ , dunque nel caso di una matrice  $A$  3x3 con autovalori misti avremo la seguente situazione

$$\lambda_1 \in \mathbb{R} = u_1, \lambda_{2,3} = \alpha \pm jw = u_a, u_b$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -w \\ 0 & w & \alpha \end{pmatrix}$$

prendiamo lo sviluppo di  $e^{A_2 t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos wt & -\sin wt \\ \sin wt & \cos wt \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & -w \\ w & \alpha \end{pmatrix}$  e quindi otteniamo  $\tilde{A}$  finale in forma canonica reale

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \cos wt & -e^{\alpha t} \sin wt \\ 0 & e^{\alpha t} \sin wt & e^{\alpha t} \cos wt \end{pmatrix}$$

Ora riprendiamo i 3 autovettori reali  $u_1, u_a, u_b$  e riscriviamo  $e^{At}$  con  $\tilde{A}$

$$e^{At} = T^{-1} e^{\tilde{A}t} T = \begin{pmatrix} u_1 & u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \cos wt & -e^{\alpha t} \sin wt \\ 0 & e^{\alpha t} \sin wt & e^{\alpha t} \cos wt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix}$$

**Osservazione 3.1** (Gli autovettori moltiplicano solo con autovalori corrispondenti).

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow e^{At} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} u_1 & e^{\alpha t} \cos(wt) u_a - e^{\alpha t} \sin(wt) u_b & e^{\alpha t} \sin(wt) u_a + e^{\alpha t} \cos(wt) u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow e^{At} &= e^{\lambda_1 t} u_1 v_1^T + e^{\alpha t} (\cos(wt) u_a v_a^T - \sin(wt) u_b v_a^T + \sin(wt) u_a v_b^T + \cos(wt) u_b v_b^T) \\ \Leftrightarrow e^{At} &= e^{\lambda_1 t} u_1 v_1^T + e^{\alpha t} [\cos(wt)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(wt)(u_a v_b^T - u_b v_a^T)] \end{aligned}$$

**Definizione 3.9** (Forma spettrale di  $e^{At}$ ).

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} u_1 v_1^T + e^{\alpha t} [\cos(wt)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(wt)(u_a v_b^T - u_b v_a^T)]$$

**Lemma 3.1** (Forma generale risposta libera).

$$X_l(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} u_i v_i^T + \sum_j e^{\alpha_j t} [\cos(w_j t)(u_{ja} v_{ja}^T + u_{jb} v_{jb}^T) + \sin(w_j t)(u_{ja} v_{jb}^T - u_{jb} v_{ja}^T)]$$

### 3.4.4 Moti aperiodici e pseudoperiodici

$x_0$  nella base degli autovettori  $= c_1 u_1 + c_a u_a + c_b u_b$ , dobbiamo calcolare  $X_l(t)$ . Ricordiamo che

- $v_1^T \times u_1 = 1$
- $v_1^T \times u_a = 0$
- $v_1^T \times u_b = 0$

dato che

$$T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_a & u_b \end{pmatrix} \quad T \cdot T^{-1} = I$$

e anche gli altri prodotti verranno semplificati, dunque

$$e^{At} x_0 = e^{\lambda_1 t} c_1 u_1 + e^{\alpha t} [\cos(wt)(c_a u_a + c_b u_b) + \sin(wt)(-c_a u_b + c_b u_a)]$$

raccogliamo  $u_a$  e  $u_b$

$$\Leftrightarrow e^{At} x_0 = e^{\lambda_1 t} c_1 u_1 + e^{\alpha t} [u_a (c_a \cos(wt) + c_b \sin(wt)) + u_b (c_b \cos(wt) - c_a \sin(wt))]$$

come già fatto in precedenza, passiamo ad ampiezza-fase con  $c_a = n \sin(\varphi)$  e  $c_b = n \cos(\varphi)$

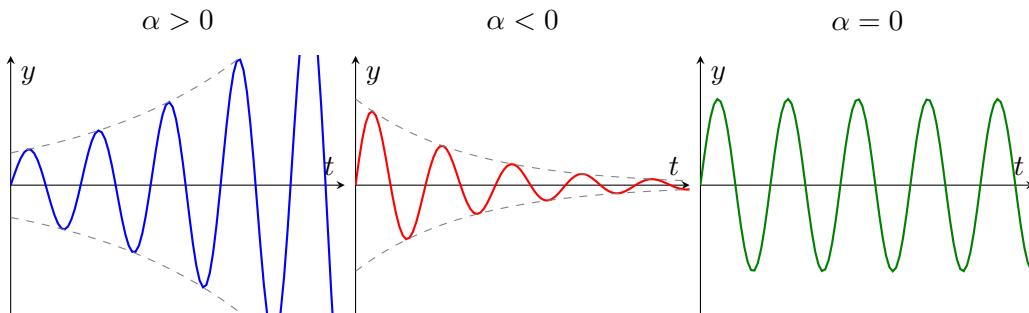
$$\Leftrightarrow e^{At} x_0 = e^{\lambda_1 t} c_1 u_1 + n e^{\alpha t} [u_a \sin(wt + \varphi) + u_b \cos(wt + \varphi)]$$

**Definizione 3.10** (Moto aperiodico).

$$e^{\lambda_i} u_i c_i$$

**Definizione 3.11** (Moto pseudoperiodico).

$$n e^{\alpha t} [u_a \sin(wt + \varphi) + u_b \cos(wt + \varphi)]$$



In un grafico a 3 dimensioni, partiamo da  $x_0 = (3, 3, 3)$  e prendiamo come esempio i vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ora il moto deve seguire la convergenza/divergenza lungo  $u_1$  e la rotazione sul piano  $u_a - u_b$ , prendiamo solo il caso in cui  $\lambda_1 < 0$ . Nb: i vettori sono gli assi, non sono della loro effettiva dimensione.

### 3.4.5 Tempo discreto

Definiamo di nuovo le matrici di trasformazione

$$\begin{cases} \phi = A^k \\ \psi = B^k \\ H = A^{k-1}B \\ W = \begin{cases} CA^{k-1}B & k > 0 \\ D & k = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Prendiamo una matrice 3x3  $A$  diagonalizzabile  $\Rightarrow \exists u_1, u_a, u_b : T^{-1} = (u_1 u_a u_b)$ . Abbiamo quindi che  $A^k = T^{-1} \tilde{A}^k T$ .

$$\tilde{A}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & w \\ 0 & -w & \alpha \end{pmatrix}^k$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & w \\ -w & \alpha \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \sigma \cos(\theta) & \sigma \sin(\theta) \\ -\sigma \sin(\theta) & \sigma \cos(\theta) \end{pmatrix}^k = \sigma^k \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^k$$

**Definizione 3.12.**  $\sigma = \sqrt{\alpha^2 + w^2}$  e  $\theta = \arctan(\frac{w}{\alpha})$

**Teorema 3.6** ( $A^k$ ).

$$A^k = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^k \cos(k\theta) & \sigma^k \sin(k\theta) \\ 0 & -\sigma^k \sin(k\theta) & \sigma^k \cos(k\theta) \end{pmatrix} T$$

si dimostra per induzione.

$$A^k = \lambda_1^k u_1 v_1^T + \sigma^k [\cos(k\theta)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(k\theta)(u_a v_b^T - u_b v_a^T)]$$

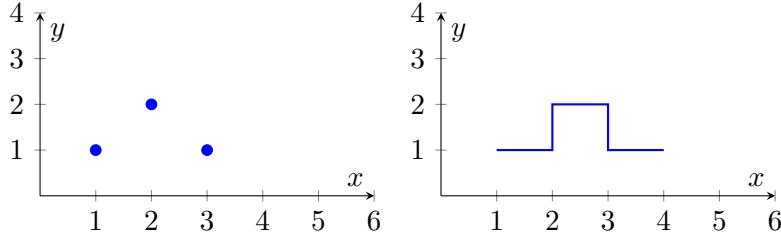
$$x_0 = c_1 \lambda_1 + c_a \lambda_a + c_b \lambda_b$$

$$X_l(k) = \lambda_1^k c_1 u_1 + \sigma^k [\cos(k\theta)(u_a c_a + u_b c_b) + \sin(k\theta)(u_a c_b - u_b c_a)]$$

che sempre con le formule di prostaferesi diventa

$$X_l(k) = \lambda_1^k c_1 u_1 + \sigma^k (n \sin(\theta k + \varphi) u_a + n \cos(\theta k + \varphi) u_b)$$

**Definizione 3.13** (Moto alternante). Dato  $\lambda_i < 0$ , allora il moto aperiodico associato si dice alternante. In sostanza avendo il – nell'elevamento a potenza, il segno del moto cambia ad ogni passo.



### 3.4.6 Organo di ritenuta

Prendiamo un segnale in ingresso discreto, il compito dell'organo di ritenuta è di mantenere il valore dell'ultimo campione fino al successivo. Ora prendiamo un sistema a tempo continuo, definiamo  $T = t - t_0$ ,  $t_0 = kT$  e  $t = (k + 1)T$ .

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^A(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \\ x((k+1)T) &= e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(kT)d\tau \end{aligned}$$

da qua definiamo le matrici discrete

- $A_d = e^{At}$
- $B_d = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(kT)d\tau$
- $C_d = C$
- $D_d = D$

sia  $\xi = (k + 1)T - \tau$  allora

$$B_d = - \int_T^0 e^{A\xi} Bd\xi = \int_0^T e^{A\xi} Bd\xi$$

Per gli autovalori reali o complessi usiamo  $T$  al posto di  $t$  e otteniamo

$$\lambda_i \rightarrow e^{\lambda_i T}, \quad \alpha_j \pm jw_j \rightarrow e^{\alpha_j T}(\cos(w_j T) \pm j \sin(w_j T))$$

### 3.5 Osservabilità e eccitabilità

Prendiamo un sistema con 1 autovalore reale e 1 coppia di autovalori complessi coniugati

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} u_1 v_1^T + e^{\alpha t} [\cos(wt)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(wt)(u_a v_b^T - u_b v_a^T)]$$

prendiamo la matrice  $B$  e calcoliamo  $H = e^{At}B$

$$H(t) = e^{\lambda_1 t} u_1 v_1^T B + e^{\alpha t} [\cos(wt)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) B + \sin(wt)(u_a v_b^T - u_b v_a^T) B]$$

Notiamo che se  $v_1^T B = 0$  il moto non comparirà nell'espressione di  $H(t)$  che è definita come matrice risposte impulsive dello stato, di conseguenza si dice che il moto non è eccitabile da un impulso in ingresso.

**Definizione 3.14** (Eccitabilità). Definizione per ogni moto

- Un moto aperiodico è eccitabile se  $v_i^T B \neq 0$ .
- Un moto pseudoperiodico è eccitabile se  $v_{ja}^T B \neq 0$  o  $v_{jb}^T B \neq 0$ .

**Teorema 3.7** (Moto eccitabile). *Se  $u_i \in \text{Im}\{B\}$  allora il moto è eccitabile.*

**Esempio 3.5** (Esercizio stile esonero).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = 0$$

1. schema di simulazione

2. evoluzione libera con  $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. determinare gli stati tc  $X_L(t) \rightarrow 0$

4. determinare gli stati tc  $X_L(t)$  limitata

**Soluzione.** 1. Riscriviamo il sistema nella forma implicita e poi X(t) per componenti

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

ha 2 ingressi (colonne di  $B$ ) quindi per componenti diventa

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \\ \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = 2x_2(t) + u_1(t) - u_2(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \end{aligned}$$

Il disegno prima o poi arriverà (se mi ricordo) (aprite una issue o fate una PR)

2. Calcoliamo gli autovalori di  $A$

$$P_a(A) = \det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda + \lambda^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 2, -1$$

Ora per  $X_L(t) = e^{At}x_0 = (\sum e^{\lambda_i t} u_i v_i^T) x_0$  ci servono gli autovettori destri e sinistri.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Dato  $\lambda = (0, 2, -1)$ , calcoliamo  $X_L(t)$ , ricordando che  $c_i = v_i^T x_0$

$$X_L(t) = u_1 c_1 + e^{2t} u_2 c_2 + e^{-t} u_3 c_3$$

3.  $x_0 = c_3 u_3$  essendo l'unico moto che converge
4.  $x_0 = c_1 u_1 + c_3 u_3$  essendo gli unici moti che non divergono

Prendiamo l'uscita  $Y$  e facciamo dei calcoli veloci:

$$W = C \left( \sum_i e^{\lambda_i t} u_i v_i^T + \sum_j e^{\alpha_j t} (\cos(w_j t)(u_{ja} v_{ja}^T + u_{jb} v_{jb}^T) + \sin(w_j t)(u_{ja} v_{jb}^T - u_{jb} v_{ja}^T)) \right)$$

**Definizione 3.15** (Osservabilità). Definizione per ogni moto

- Un moto aperiodico è osservabile se  $Cu_i \neq 0$ .
- Un moto pseudoperiodico è osservabile se  $Cu_{ja} \neq 0$  o  $Cu_{jb} \neq 0$ .

**Osservazione 3.2** (In  $W$  compaiono solo i moti osservabili ed eccitabili).

### 3.5.1 Autovalori multipli

Prendiamo queste due matrici che sono molto simili tra di loro

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Entrambe le matrici hanno un autovalore doppio, però  $A$  non è diagonalizzabile, infatti l'unico autovettore associato è  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .  $\hat{A}$  invece è diagonalizzabile con autovettori  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Nel caso normale con  $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$ ,  $\lambda_1 = -2 \rightarrow e^{-2t}$ . Se la matrice non è diagonalizzabile usiamo la forma di Jordan. Dato che compare un blocco di Jordan, compaiono i modi polinomiali-esponenziali.  $k$  è la dimensione del blocco di Jordan associato a  $\lambda_i$ .

$$\lambda_i \rightarrow e^{\lambda_i t}, \quad te^{\lambda_i t}, \dots, \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_i t}$$

per  $\lambda_i \rightarrow 0$

$$\lim_{\lambda_i \rightarrow 0} \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_i t} = 0$$

per  $\lambda_i \rightarrow \infty$

$$\lim_{\lambda_i \rightarrow \infty} \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_i t} = \infty$$

caso critico  $\lambda_i = 0$

- $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \Rightarrow$  moto limitato
- $m_a(\lambda_i) > m_g(\lambda_i) \Rightarrow$  moto divergente

### 3.6 Esercizi

**Esercizio 3.1** (Schema di simulazione, eccitabilità, osservabilità e matrici a tempo discreto).

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(k) + u(k) \end{cases}$$

**Soluzione.** 1. Riscriviamo il sistema nella forma implicita e poi  $X(t)$  per componenti

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_1 + 3x_2 + x_3 + u_1(k) \\ x_2(k+1) = x_2 - x_3 \\ x_3(k+1) = x_2 + x_3 + u_3(k) \end{cases}$$

e si fa il grafico (aspetto PR)

2. A diagonale a blocchi  $\Rightarrow \lambda_1 = -1$

$$(1 - \lambda)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = 1 \pm j$$

Per l'autovettore associato a  $\lambda_1 = -1$  il calcolo è semplice e viene  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  (1 incognita libera), per gli autovalori complessi coniugati si usa la forma

$$A \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & w \\ -w & \alpha \end{pmatrix}$$

con  $\alpha = 1$  e  $w = 1$ , dunque

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -a_1 + 3a_2 + a_3 = a_1 - b_1 \\ a_2 - a_3 = a_2 - b_2 \\ a_2 + a_3 = b_2 + b_3 \\ -b_1 + 3b_2 + b_3 = a_1 + b_1 \\ b_2 - b_3 = a_2 + b_2 \\ b_2 + b_3 = a_3 + b_3 \end{cases}$$

ora dobbiamo capire quali sono le 2 equazioni linearmente dipendenti. Dalla 6a equazione ricaviamo che  $a_3 = b_2$ , dalla 3a che  $a_2 = -b_3$ . Sostituendo nel sistema togliamo le equazioni 2 e 5 rimanendo con

$$\begin{cases} -a_1 + 3a_2 + a_3 = a_1 - b_1 \\ -b_1 + 3b_2 + b_3 = a_1 + b_1 \\ 2a_1 - b_1 = 3a_2 + a_3 \\ a_1 + 2b_1 = 3b_2 + b_3 \end{cases}$$

sappiamo da prima che  $a_2 = -b_3$  e  $a_3 = b_2$ , dunque

$$\begin{cases} 2a_1 - b_1 = 3(-b_3) + b_2 \\ a_1 + 2b_1 = 3b_2 + b_3 \end{cases}$$

scegliamo  $b_2 = 1$  e  $b_3 = 0$  per semplicità, dunque

$$\begin{cases} 2a_1 - b_1 = 1 \\ a_1 + 2b_1 = 3 \end{cases}$$

risolvendo otteniamo  $a_1 = 1, b_1 = 1$ , dunque

$$u_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Osservabilità

$$Cu_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{non osservabile}$$

$$Cu_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{osservabile (basta che uno dei 2 sia non nullo)}$$

$$Cu_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{osservabile}$$

Per l'eccitabilità calcoliamo gli autovettori sinistri

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

facciamo i calcoli con  $v^T$  e  $B$

$$v_1^T B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{non eccitabile}$$

$$v_a^T B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{eccitabile (basta che uno dei 2 sia non nullo)}$$

$$v_b^T B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

4. Matrici a tempo discreto

$$\Phi(k) = \lambda_1^k u_1 v_1^T + \sigma^k (\cos(\theta k)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(\theta k)(u_a v_b^T - u_b v_a^T))$$

$$\text{con } \sigma = \sqrt{\alpha^2 + w^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{e } \theta = \arctan\left(\frac{w}{\alpha}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Phi(k) = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + (\sqrt{2})^k (\dots)$$

$$H(k) = \Phi(k)B, \quad v_1^T B = 0, v_a^T B = 1, v_b^T B = 0$$

$$H(k) = (\sqrt{2})^{k-1} (\cos(\theta(k-1))u_a - \sin(\theta(k-1))u_b)$$

## 4 Stabilità

### 4.1 Il pendolo

Consideriamo un pendolo, ha due posizioni in cui può stare fermo:

- la posizione con il pendolo verso il basso (posizione di equilibrio stabile);
- la posizione con il pendolo verso l'alto (posizione di equilibrio instabile).

I sistemi dinamici li descriviamo con  $\dot{x} =$  una funzione, che dipende da  $x$  e da  $u$ . La  $\dot{x}$  nel caso del pendolo è la velocità, quindi se trovassimo  $\dot{x} = f(x_e, u_e) = 0$ , avremmo trovato un punto dove il pendolo sta fermo, cioè un punto di equilibrio.

### 4.2 Sistemi

Prendiamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

**Teorema 4.1** (Soluzioni equilibrio di un sistema). *Devono valere le seguenti condizioni:*

$$\begin{cases} \text{rank}(A) = n & x_e = 0 \text{ unico punto di equilibrio} \\ \text{rank}(A) = q < n & \text{numero soluzioni} = \infty^{n-q} \end{cases}$$

#### 4.2.1 Definizioni di stabilità

Le seguenti definizioni valgono per  $u = 0$ , cioè il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(t) = e^{At}x_0 \\ \Phi(t) = e^{At} \end{cases}$$

**Definizione 4.1** (Sistema stabile). Devono valere le seguenti condizioni:

1.  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 : \|x_0 - x_e\| < \delta_\epsilon, \|x(t) - x_e\| < \epsilon \forall t > 0$
2.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$  equiasintoticità

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} x_e &= (0, 0) \Rightarrow \|x_0\| < \delta_\epsilon \\ \|x(t)\| &= \|\Phi(t)x_0\| < \epsilon \\ \|\Phi(t)x_0\| &\leq \|\Phi(t)\| \|x_0\| \leq \|\Phi(t)\| \delta_\epsilon < \epsilon \end{aligned}$$

□

**Definizione 4.2** (Stabilità asintotica). Devono valere le seguenti condizioni:

1.  $\nexists Re(\lambda_i) > 0$  (traiettoria divergente)
2.  $\exists Re(\lambda_i) = 0$  (traiettoria limitata)

**Definizione 4.3** (Stabilità). Devono valere le seguenti condizioni:

- $Re(\lambda_i) \leq 0$
- $Re(\lambda_i) = 0$  e  $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$

**Definizione 4.4** (Instabilità). Devono valere le seguenti condizioni:

- $\exists Re(\lambda_i) > 0$
- $\exists Re(\lambda_i) = 0$  e  $m_a(\lambda_i) > m_g(\lambda_i)$

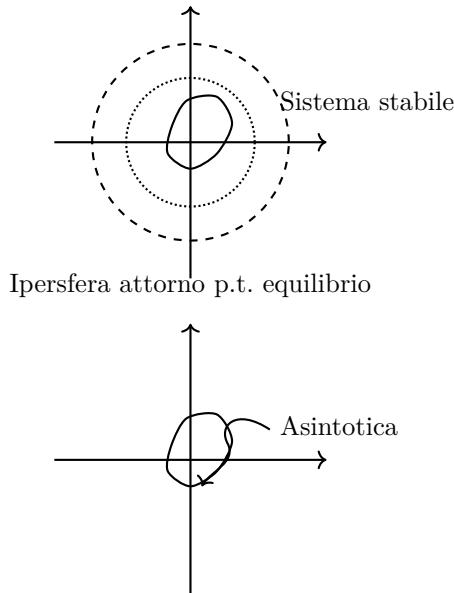


Figura 4: Stabilità e stabilità asintotica attorno all'origine

### 4.3 Criterio di Routh

Condizione necessaria: i coefficienti del  $P_a(\lambda)$  devono essere tutti dello stesso segno. Costruiamo la tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} s^n & a_n & a_{n-2} & \dots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots \\ s^{n-2} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots \\ s^{n-3} & c_{n-3} & c_{n-4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Dove:

$$b_{n-2} = \frac{\begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix}}{-a_{n-1}} \quad b_{n-3} = \frac{\begin{bmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{bmatrix}}{-a_{n-1}}$$

Se campo mancante  $\rightarrow 0$ .

**Teorema 4.2** (Riga invariante (nome di fantasia)). *Posso moltiplicare una riga per  $n > 0$  senza cambiare il risultato.*

**Teorema 4.3** (Numero radici con parte reale positiva). *Il numero di cambi di segno nella prima colonna della tabella di Routh è uguale al numero di radici del polinomio caratteristico con parte reale positiva.*

**Esempio 4.1** (Routh + verifica radici  $< -3$ ).

$$P(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 3\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda + 1$$

tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} 5 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & \end{array}$$

La presenza di una riga di zeri indica la presenza di radici simmetriche rispetto l'asse reale. Costruiamo il polinomio ausiliario:

$$P(\lambda) = P_1(\lambda)P_2(\lambda), P_2(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 = 1$$

$$\mathcal{P}_2 = 4\lambda^3 + 6\lambda$$

Costruiamo la tabella di Routh per  $\mathcal{P}_2$ :

3	4	6
2	6	4
1	1	
0	4	

No cambi di segno  $\Rightarrow$  radici di  $P_2$  con parte reale  $\leq 0$ . Verifica radici  $< -3$ :

1. origine portata in  $-3$
2.  $\lambda = z - \alpha$ , con  $\alpha = 3$
3.  $p(z) = z + 3 - 3 = z$

Costruisco il polinomio con  $z$  e uso di nuovo Routh, se non ci sono cambi di segno avrò le radici  $< -3$  (perchè l'asse è spostato).

#### 4.4 Stabilità nei punti di equilibrio

Sviluppiamo la funzione  $\dot{x} = f(x, u)$  in serie di Taylor attorno al punto di equilibrio  $(x_e, u_e)$ :

**Definizione 4.5** (Matrice Jacobiana). Matrice delle derivate parziali

$$\dot{x} = f(x_e, u_e) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_e, u_e)} (x - x_e) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_e, u_e)} (u - u_e)$$

$f(x_e, u_e) = 0$  che è il punto di equilibrio.

$$\dot{x} = A(x - x_e) + B(u - u_e) = A(x - x_e) + B\tilde{u}$$

Sostuiamo  $z = x - x_e$  e diventa lineare

$$\dot{z} = Az + B\tilde{u}$$

**Teorema 4.4** (Stabilità con la matrice Jacobiana). *Possiamo studiare la stabilità con gli autovalori della matrice Jacobiana calcolata nel punto di equilibrio.*

- $\forall \operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0$  sistema asintoticamente stabile
- $\exists \operatorname{Re}\{\lambda_i\} > 0$  sistema instabile
- $\exists \operatorname{Re}\{\lambda_i\} = 0$  e  $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$  sistema stabile

**Teorema 4.5** (Regola di Cartesio). *Il numero di radici con parte reale positiva è uguale al numero di cambi di segno nei coefficienti del polinomio caratteristico, o minore di un numero pari.*

- Nessun cambiamento di segno  $\Rightarrow$  nessuna radice con parte reale positiva
- Un cambiamento di segno  $\Rightarrow \exists \operatorname{Re} > 0$

**Esempio 4.2** (Pendolo).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 + \frac{1}{ml}u \end{cases}$$

Capiamo dove sono i punti di equilibrio:

- $x_1 = k\pi \Rightarrow -\frac{g}{l} \sin(x_1) = 0$
- $x_2 = 0 \Rightarrow -\frac{k}{m}x_2 = 0$
- $u = 0 \Rightarrow -\frac{1}{ml}x_2 = 0$

Quindi i punti di equilibrio sono  $(k\pi, 0)$ , quindi ci sono  $(0, 0)$  e  $(\pi, 0)$ . Matrice Jacobiana

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(x_1) & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{pmatrix}$$

1. Calcoliamo la Jacobiana nel punto di equilibrio  $(0, 0)$ :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{pmatrix}$$

$$P_a(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda + \frac{g}{l}$$

Cartesio  $\Rightarrow$  sistema stabile asintoticamente localmente.

2. Calcoliamo la Jacobiana nel punto di equilibrio  $(\pi, 0)$ :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{pmatrix}$$

Autovalori matrice Jacobiana:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{m} - \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow P_a(\lambda) = \lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda - \frac{g}{l}$$

Cartesio  $\Rightarrow$  sistema instabile

## 4.5 Dominio di Laplace

Possiamo spostare nel dominio complesso una funzione tramite la trasformata di Laplace che è così definita

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

(tutte le trasformate sono riassunte nell'appendice)

### 4.5.1 Calcoli delle trasformate utili

Moti naturali aperiodici

$$\mathcal{L}(e^{\lambda t}) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-t(s-\lambda)} dt = \left[ \frac{e^{-t(s-\lambda)}}{-(s-\lambda)} \right]_0^\infty = \frac{1}{s-\lambda}$$

Gradino

$$\mathcal{L}(\delta_{-1}) = \mathcal{L}(e^{\lambda t}) \Big|_{\lambda=0} = \frac{1}{s}$$

Impulso

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

Moti pseudo-periodici

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\sin(wt)) &= \mathcal{L}\left(\frac{e^{jw t} - e^{-jw t}}{j t}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{jw t} - e^{-jw t}}{j t} e^{-st} dt \\
 &= \frac{1}{2j} \left( \int_0^\infty e^{jw t} e^{-st} dt - \int_0^\infty e^{-jw t} e^{-st} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - jw} - \frac{1}{s + jw} \right) \\
 &= \frac{1}{2j} \frac{s + jw - s + jw}{s^2 + w^2} = \frac{w}{s^2 + w^2} \\
 \mathcal{L}(\cos(wt)) &= \frac{s}{s^2 + w^2}
 \end{aligned}$$

#### 4.5.2 Proprietà

$$\mathcal{L}(x(t)) = x(s)$$

$$\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = sx(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}(u(t)) = u(s)$$

#### 4.5.3 Applicazione al Modello implicito

Partiamo dall'espressione di  $\dot{x}(t)$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\dot{x}(t)) &= \mathcal{L}(Ax(t) + Bu(t)) \\
 \Leftrightarrow sx(s) - x(0) &= Ax(s) + Bu(s) \\
 \Leftrightarrow x(s)(sI - A) &= x(0) + Bu(s) \\
 \Rightarrow x(s) &= (sI - A)^{-1}(x(0) + Bu(s))
 \end{aligned}$$

Ponendo  $t_0 = 0$

$$\mathcal{L}(x(t)) = \mathcal{L}(\Phi(t)x(0)) + \mathcal{L}\left(\int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau\right)$$

vale  $\forall x(0)$  che ammettono la trasformata. Ponendo  $u = 0$

$$\begin{aligned}
 (sI - A)^{-1}x(0) &= \mathcal{L}(\Phi(t)x(0)) \\
 \Rightarrow \mathcal{L}(\Phi(t)) &= (sI - A)^{-1}
 \end{aligned}$$

Poi l'evoluzione forzata

$$(sI - A)^{-1}Bu(s) = \mathcal{L}\left(\int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau\right)$$

e la matrice

$$H(t) = e^{At}B \rightarrow H(s) = (sI - A)^{-1}B$$

In uscita abbiamo  $y(s) = cx(s) + Du(s)$

$$y(s) = C\left((sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}Bu(s)\right) + Du(s)$$

$$= \mathcal{L} \left( C e^{At} x(0) \right) + \mathcal{L} \left( \int_{t_0}^t W(t-\tau) u(\tau) d\tau \right)$$

abbiamo le altre due matrici

$$\mathcal{L}(\Psi(t)) = c(sI - A)^{-1}$$

e

$$W(t) = C e^{At} B + D \delta(t)$$

**Definizione 4.6** (Matrice delle funzioni di trasferimento).

$$W(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

dato che  $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$

#### 4.5.4 Sviluppo in frazioni parziali

Prendiamo un sistema in forma implicita

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x + u \end{cases}$$

L'obiettivo (a quanto pare) è scrivere  $\Phi(s)$  nella forma  $\frac{R_1}{s+\lambda_1} + \frac{R_2}{s+\lambda_2}$

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= (sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s+1 & -2 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} s+2 & 2 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \\ \Phi(s) &= \frac{R_1(s+2) + R_2(s+1)}{(s+1)(s+2)} \\ &\Leftrightarrow \frac{\begin{pmatrix} s+2 & 2 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2} \end{aligned}$$

Ricaviamo  $R_1$  e  $R_2$  facendo il limite rispettivamente per  $s \rightarrow -1$  e  $s \rightarrow -2$  e otteniamo

$$\dots = \lim_{s \rightarrow -1} (R_1 + R_2 \frac{s+1}{s+2}) = R_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{1}$$

e

$$R_2 = - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

essendo  $\Phi(t)$  l'evoluzione libera riscriviamo tutto

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{1}{s-\lambda_1} u_1 v_1^T + \frac{1}{s-\lambda_2} u_2 v_2^T \\ &= R_1 \frac{1}{s-\lambda_1} + R_2 \frac{1}{s-\lambda_2} \end{aligned}$$

Calcoliamo le altre matrici  $H$ ,  $\Psi$  e  $W$

$$H(s) = (sI - A)^{-1} B$$

$$\Psi(s) = C(sI - A)^{-1}$$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

Nota d'onore al burino che è entrato in aula e ha fatto sclerare la Califano interrompendo la lezione

**Definizione 4.7** (Poli). Quando una funzione è nella forma poli-zeri, i poli sono i valori di  $s$  che annullano il denominatore.

$$Y_f(s) = W(s)u(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)s} \Rightarrow \text{poli in } s = -1, s = -2, s = 0$$

**Definizione 4.8** (Guadagno).  $R_i$  sono i guadagni associati ai poli  $p_i$  della funzione di trasferimento  $y_f(s)$ . Un esempio è la voce che esce amplificata dal microfono.

**Teorema 4.6** (Metodo veloce per calcolare i residui/il guadagno). *Calcolare guadagno per poli di grado 1*

$$R_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i)y_f(s)$$

**Esempio 4.3** (Studio  $y_f$  per il gradino).

$$W(s) = \frac{s-1}{(S-3)(s+2)}$$

$$u(s) = 1/s$$

Residui

$$\frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3}{s-3}$$

$$R_1 = \left[ \frac{s-1}{(s-3)(s+2)} \right]_{s=0} = 1/6, R_2 = -3/10$$

$$R_3 = \left[ \frac{s-1}{s(s+2)} \right]_{s=3} = \frac{2}{3(3+2)} = \frac{2}{15}$$

Uscita

$$y_f(t) = R_1 e^{0t} + R_2 e^{-2t} + R_3 e^{3t} = \frac{1}{6} - \frac{3}{10} e^{-2t} + \frac{2}{15} e^{3t}$$

**Teorema 4.7** (Residui per polinomi di grado maggiore di 1). *Grado numeratore < grado denominatore, generalmente  $n-1$*

$$y_f(s) = \dots + \frac{R_{n-1}s^{n-1} + \dots + R_1}{q(s)}$$

grado  $q(s) = n$

**Teorema 4.8** (Trasformata). *Usata per la rampa*

$$t \frac{k}{k!} \rightarrow \frac{1}{s^{k+1}}$$

**Esempio 4.4** (Studio  $y_f$  per altri ingressi).

$$W(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

1. sinusoide

$$u(t) = \sin(wt) \Rightarrow u(s) = \frac{1}{s^2 + 1}, w = 1$$

$$y_f(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s^2+1)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3s + R_4}{s^2+1}$$

$$R_1 = 1/2, R_2 = -1/3$$

$$y_f(s) = \frac{1/2}{s+1} + \frac{-1/3}{s+2} + \frac{R_3s + R_4}{s^2+1} \quad \text{per ogni } s \text{ che non annulla il denominatore}$$

Scelgo  $s = 0$

$$\frac{1}{(0+1)(0+2)(0^2+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} + R_4 \Rightarrow R_4 = 1/10$$

Scelgo  $s = 1$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{15} + \frac{R_3}{2} + \frac{1}{20} \Rightarrow R_3 = \frac{13}{2}$$

2. rampa

$$u(t) = t\delta_{-1}(t), u(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$R_1 = 1, R_2 = -1/4, R_4 = -3/4$$

Moltiplico per  $s^2$  e derivo per  $s$ , cerco  $R_3$

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{R_1 s^2}{s+1} + \frac{R_2 s^2}{s+2} + R_3 s + R_4 \right)$$

$R_3$  è il residuo per  $s$ , quindi ora faccio il limite per  $s \rightarrow 0$

$$\lim_{s \rightarrow 0} -\frac{2s+3}{(s+1)^2(s+2)} = \lim_{s \rightarrow 0} (\dots + R_3) = 0 + 0 + R_3 = -3/4$$

#### 4.5.5 Pulsazione e fase

Esempio 4.5 (Pulsazione  $w = 1$ ).

$$w(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, u(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$y_f(s) = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3 s + R_4}{s^2+1}$$

Prendendo le trasformate di sin e cos

$$\sin(wt) \rightarrow \frac{w^2}{s^2+w^2}, \cos(wt) \rightarrow \frac{s^2}{s^2+w^2}$$

dividiamo il termine con  $sR_3 + R_4$  e moltiplichiamo  $R_4$  per  $w/w$ , che risulta in

$$s \frac{R_3}{s^2+1} + \frac{R_4}{s^2+1} w/w = R_3 \mathcal{L} \cos(t) + R_4 \mathcal{L} \sin(t)$$

considerando che  $w = 1$  esce così. Quindi ora sappiamo la  $y_f(t)$ .

$$y_f(t) = R_1 e^{-t} + R_2 e^{-2t} + R_3 \cos(t) + R_4 \sin(t)$$

Ora il nostro obiettivo è scrivere  $R_3$  e  $R_4$  e useremo le formule di prostaferesi.

$$n \sin(t + \varphi) = M \sin(t) \cos(\varphi) + M \cos(t) \sin(\varphi)$$

$\Rightarrow R_3 = m \sin(\varphi)$  e  $R_4 = m \cos(\varphi)$ .

$$\sqrt{R_3^2 + R_4^2} = \sqrt{M^2(\sin^2 + \cos^2)} = M, \varphi = \arctan \frac{R_3}{R_4}$$

essendo  $M$  il guadagno di  $W$ ,  $M = |W(s)|_{s=jw}, \varphi = \angle w(s)|_{s=jw}$

#### 4.5.6 Segnali

Prendiamo un segnale rampa sfasato di 1 in positivo,  $(t-1)\delta_{-1}(t-1)$  e uno che inoltre è sfasata in altezza di 1, possiamo fare un cambio di variabile sulla seconda  $t-1 = \xi \Rightarrow (\xi+1)\delta_{-1}(\xi) = \xi\delta_{-1}(\xi) + \delta_{-1}(\xi)$

**Definizione 4.9** (Trasformata gradino traslato). La trasformata traslata si calcola come

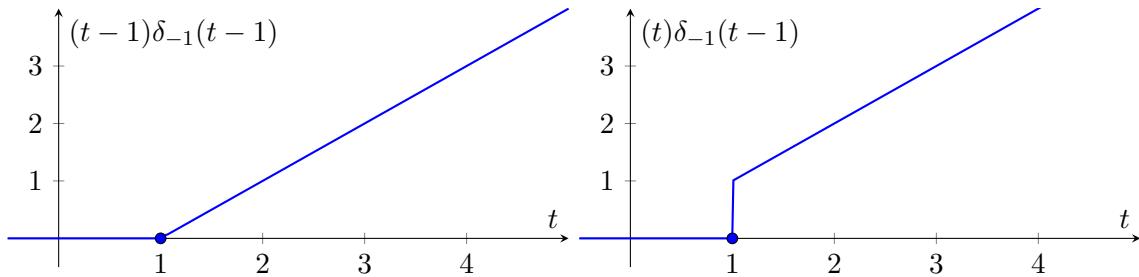
$$\int_0^\infty \delta^{-1}(t-1)e^{-st} dt = \int_1^\infty e^{-st} dt$$

$t-1 = \xi, t \rightarrow 1 \Rightarrow \xi \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \Rightarrow \xi \rightarrow \infty, dt = d\xi$

$$\int_0^\infty e^{-s(\xi+1)d\xi} = e^{-s} \int_0^\infty e^{-s\xi} d\xi$$

$$= e^{-s} \mathcal{F}(\delta_{-1}(t)) = \frac{e^{-s}}{s}$$

$$\Rightarrow f(t-a)\delta_{-1}(t-a) \rightarrow F(s)e^{-as}$$



**Definizione 4.10** (Calcolo segnale traslato). Calcolo segnale non traslato, traslo  $y_f(t)$

$$\begin{aligned} w(s) &= \frac{s+1}{s+3}, u(t) = \delta_{-1}(t-2) \\ \hat{u}(t) &= \delta_{-1}(t), \hat{y}_f(t) \\ y_f(s) &= \frac{s+1}{(s+3)s}, \hat{y}_f(t) = (1/3 + 2/3e^{-3t}) \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

Ora però abbiamo un segnale non traslato, però sappiamo che  $y_f(t) = \hat{y}_f(t-2)$

$$y_f(t) = (1/3 + 2/3e^{-3(t-2)}) \delta_{-1}(t-2)$$

ci sarebbe un altro metodo ma è inutile e più complicato.

**Esempio 4.6** (Segnali "composti"). L'obiettivo è che dato il grafico di  $u(t)$  sappiamo ricavare la funzione. In questo caso è un insieme di rampe traslate.

$$u'(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 & 1 < t < 2 \\ 0 & 2 < t < 4 \\ -1 & 4 < t < 5 \\ 0 & t > 5 \end{cases}$$

la formula finale viene un'unione di rampe che essendo sfasate modificano la pendenza nei vari  $t$

$$u(t) = (t-1)\delta_{-1}(t-1) - (t-2)\delta_{-1}(t-2) - (t-4)\delta_{-1}(t-4) + (t-5)\delta_{-1}(t-5)$$

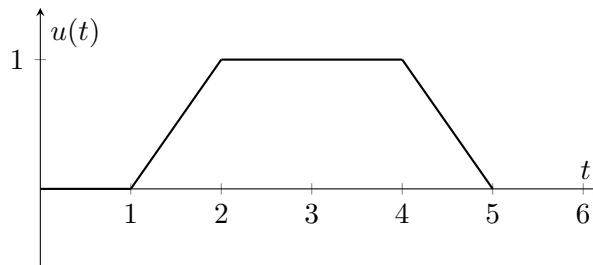


Figura 5: Segnale "composto"

Dobbiamo calcolare adesso  $y_f(t)$  e facciamo con il metodo descritto prima.

$$\hat{u} = t\delta_{-1}(t) \rightarrow \hat{u} = 1/s^2$$

$$\hat{y}_f(s) = \frac{1}{(s+1)s^2} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s^2} + \frac{R_3}{s}$$

$$\hat{y}_f(\xi) = (R_1 e^{-3} + R_2 e \xi + R_3) \delta_{-1} \xi$$

$$y_f(t) = \hat{y}_f(t-1) - \hat{y}_f(t-2) - \hat{y}_f(t-4) + \hat{y}_f(t-5)$$

con  $R_1 = 1, R_2 = 1, R_3 = -1$

## 5 Appendice

Materiali di riferimento, dimostrazioni tecniche, e tabelle utili (es. trasformata di Laplace, formule di integrazione).