

# **Appunti di Sistemi Dinamici**

Andrea Starrantino

24 dicembre 2025

## Indice

<b>1</b>	<b>Algebra lineare</b>	<b>4</b>
1.1	Spazi vettoriali . . . . .	4
1.1.1	Esempio . . . . .	5
1.2	Matrici . . . . .	5
1.2.1	Esempio matrice complementi . . . . .	5
1.2.2	Esempio matrice inversa . . . . .	5
1.3	Determinante . . . . .	6
1.3.1	Esempio . . . . .	6
1.4	Sistemi lineari . . . . .	6
1.4.1	Esercizio . . . . .	7
1.5	Autovalori e autovettori . . . . .	7
1.5.1	Esempio . . . . .	7
1.6	Jordan . . . . .	8
1.7	Equazioni differenziali . . . . .	9
1.7.1	Esempio casareccio . . . . .	9
1.7.2	Equazioni differenziali elementari . . . . .	9
1.7.3	Problema di Cauchy . . . . .	9
1.7.4	Coefficienti costanti . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Introduzione e notazione</b>	<b>11</b>
2.1	Notazione . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Sistemi lineari</b>	<b>11</b>
3.1	Sistemi a tempo continuo lineari stazionari . . . . .	11
3.1.1	Sistema Massa-Molla-Smorzatore . . . . .	12
3.1.2	Modello implicito . . . . .	13
3.1.3	Modello esplicito . . . . .	13
3.1.4	Risposta libera e forzata . . . . .	13
3.1.5	Ipotesi di linearità . . . . .	13
3.1.6	Ipotesi di stazionarietà . . . . .	14
3.1.7	Forma generale . . . . .	14
3.2	Sistemi a tempo discreto . . . . .	15
3.2.1	Modello implicito . . . . .	15
3.3	Evoluzione libera . . . . .	16
3.4	Cambio coordinate del sistema . . . . .	17
3.4.1	Autovalori complessi . . . . .	19
3.4.2	Cambio di base da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$ . . . . .	20
3.4.3	Autovalori misti . . . . .	20
3.4.4	Moti aperiodici e pseudoperiodici . . . . .	21
3.4.5	Tempo discreto . . . . .	22
3.4.6	Organo di ritenuta . . . . .	23
3.5	Osservabilità e eccitabilità . . . . .	24
3.5.1	Autovalori multipli . . . . .	25
3.6	Esercizi . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Stabilità</b>	<b>28</b>
4.1	Il pendolo . . . . .	28
4.2	Sistemi . . . . .	28
4.2.1	Definizioni di stabilità . . . . .	28
4.3	Criterio di Routh . . . . .	29

4.4	Stabilità nei punti di equilibrio . . . . .	30
4.5	Dominio di Laplace . . . . .	31
4.5.1	Calcoli delle trasformate utili . . . . .	31
4.5.2	Proprietà . . . . .	32
4.5.3	Applicazione al Modello implicito . . . . .	32
4.5.4	Sviluppo in frazioni parziali . . . . .	33
4.5.5	Pulsazione e fase . . . . .	35
4.5.6	Segnali . . . . .	36
4.5.7	Esercitazione . . . . .	37
4.6	Risposta transitoria e a regime permanente . . . . .	39
4.6.1	Ingresso sinusoidale . . . . .	39
4.6.2	Ingresso polinomiale . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Risposta forzata</b>	<b>41</b>
5.1	Diagramma di Bode . . . . .	41
5.1.1	Guadagno . . . . .	42
5.1.2	Termine monomio . . . . .	42
5.1.3	Termine binomio . . . . .	43
5.1.4	Termine trinomio . . . . .	44
5.2	Diagramma polare . . . . .	44
5.3	Risposta forzata a tempo discreto . . . . .	46
5.3.1	Trasformata Z . . . . .	46
5.4	Modello esplicito tempo discreto . . . . .	47
5.5	Esercizi . . . . .	48
5.5.1	Esercitazione . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Proprietà dello stato</b>	<b>49</b>
6.1	Osservabilità . . . . .	49
6.1.1	Caso discreto . . . . .	49
6.1.2	Caso continuo . . . . .	50
6.2	Raggiungibilità . . . . .	51
6.3	Scomposizione di Kalman . . . . .	53
<b>7</b>	<b>Modelli ingresso-uscita</b>	<b>53</b>
7.1	Il problema della realizzazione . . . . .	53
7.1.1	Forma canonica raggiungibile . . . . .	54
7.1.2	Forma canonica osservabile . . . . .	55
7.2	Realizzazioni minime . . . . .	56
7.2.1	Realizzazione di Gilbert . . . . .	56
<b>8</b>	<b>Sistemi interconnessi</b>	<b>57</b>
8.1	Connessione in serie . . . . .	57
8.2	Connessione in parallelo . . . . .	58
8.3	Retroazione . . . . .	59
8.4	Diagrammi di flusso . . . . .	60
<b>9</b>	<b>Appendice</b>	<b>60</b>
9.1	Trasformate di Laplace . . . . .	60

# 1 Algebra lineare

Ripasso di algebra lineare estratto dal test di autovalutazione.

## 1.1 Spazi vettoriali

**Definizione 1.1** (Combinazione lineare).

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

$$a \in R, x \in R^n$$

**Definizione 1.2** (Spazio vettoriale). Uno spazio vettoriale  $V$  su un campo  $\mathbb{F}$  è un insieme dotato di due operazioni: l'addizione di vettori e la moltiplicazione per scalari, che soddisfano le seguenti proprietà per ogni  $u, v, w \in V$  e ogni scalare  $a, b \in \mathbb{F}$ :

1. Chiusura sotto l'addizione:  $u + v \in V$
2. Commutatività dell'addizione:  $u + v = v + u$
3. Associatività dell'addizione:  $(u + v) + w = u + (v + w)$
4. Elemento neutro dell'addizione: Esiste un elemento  $0 \in V$  tale che  $u + 0 = u$  per ogni  $u \in V$
5. Elemento inverso dell'addizione: Per ogni  $u \in V$ , esiste un elemento  $-u \in V$  tale che  $u + (-u) = 0$
6. Chiusura sotto la moltiplicazione per scalari:  $au \in V$
7. Distributività della moltiplicazione per scalari rispetto all'addizione di vettori:  $a(u + v) = au + av$
8. Distributività della moltiplicazione per scalari rispetto all'addizione di scalari:  $(a + b)u = au + bu$
9. Associatività della moltiplicazione per scalari:  $a(bu) = (ab)u$
10. Elemento neutro della moltiplicazione per scalari:  $1u = u$

**Definizione 1.3** (Vettori dipendenti).

$$\exists a, b, c \neq 0 : av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$$

**Definizione 1.4** (Base di uno spazio vettoriale).

$$(v_1, \dots, v_n) = \{\dots, \alpha_n v_n\}, \alpha \in \mathbb{R}$$

**Definizione 1.5** (Kernel).

$$\ker(F) = \{v \in V : F(v) = 0\}$$

**Definizione 1.6** (Immagine).

$$\text{Im}(F) = \{F(v) : v \in V\}$$

### 1.1.1 Esempio

Scrivere  $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  nella base definita da  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  e  $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \Rightarrow \text{ricavo } \alpha_1, \alpha_2$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 1 = -\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow 3\alpha_2 = 2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{2}{3}, \alpha_1 = -\frac{1}{3}$$

$$w_1 = -\frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2$$

## 1.2 Matrici

**Definizione 1.7** (Matrice dei complementi algebrici).

$$A^c : a_{ij}^c = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}^T), i \text{ e } j \text{ soppressi}$$

### 1.2.1 Esempio matrice complementi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^c = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} * \det(4) & (-1)^{1+2} * \det(-1) \\ (-1)^{2+1} * \det(3) & (-1)^{2+2} * \det(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

**Definizione 1.8** (Matrice inversa).

$$A^{-1} = \frac{A^c}{\det(A)}$$

**Teorema 1.1** (Esistenza matrice inversa). *La matrice inversa esiste se e solo se  $\det(A) \neq 0$*

### 1.2.2 Esempio matrice inversa

Calcolare, se esiste, la matrice inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifica esistenza matrice inversa

$$\det(A) = 6 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^c = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -6 \\ -2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = A^c / 6 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ -1/3 & -1/6 & 4/3 \end{pmatrix}$$

### 1.3 Determinante

**Definizione 1.9** (Determinante 2x2).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc$$

**Definizione 1.10** (Metodo di Sarrus).

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

**Definizione 1.11** (Laplace).

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a * \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b * \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c * \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

generalizzato:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} * (-1)^{i+j} * \det(M_{ij})$$

con i-esima riga e j-esima colonna eliminata

**Teorema 1.2** (Teorema degli orlati).

#### 1.3.1 Esempio

Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usiamo Laplace che sarà il metodo usato per tutte le matrici di dimensione superiore a 3

$$\det(A) = 3 * (2 - 0) - (-1) * (2 - 2) + 0 * (0 - 2) = 6$$

### 1.4 Sistemi lineari

**Definizione 1.12** (Matrice Completa).

$$A = (\dots), B = (\dots), Ax = B$$

Matrice completa

$$A|B$$

**Teorema 1.3** (Teorema di Rouché-Capelli).

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A|B) \Rightarrow \text{il sistema ammette soluzioni}$$

$$\text{incognite libere} = n - \text{rank}(A)$$

### 1.4.1 Esercizio

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = 0, x \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2x_2 \Rightarrow x = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

## 1.5 Autovalori e autovettori

**Definizione 1.13** (Autovettore di  $F$ ).  $F(v)$  endomorfismo

$$\underline{v} \text{ autovettore di } F \Rightarrow \underline{v} \neq 0 : F(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$$

**Definizione 1.14** (Autovalore di  $F$ ).

$$\lambda \text{ autovalore di } F \Leftrightarrow \text{zeri di } \det(F - \lambda I) = 0$$

**Definizione 1.15** (Polinomio caratteristico).

$$P(\lambda) = \det(F - \lambda I) = |F - \lambda I|$$

**Definizione 1.16** (Spettro di  $F$ ).

$$\sigma(F) = \{v : F(v) = \lambda v\}$$

**Definizione 1.17** (Molteplicità algebrica  $m_a$ ). La molteplicità algebrica di un autovalore è la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico.

**Definizione 1.18** (Molteplicità geometrica  $m_g$ ).  $\dim(\ker(F - \lambda I))$

**Teorema 1.4** (Diagonalizzabilità). *A diagonalizzabile se ha  $n$  autovalori distinti*

**Teorema 1.5** (Indipendenza autovettori). *Gli autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.*

**Definizione 1.19** (Matrice diagonalizzata). Una matrice  $D$  è diagonalizzata se esiste una matrice invertibile  $P$  tale che  $D = P^{-1}AP$  per una matrice  $A$ .

### 1.5.1 Esempio

Diagonalizzare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\delta) = \det(A - \delta I) = \det \begin{pmatrix} 3-\delta & 1 & -1 \\ 1 & 3-\delta & -1 \\ 0 & 0 & 2-\delta \end{pmatrix}$$

$$P_A(\delta) = (2 - \delta)((3 - \delta)^2 - 1) = (\delta - 2)^2(\delta - 4) = 0$$

$$\delta_1 = 2, \delta_2 = 2, \delta_3 = 4, m_a(2) = 2, m_a(4) = 1$$

troviamo gli autovettori

$$(A - 2I)x = 0 \Rightarrow V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(A - 4I)x = 0 \Rightarrow x_1 = x_2, x_3 = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = (v_1 \ v_2 \ v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} 1/2$$

**Teorema 1.6** ( $A^n = PD^nP^{-1}$ ).

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Ogni elemento sarà la combinazione lineare degli autovettori destri elevati alla  $n$

$$A_{ij}^n = \sum_i c_i \lambda_i^n$$

## 1.6 Jordan

**Teorema 1.7** (Teorema di Jordan).

$\forall \Phi \in \text{End}(V)$ ,  $\dim V = n$ ,  $\Phi$  è rappresentabile da una matrice diagonale a blocchi di Jordan

**Definizione 1.20** (Blocco di Jordan).

$$B_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

**Esempio 1.1** ( $B_3(2)$ ).

$$B_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Definizione 1.21.**

$$m_a(\lambda) = \sum \dim B_k(\lambda)$$

**Definizione 1.22** ( $N$  blocchi  $\geq j$  associati a  $\lambda$ ).

$$N_j(\lambda)$$

$$\dim \ker(A - \lambda I)^j = \sum_{k \geq j} N_k(\lambda)$$



**Esempio 1.2** (Calcolo  $\tilde{J}$ ).

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_a(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)^2$$

So che  $m_a(1) = 1, m_a(2) = 1, m_a(4) = 2$ , quindi devo capire se ho un blocco di ordine 2 o due blocchi di ordine 1 per l'autovalore 4.

$$\dim \ker(A - 4I) = 1 \Rightarrow \text{un blocco di ordine 2}$$

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

## 1.7 Equazioni differenziali

**Definizione 1.23** (Ordine dell'equazione). L'ordine di un'equazione differenziale è l'ordine della derivata con ordine maggiore

### 1.7.1 Esempio casareccio

$f'(x) = x$  è del 1 ordine

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int xdx = \frac{x^2}{2} + c$$

**Definizione 1.24** (Soluzione generale). La soluzione generale di un'equazione differenziale è l'insieme di tutte le sue soluzioni, spesso espresso in termini di una funzione che include costanti arbitrarie. Dall'esempio di prima,  $\frac{x^2}{2} + c$  è la soluzione generale.

### 1.7.2 Equazioni differenziali elementari

$$1. \quad y' = f(x)$$

$$y' = f(x) \Leftrightarrow y = \int f(x)dx = F(x) + c$$

$$\text{esempio } y' = 3e^{2x} \Leftrightarrow y = \int 3e^{2x}dx = \frac{3}{2}e^{2x} + c$$

$$2. \quad y'' = f(x)$$

$$y' = \int f(x)dx = F(x) + c_1, y = \int [F(x) + c_1]dx = F(x) + c_1x + c_2$$

### 1.7.3 Problema di Cauchy

Equazione differenziale con condizioni iniziali.

$$\begin{cases} y' = -e^{-x} \\ y(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow y = e^{-x} + c$$

La condizione iniziale ci dice che la funzione per  $x = 0$  vale 3, quindi:

$$e^{-0} + c = 3 \Leftrightarrow c = 2 \Rightarrow y(x) = e^{-x} + 2$$

esempio 2 ordine

$$\begin{cases} y'' = x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

soluzione

$$y' = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c_1, y = \int \left( \frac{x^2}{2} + c_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

avendo due condizioni iniziali possiamo calcolare  $c_1$  e  $c_2$

$$1 = 0^3/6 + c_1 \cdot 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 1$$

$$4 = 0^2 + c_1 \Rightarrow c_1 = 4$$

$$y(x) = \frac{x^3}{6} + 4x + 1$$

#### 1.7.4 Coefficienti costanti

Notazione  $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ , forma generale  $ay''(x) + by'(x) + cx(x) = 0$

**Teorema 1.8** (Insieme soluzioni). *L'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 2. La soluzione generale sarà  $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ .  $c_1$  e  $c_2$  sono parametri liberi,  $y_1$  e  $y_2$  sono una base.*

**Definizione 1.25** (Equazione caratteristica).

$$az^2 + bz + c = 0, z \in \mathbb{C}$$

**Teorema 1.9** (Soluzione generale). *La soluzione è la soluzione dell'equazione caratteristica.*

- radici distinte reali

$$z_1 = e^{\delta_1 x}, z_2 = e^{\delta_2 x}$$

$$y(x) = c_1 z_1 + c_2 z_2$$

- radici coincidenti reali

$$z_1 = z_2 = e^{\delta x}$$

$$y(x) = c_1 e^{\delta x} + c_2 x e^{\delta x}$$

- radici complesse coniugate

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, z_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), z_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

**Esempio 1.3.**  $y'' - 5y' + 4y = 0$

$$z^2 - 5z + 4 = 0 \Rightarrow (z - 4)(z - 1) = 0, z_1 = 4, z_2 = 1$$

base dello spazio

$$e^{4x}, e^{1x} \Rightarrow y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{1x}$$

**Esempio 1.4** (Problema di Cauchy).

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

equazione caratteristica

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \Rightarrow (z + 1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow z_1 = -1 + i, z_2 = -1 - i$$

$$\alpha = -1, \beta = 1$$

base

$$e^{-x} \cos(x), e^{-x} \sin(x), y(x) = c_1 e^{-x} \cos(x) + c_2 e^{-x} \sin(x)$$

sappiamo y'

$$y'(x) = -e^{-x}(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)) + e^{-x}(-c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x))$$

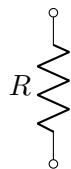
sostituendo le coordinate troviamo

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow y(x) = e^{-x}(\cos(x) + 2 \sin(x))$$

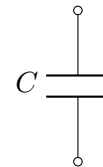
## 2 Introduzione e notazione

In questa prima sezione introduciamo i concetti base e la notazione usata negli appunti.

**Definizione 2.1** (Sistema dinamico). Insieme di elementi interconnessi che evolvono nel tempo e su cui in genere è possibile intervenire modificandone il comportamento.



Legame statico:  $v_R(t) = R i(t)$



Legame dinamico:  $\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t)$

Figura 1: Elementi circuitali: Resistenza e Condensatore

### 2.1 Notazione

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

## 3 Sistemi lineari

### 3.1 Sistemi a tempo continuo lineari stazionari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

**Definizione 3.1** (Matrici e vettori). Diamo le dimensioni delle matrici e dei vettori

- $A^{n \times n}$  matrice dinamica
- $B^{n \times p}$  degli ingressi
- $C^{q \times n}$  legame stato-uscita
- $D^{q \times p}$  legame ingresso-uscita
- $x^n$  stato
- $u^p$  ingresso
- $y^q$  uscita

### 3.1.1 Sistema Massa-Molla-Smorzatore

Di seguito il sistema massa-molla-smorzatore con ingresso esterno  $u$  e posizione  $y$ .

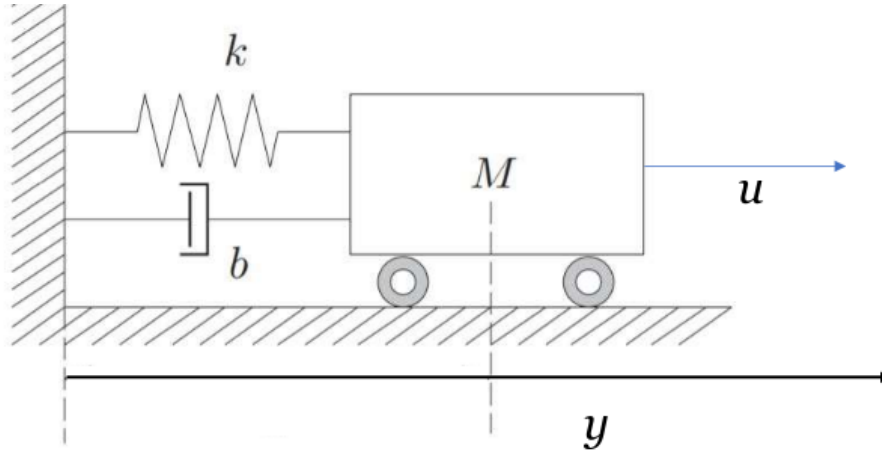


Figura 2: Carrello di massa  $M$  con molla  $k$  e smorzatore viscoso  $b$ .

legge che descrive il movimento

$$M\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

vogliamo passare allo spazio di stato

$$x_1(t) = y(t), x_2(t) = \dot{y}(t)$$

Essendo  $x_1(t)$  lo spazio e  $x_2(t)$  la velocità

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = \frac{1}{M}(u(t) - b\dot{y}(t) - ky(t))$$

adesso abbiamo la forma  $\dot{x}(t) = \dots$  e  $y(t) = \dots$

Possiamo riscriverlo in forma matriciale

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

### 3.1.2 Modello implicito

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

**Teorema 3.1** (Soluzioni del sistema).

$$\begin{cases} x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 & , \dot{x} = ax \\ x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau & , \dot{x} = ax + bu \end{cases}$$

[Osservazione] La soluzione non dipende da  $t$  o  $t_0$  ma solo dalla differenza  $t - t_0$ .

### 3.1.3 Modello esplicito

$$\begin{cases} x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \\ y(t) = c \left( e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \right) + du(t) \end{cases}$$

### 3.1.4 Risposta libera e forzata

**Definizione 3.2** (Risposta libera). Dipende dalle condizioni iniziali

$$x_l(t) = e^{a(t-t_0)}x_0$$

**Definizione 3.3** (Risposta forzata). Dipende dall'ingresso

$$x_f(t) = \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

### 3.1.5 Ipotesi di linearità

Definiamo  $x_{01}(t)$  e  $x_{02}(t)$  come gli stati raggiunti a tempo  $t$  partendo da  $x_{01}(t_0)$  e  $x_{02}(t_0)$  con ingressi  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  rispettivamente. Possiamo dire allora che

$$x_0(t) = c_1x_{01}(t_0) + c_2x_{02}(t_0), u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$$

e che lo stato raggiunto sarà

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

Siano

1.  $x_{01}(t_0) = x_0(t_0)$  e  $u_1 = 0$ ,  $x_1(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 = x_l$
2.  $x_{02}(t_0) = 0$  e  $u_2 = u$ ,  $x_2(t) = \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau = x_f$

Allora possiamo combinarle

$$\bar{x}_0 = c_1x_{01}(t_0) + c_2x_{02}(t_0), \bar{u} = c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$$

$$\bar{x}(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

Concludiamo ponendo  $c_1 = c_2 = 1$

$$\bar{x}(t) = x_1(t) + x_2(t) = x_l(t) + x_f(t) = x(t)$$

### 3.1.6 Ipotesi di stazionarietà

**Definizione 3.4** (Sistema stazionario). Un sistema è stazionario se spostando  $u(t)$  nel tempo, anche l'uscita si sposta, senza cambiare forma.

**Teorema 3.2** (Condizione di stazionarietà). Se

$$u(t - \Delta) \Rightarrow y(t - \Delta)$$

allora il sistema è stazionario.

**Prova** Facciamo un esperimento all'istante  $t_0$  e dopo a  $t_1$ . Avremo  $\bar{x}_0(t_1) = x_0$  e  $\bar{u}(t) = u(t - \Delta) = u(t - t_1 + t_0)$ . Idealmente avremo  $u(t) = \bar{u}(t - \Delta)$ . Prendiamo la soluzione esplicita

$$\bar{x}(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_1}^{\bar{t}} e^{a(\bar{t}-\tau)}b\bar{u}(\tau)d\tau$$

Siano  $\xi = \tau - \Delta$ ,  $\bar{t} = t + \Delta$

$$\bar{x}(t + \Delta) = e^{a(\bar{t}-t_0)}x_0 + \int_{t_1}^{t+\Delta} e^{a(t+\Delta-\tau)}b\bar{u}(\tau)d\tau$$

- $\tau \rightarrow t_1 \Rightarrow \xi \rightarrow t_0$
- $\tau \rightarrow \bar{t} \Rightarrow \xi \rightarrow t$

Dovendo integrare sostituiamo

$$\bar{x}(t + \Delta) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\xi)}bu(\xi)d\xi = x(t)$$

### 3.1.7 Forma generale

Definiamo le seguenti matrici

- $\Phi = e^{a(t-t_0)}$  matrice di transizione di stato
- $H = e^{At}B = \Phi B$  matrice risposte impulsive dello stato, colonne = risposta a impulso
- $\Psi = Ce^{At}$  matrice trasformazione dello stato
- $W = Ce^{At}B = C\Phi B = \Psi B$  matrice risposte impulsive dell'uscita

La forma esplicita diventa

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ y(t) = W(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau + Du(t) \end{cases}$$

che nel caso scalare diventa, con  $t_0 = 0$

$$\begin{cases} x(t) = e^{at}x_0 + \int^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \\ y(t) = ce^{at}x_0 + \int^t ce^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + \int^t d\delta(t-\tau)u(\tau)d\tau \end{cases}$$

**Definizione 3.5** (Impulso di Dirac).

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ +\infty & t = 0 \end{cases}$$

## 3.2 Sistemi a tempo discreto

### 3.2.1 Modello implicito

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad x(0) = x_0, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$$

**Esempio 3.1** (Laurea triennale). L'idea è che ogni anno una percentuale  $\alpha$  di studenti non finisce gli esami del 1o anno, mentre  $1 - \alpha$  inizia gli esami del 2o anno.

Possiamo formalizzare il primo anno in questo modo

$$x_1(k+1) = \alpha_1 x_1(k) + u(k)$$

quindi gli studenti che entrano e quelli che ripetono gli esami.

Nel secondo ci andranno quelli che passano dal primo e quelli che ripetono

$$x_2(k+1) = \alpha_2 x_2(k) + (1 - \alpha_1)x_1(k)$$

Quelli che si laureano sono l'output del sistema

$$y(k) = (1 - \alpha_3)x_3(k)$$

Nel complesso il sistema è

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \alpha_1 x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = (1 - \alpha_1)x_1(k) + \alpha_2 x_2(k) \\ x_3(k+1) = (1 - \alpha_2)x_2(k) + \alpha_3 x_3(k) \\ y(k+1) = (1 - \alpha_3)x_3(k) \end{cases}$$

in forma matriciale

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 1 - \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 - \alpha_3 \end{pmatrix} x(k) \end{cases} \quad D = 0$$

**Teorema 3.3.**  $D = 0 \Rightarrow$  no legame diretto tra input e output.

**Esempio 3.2** (Calcolo radice quadrata con metodo tangenti). Con il metodo delle tangenti cerchiamo la radice di  $a$ , ovvero la soluzione di

$$f(x) = x^2 - a$$

dove  $x = k+1, x_0 = k$ .

Sviluppando con Taylor otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ \Rightarrow x_{k+1} - x_k &= \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{f'(x_k)} \end{aligned}$$

mettiamo  $k$  nella formula

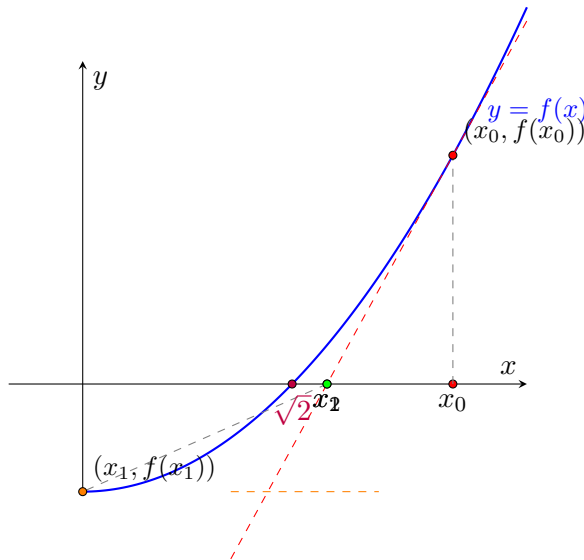
$$\begin{aligned} f(x_k) &= x_k^2 - a \\ f'(x_k) &= 2x_k \end{aligned}$$

$$f(x_{k+1}) = x_{k+1}^2 - a$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k + \frac{-x_k^2 + a}{2x_k} = x_k - \frac{x_k}{2} + \frac{a}{2x_k}, \quad f(x_{k+1}) \text{ approssimato}$$

e otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{1}{2}x_k + \frac{a}{2x_k} = \frac{1}{2}x_k + \frac{a}{2x_k} \\ y_k = x_k \end{cases}$$



### 3.3 Evoluzione libera

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

1. evoluzione libera:  $e^{A(t-\tau)}x(t_0)$

2. evoluzione forzata:  $\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$

Dall'ipotesi di linearità:

$$\begin{cases} x_{01} \\ u_1[t_0, t] \end{cases} \rightarrow x_1(t) = e^{a(t-t_0)}x_{01} + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu_1(\tau)d\tau$$

$$\begin{cases} x_{02} \\ u_2[t_0, t] \end{cases} \rightarrow x_2(t) = e^{a(t-t_0)}x_{02} + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu_2(\tau)d\tau$$

$x_0$  è la combinazione lineare di  $x_{01}$  e  $x_{02}$ ,  $u$  è la combinazione lineare di  $u_1$  e  $u_2$ . Abbiamo quindi

$$\begin{cases} x_0 = c_1x_{01} + c_2x_{02} \\ u = c_1u_1 + c_2u_2 \end{cases}$$

allora riscriviamo  $X(t)$

$$X(t) = e^{a(t-t_0)}(c_1x_{01} + c_2x_{02}) + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}b(c_1u_1(\tau) + c_2u_2(\tau))d\tau = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

Abbiamo ora due casi



- $c_2 = 0, x_0 = x_{01}, u = u_1 = 0 \Rightarrow$  risposta libera (non dipende da  $u$ )
- $c_1 = 0, c_2 = 1, x_0 = x_{02} = 0, u = u_2 \Rightarrow$  risposta forzata (dipende da  $u$ )

**Teorema 3.4** (Sovrapposizione delle risposte (degli effetti)).

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), c_1 = c_2 = 1$$

Secondo questa condizione posso studiare separatamente la risposta libera e quella forzata.

**Definizione 3.6** (Costante di tempo).  $\tau = -\frac{1}{a}$

Allora riscriviamo la risposta libera

$$x_l(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 = e^{-\frac{t}{\tau}}x(0)$$

che essendo un esponenziale avrà questo andamento

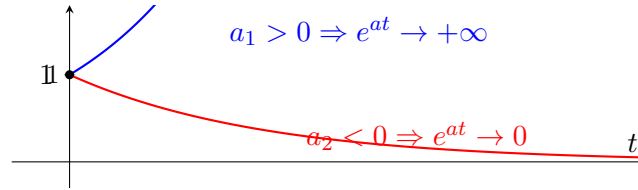


Figura 3: Comportamento dell'esponenziale  $e^{at}$  in funzione del segno di  $a$ .

### 3.4 Cambio coordinate del sistema

Per cambiare le coordinate definiamo  $z = Tx : \exists T^{-1}$ . Da qui ci rifacciamo al sistema classico

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Abbiamo poi che  $\dot{z} = T\dot{x} = TAx + TBu$ ,  $x = zT^{-1}$  e quindi risulta (con  $y$  stessa cosa)

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = TAT^{-1}z(t) + TBu(t) \\ y(t) = CT^{-1}z(t) + Du(t) \end{cases}$$

**Definizione 3.7** ( $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ ).

$$\tilde{A} = TAT^{-1}, \tilde{B} = TB, \tilde{C} = CT^{-1}, \tilde{D} = D$$

**Definizione 3.8** (Autovettori destri e sinistri). Gli autovalori sono gli stessi, ma cambiano gli autovettori

- destro  $Au = \lambda u$ ,  $u$  vettore colonna
- sinistro  $A^T v = \lambda v$ ,  $v$  vettore riga

Per trovarli

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix}$$

Date queste informazioni possiamo riscrivere

$$e^{At} = I_d + At + \frac{A^2 t^2}{2} = T^{-1}T + T^{-1}\tilde{A}Tt + T^{-1}\tilde{A}^2T\frac{t^2}{2}$$

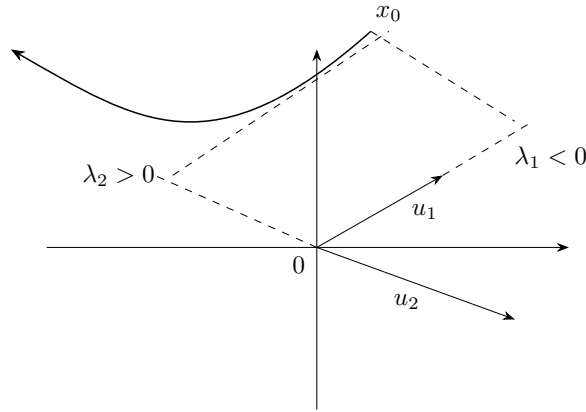
Sappiamo inoltre da algebra che  $A^k = T^{-1}\tilde{A}^kT$  e quindi  $e^{At}$  diventa

$$e^{At} = T^{-1}(I_d + \tilde{A}t + \dots)T = T^{-1}e^{\tilde{A}t}T$$

**Teorema 3.5** (Evoluzione sistema). Essendo  $e^{\tilde{A}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$

$$e^{At} = T^{-1}e^{\tilde{A}t}T = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}u_1 & e^{\lambda_2 t}u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T & v_2^T \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t}u_1v_1^T + e^{\lambda_2 t}u_2v_2^T$$

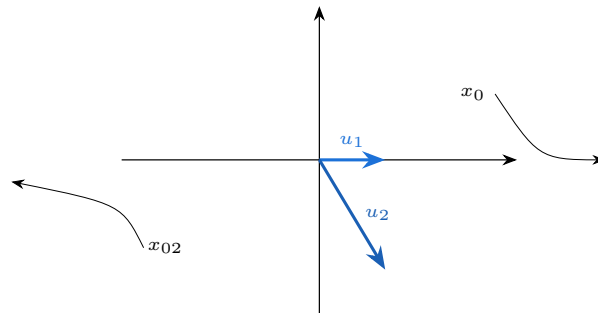
$$x_0 = c_1u_1 + c_2u_2 \Rightarrow x(t) = e^{\lambda_1 t}c_1u_1 + e^{\lambda_2 t}c_2u_2$$



**Esempio 3.3.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Casi particolari



- $x_0$  su  $u_1 \Rightarrow c_2 = 0$  diverge
- $x_0$  su  $u_2 \Rightarrow c_1 = 0$  converge

### 3.4.1 Autovalori complessi

Poniamo che il polinomio caratteristico abbia radici complesse coniugate  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ . Sostituendo nell'equazione avremo

$$(A - \alpha I - jwI)(u_a + ju_b) = 0 \Leftrightarrow (A - \alpha I)u_a - jwIu_a + J(A - \alpha I)u_b + jwIu_b = 0$$

$$\begin{cases} (A - \alpha I)u_a + wu_b = 0 \\ (A - \alpha I)u_b - wu_a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Au_a = \alpha u_a - wu_b \\ Au_b = wu_a + \alpha u_b \end{cases}$$

$$A \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -w \\ w & \alpha \end{pmatrix}$$

Sappiamo che

$$TAT^{-1} = \tilde{A}, T^{-1} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -w \\ w & \alpha \end{pmatrix}$$

**Teorema 3.6** (Evoluzione libera con autovalori complessi).

$$e^{\tilde{A}t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(wt) & -\sin(wt) \\ \sin(wt) & \cos(wt) \end{pmatrix}$$

con  $\alpha$  che determina l'andamento esponenziale e  $w$  la frequenza di rotazione.

$$X_l(t) = T^{-1}e^{\tilde{A}t}Tx_0$$

sostituiamo tutto nella formula

$$X_l(t) = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(wt) & -\sin(wt) \\ \sin(wt) & \cos(wt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix} (c_a u_a + c_b u_b)$$

Portando  $e^{\alpha t}$  all'inizio

$$X_l(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(wt)u_a + \sin(wt)u_b & -\sin(wt)u_a + \cos(wt)u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix} (c_a u_a + c_b u_b)$$

$$\Leftrightarrow X_l(t) = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(wt)u_a v_a^T + \sin(wt)u_b v_a^T - \sin(wt)u_a v_b^T + \cos(wt)u_b v_b^T \end{bmatrix} (c_a u_a + c_b u_b)$$

$$\Leftrightarrow X_l(t) = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(wt)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(wt)(u_b v_a^T - u_a v_b^T) \end{bmatrix} (c_a u_a + c_b u_b)$$

Prendiamo il Delta di Kronecker  $\delta_{ij} = v_i^T u_j$  (se  $i = j$  vale 1, altrimenti 0), e facciamo le seguenti osservazioni

- $(u_a v_a^T + u_b v_b^T)u_a = u_a$
- $(u_a v_a^T + u_b v_b^T)u_b = u_b$

e il primo membro diventa  $x_0$ ,

- $(u_b v_a^T - u_a v_b^T)u_a = -u_b$
- $(u_b v_a^T - u_a v_b^T)u_b = u_a$

quindi sostituiamo ancora

$$X_l(t) = e^{\alpha t} [\cos(wt)(c_a u_a + c_b u_b) + \sin(wt)(-c_a u_b + c_b u_a)]$$

$$\Leftrightarrow X_l(t) = e^{\alpha t} [u_a(c_a \cos(wt) + c_b \sin(wt)) + u_b(c_b \cos(wt) - c_a \sin(wt))]$$

**Passaggio ad ampiezza-fase**

$$c_a = m \sin(\varphi), c_b = m \cos(\varphi)$$

Date le formule di prostaferesi (a detta del prof)

$$\begin{cases} \sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B) \\ \cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B) \end{cases}$$

allora riscriviamo tutto come

$$X_I(t) = m e^{\alpha t} [u_a \sin(wt + \varphi) + u_b \cos(wt + \varphi)]$$

**Pulsazione naturale e smorzamento**

**Definizione 3.9** (Pulsazione naturale).

$$w_n = \sqrt{\alpha^2 + w^2}$$

**Definizione 3.10** (Smorzamento).

$$\xi = -\frac{\alpha}{w_n}$$

**3.4.2 Cambio di base da  $\mathbb{C}$  a  $\mathbb{R}$** 

Ora siamo nella seguente situazione: abbiamo una coppia di autovalori complessi coniugati  $\alpha \pm j\beta$  e un autovettore complesso coniugato  $u_a \pm ju_b$ . Dunque avremo  $u_a$  e  $u_b$  come autovettori reali. L'obiettivo è usare una base reale al posto di  $u$  e  $u^*$ .

$$\begin{pmatrix} u & u^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}$$

**Definizione 3.11** (Forma canonica reale).  $\tilde{A}$  sarà diagonale a blocchi con

- $\lambda_i \forall$  autovalore reale
- $\begin{pmatrix} \alpha_j & w_j \\ -w_j & \alpha_j \end{pmatrix} \forall$  coppia di autovalori coniugati

**3.4.3 Autovalori misti**

Nel caso generico avremo autovalori reali e complessi. Dall'ultima definizione sappiamo come si trasforma  $\tilde{A}$ , dunque nel caso di una matrice  $A$  3x3 con autovalori misti avremo la seguente situazione

$$\lambda_1 \in \mathbb{R} = u_1, \lambda_{2,3} = \alpha \pm jw = u_a, u_b$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -w \\ 0 & w & \alpha \end{pmatrix}$$

prendiamo lo sviluppo di  $e^{A_2 t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos wt & -\sin wt \\ \sin wt & \cos wt \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & -w \\ w & \alpha \end{pmatrix}$  e quindi otteniamo  $\tilde{A}$  finale in forma canonica reale

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \cos wt & -e^{\alpha t} \sin wt \\ 0 & e^{\alpha t} \sin wt & e^{\alpha t} \cos wt \end{pmatrix}$$

Ora riprendiamo i 3 autovettori reali  $u_1, u_a, u_b$  e riscriviamo  $e^{At}$  con  $\tilde{A}$

$$e^{At} = T^{-1} e^{\tilde{A}t} T = \begin{pmatrix} u_1 & u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \cos wt & -e^{\alpha t} \sin wt \\ 0 & e^{\alpha t} \sin wt & e^{\alpha t} \cos wt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix}$$

**Osservazione 3.1** (Gli autovettori moltiplicano solo con autovalori corrispondenti).

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow e^{At} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} u_1 & e^{\alpha t} \cos(wt) u_a - e^{\alpha t} \sin(wt) u_b & e^{\alpha t} \sin(wt) u_a + e^{\alpha t} \cos(wt) u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow e^{At} &= e^{\lambda_1 t} u_1 v_1^T + e^{\alpha t} (\cos(wt) u_a v_a^T - \sin(wt) u_b v_a^T + \sin(wt) u_a v_b^T + \cos(wt) u_b v_b^T) \\ \Leftrightarrow e^{At} &= e^{\lambda_1 t} u_1 v_1^T + e^{\alpha t} [\cos(wt) (u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(wt) (u_a v_b^T - u_b v_a^T)] \end{aligned}$$

**Definizione 3.12** (Forma spettrale di  $e^{At}$ ).

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} u_1 v_1^T + e^{\alpha t} [\cos(wt) (u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(wt) (u_a v_b^T - u_b v_a^T)]$$

**Lemma 3.1** (Forma generale risposta libera).

$$X_l(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} u_i v_i^T + \sum_j e^{\alpha_j t} [\cos(w_j t) (u_{ja} v_{ja}^T + u_{jb} v_{jb}^T) + \sin(w_j t) (u_{ja} v_{jb}^T - u_{jb} v_{ja}^T)]$$

### 3.4.4 Moti aperiodici e pseudoperiodici

$x_0$  nella base degli autovettori  $= c_1 u_1 + c_a u_a + c_b u_b$ , dobbiamo calcolare  $X_l(t)$ . Ricordiamo che

- $v_1^T \times u_1 = 1$
- $v_1^T \times u_a = 0$
- $v_1^T \times u_b = 0$

dato che

$$T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_a & u_b \end{pmatrix} \quad T \cdot T^{-1} = I$$

e anche gli altri prodotti verranno semplificati, dunque

$$e^{At} x_0 = e^{\lambda_1 t} c_1 u_1 + e^{\alpha t} [\cos(wt) (c_a u_a + c_b u_b) + \sin(wt) (-c_a u_b + c_b u_a)]$$

raccogliamo  $u_a$  e  $u_b$

$$\Leftrightarrow e^{At} x_0 = e^{\lambda_1 t} c_1 u_1 + e^{\alpha t} [u_a (c_a \cos(wt) + c_b \sin(wt)) + u_b (c_b \cos(wt) - c_a \sin(wt))]$$

come già fatto in precedenza, passiamo ad ampiezza-fase con  $c_a = n \sin(\varphi)$  e  $c_b = n \cos(\varphi)$

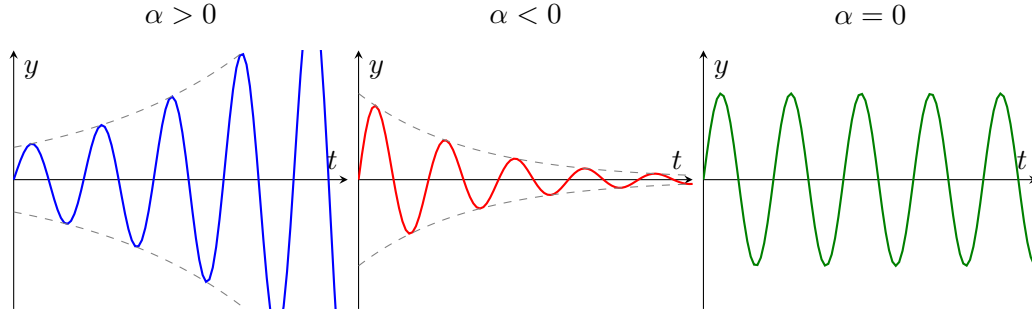
$$\Leftrightarrow e^{At} x_0 = e^{\lambda_1 t} c_1 u_1 + n e^{\alpha t} [u_a \sin(wt + \varphi) + u_b \cos(wt + \varphi)]$$

**Definizione 3.13** (Moto aperiodico).

$$e^{\lambda_i} u_i c_i$$

**Definizione 3.14** (Moto pseudoperiodico).

$$n e^{\alpha t} [u_a \sin(wt + \varphi) + u_b \cos(wt + \varphi)]$$



In un grafico a 3 dimensioni, partiamo da  $x_0 = (3, 3, 3)$  e prendiamo come esempio i vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ora il moto deve seguire la convergenza/divergenza lungo  $u_1$  e la rotazione sul piano  $u_a - u_b$ , prendiamo solo il caso in cui  $\lambda_1 < 0$ . Nb: i vettori sono gli assi, non sono della loro effettiva dimensione.

### 3.4.5 Tempo discreto

Definiamo di nuovo le matrici di trasformazione

$$\begin{cases} \phi = A^k \\ \psi = B^k \\ H = A^{k-1}B \\ W = \begin{cases} CA^{k-1}B & k > 0 \\ D & k = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Prendiamo una matrice 3x3  $A$  diagonalizzabile  $\Rightarrow \exists u_1, u_a, u_b : T^{-1} = (u_1 u_a u_b)$ . Abbiamo quindi che  $A^k = T^{-1} \tilde{A}^k T$ .

$$\tilde{A}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & w \\ 0 & -w & \alpha \end{pmatrix}^k$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & w \\ -w & \alpha \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \sigma \cos(\theta) & \sigma \sin(\theta) \\ -\sigma \sin(\theta) & \sigma \cos(\theta) \end{pmatrix}^k = \sigma^k \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^k$$

**Definizione 3.15.**  $\sigma = \sqrt{\alpha^2 + w^2}$  e  $\theta = \arctan(\frac{w}{\alpha})$

**Teorema 3.7** ( $A^k$ ).

$$A^k = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^k \cos(k\theta) & \sigma^k \sin(k\theta) \\ 0 & -\sigma^k \sin(k\theta) & \sigma^k \cos(k\theta) \end{pmatrix} T$$

si dimostra per induzione.

$$A^k = \lambda_1^k u_1 v_1^T + \sigma^k [\cos(k\theta)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(k\theta)(u_a v_b^T - u_b v_a^T)]$$

$$x_0 = c_1 \lambda_1 + c_a \lambda_a + c_b \lambda_b$$

$$X_l(k) = \lambda_1^k c_1 u_1 + \sigma^k [\cos(k\theta)(u_a c_a + u_b c_b) + \sin(k\theta)(u_a c_b - u_b c_a)]$$

che sempre con le formule di prostaferesi diventa

$$X_l(k) = \lambda_1^k c_1 u_1 + \sigma^k (n \sin(\theta k + \varphi) u_a + n \cos(\theta k + \varphi) u_b)$$

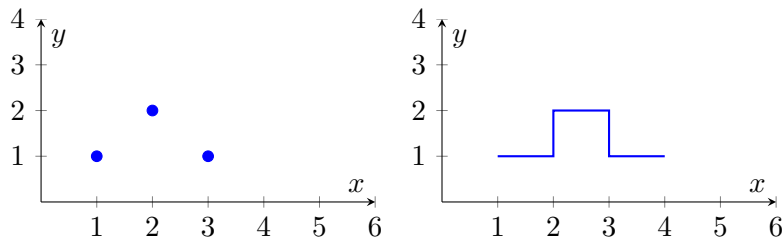
**Definizione 3.16** (Moto alternante). Dato  $\lambda_i < 0$ , allora il moto aperiodico associato si dice alternante. In sostanza avendo il  $-$  nell'elevamento a potenza, il segno del moto cambia ad ogni passo.

**Teorema 3.8** (Evoluzione moti pseudoperiodici). *Non guardiamo  $\alpha$  ma il modulo*

- $\sigma > 0$  *divergente*
- $\sigma = 0$
- $\sigma < 0$  *convergente*

### 3.4.6 Organo di ritenuta

Prendiamo un segnale in ingresso discreto, il compito dell'organo di ritenuta è di mantenere il valore dell'ultimo campione fino al successivo. Ora prendiamo un sistema a tempo continuo,



definiamo  $T = t - t_0$ ,  $t_0 = kT$  e  $t = (k + 1)T$ .

**Definizione 3.17** (Tempo di campionamento  $T$ ). Ogni quanto campionare un segnale continuo, è definito come  $T = t - t_0$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(kT)d\tau$$

da qua definiamo le matrici discrete

- $A_d = e^{AT}$
- $B_d = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(kT)d\tau = A^{-1}(e^{AT} - I_d)B$
- $C_d = C$
- $D_d = D$

sia  $\xi = (k + 1)T - \tau$  allora

$$B_d = - \int_T^0 e^{A\xi}Bd\xi = \int_0^T e^{A\xi}Bd\xi$$

Forma implicita

$$\begin{cases} x((k+1)T) = A_dx(kT) + B_du(kT) \\ y(k) = C_dx(k) + D_du(k) \end{cases}$$

Per gli autovalori reali o complessi usiamo  $T$  al posto di  $t$  e otteniamo

$$\lambda_i \rightarrow e^{\lambda_i T}, \quad \alpha_j \pm jw_j \rightarrow e^{\alpha_j T}(\cos(w_j T) \pm j \sin(w_j T))$$

### 3.5 Osservabilità e eccitabilità

Prendiamo un sistema con 1 autovalore reale e 1 coppia di autovalori complessi coniugati

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} u_1 v_1^T + e^{\alpha t} [\cos(\omega t)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(\omega t)(u_a v_b^T - u_b v_a^T)]$$

prendiamo la matrice  $B$  e calcoliamo  $H = e^{At} B$

$$H(t) = e^{\lambda_1 t} u_1 v_1^T B + e^{\alpha t} [\cos(\omega t)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) B + \sin(\omega t)(u_a v_b^T - u_b v_a^T) B]$$

Notiamo che se  $v_1^T B = 0$  il moto non comparirà nell'espressione di  $H(t)$  che è definita come matrice risposte impulsive dello stato, di conseguenza si dice che il moto non è eccitabile da un impulso in ingresso.

**Definizione 3.18** (Eccitabilità). Definizione per ogni moto

- Un moto aperiodico è eccitabile se  $v_i^T B \neq 0$ .
- Un moto pseudoperiodico è eccitabile se  $v_{ja}^T B \neq 0$  o  $v_{jb}^T B \neq 0$ .

**Teorema 3.9** (Moto eccitabile). Se  $u_i \in \text{Im}\{B\}$  allora il moto è eccitabile.

**Esempio 3.4** (Esercizio stile esonero).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} D = 0$$

1. schema di simulazione

2. evoluzione libera con  $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. determinare gli stati tc  $X_L(t) \rightarrow 0$

4. determinare gli stati tc  $X_L(t)$  limitata

**Soluzione.** 1. Riscriviamo il sistema nella forma implicita e poi  $X(t)$  per componenti

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

ha 2 ingressi (colonne di  $B$ ) quindi per componenti diventa

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = 2x_2(t) + u_1(t) - u_2(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$



Il disegno prima o poi arriverà (se mi ricordo) (aprite una issue o fate una PR)

2. Calcoliamo gli autovalori di  $A$

$$P_a(A) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda + \lambda^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 2, -1$$

Ora per  $X_L(t) = e^{At}x_0 = \left(\sum e^{\lambda_i t} u_i v_i^T\right) x_0$  ci servono gli autovettori destri e sinistri.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Dato  $\lambda = (0, 2, -1)$ , calcoliamo  $X_L(t)$ , ricordando che  $c_i = v_i^T x_0$

$$X_L(t) = u_1 c_1 + e^{2t} u_2 c_2 + e^{-t} u_3 c_3$$

3.  $x_0 = c_3 u_3$  essendo l'unico moto che converge

4.  $x_0 = c_1 u_1 + c_3 u_3$  essendo gli unici moti che non divergono

Prendiamo l'uscita  $Y$  e facciamo dei calcoli veloci:

$$W = C \left( \sum_i e^{\lambda_i t} u_i v_i^T + \sum_j e^{\alpha_j t} \left( \cos(w_j t) (u_{ja} v_{ja}^T + u_{jb} v_{jb}^T) + \sin(w_j t) (u_{ja} v_{jb}^T - u_{jb} v_{ja}^T) \right) \right) B$$

**Definizione 3.19** (Osservabilità). Definizione per ogni moto

- Un moto aperiodico è osservabile se  $C u_i \neq 0$ .
- Un moto pseudoperiodico è osservabile se  $C u_{ja} \neq 0$  o  $C u_{jb} \neq 0$ .

**Osservazione 3.2** (In  $W$  compaiono solo i moti osservabili ed eccitabili).

### 3.5.1 Autovalori multipli

Prendiamo queste due matrici che sono molto simili tra di loro

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Entrambe le matrici hanno un autovalore doppio, però  $A$  non è diagonalizzabile, infatti l'unico autovettore associato è  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .  $\hat{A}$  invece è diagonalizzabile con autovettori  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Nel caso normale con  $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$ ,  $\lambda_1 = -2 \rightarrow e^{-2t}$ . Se la matrice non è diagonalizzabile usiamo la forma di Jordan. Dato che compare un blocco di Jordan, compaiono i modi polinomiali-esponenziali.  $k$  è la dimensione del blocco di Jordan associato a  $\lambda_i$ .

$$\lambda_i \rightarrow e^{\lambda_i t}, \quad t e^{\lambda_i t}, \dots, \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_i t}$$

per  $\lambda_i \rightarrow 0$

$$\lim_{\lambda_i \rightarrow 0} \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_i t} = 0$$

per  $\lambda_i \rightarrow \infty$

$$\lim_{\lambda_i \rightarrow \infty} \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_i t} = \infty$$

caso critico  $\lambda_i = 0$

- $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \Rightarrow$  moto limitato
- $m_a(\lambda_i) > m_g(\lambda_i) \Rightarrow$  moto divergente

### 3.6 Esercizi

**Esercizio 3.1** (Schema di simulazione, eccitabilità, osservabilità e matrici a tempo discreto).

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(k) + u(k) \end{cases}$$

**Soluzione.** 1. Riscriviamo il sistema nella forma implicita e poi  $X(t)$  per componenti

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_1 + 3x_2 + x_3 + u_1(k) \\ x_2(k+1) = x_2 - x_3 \\ x_3(k+1) = x_2 + x_3 + u_3(k) \end{cases}$$

e si fa il grafico (aspetto PR)

2. A diagonale a blocchi  $\Rightarrow \lambda_1 = -1$

$$(1 - \lambda)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = 1 \pm j$$

Per l'autovettore associato a  $\lambda_1 = -1$  il calcolo è semplice e viene  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  (1 incognita libera),

per gli autovalori complessi coniugati si usa la forma

$$A \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & w \\ -w & \alpha \end{pmatrix}$$

con  $\alpha = 1$  e  $w = 1$ , dunque

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -a_1 + 3a_2 + a_3 = a_1 - b_1 \\ a_2 - a_3 = a_2 - b_2 \\ a_2 + a_3 = b_2 + b_3 \\ -b_1 + 3b_2 + b_3 = a_1 + b_1 \\ b_2 - b_3 = a_2 + b_2 \\ b_2 + b_3 = a_3 + b_3 \end{cases}$$

ora dobbiamo capire quali sono le 2 equazioni linearmente dipendenti. Dalla 6a equazione ricaviamo che  $a_3 = b_2$ , dalla 3a che  $a_2 = -b_3$ . Sostituendo nel sistema togliamo le equazioni 2 e 5 rimanendo con

$$\begin{cases} -a_1 + 3a_2 + a_3 = a_1 - b_1 \\ -b_1 + 3b_2 + b_3 = a_1 + b_1 \\ 2a_1 - b_1 = 3a_2 + a_3 \\ a_1 + 2b_1 = 3b_2 + b_3 \end{cases}$$

sappiamo da prima che  $a_2 = -b_3$  e  $a_3 = b_2$ , dunque

$$\begin{cases} 2a_1 - b_1 = 3(-b_3) + b_2 \\ a_1 + 2b_1 = 3b_2 + b_3 \end{cases}$$

scegliamo  $b_2 = 1$  e  $b_3 = 0$  per semplicità, dunque

$$\begin{cases} 2a_1 - b_1 = 1 \\ a_1 + 2b_1 = 3 \end{cases}$$

risolvendo otteniamo  $a_1 = 1, b_1 = 1$ , dunque

$$u_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 3. Osservabilità

$$Cu_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{non osservabile}$$

$$Cu_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{osservabile (basta che uno dei 2 sia non nullo)}$$

$$Cu_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{osservabile}$$

Per l'eccitabilità calcoliamo gli autovettori sinistri

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

facciamo i calcoli con  $v^T$  e  $B$

$$v_1^T B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{non eccitabile}$$

$$v_a^T B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{eccitabile (basta che uno dei 2 sia non nullo)}$$

$$v_b^T B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

### 4. Matrici a tempo discreto

$$\Phi(k) = \lambda_1^k u_1 v_1^T + \sigma^k (\cos(\theta k) (u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(\theta k) (u_a v_b^T - u_b v_a^T))$$

con  $\sigma = \sqrt{\alpha^2 + w^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  e  $\theta = \arctan\left(\frac{w}{\alpha}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

$$\Phi(k) = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + (\sqrt{2})^k (\dots)$$

$$H(k) = \Phi(k)B, \quad v_1^T B = 0, v_a^T B = 1, v_b^T B = 0$$

$$H(k) = (\sqrt{2})^{k-1} (\cos(\theta(k-1))u_a - \sin(\theta(k-1))u_b)$$

## 4 Stabilità

### 4.1 Il pendolo

Consideriamo un pendolo, ha due posizioni in cui può stare fermo:

- la posizione con il pendolo verso il basso (posizione di equilibrio stabile);
- la posizione con il pendolo verso l'alto (posizione di equilibrio instabile).

I sistemi dinamici li descriviamo con  $\dot{x}$  = una funzione, che dipende da  $x$  e da  $u$ . La  $\dot{x}$  nel caso del pendolo è la velocità, quindi se trovassimo  $\dot{x} = f(x_e, u_e) = 0$ , avremmo trovato un punto dove il pendolo sta fermo, cioè un punto di equilibrio.

### 4.2 Sistemi

Prendiamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

**Teorema 4.1** (Soluzioni equilibrio di un sistema). *Devono valere le seguenti condizioni:*

$$\begin{cases} \text{rank}(A) = n & x_e = 0 \text{ unico punto di equilibrio} \\ \text{rank}(A) = q < n & \text{numero soluzioni} = \infty^{n-q} \end{cases}$$

#### 4.2.1 Definizioni di stabilità

Le seguenti definizioni valgono per  $u = 0$ , cioè il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(t) = e^{At}x_0 \\ \Phi(t) = e^{At} \end{cases}$$

**Definizione 4.1** (Sistema stabile). *Devono valere le seguenti condizioni:*

1.  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 : \|x_0 - x_e\| < \delta_\epsilon, \|x(t) - x_e\| < \epsilon \forall t > 0$
2.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$  equiasintoticità

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} x_e = (0, 0) &\Rightarrow \|x_0\| < \delta_\epsilon \\ \|x(t)\| &= \|\Phi(t)x_0\| < \epsilon \\ \|\Phi(t)x_0\| &\leq \|\Phi(t)\| \|x_0\| \leq \|\Phi(t)\| \delta_\epsilon < \epsilon \end{aligned}$$

□

**Definizione 4.2** (Stabilità asintotica). *Devono valere le seguenti condizioni:*

1.  $\nexists \text{Re}(\lambda_i) > 0$  (traiettoria divergente)
2.  $\exists \text{Re}(\lambda_i) = 0$  (traiettoria limitata)

**Definizione 4.3** (Stabilità). *Devono valere le seguenti condizioni:*

- $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$
- $\text{Re}(\lambda_i) = 0$  e  $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$

**Definizione 4.4** (Instabilità). *Devono valere le seguenti condizioni:*

- $\exists \text{Re}(\lambda_i) > 0$
- $\exists \text{Re}(\lambda_i) = 0$  e  $m_a(\lambda_i) > m_g(\lambda_i)$

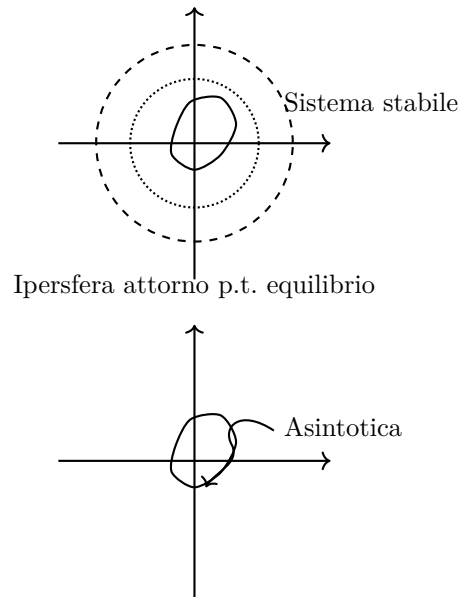


Figura 4: Stabilità e stabilità asintotica attorno all'origine

### 4.3 Criterio di Routh

Condizione necessaria: i coefficienti del  $P_a(\lambda)$  devono essere tutti dello stesso segno. Costruiamo la tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} s^n & a_n & a_{n-2} & \dots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots \\ s^{n-2} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots \\ s^{n-3} & c_{n-3} & c_{n-4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Dove:

$$b_{n-2} = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}} \quad b_{n-3} = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}$$

Se campo mancante  $\rightarrow 0$ .

**Teorema 4.2** (Riga invariante (nome di fantasia)). *Posso moltiplicare una riga per  $n > 0$  senza cambiare il risultato.*

**Teorema 4.3** (Numero radici con parte reale positiva). *Il numero di cambi di segno nella prima colonna della tabella di Routh è uguale al numero di radici del polinomio caratteristico con parte reale positiva.*

**Esempio 4.1** (Routh + verifica radici  $< -3$ ).

$$P(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 3\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda + 1$$

tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} 5 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & \end{array}$$

La presenza di una riga di zeri indica la presenza di radici simmetriche rispetto l'asse reale. Costruiamo il polinomio ausiliario:

$$P(\lambda) = P_1(\lambda)P_2(\lambda), P_2(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 + 1$$

$$\iota P_2 = 4\lambda^3 + 6\lambda$$

Costruiamo la tabella di Routh per  $\iota P_2$ :

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & \\ 0 & 4 & \end{array}$$

No cambi di segno  $\Rightarrow$  radici di  $P_2$  con parte reale  $\leq 0$ . Verifica radici  $< -3$ :

1. origine portata in  $-3$
2.  $\lambda = z - \alpha$ , con  $\alpha = 3$
3.  $p(z) = z + 3 - 3 = z$

Costruisco il polinomio con  $z$  e uso di nuovo Routh, se non ci sono cambi di segno avrò le radici  $< -3$  (perchè l'asse è spostato).

#### 4.4 Stabilità nei punti di equilibrio

Sviluppiamo la funzione  $\dot{x} = f(x, u)$  in serie di Taylor attorno al punto di equilibrio  $(x_e, u_e)$ :

**Definizione 4.5** (Matrice Jacobiana). Matrice delle derivate parziali

$$\dot{x} = f(x_e, u_e) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_e, u_e)} (x - x_e) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x_e, u_e)} (u - u_e)$$

$f(x_e, u_e) = 0$  che è il punto di equilibrio.

$$\dot{x} = A(x - x_e) + B(u - u_e) = A(x - x_e) + B\tilde{u}$$

Sostituiamo  $z = x - x_e$  e diventa lineare

$$\dot{z} = Az + B\tilde{u}$$

**Teorema 4.4** (Stabilità con la matrice Jacobiana). Possiamo studiare la stabilità con gli autovalori della matrice Jacobiana calcolata nel punto di equilibrio.

- $\forall \text{Re}\{\lambda_i\} < 0$  sistema asintoticamente stabile
- $\exists \text{Re}\{\lambda_i\} > 0$  sistema instabile
- $\exists \text{Re}\{\lambda_i\} = 0$  e  $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$  sistema stabile

**Teorema 4.5** (Regola di Cartesio). Il numero di radici con parte reale positiva è uguale al numero di cambi di segno nei coefficienti del polinomio caratteristico, o minore di un numero pari.

- Nessun cambiamento di segno  $\Rightarrow$  nessuna radice con parte reale positiva
- Un cambiamento di segno  $\Rightarrow \exists \text{Re} > 0$

**Esempio 4.2** (Pendolo).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{ml} u \end{cases}$$

Capiamo dove sono i punti di equilibrio:

- $x_1 = k\pi \Rightarrow -\frac{g}{l} \sin(x_1) = 0$
- $x_2 = 0 \Rightarrow -\frac{k}{m} x_2 = 0$
- $u = 0 \Rightarrow -\frac{1}{ml} x_2 = 0$

Quindi i punti di equilibrio sono  $(k\pi, 0)$ , quindi ci sono  $(0, 0)$  e  $(\pi, 0)$ . Matrice Jacobiana

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(x_1) & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{pmatrix}$$

1. Calcoliamo la Jacobiana nel punto di equilibrio  $(0, 0)$ :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{pmatrix}$$

$$P_a(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{k}{m} \lambda + \frac{g}{l}$$

Cartesio  $\Rightarrow$  sistema stabile asintoticamente localmente.

2. Calcoliamo la Jacobiana nel punto di equilibrio  $(\pi, 0)$ :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{pmatrix}$$

Autovalori matrice Jacobiana:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{m} - \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow P_a(\lambda) = \lambda^2 + \frac{k}{m} \lambda - \frac{g}{l}$$

Cartesio  $\Rightarrow$  sistema instabile

## 4.5 Dominio di Laplace

Possiamo spostare nel dominio complesso una funzione tramite la trasformata di Laplace che è così definita

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

(tutte le trasformate sono riassunte nell'appendice)

### 4.5.1 Calcoli delle trasformate utili

Moti naturali aperiodici

$$\mathcal{L}(e^{\lambda t}) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-t(s-\lambda)} dt = \left[ \frac{e^{-t(s-\lambda)}}{-(s-\lambda)} \right]_0^\infty = \frac{1}{s-\lambda}$$

Gradino

$$\mathcal{L}(\delta_{-1}) = \mathcal{L}(e^{\lambda t}) \Big|_{\lambda=0} = \frac{1}{s}$$

Impulso

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

Moti pseudo-periodici

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\sin(wt)) &= \mathcal{L}\left(\frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{jt}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{jt} e^{-st} dt \\
 &= \frac{1}{2j} \left( \int_0^\infty e^{jwt} e^{-st} dt - \int_0^\infty e^{-jwt} e^{-st} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - jw} - \frac{1}{s + jw} \right) \\
 &= \frac{1}{2j} \frac{s + jw - s + jw}{s^2 + w^2} = \frac{w}{s^2 + w^2} \\
 \mathcal{L}(\cos(wt)) &= \frac{s}{s^2 + w^2}
 \end{aligned}$$

#### 4.5.2 Proprietà

$$\mathcal{L}(x(t)) = x(s)$$

$$\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = sx(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}(u(t)) = u(s)$$

#### 4.5.3 Applicazione al Modello implicito

Partiamo dall'espressione di  $\dot{x}(t)$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\dot{x}(t)) &= \mathcal{L}(Ax(t) + Bu(t)) \\
 \Leftrightarrow sx(s) - x(0) &= Ax(s) + Bu(s) \\
 \Leftrightarrow x(s)(sI - A) &= x(0) + Bu(s) \\
 \Rightarrow x(s) &= (sI - A)^{-1}(x(0) + Bu(s))
 \end{aligned}$$

Ponendo  $t_0 = 0$

$$\mathcal{L}(x(t)) = \mathcal{L}(\Phi(t)x(0)) + \mathcal{L}\left(\int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau\right)$$

vale  $\forall x(0)$  che ammettono la trasformata. Ponendo  $u = 0$

$$\begin{aligned}
 (sI - A)^{-1}x(0) &= \mathcal{L}(\Phi(t)x(0)) \\
 \Rightarrow \mathcal{L}(\Phi(t)) &= (sI - A)^{-1}
 \end{aligned}$$

Poi l'evoluzione forzata

$$(sI - A)^{-1}Bu(s) = \mathcal{L}\left(\int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau\right)$$

e la matrice

$$H(t) = e^{At}B \rightarrow H(s) = (sI - A)^{-1}B$$

In uscita abbiamo  $y(s) = cx(s) + Du(s)$

$$\begin{aligned}
 y(s) &= C\left((sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}Bu(s)\right) + Du(s) \\
 &= \mathcal{L}\left(Ce^{At}x(0)\right) + \mathcal{L}\left(\int_{t_0}^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau\right)
 \end{aligned}$$

abbiamo le altre due matrici

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\Psi(t)) &= c(sI - A)^{-1} \\
 W(t) &= Ce^{At}B + D\delta(t)
 \end{aligned}$$



**Definizione 4.6** (Matrice delle funzioni di trasferimento).

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

dato che  $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$

#### 4.5.4 Sviluppo in frazioni parziali

Prendiamo un sistema in forma implicita

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x + u \end{cases}$$

L'obiettivo (a quanto pare) è scrivere  $\Phi(s)$  nella forma  $\frac{R_1}{s+\lambda_1} + \frac{R_2}{s+\lambda_2}$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s+1 & -2 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} s+2 & 2 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(s) = \frac{R_1(s+2) + R_2(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\begin{pmatrix} s+2 & 2 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2}$$

Ricaviamo  $R_1$  e  $R_2$  facendo il limite rispettivamente per  $s \rightarrow -1$  e  $s \rightarrow -2$  e otteniamo

$$\dots = \lim_{s \rightarrow -1} (R_1 + R_2 \frac{s+1}{s+2}) = R_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{1}$$

e

$$R_2 = -\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

essendo  $\Phi(t) = e^{At}$  l'antitrasformata di  $\Phi(s)$

$$\Phi(s) = \frac{1}{s-\lambda_1} u_1 v_1^T + \frac{1}{s-\lambda_2} u_2 v_2^T$$

$$= R_1 \frac{1}{s-\lambda_1} + R_2 \frac{1}{s-\lambda_2}$$

e dunque so come scrivere  $\Phi(t)$  perchè al denominatore ho gli autovalori e  $R_i = u_i v_i^T$

**Teorema 4.6** ( $\Phi(t)$  formula chiusa).

$$\Phi(t) = R_1 e^{\lambda_1 t} + R_2 e^{\lambda_2 t}$$

Calcoliamo le altre matrici  $H$ ,  $\Psi$  e  $W$

$$H(s) = (sI - A)^{-1}B$$

$$\Psi(s) = C(sI - A)^{-1}$$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Nota d'onore al burino che è entrato in aula e ha fatto sclerare la Califano interrompendo la lezione

**Definizione 4.7** (Poli). Quando una funzione è nella forma poli-zero, i poli sono i valori di  $s$  che annullano il denominatore.

$$Y_f(s) = W(s)u(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)s} \Rightarrow \text{poli in } s = -1, s = -2, s = 0$$

**Definizione 4.8** (Guadagno).  $R_i$  sono i guadagni associati ai poli  $p_i$  della funzione di trasferimento  $y_f(s)$ . Un esempio è la voce che esce amplificata dal microfono.

**Teorema 4.7** (Metodo veloce per calcolare i residui/il guadagno). *Calcolare guadagno per poli di grado 1*

$$R_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i)y_f(s)$$

**Teorema 4.8** (Poli di grado  $> 2$ ). *sia  $p$  un polo*

1. parto dal termine di grado maggiore  $\lim_{s \rightarrow p} Y(s)(s - p)$
2. moltiplico per  $s^{\text{grado}}$  e derivo entrambi
3. continuo a derivare per il numero del grado

**Esempio 4.3** (Studio  $y_f$  per il gradino).

$$W(s) = \frac{s-1}{(s-3)(s+2)}$$

$$u(s) = 1/s$$

Residui

$$\frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3}{s-3}$$

$$R_1 = \left[ \frac{s-1}{(s-3)(s+2)} \right]_{s=0} = 1/6, R_2 = -3/10$$

$$R_3 = \left[ \frac{s-1}{s(s+2)} \right]_{s=3} = \frac{2}{3(3+2)} = \frac{2}{15}$$

Uscita

$$y_f(t) = R_1 e^{0t} + R_2 e^{-2t} + R_3 e^{3t} = \frac{1}{6} - \frac{3}{10} e^{-2t} + \frac{2}{15} e^{3t}$$

**Teorema 4.9** (Residui per polinomi di grado maggiore di 1). *Grado numeratore  $<$  grado denominatore, generalmente  $n-1$*

$$y_f(s) = \dots + \frac{R_{n-1}s^{n-1} + \dots + R_1}{q(s)}$$

grado  $q(s) = n$

**Teorema 4.10** (Trasformata). *Usata per la rampa*

$$t \frac{k}{k!} \rightarrow \frac{1}{s^{k+1}}$$

**Esempio 4.4** (Studio  $y_f$  per altri ingressi).

$$W(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

1. senoide

$$u(t) = \sin(wt) \Rightarrow u(s) = \frac{1}{s^2+1}, w = 1$$

$$y_f(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s^2+1)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3s+R_4}{s^2+1}$$

$$R_1 = 1/2, R_2 = -1/3$$

$$y_f(s) = \frac{1/2}{s+1} + \frac{-1/3}{s+2} + \frac{R_3s + R_4}{s^2 + 1} \quad \text{per ogni } s \text{ che non annulla il denominatore}$$

Scelgo  $s = 0$

$$\frac{1}{(0+1)(0+2)(0^2+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} + R_4 \Rightarrow R_4 = 1/10$$

Scelgo  $s = 1$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{15} + \frac{R_3}{2} + \frac{1}{20} \Rightarrow R_3 = \frac{13}{2}$$

2. rampa

$$u(t) = t\delta_{-1}(t), u(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$R_1 = 1, R_2 = -1/4, R_4 = -3/4$$

Moltiplico per  $s^2$  e derivo per  $s$ , cerco  $R_3$

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{R_1s^2}{s+1} + \frac{R_2s^2}{s+2} + R_3s + R_4 \right)$$

$R_3$  è il residuo per  $s$ , quindi ora faccio il limite per  $s \rightarrow 0$

$$\lim_{s \rightarrow 0} -\frac{2s+3}{(s+1)^2(s+2)} = \lim_{s \rightarrow 0} (\dots + R_3) = 0 + 0 + R_3 = -3/4$$

#### 4.5.5 Pulsazione e fase

**Esempio 4.5** (Pulsazione  $w = 1$ ).

$$w(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, u(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$y_f(s) = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3s + R_4}{s^2 + 1}$$

Prendendo le trasformate di sin e cos

$$\sin(wt) \rightarrow \frac{w^2}{s^2 + w^2}, \cos(wt) \rightarrow \frac{s^2}{s^2 + w^2}$$

dividiamo il termine con  $sR_3 + R_4$  e moltiplichiamo  $R_4$  per  $w/w$ , che risulta in

$$s \frac{R_3}{s^2 + 1} + \frac{R_4}{s^2 + 1} w/w = R_3 \mathcal{L} \cos(t) + R_4 \mathcal{L} \sin(t)$$

considerando che  $w = 1$  esce così. Quindi ora sappiamo la  $y_f(t)$ .

$$y_f(t) = R_1 e^{-t} + R_2 e^{-2t} + R_3 \cos(t) + R_4 \sin(t)$$

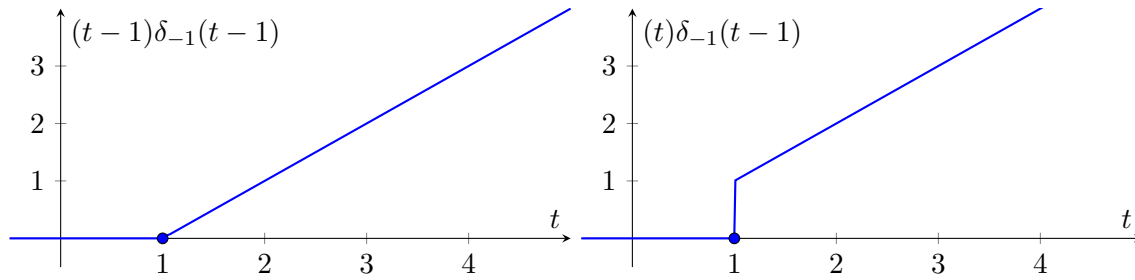
Ora il nostro obiettivo è scrivere  $R_3$  e  $R_4$  e useremo le formule di prostaferesi.

$$n \sin(t + \varphi) = M \sin(t) \cos(\varphi) + M \cos(t) \sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow R_3 = M \sin(\varphi) \text{ e } R_4 = M \cos(\varphi).$$

$$\sqrt{R_3^2 + R_4^2} = \sqrt{M^2(\sin^2 + \cos^2)} = M, \varphi = \arctan \frac{R_3}{R_4}$$

essendo  $M$  il guadagno di  $W$ ,  $M = |W(s)|_{s=jw}$ ,  $\varphi = \angle w(s)|_{s=jw}$



#### 4.5.6 Segnali

Prendiamo un segnale rampa sfasato di 1 in positivo,  $(t-1)\delta_{-1}(t-1)$  e uno che inoltre è sfasato in altezza di 1, possiamo fare un cambio di variabile sulla seconda  $t-1 = \xi \Rightarrow (\xi+1)\delta_{-1}(\xi) = \xi\delta_{-1}(\xi) + \delta_{-1}(\xi)$

**Definizione 4.9** (Trasformata gradino traslato). La trasformata traslata si calcola come

$$\int_0^\infty \delta_{-1}(t-1)e^{-st}dt = \int_1^\infty e^{-st}dt$$

$$t-1 = \xi, t \rightarrow 1 \Rightarrow \xi \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \Rightarrow \xi \rightarrow \infty, dt = d\xi$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-s(\xi+1)}d\xi &= e^{-s} \int_0^\infty e^{-s\xi}d\xi \\ &= e^{-s}\mathcal{F}(\delta_{-1}(t)) = \frac{e^{-s}}{s} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(t-a)\delta_{-1}(t-a) \rightarrow F(s)e^{-as}$$

**Definizione 4.10** (Calcolo segnale traslato). Calcolo segnale non traslato, traslo  $y_f(t)$

$$\begin{aligned} w(s) &= \frac{s+1}{s+3}, u(t) = \delta_{-1}(t-2) \\ \hat{u}(t) &= \delta_{-1}(t), \hat{y}_f(t) \\ y_f(s) &= \frac{s+1}{(s+3)s}, \hat{y}_f(t) = (1/3 + 2/3e^{-3t})\delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

Ora però abbiamo un segnale non traslato, però sappiamo che  $y_f(t) = \hat{y}_f(t-2)$

$$y_f(t) = (1/3 + 2/3e^{-3(t-2)})\delta_{-1}(t-2)$$

ci sarebbe un altro metodo ma è inutile e più complicato.

**Esempio 4.6** (Segnali "composti"). L'obiettivo è che dato il grafico di  $u(t)$  sappiamo ricavare la funzione. In questo caso è un insieme di rampe traslate.

$$u'(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 & 1 < t < 2 \\ 0 & 2 < t < 4 \\ -1 & 4 < t < 5 \\ 0 & t > 5 \end{cases}$$

la formula finale viene un'unione di rampe che essendo sfasate modificano la pendenza nei vari  $t$

$$u(t) = (t-1)\delta_{-1}(t-1) - (t-2)\delta_{-1}(t-2) - (t-4)\delta_{-1}(t-4) + (t-5)\delta_{-1}(t-5)$$

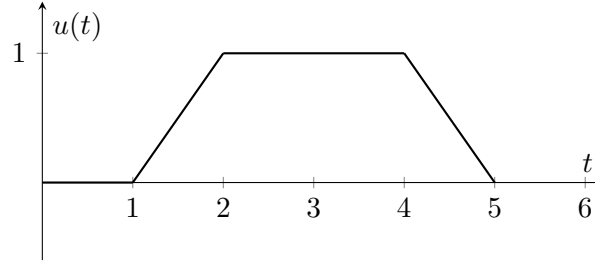


Figura 5: Segnale "composto"

Dobbiamo calcolare adesso  $y_f(t)$  e facciamo con il metodo descritto prima.

$$\hat{u} = t\delta_{-1}(t) \rightarrow \hat{u} = 1/s^2$$

$$\hat{y}_f(s) = \frac{1}{(s+1)s^2} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s^2} + \frac{R_3}{s}$$

$$\hat{y}_f(\xi) = (R_1 e^{-3} + R_2 e\xi + R_3)\delta_{-1}\xi$$

$$y_f(t) = \hat{y}_f(t-1) - \hat{y}_f(t-2) - \hat{y}_f(t-4) + \hat{y}_f(t-5)$$

con  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 1$ ,  $R_3 = -1$

#### 4.5.7 Esercitazione

Da ora in poi  $w(s) = \frac{s+1}{s+3}$

1.

$$u(t) = \delta_{-1}(t), u(s) = 1/s, y_f(s) = \frac{s+1}{s(s+3)} = \frac{R_1}{s+3} + \frac{R_2}{s}$$

$$R_1 = \left[ \frac{s+1}{s} \right]_{s=-3} = 2/3$$

$$R_2 = \left[ \frac{s+1}{s+3} \right]_{s=0} = 1/3$$

$$y_f(t) = \frac{2}{3}e^{-3t} + 1/3$$

2.

$$u(t) = t\delta_{-1}(t), u(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$y_f(s) = \frac{s+1}{s^2(s+3)} = \frac{R_1}{s+3} + \frac{R_2 s + R_3}{s^2}$$

Calcoliamo gli immediati ( $R_1, R_3$ )

$$R_1 = \left[ \frac{s+1}{s^2} \right]_{s=-3} = -2/9$$

$$R_3 = \left[ \frac{s+1}{s+3} \right]_{s=0} = 1/3$$

Moltiplico per  $s^2$  e derivo

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{s+1}{s+3} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{s^2 R_1}{s+3} + R_2 s + R_3 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{(s+3)^2} = \frac{2R_1 s(s+3) + s^2 R_1}{(s+3)^2} + R_2$$

$$= \frac{s^2 R_1 + 6s R_1}{(s+3)^2} + R_2$$

Ora si può riapplicare la definizione con il limite applicato a entrambi i membri

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{(s+3)^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 R_1 + 6s R_1}{(s+3)^2} + R_2$$

$$\Leftrightarrow 2/9 = 0/9 + R_2 \Rightarrow R_2 = \frac{2}{9}$$

3.

$$u(t) = \sin(2t)\delta_{-1}(t), u(s) = \frac{2}{s^2 + 4}, w = 2$$

$$y_f(s) = \frac{s+1}{s+3} \frac{2}{s^2 + 4} = \frac{R_1}{s+3} + \frac{R_2 s + R_3}{s^2 + 4}$$

$$R_1 = \left[ \frac{2(s+1)}{s^2 + 4} \right]_{s=-3} = -4/13$$

Riprendendo 'Esempio 4.4' la subsection 'Pulsazione e fase', sappiamo che

$$y_f(s) = R_1/(s+3) + \dots \quad \forall s \text{ che non annullano il denominatore}$$

Quindi ora ho questa situazione

$$\frac{2(s+1)}{(s+3)(s^2+4)} = -\frac{4}{13(s+3)} + \frac{R_2 s + R_3}{s^2 + 4}$$

Prendendo  $s = 0$  diventa

$$\frac{2}{12} = -\frac{4}{39} + \frac{R_3}{4} \Rightarrow R_3 = 4(4/39 + 2/12) = \frac{16}{39} + \frac{1}{6} = \frac{14}{13}$$

Sostituendo  $R_3$  e ponendo  $s = 1$  troviamo che  $R_2 = \frac{4}{13}$ , ora come nell'esempio dobbiamo ricondurci alla trasformata di sin e cos

$$\frac{4}{13} \left( \frac{s}{s^2 + 4} \right) + \frac{14}{13} \left( \frac{1}{s^2 + 4} \right) = \dots + \frac{14}{13 \cdot 2} \left( \frac{2}{s^2 + s^2} \right)$$

moltiplicando per  $2/2$  abbiamo messo nella forma della trasformata di  $\cos(2t)$  e  $\sin(2t)$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}(y_f(s)) = \left( -\frac{4}{13}e^{-3} + \frac{4}{13}\cos(2t) + \frac{7}{13}\sin(2t) \right) \delta_{-1}(t)$$

4.

$$y^{(3)} + 3y^{(2)} + (2+k)\dot{y} + ky = u$$

rappresentare spazio di stato e determinare stabilità

$$y = x_1, \dot{y} = x_2, y^{(2)} = x_3$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_3 - (2+k)x_2 - kx_1 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -(2+k) & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (1 \quad 0 \quad 0)$$

Per la stabilità si usa l'equazione differenziale con Routh

$$P_a(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + (2+k)\lambda + k$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2+k \\ 2 & 3 & k \\ 1 & 6+2k & 0 \\ 0 & k & \end{array}$$

condizioni

$$\begin{cases} 2+k > 0 \Leftrightarrow k > -2 \\ k > 0 \\ 6+2k > 0 \Leftrightarrow k > -3 \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ sistema AS } \forall k > 0$$

per  $k = 0$

$$P_a(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 2)$$

che ha  $\lambda = 0$  e per cartesio  $\lambda < 0 \Rightarrow$  stabilità semplice,  $k < 0 \Rightarrow$  instabile

## 4.6 Risposta transitoria e a regime permanente

**Definizione 4.11** (Risposta a regime permanente). Condizioni necessarie

1. sistema stabile
2. modi osservabili convergenti

$$y_r(t) = \int_{-\infty}^t w(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

### 4.6.1 Ingresso sinusoidale

$$u(t) = \sin(wt) = \frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2j}$$

$$y_r(t) = \frac{1}{2j} \left( \int_{-\infty}^t w(t-\tau)e^{jw\tau}d\tau - \int_{-\infty}^t w(t-\tau)e^{-jw\tau}d\tau \right)$$

cambio di variabile  $t - \tau = \xi$

$$- \int_{\infty}^0 w(\xi)e^{jw(t-\xi)}d\xi = e^{jw t} \int_0^{\infty} w(\xi)e^{-jw\xi}d\xi$$

prendendo la definizione della trasformata  $\int_0^{\infty} w(t)e^{-st}dt$  diventa

$$= e^{jw t} w(s)|_s = jw$$

$$\Rightarrow y_r(t) = \frac{1}{2j} (e^{jw t} w(jw) - e^{-jw t} w(-jw))$$

- $w(jw) = M(jw)e^{j\varphi(w)}$
- $w(-jw) = M(jw)e^{-j\varphi(w)}$

$$y_r(t) = \frac{1}{2j} (e^{jw t} M e^{j\varphi} - e^{-jw t} M e^{-j\varphi}) = M \frac{e^{j(wt+\varphi)} - e^{-j(wt-\varphi)}}{2j} = M \sin(wt + \phi)$$

**Esempio 4.7** ( $w=1$ ).

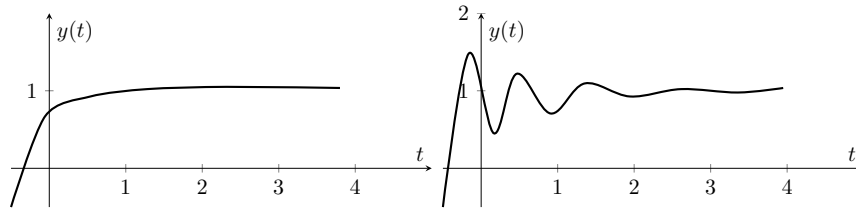
$$w(s) = \frac{1}{s+1}, u(t) = \sin(t), u(s) = \frac{w^2}{s^2 + w^2}$$

$$y_t(s) = M \sin(t + \varphi)$$

$$w(jw) = \frac{1}{j+1} = \frac{1-j}{2}$$

(razionalizzando)

$$M = \sqrt{1/4 + 1/4} = \sqrt{1/2}, \varphi = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$



#### 4.6.2 Ingresso polinomiale

1.  $\delta_{-1}(t)$ ,  $u(s) = 1/s$

$$y_f(s) = w(s) \frac{1}{s} = \sum_{i=1} \frac{R_i}{s - \lambda_i} + \frac{R_0}{s}$$

**Definizione 4.12** (Guadagno).  $R_0$  è il guadagno di  $W(s)$

se  $\text{Re} < 0 \Rightarrow \sum_{i=1} R_i e^{\lambda_i t} \rightarrow 0$

**Definizione 4.13** (Risposta indiciale). Risposta al gradino

**Definizione 4.14** (Valore di regime).  $w(s = 0)$

**Definizione 4.15** ( $t_s$  tempo di salita). • se  $\exists$  il primo istante in cui assume valore regime

- temp che impiega per passare dal 10/100 al 90/100 del valore di regime

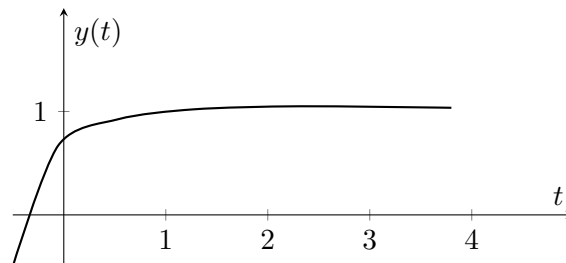
**Definizione 4.16** ( $\hat{s}$  sovraelongazione). valore max di differenza con valore di regime

**Definizione 4.17** ( $t_a$  tempo di assestamento).  $t$  per entrare in un range limitato (simile definizione di limite)

**Esempio 4.8** (Risposta al gradino).

$$y_f(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$y_f(t) = (1 - e^{-t})\delta_{-1}(t)$$



$$\hat{s} = 0$$

$$y_f(t_1) = 1 - e^{-t_1} = 10/100$$

$$y_f(t_2) = 1 - e^{-t_2} = 90/100$$

$t_a$  con soglia 2/100. Nel caso con  $k_0$  generico viene

$$\begin{cases} y_{f1} = k_0 - e^{\lambda t_1} = 10/100 k_0 \\ y_{f2} = k_0 - e^{\lambda t_2} = 90/100 k_0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{\lambda t_1} = 90/100 k_0 \\ e^{\lambda t_2} = 10/100 k_0 \end{cases}$$

$$\frac{e^{\lambda t_1}}{e^{\lambda t_2}} = e^{\lambda(t_1 - t_2)} = 9$$

$$\Rightarrow t_1 - t_2 = \frac{\ln(9)}{\lambda} \Leftrightarrow t_2 - t_1 = -\frac{\ln(9)}{\lambda}$$



abbiamo  $\lambda = -1$  quindi  $t_s = \ln(9)$

$$y_f(t_a) = (1 - 2/100)k_0 = 1 - e^{-\lambda t_a} = 98/100$$

$$e^{-\lambda t_a} = 2/100 \Rightarrow t_a = \ln\left(\frac{2}{100}\right)$$

**Esempio 4.9** (Approssimazione). se abbiamo  $\text{Re}(\lambda_2) \ll \text{Re}(\lambda_1)$ ,  $\lambda_2$  è trascurabile nel  $t_s$

$$y_f(s) = \frac{1}{(s+1)(s+100)s} = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+100}$$

$$k = w(s)|_{s=0} = 1/100$$

$$y_f(t) = (R_0 + R_1 e^{-t} + R_2 e^{-100t}) \delta_{-1}(t)$$

Poniamo che sia trascurabile

$$y_f(t_1) \approx R_0 + R_1 e^{-t_1} 10/100 \cdot R_0$$

$$y_f(t_2) \approx R_0 + R_1 e^{-t_2} = 90/100 \cdot R_0$$

2.  $u(t) = \frac{t^k}{k!}$

$$y_r(t) = \int_{-\infty}^t w(t-\tau) \frac{\tau^k}{k!} d\tau$$

cambio variabile  $t - \tau = \xi$

$$- \int_{\infty}^0 w(\xi) \frac{(t-\xi)^k}{k!} d\xi$$

prendendo lo sviluppo del polinomio di newton  $(a+b)^k = \sum_{\eta=0}^k \binom{k}{\eta} a^{k-\eta} b^{\eta}$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} w(s) \frac{1}{k!} \sum_{\eta} \binom{k}{\eta} t^{k-\eta} (-\xi)^{\eta} d\xi \\ &= \sum_{\eta} \int_0^{\infty} w(\xi) \frac{1}{k!} \frac{k!}{\eta!(k-\eta)!} t^{k-\eta} (-\xi)^{\eta} d\xi \\ &= \sum_{\eta} \frac{t^{k-\eta}}{(k-\eta)!} \int_0^{\infty} w(\xi) (-1)^{\eta} \frac{\xi^{\eta}}{\eta!} d\xi \end{aligned}$$

con  $c_{\eta} = \int_0^{\infty} w(\xi) (-1)^{\eta} \frac{\xi^{\eta}}{\eta!} d\xi$ . Un modo veloce per calcolarlo è

$$c_0 = w(s)|_{s=0}, \quad c_1 = \frac{dw}{ds}|_{s=0}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2 w}{ds^2}|_{s=0}, \quad \dots$$

## 5 Risposta forzata

### 5.1 Diagramma di Bode

I diagrammi di Bode sono un modo per rappresentare la funzione di trasferimento di un sistema in forma grafica. Otteniamo due grafici, uno per la parte reale e uno per la parte immaginaria. Per fare questi grafici la funzione va messa in forma  $\frac{N(s)}{D(s)}$  con  $s = jw$ .

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_i (s - p_i)} = k \frac{\prod_i (1 + \tau_i s) \prod_k \left(1 + 2 \frac{z_k}{w_{n_k}} s + \frac{s^2}{w_{n_k}^2}\right)}{s^r \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_k \left(1 + \frac{2z_k}{w_{n_k}} s + \frac{s^2}{w_{n_k}^2}\right)}$$

dove

- $k$  gain
- $s$  termine monomio

- $1 + \tau s$  termine binomio
- $1 + \frac{2z}{w_n}s + \frac{s^2}{w_n^2}$  termine trinomio
- $\tau$  costante di tempo

Ricordando poi  $\xi = -\frac{\alpha}{w_n}$  e  $w_n = \sqrt{\alpha^2 + w^2}$ . Scriviamo il termine trinomio in questa forma

$$1 + as + bs^2$$

così facendo possiamo considerare  $w_n^2 = \frac{1}{b}$  e  $w_n = \frac{1}{\sqrt{b}}$ , analogamente  $a = \frac{2z}{w_n}$ .

**Definizione 5.1** (Gain). Si misura in dB (decibel).

$$|F(jw)| = 20 \log_{10}(|F(jw)|)$$

**Definizione 5.2** (Fase). Si misura in gradi/radiani.

$$\angle F(jw)$$

### 5.1.1 Guadagno

Il guadagno è la  $k$  di  $F(s)$ . Il grafico è relativamente semplice.

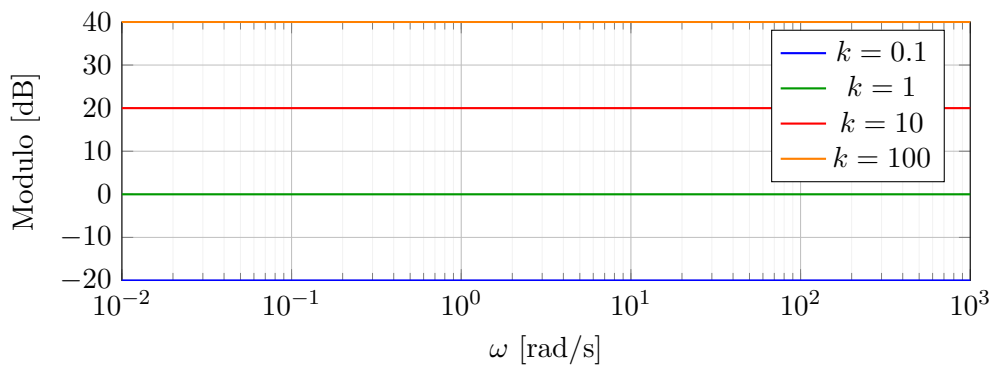


Figura 6: Diagramma di Bode - Modulo del guadagno  $k$

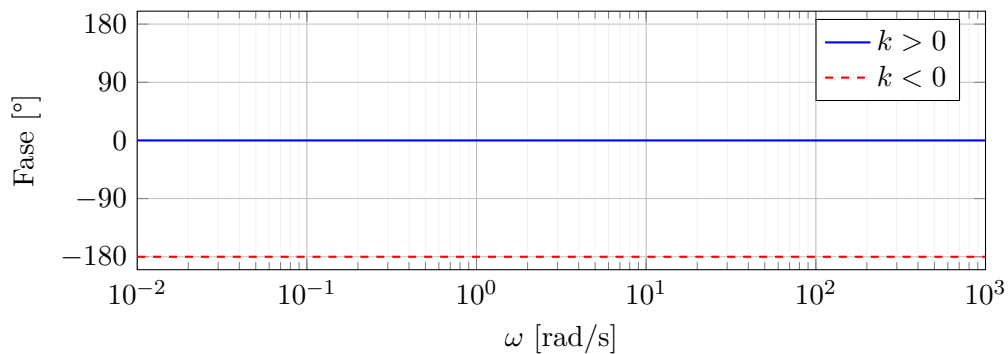


Figura 7: Diagramma di Bode - Fase del guadagno  $k$

### 5.1.2 Termine monomio

In questo caso distinguiamo se il termine monomio è al numeratore o al denominatore. Primo passo trovare il punto di rottura.

**Definizione 5.3** (Punto di rottura).

$$\frac{1}{\tau}$$

dove interseca l'asse delle frequenze.

Analizziamo i due casi:

- numeratore:  $M = 20 \log_{10}(w)$  retta con pendenza positiva 20 dB/dec
- denominatore:  $M = -20 \log_{10}(w)$  retta con pendenza negativa -20 dB/dec

tutte e due centrate in  $\frac{1}{\tau}$ .

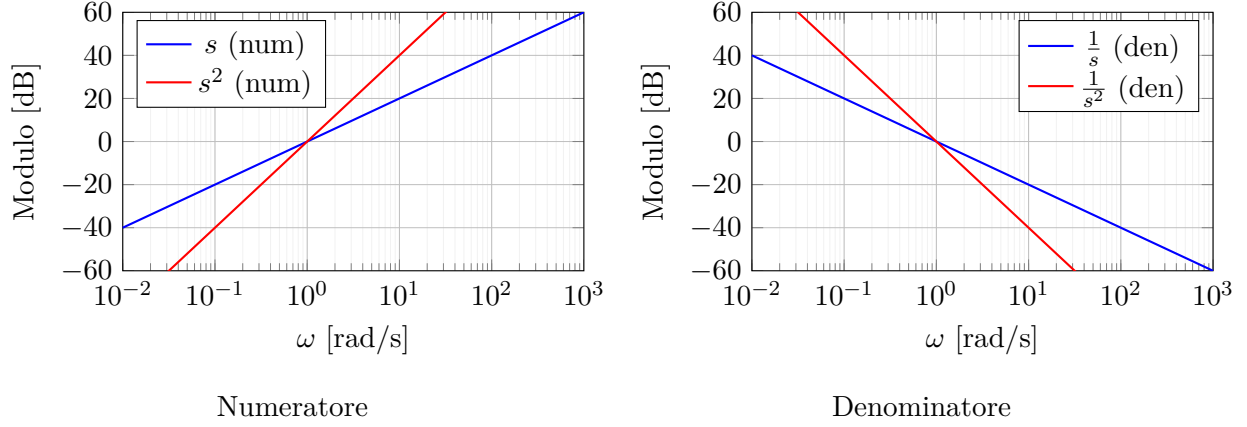


Figura 8: Diagramma di Bode - Modulo del termine monomio  $s^r$

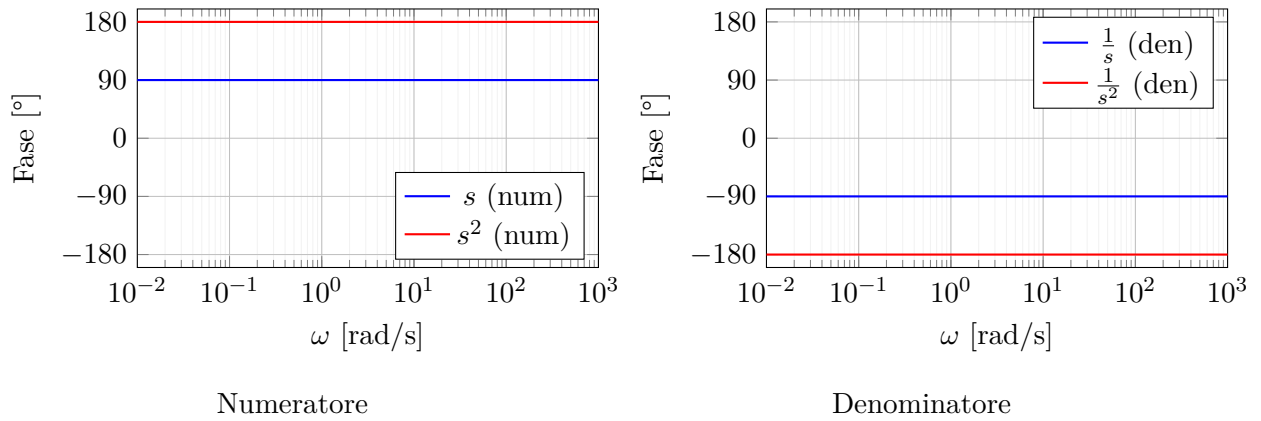


Figura 9: Diagramma di Bode - Fase del termine monomio  $s^r$

**Osservazione 5.1** (Somma dei grafici). Notiamo che con il termine  $s^2$  la pendenza raddoppia, questo perchè i grafici di fatto vengono sommati. Questo vale in generale per tutti i termini, quindi il grafico finale sarà la somma dei grafici individuali. Questo perchè il modulo è espresso in dB, dunque le proprietà dei logaritmi ci permettono di sommare e i grafici. Vale anche per la fase.

### 5.1.3 Termine binomio

Espresso nella forma  $1 + \tau s$ , abbiamo che modulo e fase sono

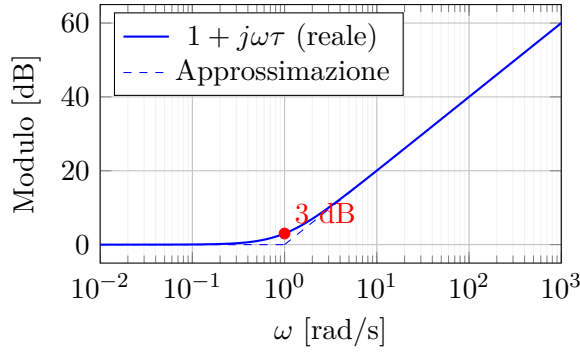
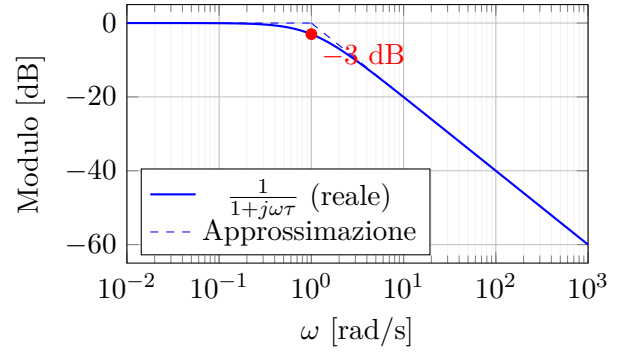
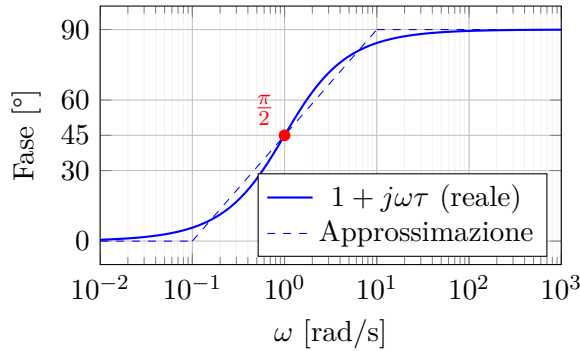
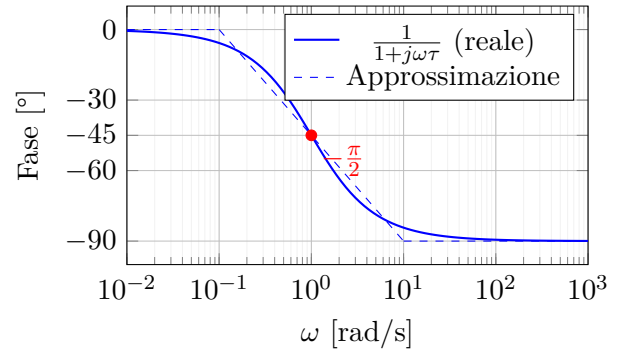
$$M = 20 \log_{10}(\sqrt{1 + w^2 \tau^2})$$

$$\varphi = -\arctan(w\tau)$$

Analizziamo come evolve questa funzione per capire il grafico

- $w = \frac{1}{|\tau|} \Rightarrow M = 20 \log_{10}(\sqrt{1 + \frac{1}{|\tau|^2} \tau^2}) = 20 \log_{10}(\sqrt{2}) \approx 3 \text{ dB}$
- $w \ll \frac{1}{|\tau|} \Rightarrow M \approx 0$
- $w \gg \frac{1}{|\tau|} \Rightarrow M \approx 20 \log_{10}(w) + 20 \log_{10}(|\tau|)$

Da qui si vede che nel punto di rottura c'è un errore di approssimazione, essendo  $M \approx 3 \text{ dB}$ .

Numeratore ( $\tau = 1$ )Denominatore ( $\tau = 1$ )Figura 10: Diagramma di Bode - Modulo del termine binomio  $1 + j\omega\tau$ Numeratore ( $\tau = 1$ )Denominatore ( $\tau = 1$ )Figura 11: Diagramma di Bode - Fase del termine binomio  $1 + j\omega\tau$ 

### 5.1.4 Termine trinomio

$$1 + 2\xi \frac{jw}{w_n} + \frac{(jw)^2}{w_n^2}$$

il modulo risulta come

$$M = 20 \log_{10} \left( \sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{w}{w_n}\right)^2} \right)$$

- $w \ll w_n \Rightarrow M \approx 20 \log_{10}(1) = 0$
- $w \gg w_n \Rightarrow M \approx -40 \log_{10}\left(\frac{w}{w_n}\right)$
- $w = w_n \Rightarrow M \approx -20 \log_{10}(2|\xi|)$

In particolare nel caso  $w = w_n$ ,  $M$  si annulla per  $\xi = \frac{1}{2}$  e il termine trinomio si riduce a binomio se  $|\xi| = 1 \Rightarrow M = -20 \log_{10}(2) = -6$  (x2 binomio). Per  $\xi = 0$  l'amplificazione è infinita.

## 5.2 Diagramma polare

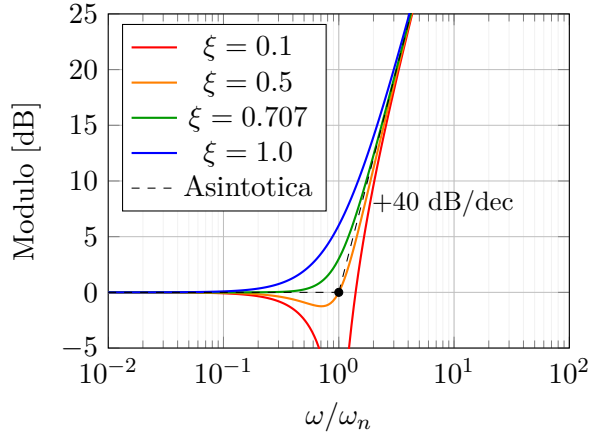
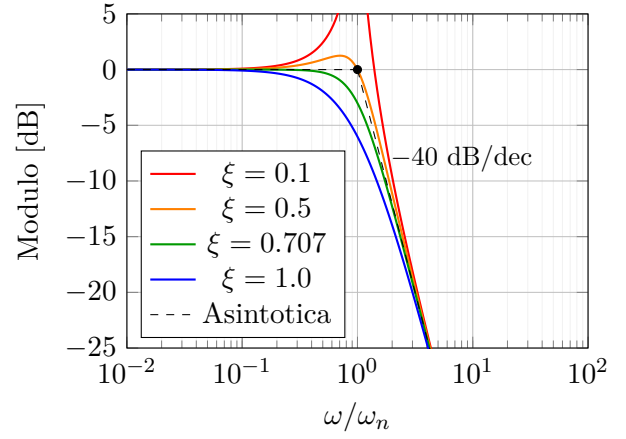
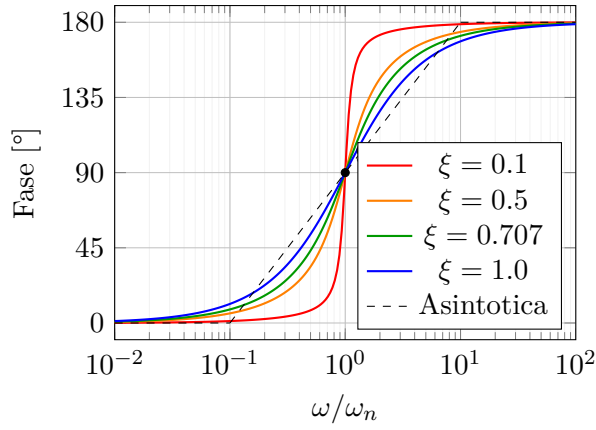
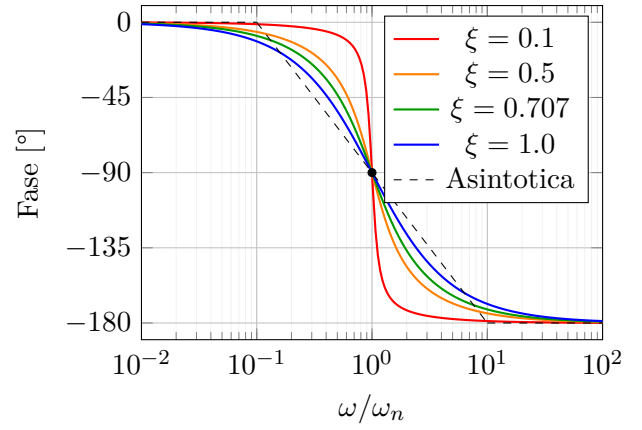
Partiamo con l'osservare che il modulo è una funzione pari, mentre la fase dispari. Il diagramma polare ha l'asse immaginario sulle y e reale sulle x.

### Esempio 5.1.

$$F(s) = \frac{s + 10}{s(s + 5)} = \frac{10(1 + s/10)}{5s(1 + s/5)} = 2 \frac{1 + s/10}{s(1 + s/5)}$$

Analizziamo i componenti:

- Guadagno  $k = 2 \Rightarrow 20 \log_{10}(2) \approx 6$  dB.

Numeratore ( $\omega_n = 1$ )Denominatore ( $\omega_n = 1$ )Figura 12: Diagramma di Bode - Modulo del termine trinomio  $1 + 2\xi \frac{jw}{\omega_n} + \frac{(jw)^2}{\omega_n^2}$ Numeratore ( $\omega_n = 1$ )Denominatore ( $\omega_n = 1$ )Figura 13: Diagramma di Bode - Fase del termine trinomio  $1 + 2\xi \frac{jw}{\omega_n} + \frac{(jw)^2}{\omega_n^2}$ 

- Polo nell'origine  $1/s$ : pendenza -20 dB/dec, fase fissa  $-90^\circ$ .
- Polo in  $\omega_p = 5$ : pendenza scende di altri 20 dB/dec (totale -40), fase scende.
- Zero in  $\omega_z = 10$ : pendenza sale di 20 dB/dec (totale torna a -20), fase sale.

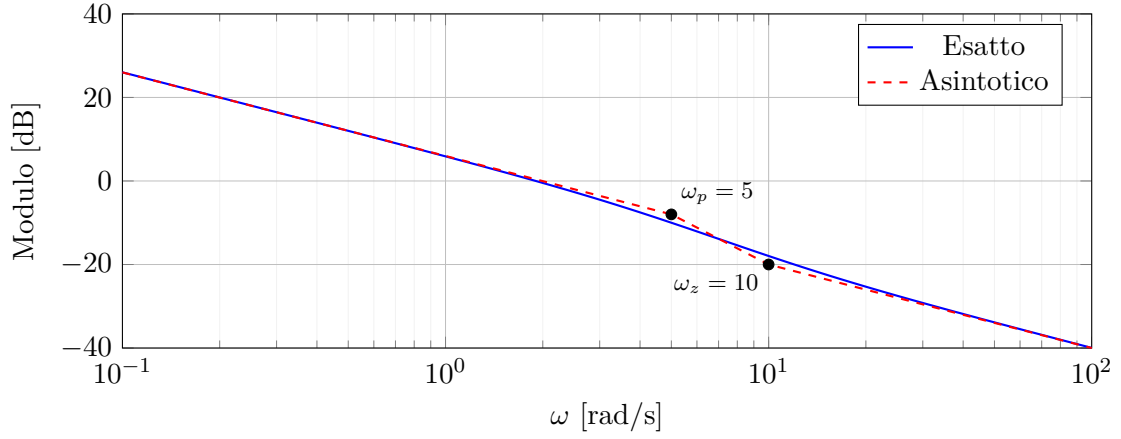


Figura 14: Diagramma di Bode - Modulo

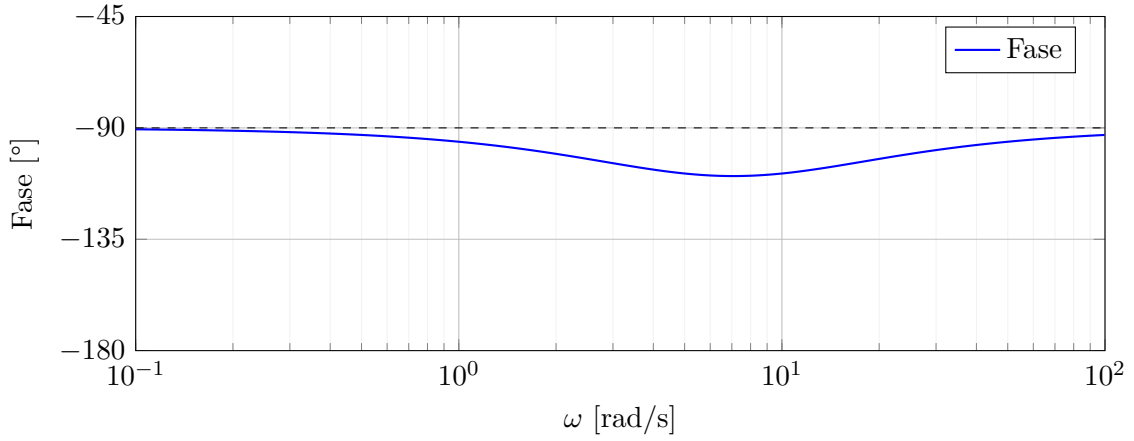


Figura 15: Diagramma di Bode - Fase

**Proposizione 5.1** (Mezzi giri). *Servono a chiudere il diagramma polare.*  
 *$n$  mezzi giri =  $n$  poli in zero*

Il mezzo giro chiude il diagramma sulla destra, da  $0^-$  a  $0^+$ .

Figura 16: Diagramma polare

## 5.3 Risposta forzata a tempo discreto

### 5.3.1 Trasformata Z

**Definizione 5.4** (Trasformata Z).

$$\mathcal{Z}[f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)}{z^k} = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots$$

$$\mathcal{Z}[x(k+1)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x(k+1)}{z^k} = \frac{x(1)}{1} + \frac{x(2)}{z} + \frac{x(3)}{z^2} + \dots = z \left( \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \dots + x(0) - x(0) \right) = z(x(z) - x(0))$$

Da qui ricaviamo il seguente teorema per riscrivere la forma implicita in forma esplicita

**Teorema 5.1** (Teorema della traslazione a sinistra).

$$\begin{aligned} \begin{cases} zx(z) - z(x(0)) = Ax(z) + Bu(z) \\ y(z) = Cx(z) + Du(z) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (zI_d - A)x(z) = zx(0) + Bu(z) \\ y(z) = Cx(z) + Du(z) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (zI_d - A)x(z) - Bu(z) = zx(0) \\ y(z) = Cx(z) + Du(z) \end{cases} \\ &\begin{cases} x(z) = (zI - A)^{-1}zx(0) + (zI - A)^{-1}Bu(z) \\ y(z) = C(zI - A)^{-1}zx(0) + (C(zI - A)^{-1}B + D)u(z) \end{cases} \end{aligned}$$

### Trasformate importanti

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\delta(k)] &= 1 \\ \mathcal{Z}[\delta_{-1}(k)] &= 1 + 1/z + 1/z^2 + \dots = \frac{z}{z-1} \\ \mathcal{Z}[\lambda^k] &= 1 + \frac{\lambda}{z} + \frac{\lambda^2}{z^2} + \dots = 1 + \frac{1}{z/\lambda} + \dots = \frac{z/\lambda}{z/\lambda - 1} = \frac{z}{z-\lambda} \\ \mathcal{Z}[\sin(wk)] &= \frac{e^{jwk} - e^{-jwk}}{2j} = \frac{1}{2j} \mathcal{Z}[e^{jwk} - e^{-jwk}] = \frac{1}{2j} \left( \frac{z}{z - e^{jw}} - \frac{z}{z - e^{-jw}} \right) = \frac{z \sin(w)}{z^2 - 2z \cos(w) + 1} \end{aligned}$$

## 5.4 Modello esplicito tempo discreto

**Definizione 5.5** (Modello esplicito).

$$\begin{cases} x(k) = A^k x(0) + \sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-1-\tau} Bu(\tau) \\ y(k) = CA^k x(0) + \sum_{\tau=0}^{k-1} CA^{k-1-\tau} Bu(\tau) + Du(k) \end{cases}$$

Da qui torniamo all'espressione del modello esplicito con la trasformata Z e possiamo dedurre le antitrasformate

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[A^k x(0)] &= (zI_d - A)^{-1}zx(0) \\ \mathcal{Z}[A^k] &= (zI_d - A)^{-1}z \\ \mathcal{Z}[f(k-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k-1)}{z^k} = f(-1) + \frac{f(0)}{z} + \frac{f(1)}{z^2} + \dots = \frac{f(z)}{z} \end{aligned}$$

considerando che  $f(-1) = 0$

$$\mathcal{Z}[A^{k-1}B] = \frac{1}{z}(zI_d - A)^{-1}zB = (zI_d - A)^{-1}B$$

usando la formula di sopra

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[CA^k x(0)] &= C(zI_d - A)^{-1}zx(0) \\ \mathcal{Z}[CA^k] &= C(zI_d - A)^{-1}z \\ \mathcal{Z}[W(k)] &= c(zI_d - A)^{-1}B + D \end{aligned}$$

**Esempio 5.2** (Risposta forzata). il meccanismo è lo stesso del tempo continuo, useremo l'antitrasformata di  $f(z)u(z)$  con le frazioni parziali

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(2z-1)(3z+1)}, \quad u(z) = \frac{z}{z-1} \text{ gradino} \\ y_f(z) = f(z)u(z) &= \frac{z}{(2z-1)(3z+1)} \frac{z}{z-1} = \frac{R_1}{z-1/2} + \frac{R_2}{z+1/3} + \frac{R_3}{z-1} \\ \frac{y_f(z)}{z} &= \frac{z}{(2z-1)(3z+1)(z-1)} = \dots \end{aligned}$$

ricaviamo le frazioni parziali come nel tempo continuo

$$R_1 = -\frac{1}{5}, R_2 = -\frac{1}{20}, R_3 = \frac{1}{4}$$

moltiplichiamo di nuovo per  $z$  e facciamo l'antitrasformata, essendo tornata nella forma per fare l'antitrasformata della risposta forzata.

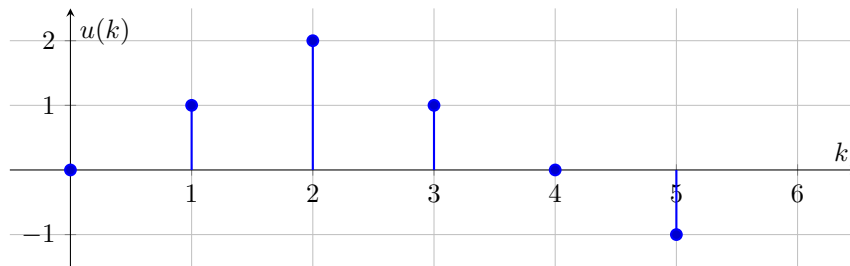
$$y_f(k) = -\frac{1}{5}\delta(k) - \frac{1}{20}\delta_{-1}(k) + \frac{1}{4}\delta_{-2}(k)$$

**Definizione 5.6** (Guadagno).

$$G = F(z=1) = \frac{1}{4}$$

**Esempio 5.3** (Da grafico a risposta forzata).

$$F(z) = \frac{1}{2z-1}$$



$u(z)$  si può vedere come dice la definizione, quindi come una sommatoria.  $u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k}$ . Essendo a tempo discreto invece di infinito possiamo direttamente mettere l'ultimo valore dove la funzione è diversa da zero, tanto gli altri termini saranno nulli.  $u(z) = \frac{u(0)}{z^0} + \frac{u(1)}{z^1} + \frac{u(2)}{z^2} + \dots$ , abbiamo i valori di  $u$  per gli istanti richiesti, sostituiamo nella formula.

$$u(z) = 1/z + 2/z^2 + 1/z^3 - 1/z^5$$

$$y_f(z) = \frac{1}{2z-1} \left( \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^5} \right)$$

$$\frac{y_f(z)}{z} = \frac{1}{2z-1} \left( \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^6} \right)$$

si risolve calcolando i poli, frazioni parziali, riportando  $z$  a destra e facendo l'antitrasformata.

## 5.5 Esercizi

### 5.5.1 Esercitazione

1. Tracciare diagramma di bode e polare

$$F(s) = k \frac{s-10}{(1+5s)(s^2+1)}$$

2. Calcolare risposta forzata e a regime permanente (se esiste)

$$F(z) = \left( \frac{z+1}{2z-1} \quad \frac{1}{(2z-1)(3z+1)} \right)$$

3. Studio stabilità interna/esterna e stato zero

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} u(t) \end{cases} y(t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} x(t)$$

4. Calcolare funzione di trasferimento a tempo discreto con  $T = 1$  sec

$$F(s) = \frac{1}{s+1}$$

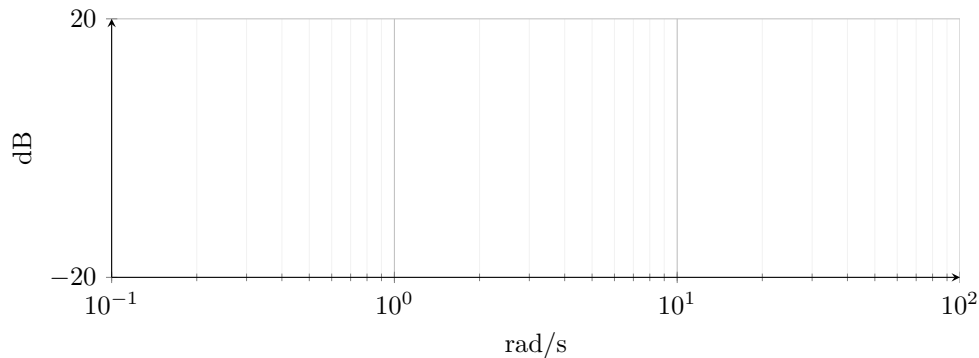


## Soluzione

**1** Mettiamo in forma di Bode (poli-zeri)

$$F(s) = k \frac{-10(1 - s/10)}{(1 + 5s)(s^2 + 1)}$$

Quindi abbiamo un termine binomio al numeratore con  $\tau = 10^{-1}$ , uno al denominatore con  $\tau = 5^{-1}$  e un termine trinomio con  $\xi = 0$ . I punti di rottura sono 10 e 5. Per il trinomio dobbiamo calcolare  $w_n$  ma per come è scritto sappiamo che  $w_n = 1$ , quindi l'ultimo punto di rottura è  $10^0$ . Bode:



## 6 Proprietà dello stato

### 6.1 Osservabilità

**Definizione 6.1** (Indistinguibilità degli stati).  $x_{0a}$  e  $x_{0b}$  si dicono indistinguibili se, indipendentemente da un sistema di controllo, l'uscita che dipende da  $x_{0a}$  è uguale a quella che dipende da  $x_{0b}$

#### 6.1.1 Caso discreto

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Dati  $x_{0a}$  e  $x_{0b}$  indistinguibili  $\Rightarrow y_a(k+j) = y_b(k+j) \forall j \geq 0 \forall u$  Possiamo porre  $u = 0$ , quindi avremo che

$$y_a(0) = Cx_{0a} = Cx_{0b} = y_b(0)$$

$$y_a(1) = CAx_{0a} = CAx_{0b} = y_b(1)$$

$$y_a(1) = CA^2x_{0a} = CA^2x_{0b} = y_b(1)$$

fino a

$$y_a(j) = CA^j x_{0a} = CA^j x_{0b} = y_b(j) \forall j \geq 0$$

$$\Leftrightarrow CA^j (x_{0a} - x_{0b}) = 0$$

Poniamo  $\bar{x} = x_{0a} - x_{0b}$  che risulta essere "indistinguibile da zero". Questo implica che  $CA\bar{x} = 0$  ecc...

**Teorema 6.1** (Teorema di Hamilton).

$$A^n = -a_0 I_d - a_1 A - \dots - a_{n-1} A^{n-1}$$

dove  $a_0, \dots, a_{n-1}$  sono i coefficienti del polinomio caratteristico di  $A$

$$\Rightarrow CA^n = -a_0 C - a_1 CA - \dots - a_{n-1} CA^{n-1}$$

**Definizione 6.2** (Matrice di osservabilità).

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{O}\bar{X} = 0$$

Se ha rango pieno la soluzione è quella banale  $\rightarrow$  il sistema è tutto osservabile.

### 6.1.2 Caso continuo

L'approccio è analogo (prendiamo  $t = 0$ )

$$\begin{aligned} y_a(y) &= Ce^{At}x_{0a} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = y_b(y) = Ce^{At}x_{0b} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &\Leftrightarrow Ce^{At}x_{0a} = Ce^{At}x_{0b} \\ &\Leftrightarrow Ce^{At}(x_{0a} - x_{0b}) = 0 \forall t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow Ce^{At}\bar{X} = 0 \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

deriviamo e notiamo che ogni derivata è uguale a 0

$$CAe^{At}\bar{x} = 0 \Rightarrow CA\bar{x} = 0$$

ecc... quindi come prima abbiamo  $CA^j\bar{x} = 0 \forall j \geq 0$ .

**Definizione 6.3** (Matrice del cambio di coordinate).

$$T^{-1} = (\text{completamento } \bar{x}), \text{rank}(T^{-1}) = n - k$$

dove il completamento ha  $n - k$  colonne,  $\bar{x}$  ha  $k$  colonne e  $\bar{x}$  è la base del kernel.

quando cambiamo le coordinate possiamo riscrivere le matrici come  $\tilde{A} = T^{-1}AT$ ,  $\tilde{B} = TB$ ,  $\tilde{C} = CT^{-1}$

$$\tilde{C} = [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2] = C(\text{completamento } \text{base } \bar{x})$$

sappiamo che  $c\bar{x} = 0 \Rightarrow \tilde{C}_2 = 0$

$$\Rightarrow \tilde{C}_1 = C[\tilde{C}_1 \quad 0]$$

Per la matrice  $\tilde{A}$  c'è un approccio simile.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}$$

**Proposizione 6.1** (A invarianza).

$$\bar{x} \in \ker \Rightarrow A\bar{x} \in \ker$$

Se usiamo una base  $\bar{x}$  in  $I_d$  del kernel,  $z = T\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_d \end{pmatrix}$  e quindi

$$\begin{aligned} \tilde{A} \begin{pmatrix} 0 \\ I_d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \tilde{A}_{12} = 0 \end{aligned}$$

quindi ora

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}$$

Possiamo dividere il sistema originario in 2 sistemi

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{pmatrix} z + \tilde{D}u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \tilde{A}_{11}z_1 + \tilde{B}_1u \\ \dot{z}_2 = \tilde{A}_{21}z_1 + \tilde{A}_{22}z_2 + \tilde{B}_2u \\ y = \tilde{C}_1z_1 + \tilde{D}u \end{cases}$$

siano  $s_1$  e  $s_2$  i due sottosistemi

$$s_1 = \begin{cases} \dot{z}_1 = \tilde{A}_{11}z_1 + \tilde{B}_1u \\ y = \tilde{C}_1z_1 + \tilde{D}u \end{cases} \quad s_2 = \begin{cases} \dot{z}_2 = \tilde{A}_{21}z_1 + \tilde{A}_{22}z_2 + \tilde{B}_2u \\ y = \tilde{C}_2z_2 \end{cases}$$

riscrivendo per componenti il sistema possiamo determinare i modi osservabili

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \tilde{A}_{11}z_1 + \tilde{B}_1u \\ \dot{z}_2 = \tilde{A}_{21}z_1 + \tilde{A}_{22}z_2 + \tilde{B}_2u \\ y = \tilde{C}_1z_1 + \tilde{D}u \end{cases}$$

ricordando che gli autovalori di  $\tilde{A}$  sono quelli di  $A$ , che  $\tilde{A}_{12} = 0$ , sappiamo che gli autovalori di  $\tilde{A}$  sono quelli dei blocchi sulla diagonale. Nella scomposizione l'uscita  $y$  dipende solo da  $z_1$ , quindi i modi osservabili sono in  $\tilde{A}_{11}$ , quelli non osservabili in  $\tilde{A}_{22}$ .

**Corollario 6.1.** *gli autovalori di  $\tilde{A}_{11}$  sono osservabili, quelli di  $\tilde{A}_{22}$  non osservabili*

**Teorema 6.2** ( $W(t) = \tilde{C}e^{\tilde{A}t}\tilde{B} + \tilde{D}\delta(t)$ ). *Dimostrazione.*

$$W(s) = \tilde{C}(sI_d - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (sI_d - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1 & 0 \\ 0 & (sI_d - \tilde{A}_{22})^{-1}\tilde{B}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} + \tilde{D}$$

$$\begin{pmatrix} sI_d - \tilde{A}_{11} & 0 \\ 0 & sI_d - \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (sI_d - \tilde{A}_{11})^{-1} & 0 \\ * & (sI_d - \tilde{A}_{22})^{-1} \end{pmatrix}$$

e facendo i calcoli si arriva alla tesi (nella matrice c'è la trasformata di  $e^{\tilde{A}t}$ ) □

## 6.2 Raggiungibilità

Prendiamo un sistema a tempo discreto e condideriamo  $x(0) = 0$ . Da qui derivano

- $x(1) = Bu(0)$
- $x(2) = Ax(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1)$
- ecc...

che appartengono tutti a  $\text{Im}(B)$ . Quindi in  $l$  passi posso raggiungere  $x \in \text{Im}\{B, AB, \dots, A^{l-1}B\}$

**Definizione 6.4** (Matrice di raggiungibilità).  $\mathcal{R} = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{l-1}B)$

**Definizione 6.5** (Cambio coordinate).

$$T^{-1} = (\text{base R} \quad \text{completamento})$$

dove la base di R è nella forma  $\begin{pmatrix} I_d \\ 0 \end{pmatrix}$  ed è una base che genera il sottospazio di raggiungibilità.

**Proposizione 6.2** (A invarianza).

$$\bar{x} \in \text{span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} \Rightarrow A\bar{x} \in \text{span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\}$$

$\bar{z}$  è nel sottospazio di raggiungibilità perchè abbiamo  $T^{-1}$  con il completamento, scegliendo la forma  $\begin{pmatrix} I_d \\ 0 \end{pmatrix}$  possiamo esprimere i vettori  $\bar{z}$  come  $\begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , quindi usando solo le componenti della base di  $\mathcal{R}$ .

$$\bar{z} \in \tilde{R} \Rightarrow \tilde{A}\bar{z} \in \tilde{R}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A}_{21} = 0$$

questo zero si chiama "zero strutturale"

$$\tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Teorema 6.3** ( $W(z)$  è indipendente dalle coordinate). *Dimostrazione.*  $W(z) = C(zI_d - A)^{-1}B + D$ ,  $\tilde{A} = TAT^{-1}$ ,  $\tilde{B} = TB$ ,  $\tilde{C} = CT^{-1}$ ,  $\tilde{D} = D$  e sostituendo otteniamo

$$\tilde{W}(z) = CT^{-1}(zI_d - TAT^{-1})^{-1}TB + D$$

$I_d = TT^{-1}$ , sostituiamo e mettiamo le  $T$  ai lati della parentesi interna

$$\tilde{W}(z) = CT^{-1}(T(zI_d - A)T^{-1})^{-1}TB + D$$

ora con un'altra semplice proprietà  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  eleviamo e avremo due  $T$

$$CT^{-1}(T(T(zI_d - A))^{-1})TB + D$$

andiamo avanti con queste due proprietà che ci portano a

$$C(zI_d - A)^{-1}T^{-1}TB + D = C(zI_d - A)^{-1} + D = W(z)$$

□

Come nei casi precedenti possiamo dividere il sistema in due sottosistemi

$$\begin{cases} z_1(k+1) = \tilde{A}_{11}z_1(k) + \tilde{A}_{22}z_2(k) + \tilde{B}_1u(k) \\ z_2(k+1) = \tilde{A}_{22}z_2(k) \\ y(k) = \tilde{C}_1z_1(k) + z_2(k) + \tilde{D}u(k) \end{cases}$$

**Esempio 6.1** (caso semplice).

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(k)$$

gli stati raggiungibili sono nell'immagine di  $\begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  dividiamo lo stato in

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = 0 \end{cases}$$

sia  $x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$x_1(1) = b + u, \quad x_2(1) = 0$$

$\Rightarrow$  basta porre  $u = -b$  per ottenere  $x_1(1) = 0$ , in questo caso quindi per ogni punto  $x_0$  esiste un  $u$  tale che posso tornare all'origine.

**Esempio 6.2** (Studio osservabilità, raggiungibilità, decomposizioni, stabilità).

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ - & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

gli autovalori sono sulla diagonale  $\Rightarrow \lambda = \{-3, -1, 1\} \Rightarrow$  instabile internamente. Raggiungibilità:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathcal{R}) = 1$$

Il rango ci indica che la dimensione dell'immagine è 1, quindi  $\tilde{A}_{11}$  è  $1 \times 1$ .

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

quindi  $\lambda_1 = 1$  raggiungibile,  $\lambda_2 = -3$  non raggiungibile,  $\lambda_3 = -1$  non raggiungibile.

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Osservabilità:  $\text{rank}(\mathcal{O}) = 2 \Rightarrow$  la dimensione del kernel è 1,  $\bar{x} \in \ker(\mathcal{O}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$  osservabile.

### 6.3 Scomposizione di Kalman

**Definizione 6.6** (Sottospazi di  $R$  e  $O$ ). Siano  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{O}$  le matrici, possiamo definire dei sottospazi per dividere moti osservabili e raggiungibili

$$I = \text{span}\{\dots, w_{n-2}\}, \quad R = \text{span}\{\dots, w_k\}$$

- $\chi_1 = R \cap I$  raggiungibili e inosservabili
- $\chi_2 : \chi_1 \oplus \chi_2 = R$  raggiungibili e osservabili
- $\chi_3 : \chi_1 \oplus \chi_3 = I$  inosservabili e irraggiungibili
- $\chi_4 : \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 = R^n$  irraggiungibili e osservabili

**Definizione 6.7** (Matrice del cambio di base con  $\xi$ ).

$$T^{-1} = (\text{base}\xi_1 \quad \text{base}\xi_2 \quad \text{base}\xi_3 \quad \text{base}\xi_4)$$

Ora abbiamo di nuovo la possibilità di riscrivere  $A, B, C$  in altre coordinate, quindi per lo stesso motivo di sopra avremo gli stessi autovalori, nelle matrici sulla diagonale, con un blocco di zeri.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{14} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{C}_2 & 0 & \tilde{C}_4 \end{pmatrix}$$

scrivendolo in forma implicita si nota che abbiamo 4 sottosistemi

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \tilde{A}_{11}z_1 + \tilde{A}_{12}z_2 + \tilde{A}_{13}z_3 + \tilde{A}_{14}z_4 + \tilde{B}_1u \\ \dot{z}_2 = \tilde{A}_{21}z_2 + \tilde{A}_{34}z_4 + \tilde{B}_2u \\ \dot{z}_3 = \tilde{A}_{33}z_3 + \tilde{A}_{34}z_4 \\ \dot{z}_4 = \tilde{A}_{44}z_4 \\ y = \tilde{C}_2z_2 + \tilde{C}_4z_4 + Du \end{cases}$$

## 7 Modelli ingresso-uscita

### 7.1 Il problema della realizzazione

Prendiamo come esempio un caso in cui abbiamo una  $W(s)$ , non sappiamo effettivamente come sia fatto il sistema, che viene definito "Black Box". Sappiamo però che  $W(s) = C(sI_d - A)^{-1}B + D$  e che la  $W(s)$  può essere espressa nel seguente modo

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_{m-1}s^{m-1}}{a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}$$

Dove  $m \leq n \Rightarrow D = 0$ ,  $m = n \Rightarrow D \neq 0$ .

**Definizione 7.1** (Problema della realizzazione). Dato  $w(s)$  trovare  $n, A, B, C, D$  tali che  $W(s) = C(sI_d - A)^{-1}B + D$

**Definizione 7.2** (Realizzazione).  $(A, B, C, D)$  è detta realizzazione di  $W(s)$  o  $W(t)$

**Teorema 7.1** (Realizzazione risolvibile). La realizzazione è risolvibile  $\Leftrightarrow$  le sue componenti sono funzioni razionali proprie.

**Proposizione 7.1** (Proprietà matrice razionale propria).

$$\bar{K}(s) = K_0 + K(s)$$

$K(s)$  matrice razionale strettamente impropria,  $K_0$  matrice costante. Ponendo  $D = K_0$  basta calcolare  $n, A, B, C$

**Teorema 7.2** (Divisione tra polinomi).

**Esempio 7.1** (Divisione tra numeri interi).

$$7 : 2 = 3 + \text{resto di } 1 \Rightarrow 7 = 2 \cdot 3 + 1$$

La stessa cosa vale per i polinomi

$$A(x)/B(x) \rightarrow Q(x), R(x) \text{ t.c.}$$

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

*Procedimento*

1. si prende il monomio di grado max del dividendo e si divide per il monomio di grado max del divisore
2. si moltiplica il risultato per il divisore e si cambia di segno
3. si somma al dividendo
4. si ripete il procedimento finché il grado del resto è minore del grado del divisore

**Esempio 7.2.**

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x - 3}{x^2 + 1}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 + x - 3 & \frac{x^2+1}{x^2+1} \\ -x^3 - x & \frac{x^2+1}{x^2+1} \\ \hline -2x^2 - 3 & \frac{x^2+1}{x-2} \\ 2x^2 + 2 & \frac{x^2+1}{x-2} \\ \hline -1 & \frac{x^2+1}{x-2} \end{array}$$

$$x^3 - 2x^2 + x - 3 = (x^2 + 1)(x - 2) + (-1)$$

### 7.1.1 Forma canonica raggiungibile

Dato il numero degli ingressi  $p$

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & I_d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_d \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_0 I_d & -a_1 I_d & -a_2 I_d & \cdots & -a_{n-1} I_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times np}$$

$$B_r = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times p}$$

$$C_r = (b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_n) \in \mathbb{R}^{q \times np}$$

$$I_d \in \mathbb{R}^{p \times p}$$

**Esempio 7.3** ( $W(s) = \frac{s+2}{s^3+3s^2+s+1}$ ). è un caso SISO, single-input single-output. La  $B_r$  è immediata

$$B_r = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_d \end{pmatrix}$$

, la  $C_r$  è immediata poichè abbiamo che  $n = 3$  e abbiamo  $b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = 2$

$$C_r = (0 \quad 1 \quad 2)$$

anche la  $A$  è immediata perchè tanto basta prendere i coefficienti di  $D(W(s))$

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & I_d \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

**Esempio 7.4** ( $W(s) = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}s}{1+3s+s^2}$ ). dove  $p = 2$  e  $q = 2$ .

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -a_0 I_d & -a_1 I_d \end{pmatrix}$$

ricordiamo che questa matrice ha dimensione  $np \times np \rightarrow 4 \times 4$ . Inoltre la matrice  $I_d$  ha dimensione  $p \times p$ .

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$-a_0 = -1, \quad -a_1 = -3, \quad I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_r = \begin{pmatrix} 0 \\ I_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_r = (b_0 \quad b_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

### 7.1.2 Forma canonica osservabile

Dato il numero delle uscite  $q$

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 I_d \\ I_d & 0 & \cdots & 0 & -a_1 I_d \\ 0 & I_d & \cdots & 0 & -a_2 I_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} I_d \\ 0 & 0 & \cdots & I_d & -a_n I_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nq \times nq}$$

$$B_o = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nq \times p}, \quad C_o = (0 \quad 0 \cdots 0 \quad I_d) \in \mathbb{R}^{q \times nq}$$

gli esempi sono analoghi, cambia la posizione dei blocchi.

## 7.2 Realizzazioni minime

Le tecniche di realizzazione (forma canonica raggiungibile/osservabile) danno rappresentazioni con lo stato che hanno dimensione rispettivamente  $np$  e  $nq$ . Supponendo che la  $W(s)$  sia irriducibile, allora si riduce l'ordine del nucleo. Avere una realizzazione di dimensione minore porta un vantaggio sia dal punto di vista di una simulazione che di un emulatore fisico, in quanto corrisponde ad un risparmio.

**Definizione 7.3** (Realizzazione minima). è la realizzazione che contempla tutti e soli i modi naturali comuni e che ha dimensione inferiore rispetto alle altre.

**Proposizione 7.2** (Proprietà realizzazione minima). Una realizzazione minima è raggiungibile e osservabile.

**Esempio 7.5** ( $W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ 0 & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{pmatrix}$ ).  $W(s)$  è una matrice razionale propria, quindi esiste una realizzazione (con le tecniche viste) di dimensione  $np = 4$ . Procediamo con la forma canonica raggiungibile. Come abbiamo visto negli esempi precedenti, la  $w(s)$  deve essere irriducibile, quindi dobbiamo uniformare i denominatori. Il denominatore comune è  $(s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$ , che corrispondono ai termini cercati  $a_0$  ecc. . . .

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$B_r$  è immediata, ha dimensione  $np \times p = 4 \times 2$ .

$$B_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_r$  ha dimensione  $2 \times 4$ , ma contiene i termini al numeratore. Riscriviamo la matrice in modo che ci sia il denominatore comune.

$$W(s) = \frac{\begin{pmatrix} s+2 & s+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)}$$

### 7.2.1 Realizzazione di Gilbert

Nella ipotesi che il minimo comune multiplo a denominatore della  $W(s)$  abbia radici semplici possiamo calcolare una realizzazione minima. Corrisponde a dire che  $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \forall i$ . Usiamo l'espansione in frazioni parziali

$$W(s) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i}$$

con  $K_i$  residui matriciali di dimensione  $q \times p$ . Sia  $\rho_i = \text{rank } K_i$ ,  $C_i$  e  $B_i$  matrici di dimensione  $\rho_i$  con cui possiamo fattorizzare il residuo come  $K_i = C_i^{q \times \rho_i} \times B_i^{\rho_i \times p}$ . Le matrici escono come segue

$$A = \begin{pmatrix} p_1 I_{p_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 I_{p_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} I_{p_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p_n I_{p_n} \end{pmatrix}$$

dove  $I_{p_i}$  ha dimensione  $\rho_i \times \rho_i$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 \quad C_2 \quad \cdots \quad C_n)$$



**Proposizione 7.3** (Dimensione realizzazione minima).

$$N = \sum_{i=1}^n \rho_i$$

**Esempio 7.6** ( $W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}$ ). Partiamo calcolando i poli.  $\frac{1}{s+1}$  ha un polo in  $-1$ ,  $\frac{2}{s(s+2)}$  ha i poli in  $0$  e  $-2$ . Ora dobbiamo calcolare i residui matriciali.

$$W(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s} + \frac{K_3}{s+2}$$

Residuo per  $s = 0$  (prendiamo solo l'elemento  $ij$  dove compare il polo)

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2}{s(s+2)} = \frac{2}{2} = 1$$

quindi il residuo è

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = C_1^{2 \times 1} \times B_1^{1 \times 2}$$

queste due matrici non hanno particolari vincoli, solo la dimensione e il risultato del loro prodotto, quindi le scegliamo.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ora la stessa cosa per  $K_2$  e  $K_3$ .

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

In  $A$  ci andranno semplicemente i poli,  $B$  e  $C$  le matrici appena trovate.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 8 Sistemi interconnessi

Da ora in poi consideriamo due sistemi

$$S_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u \end{cases}$$

### 8.1 Connessione in serie

Detta anche "in cascata", si realizza imponendo il vincolo topologico

$$u_2(t) = y_1(t)$$

quindi  $u_2$  e  $y_1$  equivalgono a  $C_1 x_1$  (da  $S_1$ ). Inoltre assumiamo che l'ingresso esterno sia  $u_1$  e l'uscita esterna  $y_2$

$$u = u_1, \quad y = y_2$$

il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = B_2 C_1 x_1 + A_2 x_2 \\ y = C_2 x_2 \end{cases}$$

che in maniera compatta si può scrivere come

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

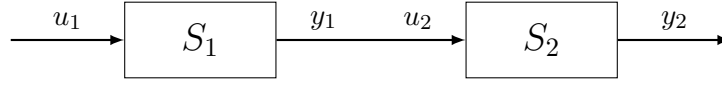


Figura 17: Connessione in serie.

**Proposizione 8.1** (Funzione di trasferimento). *Possiamo ricavare la funzione di trasferimento complessiva*

$$Y(s) = W_2(s)Y(s) = W_2(s)W_1(s)U(s) = W(s)U(s)$$

*si ricava*

$$W(s) = W_2(s)W_1(s)$$

## 8.2 Connessione in parallelo

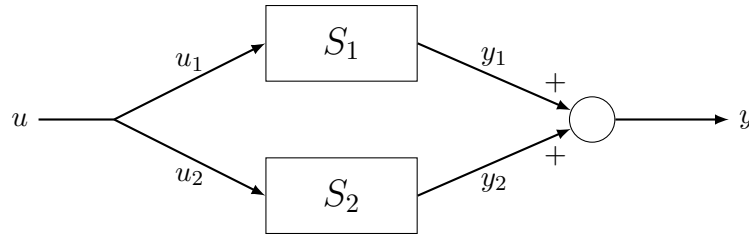


Figura 18: Connessione in parallelo.

Assumiamo i vincoli topologici

$$u_1 = u_2 = u, \quad y = y_1 + y_2$$

e come prima risulta un sistema unico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ y = C_1 x_1 + C_2 x_2 \end{cases}$$

che in maniera compatta si può scrivere come

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

**Proposizione 8.2** (Funzione di trasferimento).

$$Y(s) = W_1(s)Y_1(s) + W_2(s)Y_2(s) = (W_1(s) + W_2(s))U(s)$$

*quindi*

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s)$$

### 8.3 Retroazione

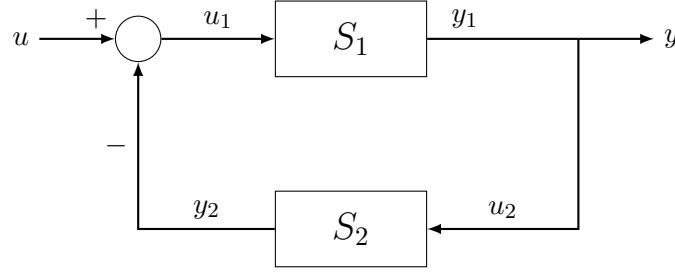


Figura 19: Connessione in retroazione.

i vincoli topologici sono

$$u_1 = u - y_2, \quad u_2 = y_1, \quad y = y_1$$

risulta

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 - B_1 C_2 x_2 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = B_2 C_1 x_1 + A_2 x_2 \\ y = C_1 x_1 \end{cases}$$

che in maniera compatta si può scrivere come

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = (C_1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

**Proposizione 8.3** (Funzione di trasferimento).

$$Y(s) = W_1(s)(U(s) - W_2(s)Y(s)) \Leftrightarrow (I_d + W_1(s)W_2(s))Y(s) = W_1(s)U(s)$$

avendo  $Y(s) = W(s)U(s)$  possiamo dividere per  $U(s)$  e per la parentesi a sinistra, quindi avremo la formula per  $W(s)$

$$W(s) = (I_d + W_1(s)W_2(s))^{-1} W_1(s)$$

caso SISO ( $I_d$  di dimensione  $1 \times 1$ )

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}$$

## 8.4 Diagrammi di flusso

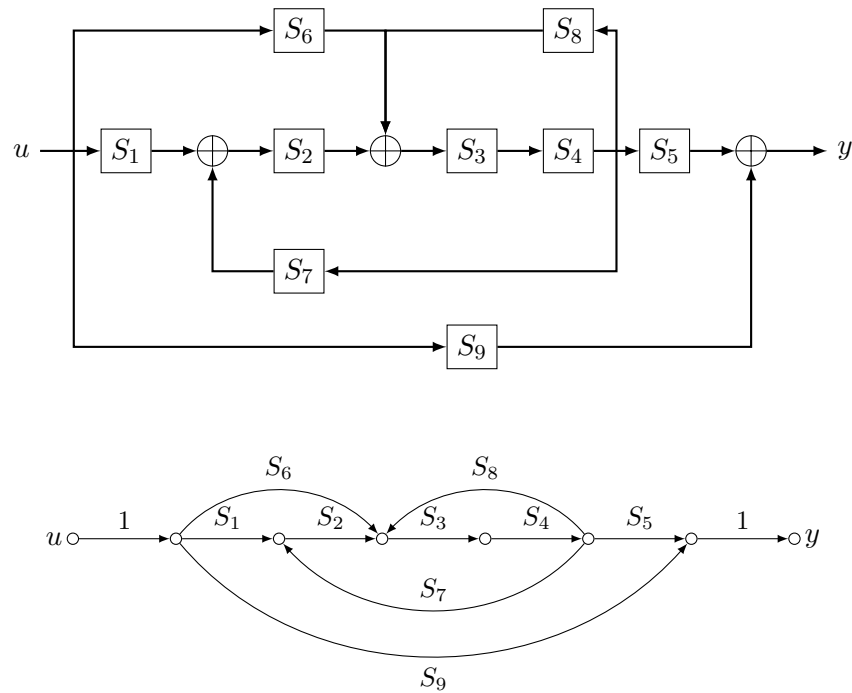


Figura 20: Esempio di schema a blocchi e corrispondente grafo di flusso.

## 9 Appendice

Materiali di riferimento, dimostrazioni tecniche, e tabelle utili (es. trasformata di Laplace, formule di integrazione).

### 9.1 Trasformate di Laplace

Rubata dall'eserciziario

Funzione $f(t)$	Trasformata di Laplace $F(s)$
$\delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{\alpha t} \delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$\sin \omega t \delta_{-1}(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t \delta_{-1}(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\delta(t)$	1
$\frac{t^n}{n!} \delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t} \delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$f(t-a) \delta_{-1}(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
$f(t) e^{\alpha t} \delta_{-1}(t)$	$F(s-\alpha)$
$\frac{1}{\omega} \frac{t}{2!} \sin \omega t \delta_{-1}(t)$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - t \cos \omega t) \delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$

Tabella 1: Tabella delle trasformate di Laplace