数值分析上机报告

第五章

院 (系) 名 称：　微电子学院

学 生 姓 名：　周玉乾

学　　　　号：　220205764

二〇二〇年十二月

第五章

数值积分

1. 问题

$$I = \int_0^1 \frac{\text{arctan}x}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \tag{5.1}$$

(1) 用 Romberg 公式计算改积分，使误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-7}$；

(2) 用复化 3 点 Gauss-Legendre 公式计算它，使误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-7}$。

2. 分析

复化 Romberg 公式的分析

(1) 首先用递推关系求梯形公式：

$$T_1 = h(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)) \tag{5.2}$$

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h(n)}{2}\sum_{n=0}^{n-1} f(x_{k+1/2}) \tag{5.3}$$

(2) 利用梯形公式求 Simpson 公式：

$$S_n(f) = \frac{4}{3}T_{2n}(f) - \frac{1}{3}T_n(f) \tag{5.4}$$

(3) 利用 Simpson 公式求 Cotes 公式：

$$C_n(f) = \frac{16}{15}S_{2n}(f) - \frac{1}{15}S_n(f) \tag{5.5}$$

(4) 最后用 Cotes 求 Romberg 公式：

$$R_n(f) = \frac{64}{63}C_{2n}(f) - \frac{1}{63}C_n(f) \tag{5.6}$$

Gauss-Legendre 求积公式分析

(1) $[-1, 1]$ 上的 3 点 Gauss-Legendre 公式：

$$\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x \approx \frac{5}{9}g(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g(\sqrt{\frac{3}{5}}) \tag{5.7}$$

(2) 一般区间 $[a,b]$ 上的 Gauss 公式：

令 $x_k=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t_k$，$A_k=\frac{b-a}{2}\tilde{A}_k$，$k=0:n$

(3) 由于 Gauss 求积公式的节点不具有递推性，因此用截断误差计算节点的数量，Gauss-Lengdre 公式的截断误差为：

$$R(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\sum\nolimits_{k=0}^{n}A_k f(x_k)=\frac{f^{2n+2}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b W_{n+1}^2(x)\mathrm{d}x,$$
$$W_{n+1}(x)=\prod\nolimits_{j=0}^{n}(x-x_j),\quad \xi\in(a,b) \tag{5.8}$$

待积函数分析

待求积分的函数为：

$$g(x)=\frac{\mathrm{arctan}x}{x^{3/2}} \tag{5.9}$$

该函数的图像如图5.1所示，是一个奇异函数，在 $x=0$ 处有奇异点，值为 $+\infty$，用 Romberg 公式求积时需要用到 $x=0$ 处的值。在 $[0,x_0]$ 上的积分用右矩形公式的两倍近似，即 $\int_0^{x_0}g(x)\mathrm{d}x\approx 2\cdot x_0\cdot g(x_0)$，保证近似值小于一半的误差限，即 $2\cdot x_0\cdot g(x_0)\le 1/2\times 1/2\times 10^{-7}$；

为了减少计算量，在 $[x_0,1]$ 上，做分段积分，分别对 $[x_0,1\times 10^{-9}]$、$[1\times 10^{-9},1\times 10^{-4}]$、$[1\times 10^{-4},1]$ 做 Romberg 积分，每一段的误差都要求小于 $1/6\times 1/2\times 10^{-7}$，这样保证总的误差不超过 $1/2\times 10^{-7}$。

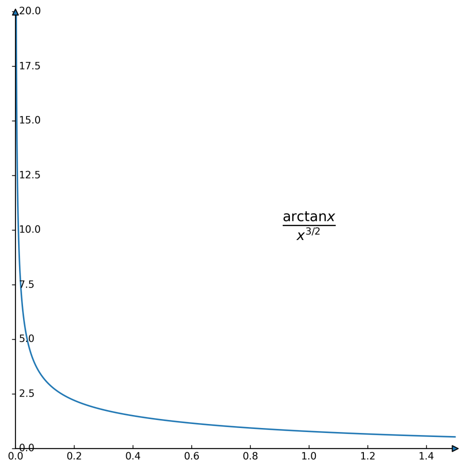

图 5.1 $(\mathrm{arctan}x)/(x^{3/2})$ 图像

3. 程序

---

4. 算例

$$I = \int_0^1 \frac{\text{arctan}x}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \tag{5.10}$$

用 Romberg 求积公式的实际积分区间是 $[1.110223025 \times 10^{-16}, 1 \times 10^{-9}]$、$[1 \times 10^{-9}, 1 \times 10^{-4}]$、$[1 \times 10^{-4}, 1]$，计算出来的结果是：1.897097415；

用 Gauss-Legendre 求积公式计算出来的结果是：??。

5. 结论

算术解的结果为：

$$y = -\frac{log(x - \sqrt{2x} + 1)}{\sqrt{2}} + \frac{log(x + \sqrt{2x} + 1)}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}tan^{-1}(1 - \sqrt{2x}) + \sqrt{2}tan^{-1}(\sqrt{2x} + 1) - \frac{2tan^{-1}(x)}{\sqrt{x}} \tag{5.11}$$

因此准确解是：1.897095623。

复化 Romberg 公式

对比准确解可以看到，实际误差为 1.8×10^{-6}，大于所要求的的 $\frac{1}{2} \times 10^{-7}$，且计算值略大于真实值，分析后应该是在 $[x_0, 1 \times 10^{-9}]$ 这段上误差太大，因为在 x_0 处的值还是太大了，因此将这段的误差设为 $1/2 \times 10^{-9}$，其他两段的误差设定保持 $1/6 \times 1/2 \times 10^{-7}$，再次计算出来的结果是 1.897095976，误差是 3.5×10^{-7}，达到了误差的要求。

在没有分段积分时，程序跑了一周多也没有收敛到误差要求内，在设定好合适的分段积分区间后，程序只运行了 0.2 s 就收敛到误差要求内，效率提升很大。

Gauss-Legendre 求积公式