3.2.4 试值法(The Method of False Position)

由于二分法的收敛速度相对较慢,因此有些方法**尝试对它进行改进**.

二分法选择区间的中点进行下一次迭代,而所谓试值法选择

$$\big(a, f(a)\big),\ \ \big(b, f(b)\big)$$

的连线同 x 轴的交点的横坐标作为下一个迭代点.

理论分析

假设 $f(a)\cdot f(b)<0$.经过点 $\big(a, f(a)\big)$ 与 $\big(b, f(b)\big)$ 的直线方程为:

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)+f(b),$$

令 $y=0$, 求出

$$c=b-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot f(b).$$

接下来有三**种可能性**:

- $f(c)$ 与 $f(a)$ 符号相反,则下一个有根区间为 $[a, c]$.
- $f(c)$ 与 $f(b)$ 符号相反,则下一个有根区间为 $[c, b]$.
- $f(c)=0$,计算结束.

第三种情况直接得结果,否则根区间得到压缩.同二分法类似,可以构造一个 $\{[a_n, b_n]\}$ 的序列,其中每个区间都包含零点,零点 x^* 的近似值选为:

$$c_n=b_n-\frac{b_n-a_n}{f(b_n)-f(a_n)}\cdot f(b_n).$$

如果 $f(x)$ 是连续函数,可以证明这个算法一定收敛.若 $f(x)$ 是线性的,该方法一步就得到根.但是,有时候该方法的收敛速度甚至比二分法还要慢.二分法的有根区间的长度 b_n-a_n 趋近于 0,试值法里 b_n-a_n 会越来越小,但可能不趋近于 0.因此,**该方法的终止判据应选择** $|f(c_n)|\le\epsilon$.

算法与程序

算法如下:

Algorithm 3: 试值法(The Method of False Position)

输入: 函数 $y=f(x)$,区间 $[a,b]$,容忍误差限 ϵ.

输出: 根的近似值 x^*

$f(c)=1$
while $|f(c)|>\epsilon$ **do**
    $c=b-\dfrac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot f(b)$
    if *sign(f(a))=sign(f(c))* **then**
        a=c
    else
        b=c
    end
end

$f(c)=1$ 是随意设定的,只要比 ϵ 大均可.