
# 数值分析上机报告
# 第四章

院 (系) 名 称：　微电子学院

学 生 姓 名：　周玉乾

学　　号：　220205764

二〇二〇年十二月

# 第四章

## 4.1 3 次样条插值函数

### 1. 问题

(1) 编制求第一型 3 次样条插值函数的通用程序;

(2) 已知汽车门曲线型值点的数据如下:

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $y_i$ | 2.51 | 3.30 | 4.04 | 4.70 | 5.22 | 5.54 | 5.78 | 5.40 | 5.57 | 5.70 | 5.80 |

端点条件为 $y_0' = 0.8$，$y_{10}' = 0.2$，用所编程序求车门的三次样条插值函数 $S(x)$，并打印出 $S(i+0.5), i = 0, 1, \cdots, 9$。

### 2. 分析

根据 3 次样条插值的定义，插值函数 $S(x)$ 满足：1. $S(x)$ 在每一个小区间上式 3 次多项式，2. $S(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有连续 2 阶导数，3. $S(x)$ 经过每一个给定的插值节点。

在区间 $[a, b]$ 上有 $n+1$ 个插值节点，因此可以设每个小区间上的插值函数 $S_i(x)$ 为:

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \tag{4.1}$$

在 $n$ 个区间上有 $n$ 个插值函数，每个插值函数有 4 个参数，因此需要 $4n$ 个不相关的方程来求解:

(1) 每个插值函数都会经过它所在小区间上的插值节点，即小区间的两个端点，有 $2n$ 个方程:

$$S_i(x_i) = y_i, \quad i \in [0, n-1] \tag{4.2}$$

$$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i \in [0, n-1] \tag{4.3}$$

(2) 一阶导数连续，即两个相邻的插值函数连接点处的一阶导数相等，有 $n-1$ 个方程:

$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}), \quad i \in [0, n-2] \tag{4.4}$$

(3) 二阶导数连续，即两个相邻的插值函数连接点处的二阶导数相等，有 $n-1$ 个方程：

$$S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}), \quad i \in [0, n-2] \tag{4.5}$$

(4) 第一型边界条件，已知两个端点处的一阶导数值，有 2 个方程：

$$S_0'(x_0) = y_0' \tag{4.6}$$

$$S_{n-1}'(x_n) = y_n' \tag{4.7}$$

$4n$ 个方程，使用列主元高斯法求解方程，得到最终的插值函数。

## 3. 程序

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from pylab import mpl
import sys, os

'''
DESCRIPTION:
PARAM {*} x N+1 个插值点
PARAM {*} y N+1 个插值点
RETURN {*} N
'''
def Prejudgment(x, y):
    n1 = len(x)
    n2 = len(y)
    if n1 != n2:
        print('x 与 y 长度不相等')
        sys.exit()

    n = n1-1
    return n

'''
DESCRIPTION: 求三次样条差值的 4N 个方程
PARAM: {x[0,N], y[0,N]} N+1 个插值点
PARAM: Type 三次样条边界条件 1 OR 2 OR 3
RETURN {A, B} [A0 B0 C0 D0 A1 B1 C1 D1 ... A(N-1) B(N-1) C(N-1) D(N-1)] = [B] 形式的方程组
'''
def calculateEquationParameters(x, y, Type=1, dy0=0, dyn=0):
    n = Prejudgment(x, y)

    parameterA = []
    parameterB = []
```

```
33
34          # S_I(x_I) = y_I
35          # S_I(x_{I+1}) = y_{I+1}
36          # 0 <= I <= N-1
37          for i in range(0, n):
38              # S_I(x_I) = y_I
39              data = np.zeros(n*4)
40              data[i*4] = pow(x[i], 3)
41              data[i*4+1] = pow(x[i], 2)
42              data[i*4+2] = x[i]
43              data[i*4+3] = 1
44              parameterA.append(data.tolist())
45              parameterB.append(y[i])
46
47              # S_I(x_{I+1}) = y_{I+1}
48              data1 = np.zeros(n*4)
49              data1[i*4] = pow(x[(i+1)], 3)
50              data1[i*4+1] = pow(x[(i+1)], 2)
51              data1[i*4+2] = x[(i+1)]
52              data1[i*4+3] = 1
53              parameterA.append(data1.tolist())
54              parameterB.append(y[i+1])
55
56          # S'_I(x_{I+1}) = S'_{I+1}(x_{I+1})
57          # 0 <= I <= N-2
58          for i in range(0, n-1):
59              data = np.zeros(n*4)
60
61              data[i*4] = 3 * pow(x[i+1], 2)
62              data[i*4+1] = 2 * x[i+1]
63              data[i*4+2] = 1
64
65              data[(i+1)*4] = -3 * pow(x[i+1], 2)
66              data[(i+1)*4+1] = -2 * x[i+1]
67              data[(i+1)*4+2] = -1
68
69              parameterA.append(data.tolist())
70              parameterB.append(0)
71
72          # S''_I(x_{I+1}) = S''_{I+1}(x_{I+1})
73          # 0 <= I <= N-2
74          for i in range(0, n-1):
75              data = np.zeros(n*4)
76
77              data[i*4] = 6 * x[i+1]
78              data[i*4+1] = 2
79
80              data[(i+1)*4] = -6 * x[i+1]
```

```
            data[(i+1)*4+1] = -2

            parameterA.append(data.tolist())
            parameterB.append(0)

        if Type == 1:
            # S'_0(x_0) = Y'_0
            data = np.zeros(n*4)
            data[0] = 3 * pow(x[0], 2)
            data[1] = 2 * x[0]
            data[2] = 1
            parameterA.append(data.tolist())
            parameterB.append(dy0)

            # S'_{N-1}(x_N) = Y'_N
            data = np.zeros(n*4)
            data[(n-1)*4] = 3 * pow(x[n], 2)
            data[(n-1)*4+1] = 2 * x[n]
            data[(n-1)*4+2] = 1

            parameterA.append(data.tolist())
            parameterB.append(dyn)
        elif Type == 2:
            # S''(A) = S''(B) = 0

            # S''_0(x_0) = 0
            data = np.zeros(n*4)
            data[0] = 6 * x[0]
            data[1] = 2
            parameterA.append(data.tolist())
            parameterB.append(0)

            # S''_{N-1}(x_N) = 0
            data = np.zeros(n*4)
            data[(n-1)*4] = 6 * x[n]
            data[(n-1)*4+1] = 2
            parameterA.append(data.tolist())
            parameterB.append(0)

        elif Type == 3:
            # S'(A) = S'(B) AND # S''(A) = S''(B)
            pass
        else:
            print('Error! Unknown "Type" Value!')

        return parameterA, parameterB

    """
```

```
129     功能：根据所给参数，计算三次函数的函数值：
130     参数：OriginalInterval为原始x的区间，parameters为二次函数的系数，x为自变量
131     返回值：为函数的因变量
132     """
133     def calculate(OriginalInterval, paremeters, x):
134         n = int(len(paremeters)/4)
135         result=[]
136         for data_x in x:
137 
138             Interval = 0
139             if data_x <= OriginalInterval[0]:
140                 Interval = 0
141             elif data_x >= OriginalInterval[-1]:
142                 Interval = n-1
143             else:
144                 for i in range(0,n):
145                     if data_x >= OriginalInterval[i] and data_x < OriginalInterval[i+1]:
146                         Interval = i
147                         break
148 
149             result.append(paremeters[Interval*4+0]*data_x*data_x*data_x+paremeters[
                    Interval*4+1]*data_x*data_x+paremeters[Interval*4+2]*data_x+paremeters[
                    Interval*4+3])
150         return result
151 
152     """
153     功能：将函数绘制成图像
154     参数：data_x,data_y为离散的点.new_data_x,new_data_y为由拉格朗日插值函数计算的值。x为
            函数的预测值。
155     返回值：空
156     """
157     def Draw(data_x,data_y,new_data_x,new_data_y, title):
158             plt.plot(new_data_x, new_data_y, label="拟合曲线", color="black")
159             plt.scatter(data_x,data_y, label="离散数据",color="red")
160             mpl.rcParams['font.sans-serif'] = ['SimHei']
161             mpl.rcParams['axes.unicode_minus'] = False
162             plt.title("三次样条函数")
163             plt.legend(loc="upper left")
164             plt.savefig(os.path.join(os.path.dirname(os.path.abspath(__file__)), title+
                    '.png'), dpi=300)
165             plt.show()
166 
167     def PrintS(parameterX):
168         n = int(len(parameterX)/4)
169         print('S(x) = ')
170         for i in range(0,n):
171             print("%.6g & %.6g & %.6g & %.6g \\\\" % (parameterX[i*4], parameterX[i
                    *4+1], parameterX[i*4+2], parameterX[i*4+3]))
```

```
172         print('\n\n')
173 
174     def main():
175         x = [0,   1,    2,    3,    4,    5,    6,    7,    8,    9,    10]
176         y = [2.51, 3.30, 4.04, 4.70, 5.22, 5.54, 5.78, 5.40, 5.57, 5.70, 5.80]
177         dy0 = 0.8
178         dyn = 0.2
179         parameterA, parameterB = calculateEquationParameters(x, y, 1, dy0, dyn)
180         parameterX = MGauss_Caculate(parameterA, parameterB)
181 
182         PrintS(parameterX)
183 
184         # 画图
185         new_data_x = np.arange(x[0]-0.5, x[-1]+0.6, 0.1)
186         new_data_y = calculate(x, parameterX, new_data_x)
187         Draw(x, y, new_data_x, new_data_y, '三次样条插值')
188 
189         # 打印
190         new_data_x = np.arange(0.5, 10.5, 1)
191         new_data_y = calculate(x, parameterX, new_data_x)
192         # F4_5 = CALCULATE(PARAMETERX[8:12], [4.5])
193         print(new_data_x)
194         for i,data in enumerate(new_data_y):
195             print("%.6g & " % data)
196 
197     if __name__ == "__main__":
198 
199         # 获取当前文件路径
200         current_path = os.path.abspath(__file__)
201         sys.path.append(os.path.abspath(os.path.join(os.path.dirname(current_path), '
                ../')))
202         # PRINT(SYS.PATH)
203         # 调用 CHAPTER3 中的列主元高斯消去法
204         from chapter3.q3 import MGauss_Caculate
205 
206         main()
```

## 4. 算例

对题目中的数据进行三次样条插值：

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $y_i$ | 2.51 | 3.30 | 4.04 | 4.70 | 5.22 | 5.54 | 5.78 | 5.40 | 5.57 | 5.70 | 5.80 |

得到的插值函数系数为：

$$\begin{bmatrix} -0.00851404 & -0.00148596 & 0.8 & 2.51 \\ -0.00445789 & -0.0136544 & 0.812168 & 2.50594 \\ -0.00365441 & -0.0184753 & 0.82181 & 2.49952 \\ -0.0409245 & 0.316955 & -0.184482 & 3.50581 \\ 0.107352 & -1.46237 & 6.93281 & -5.98391 \\ -0.268485 & 4.17519 & -21.255 & 40.9958 \\ 0.426587 & -8.33611 & 53.8128 & -109.14 \\ -0.267865 & 6.24739 & -48.2717 & 129.057 \\ 0.0548723 & -1.4983 & 13.6939 & -36.1842 \\ 0.0583759 & -1.5929 & 14.5453 & -38.7383 \end{bmatrix}$$

题目中要求的 $S(i+0.5), i = 0, 1, \cdots, 9$ 值如表4.1所示，插值函数的图像如图4.1所示。

**表 4.1** $S(i+0.5), i = 0, 1, \cdots, 9$

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0.5 | 1.5 | 2.5 | 3.5 | 4.5 |
| $S(x)$ | 2.90856 | 3.67843 | 4.38147 | 4.98819 | 5.38328 |
| i | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $x_i$ | 5.5 | 6.5 | 7.5 | 8.5 | 9.5 |
| $S(x)$ | 5.7237 | 5.59441 | 5.42989 | 5.65977 | 5.7323 |

## 5. 结论

(1) 编写程序实现了第一型边界条件和第二型边界条件下的三次样条插值计算；
(2) 三次样条插值得到的函数二阶导数连续，因此其光滑性较好；
(3) 目前算法使用的是待定系数法求解，当插值节点较多时，计算量较大，应加以改进。

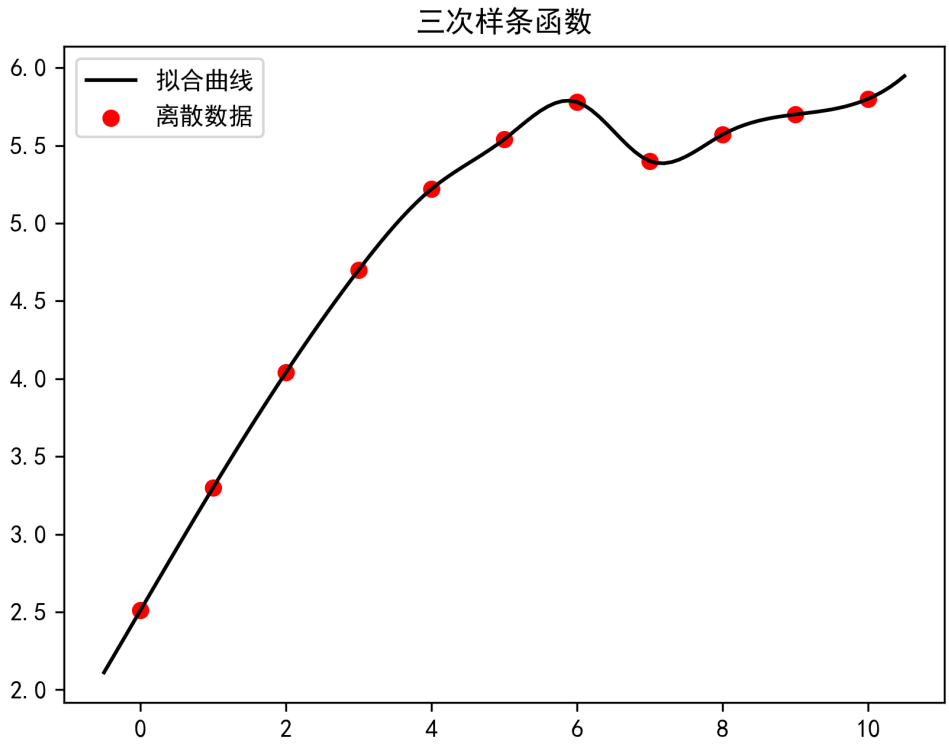



图 4.1　三次样条插值图像

## 4.2 离散数据的最佳平方逼近

### 1. 问题

一种商品的需求量和其价格有一定关系，先对一定时期内的商品价格 x 与需求量 y 进行观察, 取得如下的样本数据，如表4.2所示。

**表 4.2 样本数据**

| 价格 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 需求量 | 58 | 50 | 44 | 38 | 34 | 30 | 29 | 26 | 25 | 24 |

(1) 对上述数据，分别求出其 2, 3, 4 次最佳平方逼近多项式。画出图形，并比较拟合误差:

$$Q = \sum_{k=1}^{n} (q(x_k) - y_k)^2 \tag{4.8}$$

(2) 假设拟合函数分别为:

$$a + \frac{b}{x}, \quad a + b\ln x, \quad ae^{bx}, \quad \frac{1}{a + bx} \tag{4.9}$$

分别求出 a, b 的值。绘图，计算误差，并比较优劣。

### 2. 分析

本题是一个离散数据的最佳平方逼近问题，对于这类问题，首先要将拟合函数化为标准形式，即 $p(x) = \sum_{k=1}^{n} (c_i \varphi_i(x))$，然后求出正规方程，通过求解正规方程得到拟合函数系数 $c_i$，如有需要再将标准形式的拟合函数化为需要的形式。

在第二问中，四个拟合函数都不是标准形式。

1. 对于 $y = a + b/x$，令 $t = 1/x$，则 $y = a + bt$;
2. 对于 $y = a + b\ln x$，令 $t = \ln x$，则 $y = a + bt$;
3. 对于 $y = ae^{bx}$，两边取对数，得到 $\ln y = \ln a + bx$;
4. 对于 $y = 1/(a + bx)$，令 $t = 1/y$，则 $t = a + bx$。

### 3. 程序

```
1  # 离散数据的最佳平方逼近
2  import numpy as np
3  import sys, os
4  import matplotlib.pyplot as plt
5  from pylab import mpl
6  import math
```

```
7
8       '''
9       DESCRIPTION:
10      PARAM {*} x n+1 个插值点
11      PARAM {*} y n+1 个插值点
12      RETURN {*} n
13      '''
14      def PrejudgmentShape(x, y):
15          n1 = len(x)
16          n2 = len(y)
17          if n1 != n2:
18              print('x 与 y 长度不相等')
19              sys.exit()
20
21          n = n1-1
22          return n
23
24      '''
25      DESCRIPTION: 求最佳平方逼近的正规方程
26      PARAM {*} m m次最佳平方逼近
27      PARAM {*} x n个自变量x
28      PARAM {*} y n个因变量y
29      RETURN {*} (A, b)
30      '''
31      def GetNormalEquation(m, x, y):
32          A = []
33          b = []
34          PrejudgmentShape(x, y)
35          for j in range(0,m+1):
36              AAline = []
37              for i in range(0, m+1):
38                  tmp = np.dot(np.power(x, j), np.power(x, i))
39                  AAline.append(tmp)
40              A.append(AAline)
41              tmp = np.dot(y, np.power(x, j))
42              b.append(tmp)
43          return A, b
44
45      '''
46      DESCRIPTION: 获取最佳平方逼近的多项式
47      PARAM {*} A 正规方程系数A
48      PARAM {*} b 正规方程系数b
49      RETURN {*} c 多项式系数, Q(x) = c0 + c1*x + c2*x^2 + ... + cm*x^m
50      '''
51      def GetExpression(A, b):
52          c = MGauss_Caculate(A, b)
53          return c
54
```

```
    '''
    DESCRIPTION: 计算最佳平方逼近多项式
    PARAM {*} M M次最佳平方逼近
    PARAM {*} X N个自变量X
    PARAM {*} Y N个因变量Y
    RETURN {*} C 最佳平方逼近多项式系数, Q(X) = C0 + C1*X + C2*X^2 + ... + CM*X^M
    '''
    def GetLeastSquaresApproximationExpression(m, x, y):
        A, b = GetNormalEquation(m, x, y)
        c = GetExpression(A, b)
        return c

    '''
    DESCRIPTION: 计算多项式, Q(X) = C0 + C1*X + C2*X^2 + ... + CM*X^M
    PARAM {*} C 最佳平方逼近多项式系数
    RETURN {*} 多项式结果
    '''
    def CaculateExpression(c, x):
        res = 0
        for i, ci in enumerate(c):
            res = res + ci * pow(x, i)
        return res

    '''
    DESCRIPTION: 计算多项式, X FORM X0 TO XN, Q(X) = C0 + C1*X + C2*X^2 + ... + CM*X^M
    PARAM {*} C 最佳平方逼近多项式系数
    PARAM {LIST} XN
    RETURN {*}
    '''
    def CaculateInterval(c, xn):
        res = []
        for x in xn:
            res.append(CaculateExpression(c, x))
        return res

    """
    功能：将函数绘制成图像
    参数：DATA_X, DATA_Y 为原始值，NEW_DATA_X, NEW_DATA_Y 为预测计算的值。
    返回值：空
    """
    def Draw(data_x,data_y,new_data_x,new_data_y, title):
        plt.plot(new_data_x, new_data_y, label="拟合曲线", color="black")
        plt.scatter(data_x,data_y, label="离散数据",color="red")
        mpl.rcParams['font.sans-serif'] = ['SimHei']
        mpl.rcParams['axes.unicode_minus'] = False
        plt.title(title)
        plt.legend(loc="upper right")
        plt.savefig(os.path.join(os.path.dirname(os.path.abspath(__file__)), title+'.
```

```
            png'), dpi=300)
103         plt.show()
104
105     '''
106     DESCRIPTION: 计算拟合误差 Q = \SIGMA_{K=1}^{N} (Q(X_K) - Y_K)^2
107     PARAM {*} C 最佳平方逼近多项式系数, Q(X) = C0 + C1*X + C2*X^2 + ... + CM*X^M
108     PARAM {*} X
109     PARAM {*} Y
110     RETURN {*} Q
111     '''
112     def GetFittingError(c, x, y):
113         Err = 0
114         for n, xn in enumerate(x):
115             qx = CaculateExpression(c, xn)
116             Err += pow((qx - y[n]), 2)
117         return Err
118
119     '''
120     DESCRIPTION: 别求出其 2, 3, 4 次最佳平方逼近多项式.画出图形, 并比较拟合误差
121     PARAM {*}
122     RETURN {*}
123     '''
124     def Q1():
125         x = [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]
126         y = [58, 50, 44, 38, 34, 30, 29, 26, 25, 24]
127
128         result_file = os.path.join(os.path.dirname(os.path.abspath(__file__)), '最佳平
                方逼近_result.txt')
129
130         if os.path.exists(result_file):
131             os.remove(result_file)
132
133         # 最佳平方逼近
134         for m in range(2, 5):
135             c = GetLeastSquaresApproximationExpression(m, x, y)
136             # 画图
137             new_x = np.arange(x[0]-0.5, x[-1]+0.6, 0.1)
138             new_y = CaculateInterval(c, new_x)
139             Draw(x, y, new_x, new_y, "{0}次最佳平方逼近".format(m))
140             # 拟合误差
141             FittingErr = GetFittingError(c, x, y)
142             # 写入文件
143             with open(result_file, "a+") as fo:
144                 fo.write("\n
                        \\**********************************************************\\\n")
145                 fo.write("{0} 次最佳平方逼近, m = {1}\n".format(m, m))
146                 fo.write("x = ")
147                 for xi in x:
```

```
148                 fo.write(str(xi))
149                 fo.write("\t")
150             fo.write("\n")
151             fo.write("y = ")
152             for yi in y:
153                 fo.write(str(yi))
154                 fo.write("\t")
155             fo.write("\n")
156             fo.write("近似函数: q(x) = c0 + c1*x + c2*x^2 + ... + cm*x^m \n")
157             fo.write("c = ")
158             for ci in c:
159                 fo.write(str(format(ci, '.6g')))
160                 fo.write("\t")
161             fo.write("\n")
162             fo.write("拟合误差: {0}\n".format(format(FittingErr, '.8g')))
163             fo.write("\\**********************************************************\\\n
                    ")
164
165     # A+B÷X近似
166     def Q2_1():
167         x = [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]
168         y = [58, 50, 44, 38, 34, 30, 29, 26, 25, 24]
169
170         result_file = os.path.join(os.path.dirname(os.path.abspath(__file__)), 'a+b÷x近
                似_result.txt')
171
172         # A + B/X
173         x1 = [1.0/xi for xi in x]
174         c = GetLeastSquaresApproximationExpression(1, x1, y)
175         # 画图
176         new_x = np.arange(x[0]-0.5, x[-1]+0.6, 0.1)
177         new_x1 = [1.0/xi for xi in new_x]
178         new_y = CaculateInterval(c, new_x1)
179         Draw(x, y, new_x, new_y, "a+b÷x近似")
180         # 拟合误差
181         FittingErr = GetFittingError(c, x1, y)
182         # 写入文件
183         with open(result_file, "w+") as fo:
184             fo.write("\n\\**********************************************************\\\n"
                        )
185             fo.write("a+b÷x近似\n")
186             fo.write("x = ")
187             for xi in x:
188                 fo.write(str(xi))
189                 fo.write("\t")
190             fo.write("\n")
191             fo.write("y = ")
192             for yi in y:
```

```
193             fo.write(str(yi))
194             fo.write("\t")
195         fo.write("\n")
196         fo.write("近似函数: q(x) = {} + {} / x \n".format(c[0], c[1]))
197         fo.write("拟合误差: {0}\n".format(FittingErr))
198         fo.write("\\**********************************************************\\\n")
199 
200 # A+BLNX近似
201 def Q2_2():
202     x = [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]
203     y = [58, 50, 44, 38, 34, 30, 29, 26, 25, 24]
204 
205     result_file = os.path.join(os.path.dirname(os.path.abspath(__file__)), 'a+blnx
            近似_result.txt')
206 
207     # A + BLNX
208     x1 = [math.log(xi) for xi in x]
209     c = GetLeastSquaresApproximationExpression(1, x1, y)
210     # 画图
211     new_x = np.arange(x[0]-0.5, x[-1]+0.6, 0.1)
212     new_x1 = [math.log(xi) for xi in new_x]
213     new_y = CaculateInterval(c, new_x1)
214     Draw(x, y, new_x, new_y, "a+blnx近似")
215     # 拟合误差
216     FittingErr = GetFittingError(c, x1, y)
217     # 写入文件
218     with open(result_file, "w+") as fo:
219         fo.write("\n\\**********************************************************\\\n"
                )
220         fo.write("a+blnx近似\n")
221         fo.write("x = ")
222         for xi in x:
223             fo.write(str(xi))
224             fo.write("\t")
225         fo.write("\n")
226         fo.write("y = ")
227         for yi in y:
228             fo.write(str(yi))
229             fo.write("\t")
230         fo.write("\n")
231         fo.write("近似函数: q(x) = {} + {} ln(x) \n".format(c[0], c[1]))
232         fo.write("拟合误差: {0}\n".format(FittingErr))
233         fo.write("\\**********************************************************\\\n")
234 
235     '''
236     DESCRIPTION: 计算拟合误差 Q = \SIGMA_{K=1}^{N} (Q(X_K) - Y_K)^2
237     PARAM {*} C 最佳平方逼近多项式系数, Q(X) = A*EXP(BX)
238     PARAM {*} X
```

```
    PARAM {*} y
    RETURN {*} Q
    '''
    def GetFittingError_q2_3(c, x, y):
        Err = 0
        for n, xn in enumerate(x):
            qx1 = CaculateExpression(c, xn)
            qx = math.exp(qx1)
            Err += pow((qx - y[n]), 2)
        return Err

    # A*EXP(BX)近似
    def Q2_3():
        x = [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]
        y = [58, 50, 44, 38, 34, 30, 29, 26, 25, 24]

        result_file = os.path.join(os.path.dirname(os.path.abspath(__file__)), 'a*exp(bx)近似_result.txt')

        # A + BLNX
        y1 = [math.log(yi) for yi in y]
        c = GetLeastSquaresApproximationExpression(1, x, y1)
        # 画图
        new_x = np.arange(x[0]-0.5, x[-1]+0.6, 0.1)
        new_y1 = CaculateInterval(c, new_x)
        new_y = [math.exp(yi) for yi in new_y1]
        Draw(x, y, new_x, new_y, "a*exp(bx)近似")
        # 拟合误差
        FittingErr = GetFittingError_q2_3(c, x, y)
        # 写入文件
        with open(result_file, "w+") as fo:
            fo.write("\n\\**********************************************************\\\n")
            fo.write("a*exp(bx)近似\n")
            fo.write("x = ")
            for xi in x:
                fo.write(str(xi))
                fo.write("\t")
            fo.write("\n")
            fo.write("y = ")
            for yi in y:
                fo.write(str(yi))
                fo.write("\t")
            fo.write("\n")
            fo.write("近似函数: q(x) = {0} * exp({1} * x) \n".format(math.exp(c[0]), c[1]))
            fo.write("拟合误差: {0}\n".format(FittingErr))
            fo.write("\\**********************************************************\\\n")
```

```
284
285     '''
286     DESCRIPTION: 计算拟合误差 Q = \SIGMA_{K=1}^{N} (Q(X_K) - Y_K)^2
287     PARAM {*} C 最佳平方逼近多项式系数, Q(X) = 1/(A+BX)
288     PARAM {*} X
289     PARAM {*} Y
290     RETURN {*} Q
291     '''
292     def GetFittingError_q2_4(c, x, y):
293         Err = 0
294         for n, xn in enumerate(x):
295             qx1 = CaculateExpression(c, xn)
296             qx = 1.0/qx1
297             Err += pow((qx - y[n]), 2)
298         return Err
299
300     # 1÷(A+BX)近似
301     def Q2_4():
302         x = [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]
303         y = [58, 50, 44, 38, 34, 30, 29, 26, 25, 24]
304
305         result_file = os.path.join(os.path.dirname(os.path.abspath(__file__)), '1÷(a+
                bx)近似_result.txt')
306
307         # A + BLNX
308         y1 = [1.0/yi for yi in y]
309         c = GetLeastSquaresApproximationExpression(1, x, y1)
310         # 画图
311         new_x = np.arange(x[0]-0.5, x[-1]+0.6, 0.1)
312         new_y1 = CaculateInterval(c, new_x)
313         new_y = [1.0/yi for yi in new_y1]
314         Draw(x, y, new_x, new_y, "1÷(a+bx)近似")
315         # 拟合误差
316         FittingErr = GetFittingError_q2_4(c, x, y)
317         # 写入文件
318         with open(result_file, "w+") as fo:
319             fo.write("\n\\**********************************************************\\\n"
                    )
320             fo.write("1÷(a+bx)近似\n")
321             fo.write("x = ")
322             for xi in x:
323                 fo.write(str(xi))
324                 fo.write("\t")
325             fo.write("\n")
326             fo.write("y = ")
327             for yi in y:
328                 fo.write(str(yi))
329                 fo.write("\t")
```

```
330             fo.write("\n")
331             fo.write("近似函数: q(x) = 1 ÷ ( {0} + {1} * x) \n".format(math.exp(c[0]),
                    c[1]))
332             fo.write("拟合误差: {0}\n".format(FittingErr))
333             fo.write("\\**********************************************************\\\n")
334
335     def main():
336         Q1()
337         Q2_1()
338         Q2_2()
339         Q2_3()
340         Q2_4()
341
342     if __name__ == "__main__":
343
344         # 获取当前文件路径
345         current_path = os.path.abspath(__file__)
346         sys.path.append(os.path.abspath(os.path.join(os.path.dirname(current_path), '
                ../')))
347         # PRINT(SYS.PATH)
348         # 调用 CHAPTER3 中的列主元高斯消去法
349         from chapter3.q3 import MGauss_Caculate
350
351         main()
```

## 4. 算例

对于题目中的第一问，分别求出 2, 3, 4 次最佳平方逼近多项式的拟合函数如下，拟合误差分别为 $3.2166667, 1.5102564, 1.4679487$，拟合函数的图像如图4.2所示。

$$p(x) = 74.3258 - 9.31136 * x + 0.435606 * x^2 \tag{4.10}$$

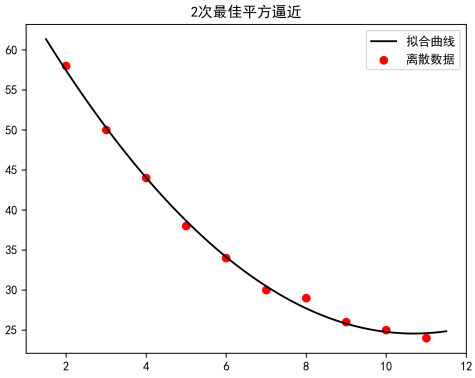
$$p(x) = 78.5424 - 11.9462 * x + 0.893939 * x^2 - 0.0235043 * x^3 \tag{4.11}$$

$$p(x) = 76.9924 - 10.6129 * x + 0.520542 * x^2 + 0.0181624 * x^3 - 0.00160256 * x^4 \tag{4.12}$$

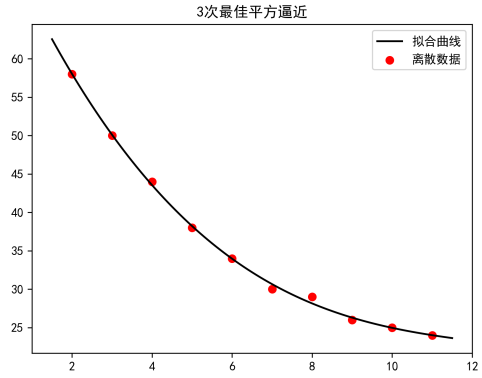
对于题目中的第二问，拟合函数如下，拟合的图像如图4.3所示，拟合误差分别为 $57.302270, 8.7788712, 41.844596, 7.7324292$。

$$q(x) = 18.160410958809152 + \frac{87.330000932616}{x} \tag{4.13}$$

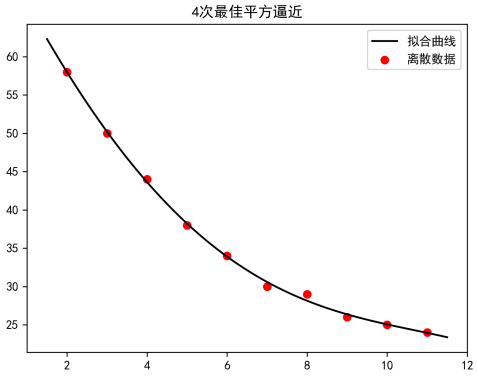
$$q(x) = 72.13901063630205 - 20.762410852503ln(x) \tag{4.14}$$




(a) 2 次最佳平方逼近




(b) 3 次最佳平方逼近

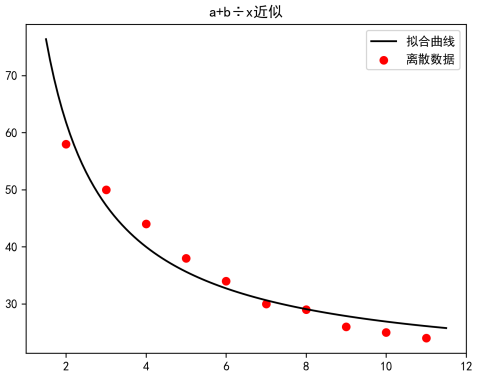



(c) 4 次最佳平方逼近

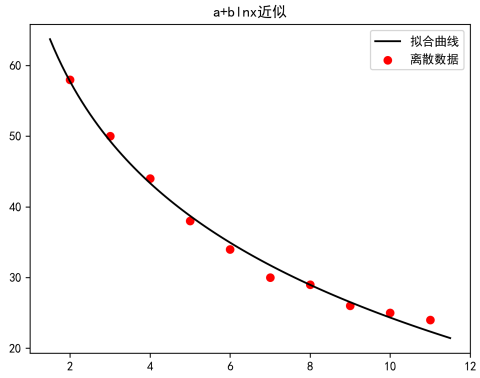
图 4.2　最佳平方逼近

$$q(x) = 65.29387947714481 * e^{-0.09915171210523323*x} \tag{4.15}$$

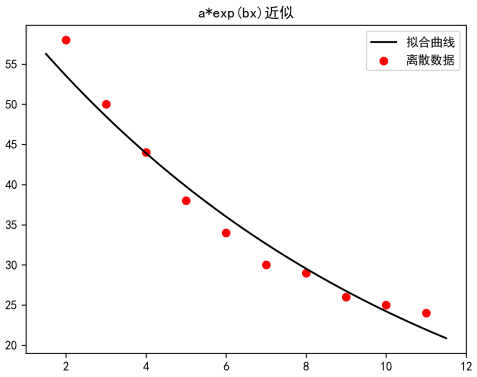
$$q(x) = \frac{1}{1.012042106641784 + 0.0028298266117981353 * x} \tag{4.16}$$



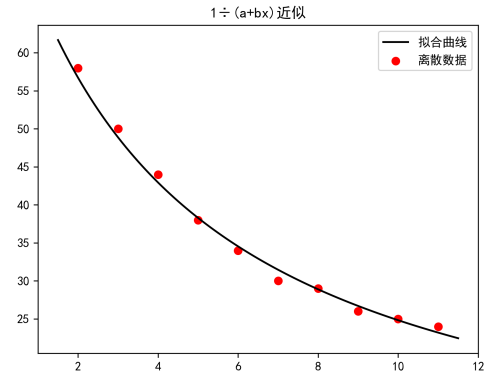

(a) $y = a + b/x$




(b) $y = a + b\ln x$




(c) $y = ae^{bx}$




(d) $y = 1/(a + bx)$

图 4.3　最佳平方逼近变形

## 5. 结论

(1) 7 种不同的拟合函数的拟合误差对比如表4.3所示。通过对比可以看到 4 次最佳平方逼近的拟合误差最小，但也是计算量最大的一个。

(2) 4 次最佳平方逼近的拟合误差相比于 3 次最佳平方逼近的拟合误差没有太多提升，反而加大了计算量。

(3) 在 4 种变形的拟合函数里，$y = a + b\ln x$ 和 $y = 1/(a + bx)$ 的闭合误差也比较小，但是都比 2 次最佳平方逼近的误差大。

(4) 整体上来说，相比于插值函数，次数不太高的最佳平方逼近的计算量不大。

**表 4.3　拟合误差**

| 拟合函数 | 2 次最佳平方逼近 | 3 次最佳平方逼近 | 4 次最佳平方逼近 | |
|---|---|---|---|---|
| 拟合误差 | 3.2166667 | 1.5102564 | 1.4679487 | |
| 拟合函数 | $y=a+b/x$ | $y=a+b\ln x$ | $y=ae^{bx}$ | $y=1/(a+bx)$ |
| 拟合误差 | 57.302270 | 8.7788712 | 41.844596 | 7.7324292 |