齐次方程

定义: 如果一阶微分方程可化为 $\frac{dy}{dx}=\phi^{\left(egin{array}{c} y\\ x\end{array}
ight)}$ 形式,称该方程为**齐次方程**

齐次方程的解

在齐次方程中引入新的变量 $u=egin{array}{ccc} y & y & y & = ux \end{array}$

・対y 进行求导得: $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ ・帯入方程 $\frac{dy}{dx} = \phi^{\left(egin{array}{c} y \ x \end{array}
ight)}$ 中,得:

$$_{u}+_{x}\stackrel{du}{_{dx}}=_{\phi}(_{x}^{y})$$

又因为 $u = \frac{y}{x}$,所以:

$$u+x rac{du}{dx}=\phi(u)$$

分离变量:

$$\frac{du}{\phi(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

两边同时求x的积分:

$$\int \, rac{-du}{\phi(u)-u} \, = \int \, rac{dx}{x}$$

求出积分后将 $_{x}^{y}$ 替换 $_{u}$ 得到齐次方程的通解

可化为齐次的方程

方程:

$$rac{dy}{dx} = rac{ax+by+c}{a^1+b^1y+c^1}$$

- $^{ullet}c^{1}=c$ 时为齐次方程,否则为非齐次
- *当该方程为非齐次时:

$$x = X + h$$
; $y = Y + k$

则:

$$dx = dX$$
; $dy = dY$

$$rac{dY}{dX} = rac{aX + bY + ah + bk + c}{a^1X + b^1Y + a^1h + b^1k + c^1}$$

此时当方程组:

$$\left\{ egin{array}{l} ah+bk+c \ a^1h+b^1k+c^1 \end{array}
ight.$$

的系数行列式:

$$egin{array}{ccc} a & b \ a^1 & b^1 \end{array}
eq 0$$

时,即,*1.

$$egin{array}{ccc} a^1_- & b^1_- \ a &
eq & b \end{array}$$

时,那么可以定出 $_{h'}\,k$ 并使其满足上述方程组,使得我们得到**齐次方程**:

$$rac{dX}{dY} = rac{aX + bY}{a^1X + b^1Y}$$

比时结合齐次方程的解法即可求解该方程的诵解。

. .

$$egin{array}{c} a_-^1 \ a \end{array} = egin{array}{c} b_-^1 \ b \end{array}$$

时, h, k 无法求得, 此时令

$$\begin{array}{ccc} a^{\underline{1}}_{\underline{}} & = & b^{\underline{1}}_{\underline{}} \\ a & = & b & = \lambda \end{array}$$

得:

$$rac{dy}{dx} = rac{-ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c^1}$$

我们引入新的变量

$$v = ax + by$$

此时,我们获得:

$$rac{dv}{dx} = _a + _b rac{dy}{dx}
ightarrow rac{dy}{dx} = rac{1}{b} \left(rac{dv}{dx} - _a
ight)$$

带入方程 $rac{dy}{dx}=rac{-ax^+by^+c^-}{\lambda^{(ax^+by)^+c^1}}$ 得 (注意此时: $v=ax^+by^-$):

$$rac{1}{b}\left(rac{dv}{dx}-_a
ight)=rac{-v+_c}{\lambda v+_c{}^1}$$

该方程为可分离变量方程.