> *Author: © Starxsky 邢洪盛 Sat / Sep /20/ 2025*

一阶线性微分方程

形如以下形式的方程称为“一阶线性微分方程”

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

- $Q(x) = 0$时称为“一阶线性方程齐次微分方程，相反为”非齐次“

一阶线性非齐次微分方程的解

> *注意：在以后的计算中，为了方便起见，我们通常在确定微分方程为一阶非齐次线性微分方程时，直接带入公式*
>
> $$y = e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C)$$
>
> *中即可。*

步骤如下：

- Step1: 写出对应的齐次线性微分方程：

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

- Step2: 两端积分得到该方程的通解：

$$y = Ce^{-\int P(x)dx};\ (C = \pm e^{C_1})$$

- Step3: 对Step2 使用常数变易法:
  （将 C替换为函数$u(x)$）：

$$y = u(x)e^{-\int P(x)dx}dx$$

- Step4: 对Step3的两边同时对x求导：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\ u(x)\ )}{dx}e^{-\int P(x)dx}dx - u(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}dx$$

- Step5: 将Step3, Step4带入Step1中得：

$$u^{'}e^{-\int P(x)dx}dx - uP(x)e^{-\int P(x)dx}dx\ +\ P(x)ue^{-\int P(x)dx}dx = Q(x)$$

$$u^{'}e^{-\int P(x)dx}dx = Q(x)$$

$$u' = \frac{Q(x)}{e^{-\int P(x)dx}}dx \rightarrow u' = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

- Step6: 将Step5的结果两边同时积分：

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$

- Step7: 将Step6带入Step3得到一阶线性非齐次微分方程的通解：

$$y = e^{-\int P(x)dx}dx(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C)$$

> *注意，对于Step7中得到的结果，我们可将其分为两部分：1）：该方程对应的齐次方程的**通解**：* $Ce^{-\int P(x)dx}dx$.
> *2）:该非齐次线性方程的**特解**:* $e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$

Bernoulli 伯努利方程

方程：

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)^n$$

* $n = 1\ or\ 0$ 时，该方程为线性方程，否则为非线性方程
对于非线性方程的情况我们可以通过以下步骤将其化为线性方程：

- Step1: 方程两边同时除以 y^n 得：

y

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

因为上式左端的第一项与 $\frac{dy}{dx}(y^{1-n})$只相差一个系数$(1-n)$，故我们引入新的因变量：

$$z=y^{(1-n)}$$

- Step2: 将新引入的因变量带入原式：

$$\frac{dx}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$

此时，我们可以求出该方程的通解，并将$y^{(1-n)}$代替z得到伯努利方程的通解