Author: © Starxsky 邢洪盛 Sun / Sep /21/ 2025

可降阶的高阶微分方程

接下来我们将会设计到几种求解高阶微分方程时所能用到的降阶的方法

$y^{(n)} = f(x)$型的微分方程

通过重复对该方程积分：

$$y^{(n-1)} = \int y^{(n)} = \int f(x)$$

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}$$

$$\dots$$

接连积分n次便得该方程的含有n个任意常数的通解

$y'' = f(x, y')$型的微分方程

先设$y' = p$，此时有：

$$y'' = \frac{dp}{dx} = p'$$

此时，原方程变为：

$$p' = \frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

设其通解为：

$$p = \phi(x, C1)$$

因此，我们又得到一个微分方程：

$$p = \frac{dy}{dx} = \phi(x, C1)$$

对其进行积分，得到原方程$y'' = f(x, y')$的通解：

$$y = \int \phi(x, C1)dx + C2$$

$y'' = f(y, y')$型的微分方程

通过代换：

$$y' = \frac{dy}{dx} = p(y)$$

得到：

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p = f(y, p)$$

即，

$$\frac{dp}{dy}p = f(y, p)$$

设，其通解为：

$$y' = p = \frac{dy}{dx} = \phi(y, C^1)$$

通过分离变量并求积分得到方程$y'' = f(y, y')$的通解：

$$\int \frac{dy}{\phi(y, C^1)} = \int dx$$

$$\int \frac{dy}{\phi(y, C^1)} = x + C^2$$