> *Author: © Starxsky 邢洪盛 Sat / Sep /20/ 2025*

齐次方程

定义： 如果一阶微分方程可化为 $\frac{dy}{dx} = \phi(\frac{y}{x})$形式，称该方程为**齐次方程**

齐次方程的解

在齐次方程中引入新的变量$u = \frac{y}{x} \to y = ux$

- 对y 进行求导得： $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$
- 带入方程 $\frac{dy}{dx} = \phi(\frac{y}{x})$ 中，得：

$$u + x\frac{du}{dx} = \phi(\frac{y}{x})$$

又因为 $u = \frac{y}{x}$,所以：

$$u + x\frac{du}{dx} = \phi(u)$$

分离变量：

$$\frac{du}{\phi(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

两边同时求x的积分:

$$\int \frac{du}{\phi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

求出积分后将 $\frac{y}{x}$ 替换 u 得到齐次方程的通解

可化为齐次的方程

方程:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a^1 + b^1 y + c^1}$$

- $c^1 = c$时为齐次方程，否则为非齐次
- 当该方程为非齐次时:
  令

$$x = X + h\text{；}y = Y + k$$

则:

$$dx = dX\text{；}dy = dY$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY + ah + bk + c}{a^1X + b^1Y + a^1h + b^1k + c^1}$$

此时当方程组：

$$\begin{cases} ah + bk + c \\ a^1h + b^1k + c^1 \end{cases}$$

的系数行列式：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a^1 & b^1 \end{vmatrix} \neq 0$$

时，即，* 1.

$$\frac{a^1}{a} \neq \frac{b^1}{b}$$

时，那么可以定出$h' k$并使其满足上述方程组，使得我们得到**齐次方程**：

$$\frac{dX}{dY} = \frac{aX + bY}{a^1X + b^1Y}$$

此时结合齐次方程的解法即可求解该方程的通解。

• •

$$\frac{a^1}{a} = \frac{b^1}{b}$$

时，h，k 无法求得，此时令

$$\frac{a^1}{a} = \frac{b^1}{b} = \lambda$$

得：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c^1}$$

我们引入新的变量

$$v = ax + by$$

此时，我们获得：

$$\frac{dv}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \to \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dv}{dx} - a\right)$$

带入方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c^1}$ 得 (注意此时：$v = ax + by$)：

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dv}{dx} - a\right) = \frac{v+c}{\lambda v + c^1}$$

该方程为可分离变量方程.