> *Author: © Starxsky 邢洪盛 Sat / Sep /20/ 2025*

二阶线性微分方程

方程:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x)$$

称为***二阶线性微分方程***

- 当$f(x) \equiv 0$时，该方程为其次的，否则为非齐次的

线性微分方程的解的结构

齐次方程

对于二阶齐次线性微分方程方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

> *定理1: 如果函数$y_1(x)$，$y_2(x)$为方程的两个解，那么*
>
> $$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$
>
> *也为该方程的解(不一定为通解)*

也为该方程的解(不一定为通解)

为说明定理1在什么情况下为通解，我们引入函数的线性相关与线性无关

> *如果存在n个不全为零的常数k_1，……. k_n 使得定义在区间I上的n个函数 $y_1(x), y_2(x)$ …….. $y_n(x)$ 当 $x \in I$时，有恒等式*
>
> $$k_1y_1(x),\ k_2y_2(x)\cdots\cdots k_xy_n(x) \equiv 0$$
>
> *成立，那么说这n个函数，线性相关否则为线性无关。*

此时，可以根据函数的线性相关性来得出以下定理和相关定理的推广

> - *定理2：如果函数$y_1(x)$， $y_2(x)$ 为上述二阶齐次线性微分方程的两个**线性无关**的解，那么:*
>
> $$y = C_1\ y_1(x) + C_2\ y_2(x)$$
>
> *为方程的通解*
> - *推广： 如果函数$y_1(x)$，……. $y_n(x)$为n阶齐次方程*
>
> $$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$
>
> *的n个线性无关的解，那么此方程的通解为*
>
> $$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$$

非齐次方程

定理3：设$y^*(x)$为二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

的一个特解，$Y(x)$是与之对应的齐次方程的通解，则

$$y = Y(x) + y^*(x)$$

为二阶非齐次线性微分方程的通解

定理4（线性微分方程的叠加原理）：如果二阶非齐次线性微分方程的右侧函数$f(x)$为两个个函数的相加，即

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

而函数$f_1^*(x)$和$f_2^*(x)$分别为方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

和

> $$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$
>
> *的特解，则*
>
> $$y_1^*(x) + y_2^*(x)$$
>
> *就是原方程的特解*

常数变易法

假设我们已知齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的通解为

$$Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

，则，我们使用常数变易法，分别将其中的常数C_1，C_2替换为函数$v_1(x)$，$v_2(x)$,得到：

$$y = y_1(x)v_1 + y_2(x)v_2$$

对上式左右两边对x求导：

$$y' = y_1'v_1 + y_1v_1' + y_2'v_2 + y_2v_2'$$

为了简化后面的计算和让齐次方程成立，我们列出以下关系式：

$$y_1v_1' + y_2v_2' = 0$$

此时我们得到：

$$y' = y_1'v_1 + y_2'v_2$$

再对上式两边对x求导：

$$y'' = y_1''v_1 + y_1'v_1' + y_2''v_2 + y_2'v_2'$$

将y'，y''带入原来的二阶非齐次线性微分方程中得到：

$$(y_1''v_1 + y_2''v_2 + y_1'v_1' + y_2'v_2') + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

进而根据以下方程组得到朗斯基行列式：

$$\begin{cases} (y_1''v_1 + y_2''v_2 + y_1'v_1' + y_2'v_2') + P(x)(y_1'v_1 + y_2'v_2) + Q(x)(y_1v_1 + y_2v_2) \\ y_1v_1' + y_2v_2' = 0 \end{cases}$$

整理得:

$$\begin{cases} y_1'v_1' + y_2'v_2' + (\ y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1\ )\ v_1 + (\ y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2\ ) \\ y_1v_1' + y_2v_2' = 0 \end{cases}$$

注意，因为$Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2$为方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$的通解，所以可知这里的$y_1, y_2$为方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$的解，因此，我们可以得到：

$$\begin{cases} y_1'v_1' + y_2'v_2' = f(x) \\ y_1v_1' + y_2v_2' = 0 \end{cases}$$

此时我们得到朗斯基行列式：

$$W = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

此时，根据行列式我们解得：

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 0' & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \;;\; v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & 0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

$$v_1' = \frac{f y_2'}{y_1' y_2 - y_2' y_1} \;;\; v_2' = \frac{-f y_1'}{y_1' y_2 - y_2' y_1}$$

对上式各自两边同时积分：

$$v_1 = \int v_1' = \int \frac{f y_2'}{y_1' y_2 - y_2' y_1}\, dx = \int \frac{f y_2}{W}\, dx + C_1$$

$$v_2 = \int v_2' = -\int \frac{f y_1'}{y_1' y_2 - y_2' y_1}\, dx = -\int \frac{f y_1}{W}\, dx + C_2$$

最后，再带入

$$y = y_1(x) v_1 + y_2(x) v_2$$

得到二阶非齐次线性微分方程的通解：

得到二阶非齐次线性微分方程的通解：

$$y = y^1(C^1 + \int \frac{fy^2}{W}\ dx) + y^2(C^2 - \int \frac{fy^1}{W}\ dx)$$