Введение

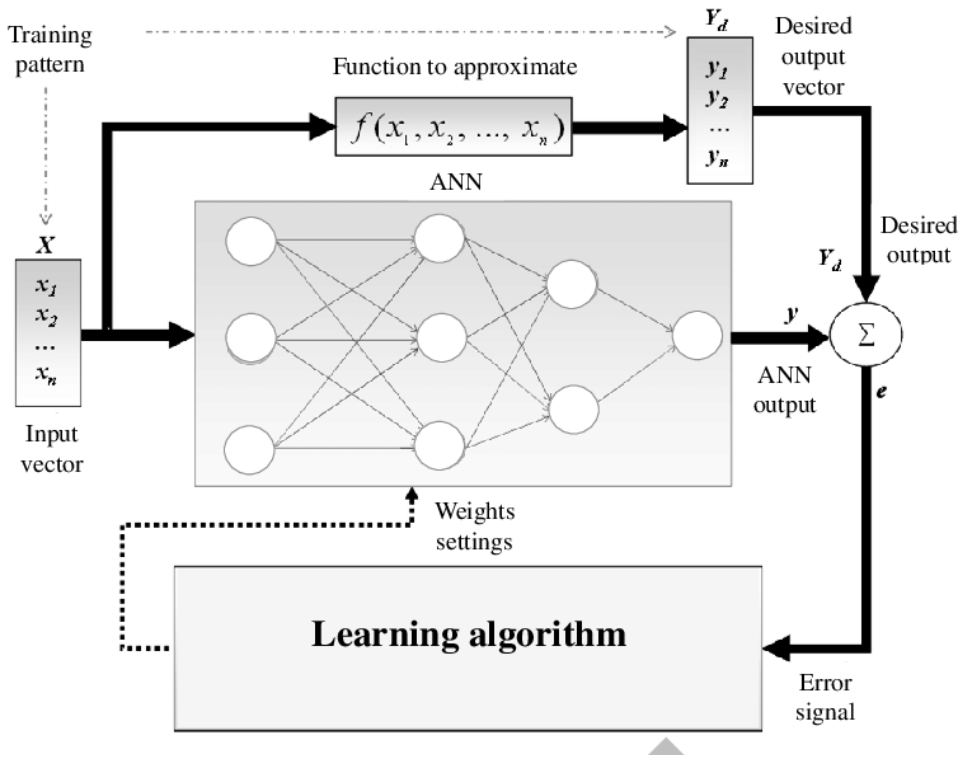
Цель работы:

Исследование применимости нейросетевого подхода к решению задач динамики деформируемого твёрдого тела.

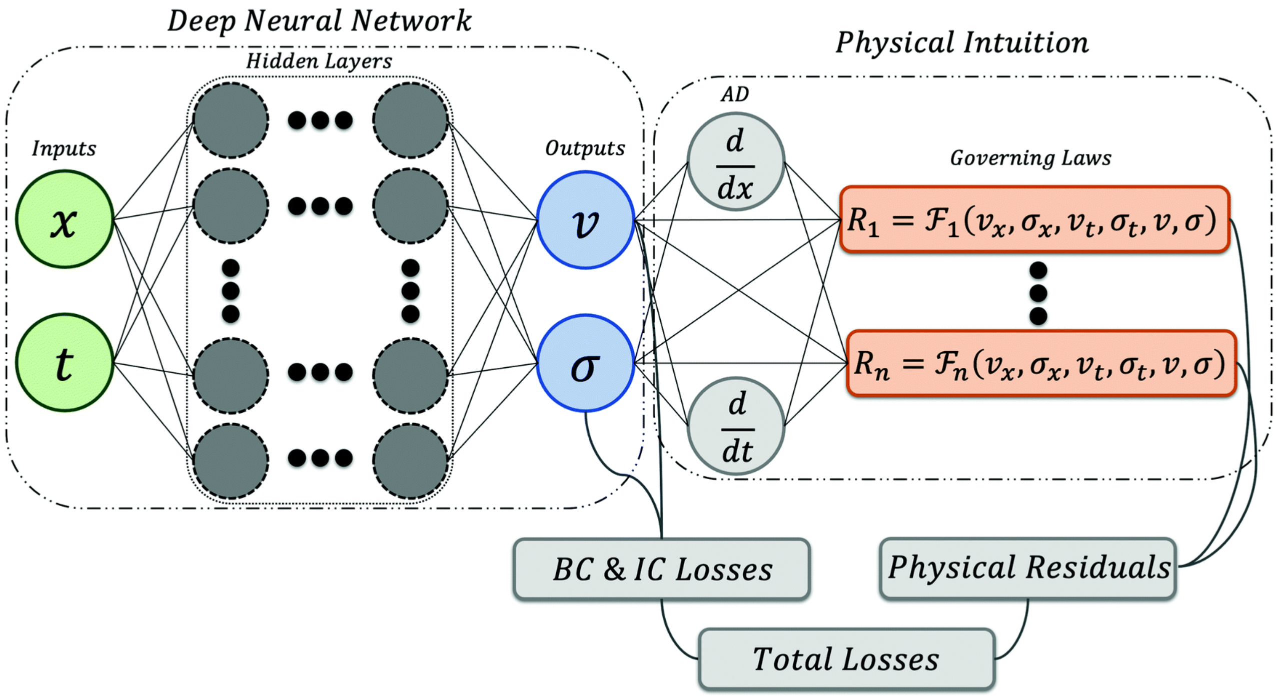
Основополагающая работа:

A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations, Raissi, 2019.

Обычная нейронная сеть



Физически-информированная нейронная сеть



Соотношения для механики деформируемого твёрдого тела

Общий случай

Уравнения равновесия с учётом инерционных сил $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) + \rho \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}{\partial t^2}, \boldsymbol{x} \epsilon \Omega$

Закон Гука $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \lambda Tr\big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})\big)\boldsymbol{E} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \epsilon \Omega$

Уравнения Коши $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\big(\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \nabla \boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{x})\big), \boldsymbol{x} \epsilon \Omega$

Уравнения для плоской задачи

Уравнения равновесия с учётом инерционных сил $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$

Закон Гука с учётом кинематических соотношений $\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y}, \sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x},$

$$\sigma_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$

Соотношения для пересчёта $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Применение PINN к задачам динамики

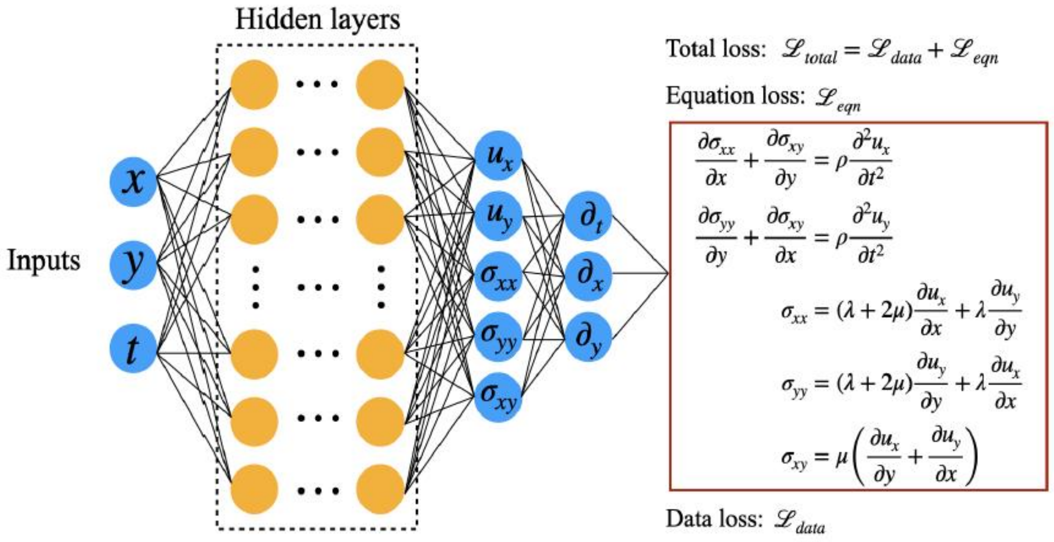
Общая форма управляющего уравнения $\partial_t \boldsymbol{u} = M\boldsymbol{u} + N(\boldsymbol{u})$

Функция потерь для управляющего уравнения $\mathcal{L}_{eqn} = \frac{1}{N_{eqn}} \sum_{1}^{N_{eqn}} \left| \partial_t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_n^e, t_n^e) - M\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_n^e, t_n^e) - N(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_n^e, t_n^e)) \right|^2$

Невязка по данным $\mathcal{L}_{data} = \frac{1}{N_{data}} \sum_{1}^{N_{data}} \left| \boldsymbol{u^e}(\boldsymbol{x}_n^d, t_n^d) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_n^d, t_n^d) \right|^2$

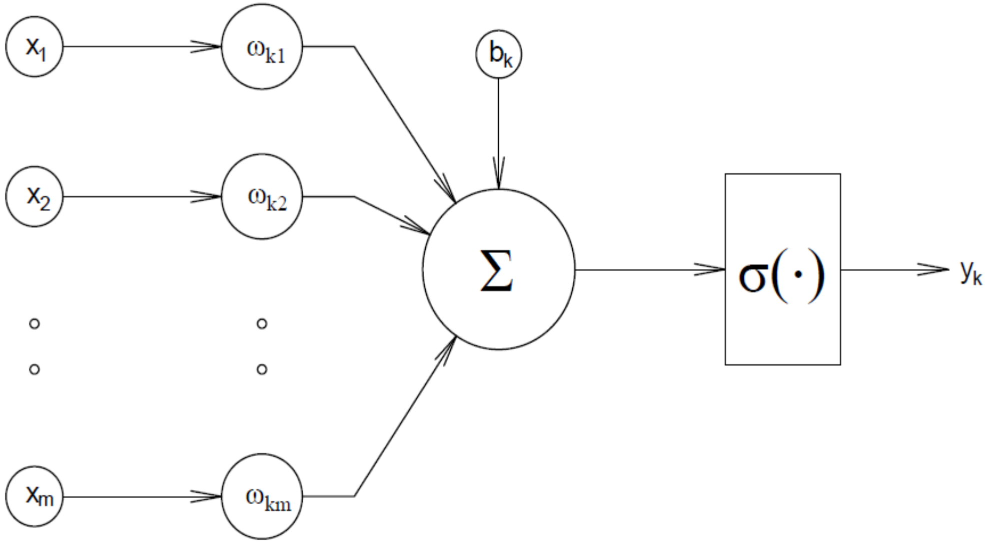
Полная функция потерь $\mathcal{L}_{total} = \lambda_1 \mathcal{L}_{data} + \lambda_2 \mathcal{L}_{eqn}$

Архитектура нейронной сети для решения плоской задачи

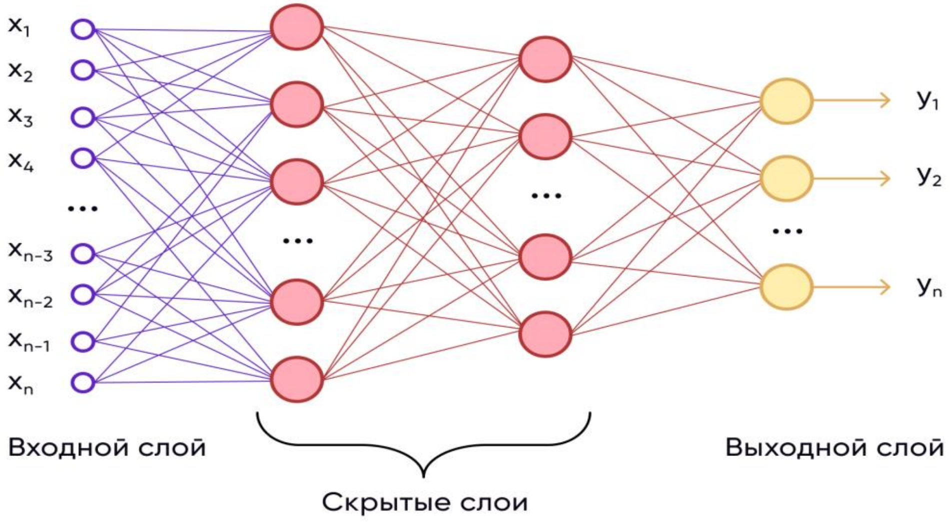


Нейронная сеть с прямой связью

Архитектура нейрона



Архитектура нейронной сети



Преобразования на l – том слое нейросети $\quad \boldsymbol{z}^l = \sigma^l\left(\boldsymbol{W}^l \cdot \boldsymbol{z}^{l-1} + \boldsymbol{b}^l\right)$

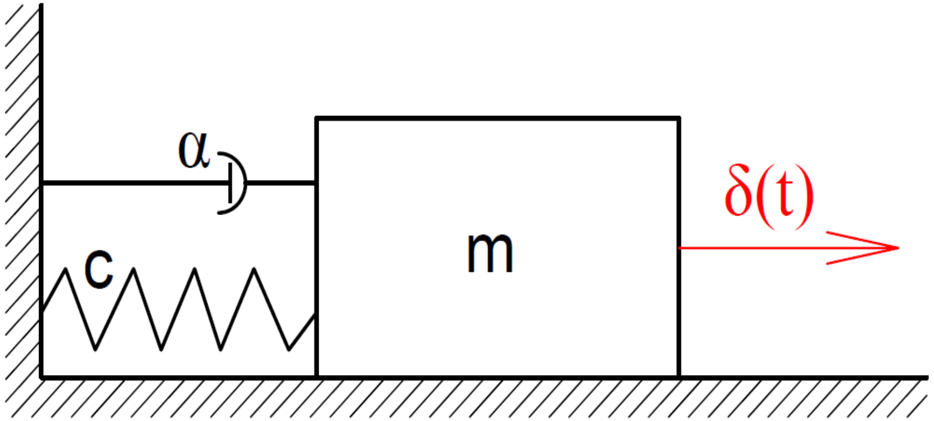
Пример работы двухслойной нейронной сети

$$\boldsymbol{z}^1 = tanh\,(\boldsymbol{W}^1 \cdot x + \boldsymbol{b}^1),$$

$$y = \boldsymbol{W}^2 \cdot \boldsymbol{z}^1 + b^2$$

Моделирование переходного процесса

Одномассовая система



Параметры задачи

Масса	$m = 0{,}1$ кг
Жесткость	$c = 0{,}158\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$
Коэффициент демпфирования	$\alpha = 0{,}02\ \frac{\text{Н} \cdot c}{\text{м}}$
Частота колебаний	$p \approx 0{,}2$ Гц

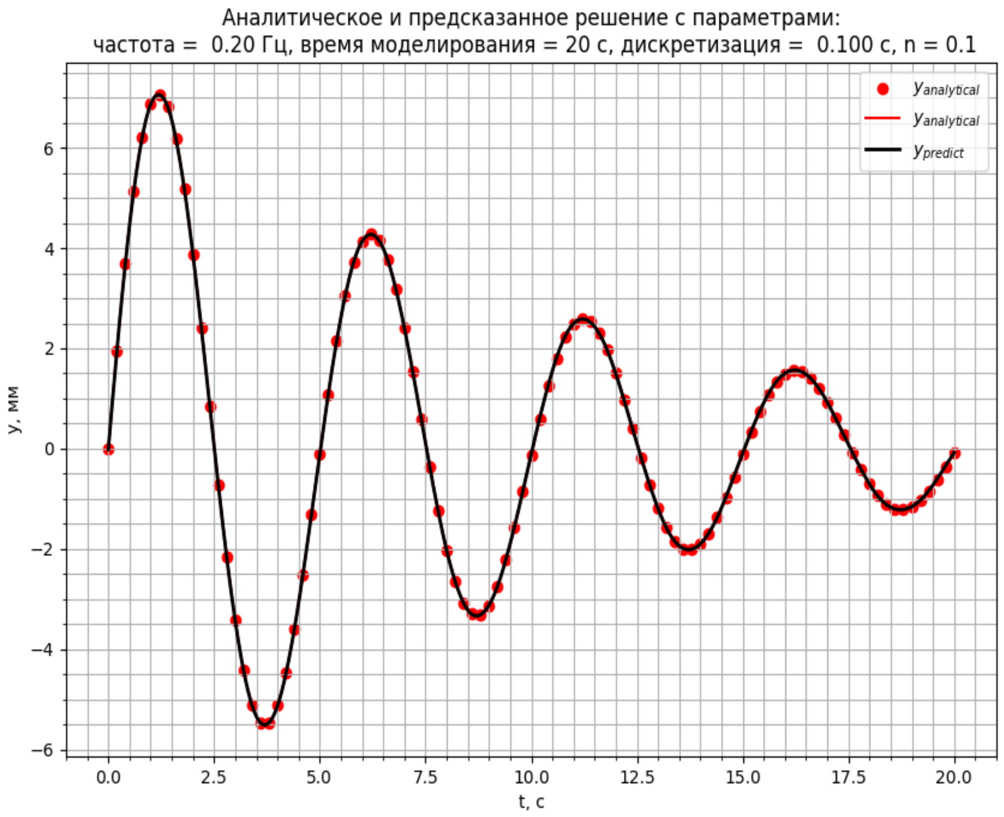
Аналитическое решение $x(t) = \frac{1}{mp_1} e^{-nt} \sin(p_1 t)$

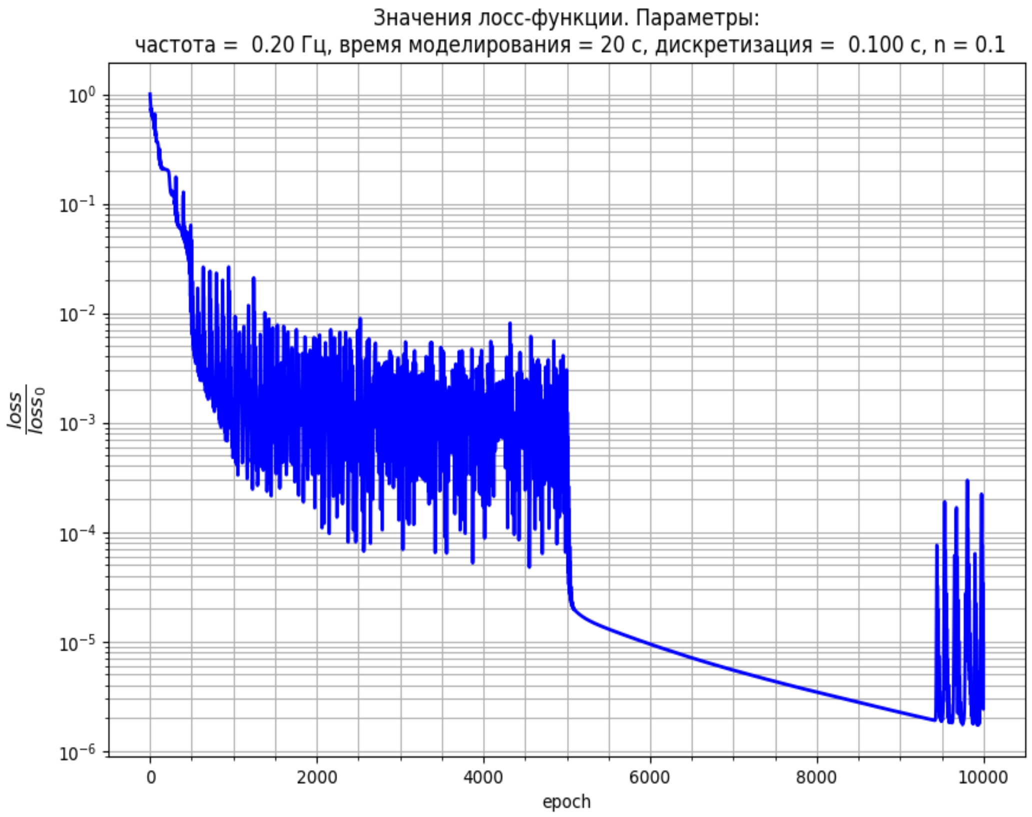
Функция потерь для данных $\mathcal{L}_{data} = \frac{1}{N_{data}} \sum_{1}^{N_{data}} \left| x - x^d \right|^2$

Управляющее уравнение $\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x = 0$

Функция потерь для уравнения равновесия $\mathcal{L}_{eqn} = \frac{1}{N_{eqn}} \sum_{1}^{N_{eqn}} |\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x|^2$

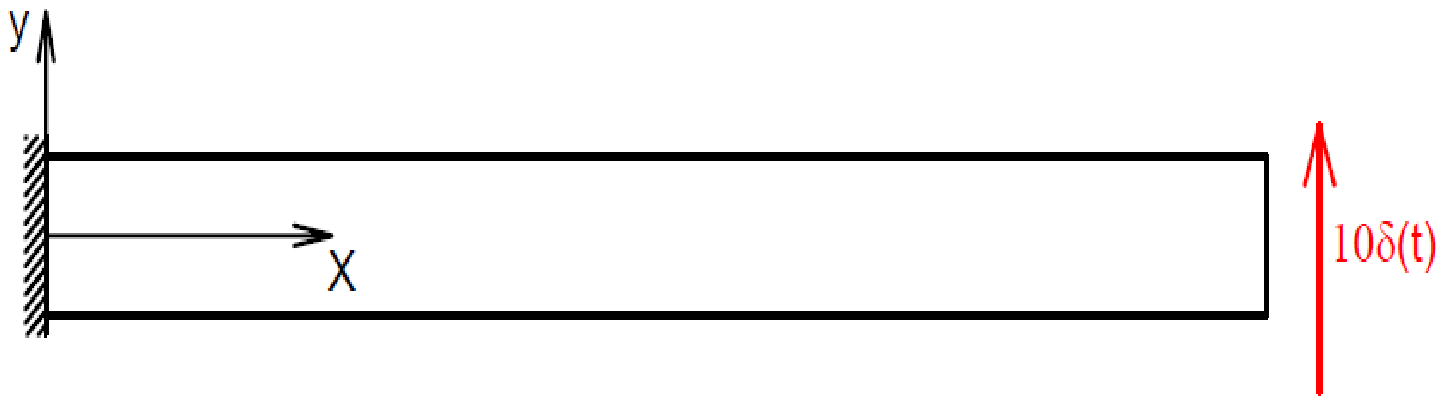
Результаты


Аналитическое и предсказанное решение с параметрами:
частота = 0.20 Гц, время моделирования = 20 с, дискретизация = 0.100 с, n = 0.1
$y_{analytical}$
$y_{analytical}$
$y_{predict}$
y, мм
t, c


Значения лосс-функции. Параметры:
частота = 0.20 Гц, время моделирования = 20 с, дискретизация = 0.100 с, n = 0.1
$\frac{loss}{loss_0}$
epoch

Плоская задача о колебаниях стержня

Консольная балка с импульсной нагрузкой на свободном конце



Параметры задачи

Длина стержня – 200 мм

Ширина стержня – 10 мм

Толщина стержня – 1 мм

Плотность $\rho = 7{,}85 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{кг}}{\text{мм}^3}$

Модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{5}$ МПа

Коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$

Модифицированный вид полной функции потерь

$$\mathcal{L}_{total} = 10^{7}\frac{\mathcal{L}_{data}}{\mathcal{L}_{data}{}^{0}} + \mathcal{L}_{eqn}{}^{norm}$$

Первые пять изгибных собственных частот: 203,56 Гц, 1261,1 Гц, 3469,1 Гц, 6633,2 Гц, 10644 Гц

Функции потерь в плоской задаче

Обезразмеривание исходных данных

$$x^* = \frac{x}{x_c}, y^* = \frac{y}{y_c}, {u_x}^* = \frac{u_x}{{u_x}_c}, {u_y}^* = \frac{u_y}{{u_y}_c}, {\sigma_{xx}}^* = \frac{\sigma_{xx}}{{\sigma_{xx}}_c}, {\sigma_{yy}}^* = \frac{\sigma_{yy}}{{\sigma_{yy}}_c}, \ {\sigma_{xy}}^* = \frac{\sigma_{xy}}{{\sigma_{xy}}_c}, t^* = \frac{t}{t_c}, \lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda_c}, \mu^* = \frac{\mu}{\mu_c}, \rho^* = \frac{\rho}{\rho_c}$$

Функция потерь для данных

$$\mathcal{L}_{data} = \left\| {u_x}^* - {u_x}^{*d} \right\|_{data} + \left\| {u_y}^* - {u_y}^{*d} \right\|_{data} + \left\| {\sigma_{xx}}^* - {\sigma_{xx}}^{*d} \right\|_{data} + \left\| {\sigma_{yy}}^* - {\sigma_{yy}}^{*d} \right\|_{data} + \left\| {\sigma_{xy}}^* - {\sigma_{xy}}^{*d} \right\|_{data}$$

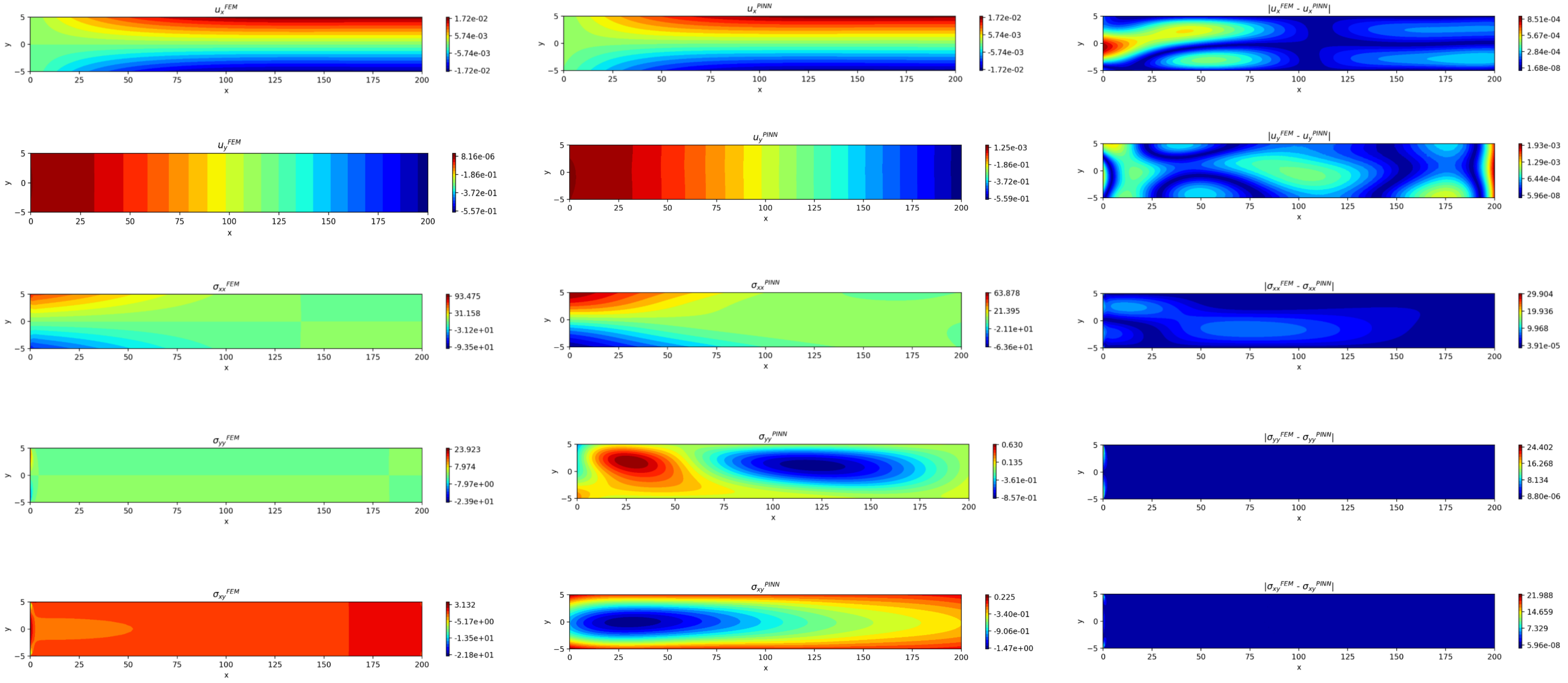
Функция потерь для уравнений равновесия $\mathcal{L}_{eqn} = \mathcal{L}_x + \mathcal{L}_y + \mathcal{L}_{xx} + \mathcal{L}_{yy} + \mathcal{L}_{xy}$

$$\mathcal{L}_x = \left\| \frac{\partial {\sigma_{xx}}^*}{\partial x^*} + \frac{{\sigma_{xy}}_c}{{\sigma_{xx}}_c} \frac{\partial {\sigma_{xy}}^*}{\partial y^*} - \frac{{u_x}_c \rho_c l_c}{{\sigma_{xx}}_c t_c^2} \rho^* \frac{\partial^2 {u_x}^*}{\partial {t^*}^2} \right\|_{eqn} \qquad \mathcal{L}_y = \left\| \frac{{\sigma_{xy}}_c}{{\sigma_{xx}}_c} \frac{\partial {\sigma_{xy}}^*}{\partial x^*} + \frac{{\sigma_{yy}}_c}{{\sigma_{xx}}_c} \frac{\partial {\sigma_{yy}}^*}{\partial y^*} - \frac{{u_y}_c \rho_c l_c}{{\sigma_{xx}}_c t_c^2} \rho^* \frac{\partial^2 {u_y}^*}{\partial {t^*}^2} \right\|_{eqn}$$

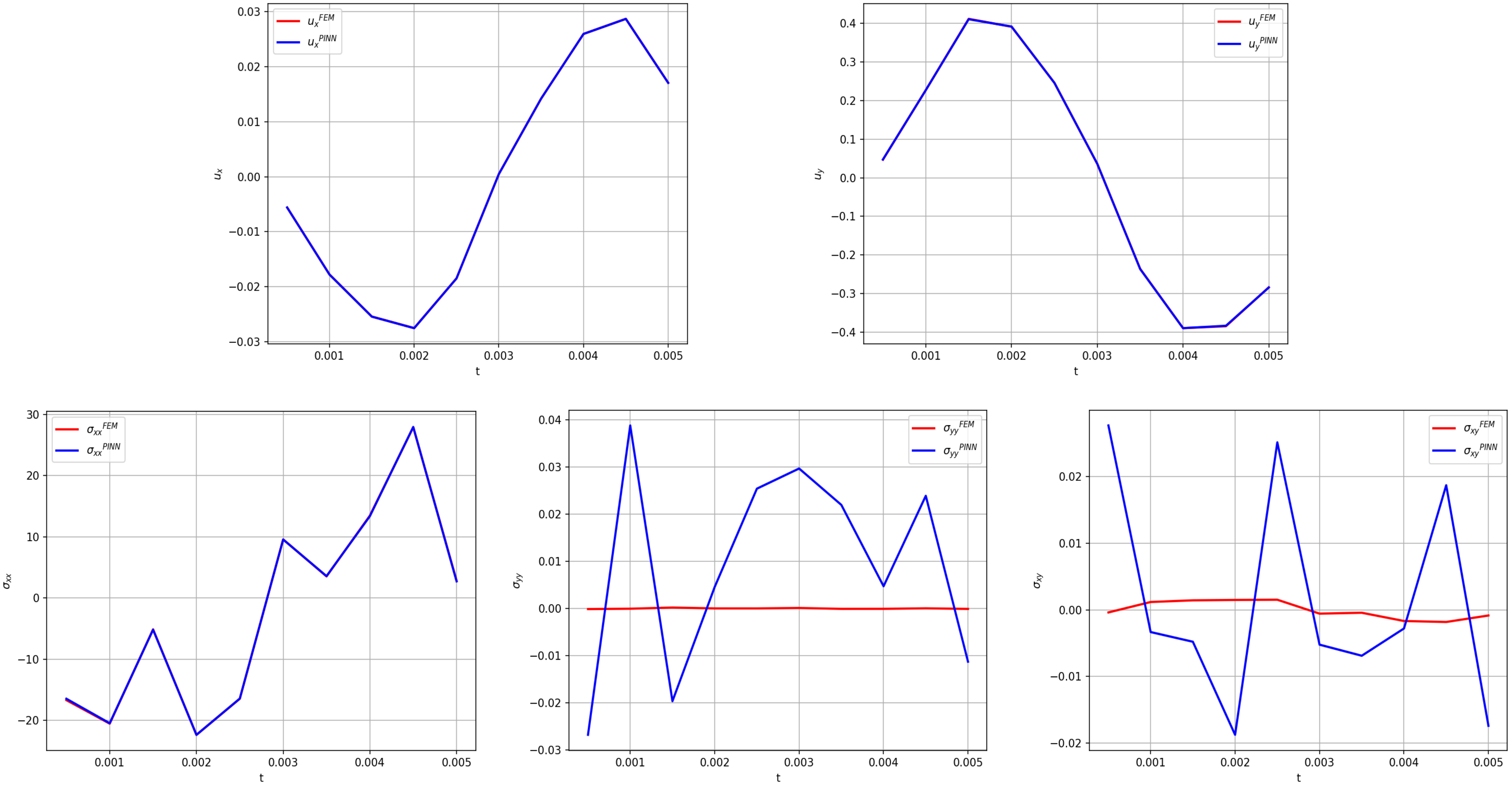
$$\mathcal{L}_{xx} = \left\| \frac{{\sigma_{xx}}_c l_c}{{u_y}_c \lambda_c} \ {\sigma_{xx}}^* - \frac{{u_x}_c}{{u_y}_c} (\lambda^* + 2\mu^*) \frac{\partial {u_x}^*}{\partial x^*} - \lambda^* \frac{\partial {u_y}^*}{\partial y^*} \right\|_{eqn} \qquad \mathcal{L}_{yy} = \left\| \frac{{\sigma_{yy}}_c l_c}{{u_y}_c \lambda_c} \ {\sigma_{xx}}^* - \frac{{u_x}_c}{{u_y}_c} \lambda^* \frac{\partial {u_x}^*}{\partial x^*} - (\lambda^* + 2\mu^*) \frac{\partial {u_y}^*}{\partial y^*} \right\|_{eqn}$$

$$\mathcal{L}_{xy} = \left\| \frac{{\sigma_{xy}}_c l_c}{{u_y}_c \lambda_c} \ {\sigma_{xy}}^* - \mu^* \left(\frac{\partial {u_y}^*}{\partial x^*} + \frac{{u_x}_c}{{u_y}_c} \frac{\partial {u_x}^*}{\partial y^*} \right) \right\|_{eqn}$$

Результаты в момент времени 0,005 секунды

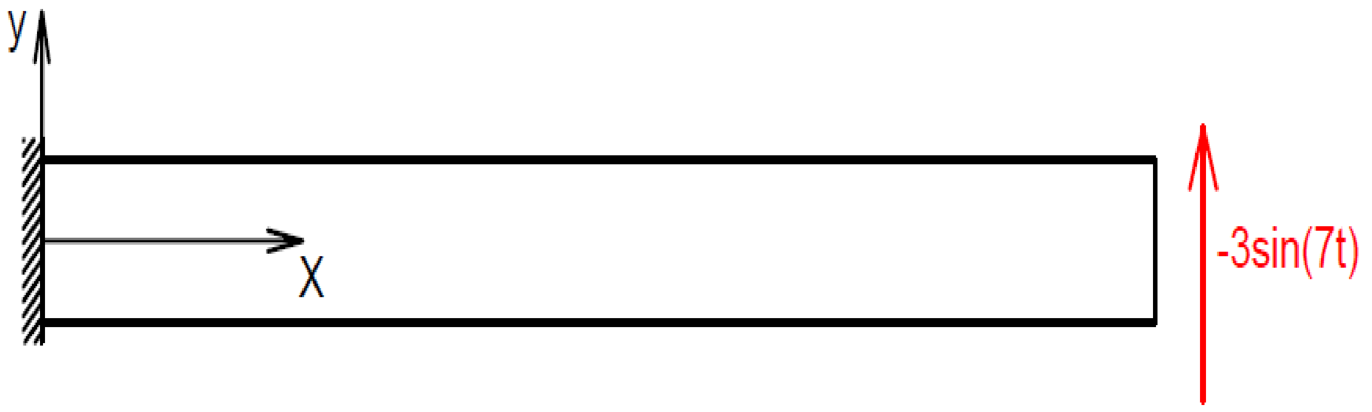


Результаты в точке (120 мм, 5 мм)



Плоская задача о колебаниях стержня №2

Консольная балка с синусоидальной нагрузкой на свободном конце



Параметры задачи

Длина стержня – 200 мм

Ширина стержня – 10 мм

Толщина стержня – 1 мм

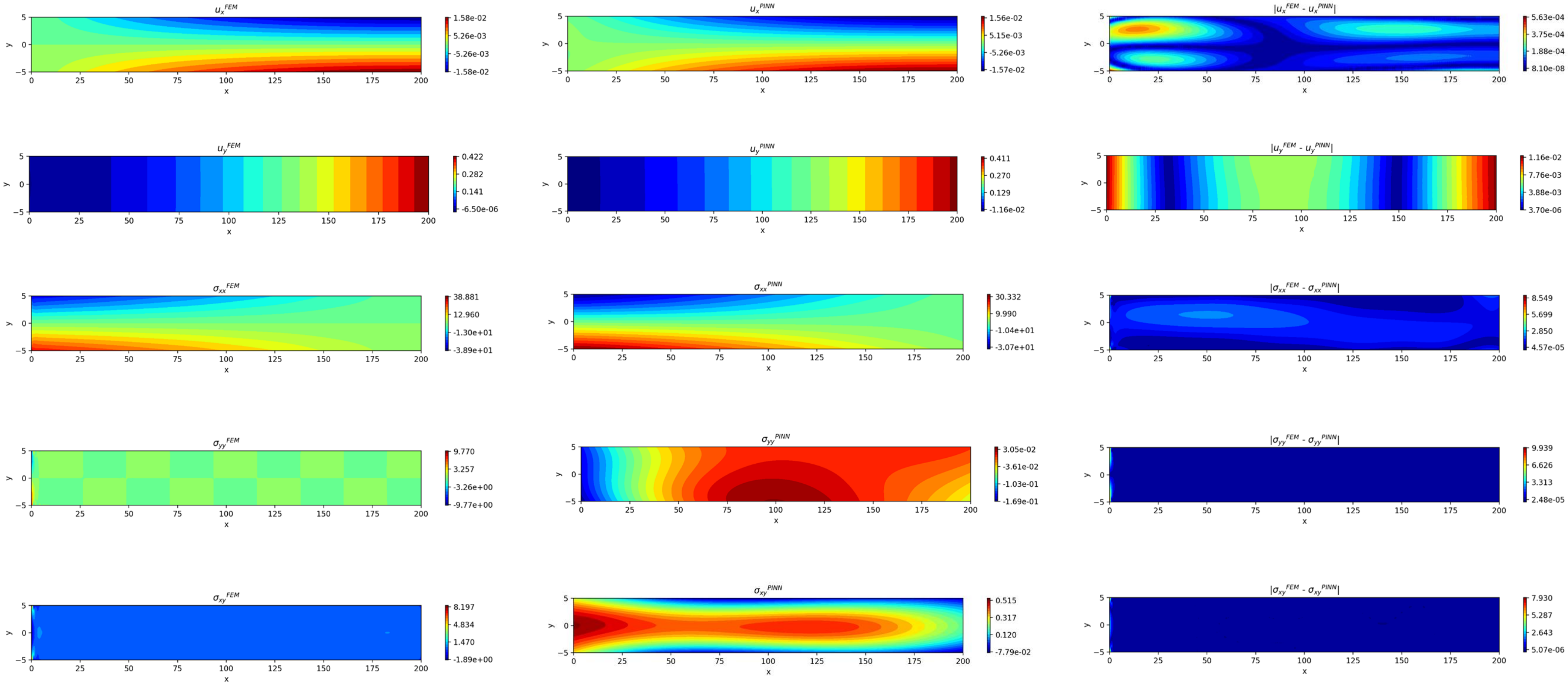
Плотность $\rho = 7{,}85 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{кг}}{\text{мм}^3}$

Модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа

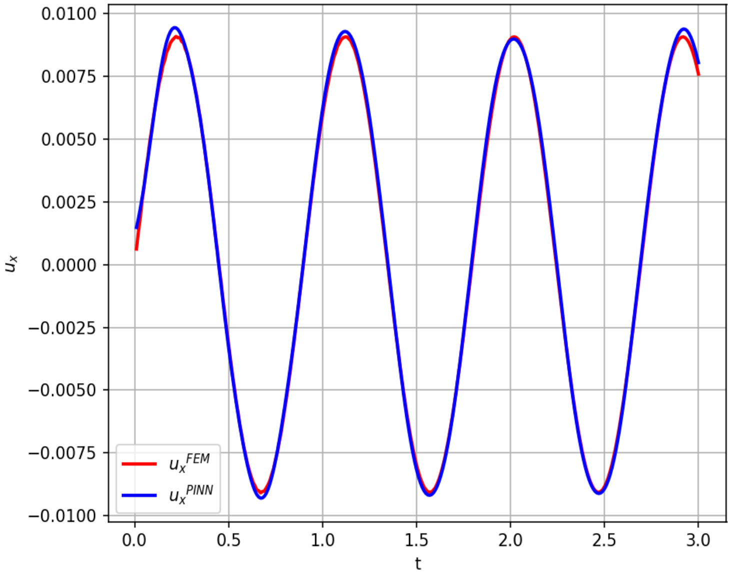
Коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$

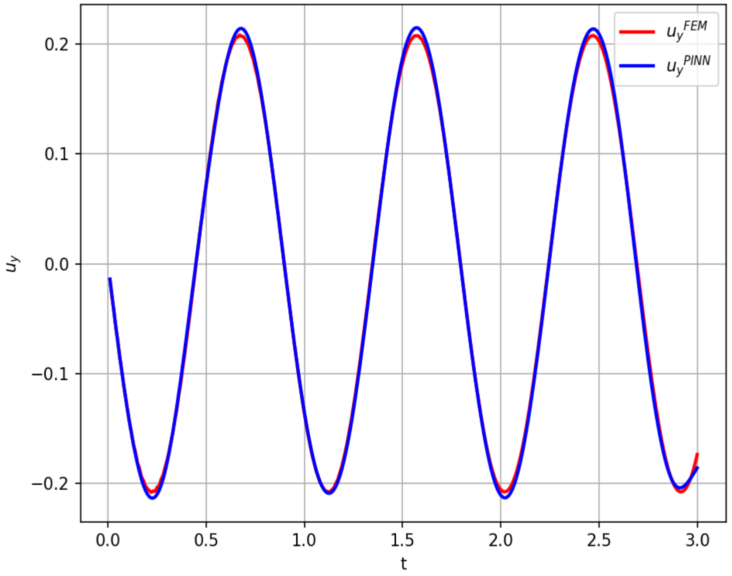
Первые пять изгибных собственных частот: 203,56 Гц, 1261,1 Гц, 3469,1 Гц, 6633,2 Гц, 10644 Гц

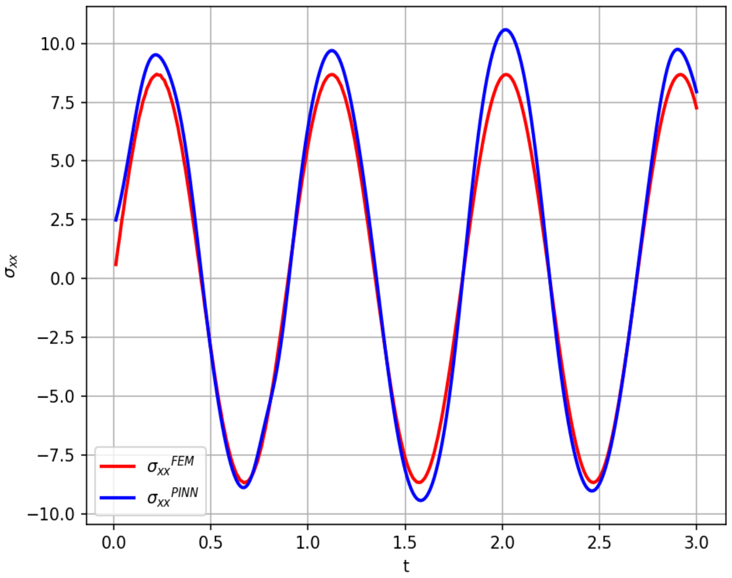
Результаты в момент времени 1,5 секунды

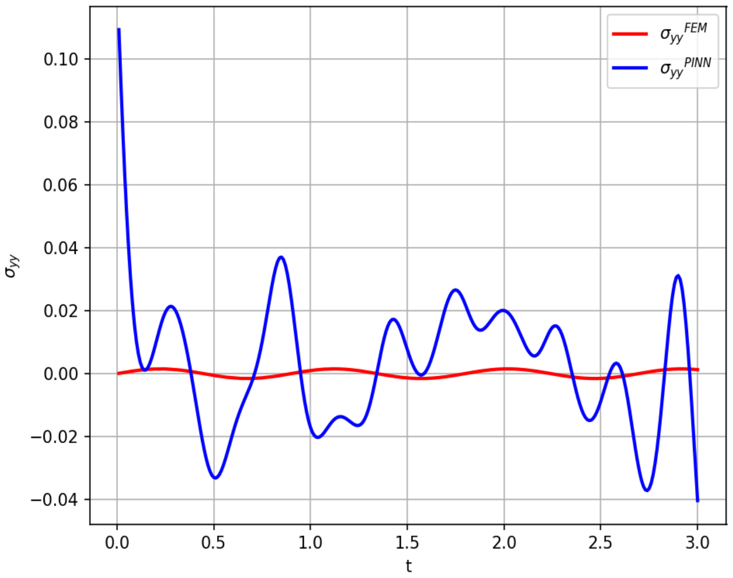


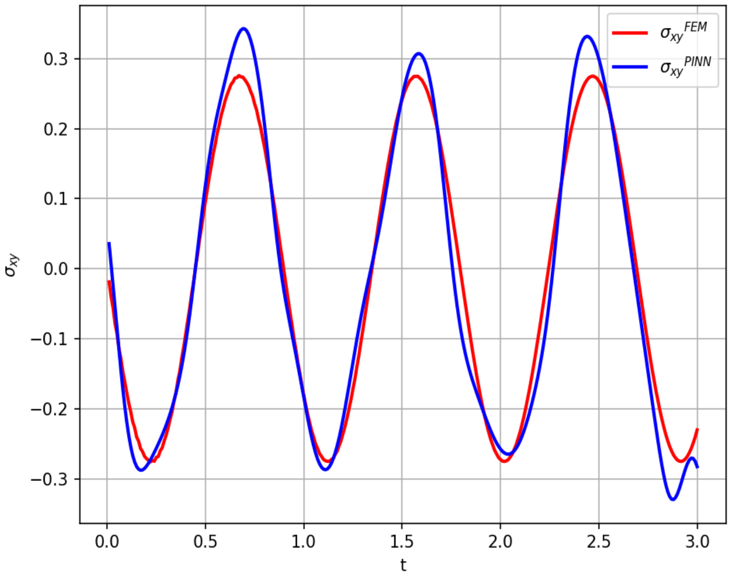
Результаты в точке (120 мм, 3 мм)











Заключение

1. Проведен анализ литературных источников, посвященных физически информированным нейронным сетям и их применению к различного рода задачам механики, в частности, к задачам динамики.
2. Разработан алгоритм обучения нейронной сети для различных задач динамики, позволяющий обучать нейронную сеть на данных, предварительно полученных аналитически или с помощью метода конечных элементов.
3. Продемонстрирован новый подход и его применимость к задачам механики, который отличается от классических и бурно развивается в настоящее время.
4. Направления дальнейших исследований:
    - Распространение данного подхода на решение задач динамики трехмерных тел;
    - Реализация нейросетевого алгоритма восстановления поля напряжений конструкции по информации с датчиков (уменьшение количества обучающих данных);
    - Улучшение качества аппроксимации напряжений с помощью использования современных модификаций нейронных сетей.