5.1) Проверить св-ва матриц.

$(k \cdot l) \cdot A = k \cdot (l \cdot A)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot a_{00} & \cdots & k \cdot a_{0m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{n0} & \cdots & k \cdot a_{nm} \end{pmatrix},$$

$k \cdot l = l \cdot k$, из всего перечисленного следует $(k \cdot l) \cdot A = k \cdot (l \cdot A)$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{00} + b_{00} & \cdots & a_{0m} + b_{0m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} + b_{n0} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}, \quad k \cdot (A+B) = \begin{pmatrix} k \cdot (a_{00} + b_{00}) & \cdots & k \cdot (a_{0m} + b_{0m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{n0} + b_{n0} & \cdots & k \cdot (a_{nm} + b_{nm}) \end{pmatrix}$$

$$k \cdot A + k \cdot B = \begin{pmatrix} k \cdot a_{00} + k \cdot b_{00} & \cdots & k \cdot a_{0m} + k \cdot b_{0m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{n0} + k \cdot b_{n0} & \cdots & k \cdot a_{nm} + k \cdot b_{nm} \end{pmatrix},$$

из всего перечисленного следует $k \cdot (A+B) = k \cdot A + k \cdot B$.

так же очевидно, что $(k + l) \cdot A = k \cdot A + l \cdot A$

Остальные свойства проверены программно.

Вычислите по возможности не используя программирование: $(5 \cdot E)^{-1}$ где E - единичная матрица размера 5×5. Учитывая св-ва перемножения двух матриц для частного случая где кол-во строк = кол-ву столбцов не трудно найти, что

$$(5 \cdot E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Замечание: по диагонали должны быть числа равные $\frac{1}{5}$, а в остальных ячейках не обязательно должен быть 0.

5.2) Вычислите определитель:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= (0 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 0) = -48 + 12 + 96 = 60$$

5.3) Вычислите матрицу, обратную данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

из предыдущего задания мы выяснили что $\det(A) = 60 \neq 0$, т.е. обратная матрица существует.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{*T}$$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -48$ $\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 12$ $\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 32$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12$ $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 12$ $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6$ $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -48$

$$A^* = \begin{pmatrix} -48 & 12 & 32 \\ 6 & -12 & 6 \\ 12 & 6 & -48 \end{pmatrix} \qquad A^{*T} = \begin{pmatrix} -48 & 6 & 12 \\ 12 & -12 & 6 \\ 32 & 6 & -48 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} -48 & 6 & 12 \\ 12 & -12 & 6 \\ 32 & 6 & -48 \end{pmatrix}$$

Приведите пример матрицы 4×4, ранг которой $= 1$.

$$A = \begin{pmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{pmatrix}, \text{ где } x \neq 0$$

5.4) Вычислите скалярное произведение двух векторов: (1, 5) и (2, 8)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 1 \cdot 2 + 5 \cdot 8 = 42$$

5.5) Вычислите смешанное произведение трех векторов (1, 5, 0), (2, 8, 7), (7, 1,5, 3)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \det\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \\ 7 & 1{,}5 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 1{,}5 & 3 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 228{,}5$$