

Практикум по дисциплине “Моделирование квантовых систем”

Сентябрь 2020

1 Лабораторная работа №1

1.1 Генерация случайных квантовых состояний

Для генерации смешанного квантового состояния размерности d необходимо произвести процедуру, обратную процедуре очищения: сгенерировать чистое случайное состояние размерности $d \cdot k$, где k - размерность вспомогательной подсистемы H .

$$|\psi\rangle \in C^{d \cdot k}.$$

Затем, необходимо взять частичный след от матрицы плотности данного состояния по вспомогательной подсистеме H :

$$\rho = \text{Tr}_H(|\psi\rangle\langle\psi|). \quad (1)$$

Полученное состояние имеет размерность d и имеет ранг $r = \min(d, k)$.

Выберите параметры для генерации случайных состояний согласно своему варианту:

| Вариант | d | k |
|---------|-----|-----|
| 1 | 4 | 5 |
| 2 | 5 | 3 |
| 3 | 3 | 6 |
| 4 | 6 | 2 |
| 5 | 5 | 4 |
| 6 | 3 | 5 |
| 7 | 6 | 3 |
| 8 | 2 | 6 |

1. Сгенерировать 1000 случайных смешанных состояний размерности d и параметром k с использованием процедуры очищения. Построить гистограмму распределения собственных значений матрицы плотности.
2. Построить график зависимости среднего $Purity$ состояния от параметра k , изменяемого в пределах от 1 до 100. Для каждого значения k генерировать 50 смешанных состояний размерности d с использованием процедуры очищения.

1.2 Разложение Шмидта и процедура очищения

Выберите квантовое состояние $|\psi\rangle$ и подсистемы A и B согласно своему варианту:

| Вариант | $ \psi\rangle$ | A | B |
|---------|---|---------|---------|
| 1 | $\frac{\sqrt{5}}{4} 001\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} 010\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4} 100\rangle$ | 1 | 2, 3 |
| 2 | $\frac{\sqrt{11}}{8} 0001\rangle - \frac{3}{8} 0011\rangle + \frac{\sqrt{10}}{8} 0111\rangle + \frac{\sqrt{34}}{8} 1111\rangle$ | 1, 2 | 3, 4 |
| 3 | $\frac{1}{3} 000\rangle + \frac{\sqrt{5}}{6} 010\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2} 111\rangle$ | 1, 2 | 3 |
| 4 | $\frac{\sqrt{3}}{8} 0000\rangle - \frac{\sqrt{14}}{8} 0011\rangle + \frac{\sqrt{5}}{8} 1100\rangle - \frac{\sqrt{42}}{8} 1111\rangle$ | 1 | 2, 3, 4 |
| 5 | $\frac{3}{8} 0011\rangle + \frac{\sqrt{6}}{8} 0110\rangle - \frac{7}{8} 1100\rangle$ | 1, 2, 3 | 4 |
| 6 | $\frac{\sqrt{2}}{8} 001\rangle + \frac{\sqrt{7}}{8} 011\rangle - \frac{\sqrt{5}}{8} 110\rangle + \frac{\sqrt{22}}{8} 100\rangle$ | 1 | 2, 3 |
| 7 | $\frac{\sqrt{3}}{4} 0101\rangle - \frac{\sqrt{2}}{4} 1010\rangle + \frac{\sqrt{6}}{8} 1001\rangle - \frac{\sqrt{11}}{8} 0110\rangle + \frac{\sqrt{27}}{8} 1111\rangle$ | 1, 2 | 3, 4 |
| 8 | $\frac{\sqrt{15}}{9} 00100\rangle + \frac{\sqrt{14}}{9} 01010\rangle + \frac{\sqrt{52}}{9} 10001\rangle$ | 1, 2 | 3, 4, 5 |

1. Для заданного квантового состояния $|\psi\rangle$ выполните разложение Шмидта для подсистем A и B .
2. Используя разложение Шмидта, получите матрицы плотности подсистем. Сравните полученный результат с результатом взятия частичного следа.
3. На основе полученного разложения найдите число Шмидта K .
4. Для исходного состояния найдите $Negativity$. Сравните полученные метрики запутанности.
5. Убедитесь, что случайно сгенерированное чистое 4-ёх кубитное состояние почти всегда имеет ненулевую меру запутанности (K и $Negativity$). В качестве подсистемы A выбрать первые два кубита, в качестве подсистемы B - последние два кубита.

2 Лабораторная работа №2

2.1 Эволюция замкнутых квантовых систем

Уравнение фон Неймана:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -i[H, \rho] \quad (2)$$

Унитарная эволюция на отрезке $[t, t + \Delta t]$:

$$U(t, t + \Delta t) = \exp(-iH(t)\Delta t) \quad (3)$$

Выберите гамильтониан системы согласно своему варианту:

| Вариант | H | t |
|---------|--|------------|
| 1 | $\cos(10t)\sigma_z + \sin(10t)\sigma_x$ | $[0, 1]$ |
| 2 | $\pi\sigma_z + \frac{5\pi}{2}\cos(5t)\sigma_x$ | $[0, 2]$ |
| 3 | $2\pi(\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y \sin(8t))$ | $[0, 0.5]$ |
| 4 | $\sigma_x \otimes \sigma_z \sin(2t) + \sigma_z \otimes \sigma_x \cos(4t)$ | $[0, 1]$ |
| 5 | $t\sigma_x + t^2\sigma_y + t^3\sigma_z$ | $[0, 4]$ |
| 6 | $\sigma_x \otimes \sigma_x t + \sigma_y \otimes \sigma_y \sin\left(\frac{t}{5}\right)$ | $[0, 5]$ |
| 7 | $(\sigma_x \otimes \sigma_z + \sigma_x \otimes \sigma_y) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sigma_x \otimes \sigma_x \sin(t)$ | $[0, 2]$ |
| 8 | $(\sigma_x + 2\sigma_y) \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sigma_z \cos\left(\frac{t}{4}\right)$ | $[0, 4]$ |

1. Выполните симуляцию эволюции случайного смешанного состояния 2-го ранга под действием заданного гамильтониана, используя уравнение фон Неймана и метод конечных разностей.
2. Выполните симуляцию эволюции, используя разложение оператора унитарной эволюции по инфинитесимальным временным интервалам $\Delta t = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$.
3. Постройте график зависимости $F(\rho(0), \rho(t))$ от времени при использовании двух методов моделирования.

2.2 Эволюция открытых квантовых систем

Операторное разложение Крауса:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger \quad (4)$$

Явный вид операторов Крауса для различных типов квантового шума.

- Классическая ошибка

$$E_0 = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; E_1 = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

- Деполяризующий шум

$$E_0 = \frac{\sqrt{1-3p}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; E_1 = \frac{\sqrt{p}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$E_2 = \frac{\sqrt{p}}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; E_3 = \frac{\sqrt{p}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Чистая дефазировка

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix}; E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma} \end{pmatrix};$$

$$\text{где } \gamma = 1 - \exp\left(-\frac{2t}{T_2^{pure}}\right)$$

- Амплитудная релаксация

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix}; E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{где } \gamma = 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right)$$

- Фазовая релаксация

$$T_2^{pure} = \frac{2T_1 T_2}{2T_1 - T_2}$$

Описание эволюции посредством матрицы Чоя-Ямилковского:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{mn} \chi_{mn} A_m \rho A_n^\dagger \quad (5)$$

Вычисление матрицы Чоя-Ямилковского в стандартном базисе:

$$\frac{1}{d} \chi = (\mathcal{I} \otimes \mathcal{E})(|\Phi\rangle\langle\Phi|), \quad |\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_j |j\rangle \otimes |j\rangle \quad (6)$$

Описание эволюции посредством супероператора:

$$\text{vec}[\mathcal{E}(\rho)] = G \cdot \text{vec}[\rho], \quad G = \sum_k E_k^* \otimes E_k \quad (7)$$

Выберите тип декогеренции согласно своему варианту:

| Вариант | Тип шума | Параметры |
|---------|-------------------------------|-----------------------------|
| 1 | Дефазировка | $t = 1, T_2 = 10$ |
| 2 | Деполаризация | $p = 0.15$ |
| 3 | Амплитудно-фазовая релаксация | $t = 1, T_1 = 7, T_2 = 5$ |
| 4 | Случайный фазовый шум | $p = 0.2$ |
| 5 | Случайный классический шум | $p = 0.1$ |
| 6 | Амплитудно-фазовая релаксация | $t = 1, T_1 = 12, T_2 = 16$ |

1. Вычислите матрицу Чоя-Ямилковского для рассматриваемого процесса. Убедитесь в том, что частичный след матрицы по второй подсистеме даёт единичную матрицу.
2. Вычислите матрицу эволюции для рассматриваемого процесса
3. Сгенерируйте случайное состояние ранга 2 и выполните моделирование действия рассматриваемого процесса, используя операторное разложение Крауса, матрицу Чоя-Ямилковского и матрицу супероператора. Сравните результаты использования методов.

3 Лабораторная работа №3

3.1 Марковская гамильтонова динамика с декогеренцией

Уравнение Линдблада

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -i[H, \rho] + \frac{1}{2} \sum_k \left\{ L_k^\dagger L_k, \rho \right\} + \sum_k L_k \rho L_k^\dagger, \quad (8)$$

где L_k – операторы Линдблада.

Явный вид операторов Линдблада для различных типов квантового шума.

- Амплитудная релаксация

$$L_1 = \sqrt{\Gamma}a, \quad T_1 = \frac{1}{\Gamma}.$$

- Чистая дефазировка

$$L_1 = \sqrt{\Gamma} \frac{\sigma_z}{\sqrt{2}}, \quad T_2^{pure} = \frac{1}{\Gamma}.$$

| Вариант | H | t | T_1 | T_2 |
|---------|--|------------|-------|-------|
| 1 | $\cos(10t)\sigma_z + \sin(10t)\sigma_x$ | $[0, 1]$ | 20 | – |
| 2 | $\pi\sigma_z + \frac{5\pi}{2}\cos(5t)\sigma_x$ | $[0, 2]$ | – | 10 |
| 3 | $2\pi(\sigma_x + \sigma_y \sin(8t))$ | $[0, 0.5]$ | – | 110 |
| 4 | $\sigma_x \sin(2t) + \sigma_z \cos(4t)$ | $[0, 1]$ | – | 90 |
| 5 | $t\sigma_x + t^2\sigma_y + t^3\sigma_z$ | $[0, 4]$ | 14 | – |
| 6 | $\sigma_x t + \sigma_y \sin(\frac{t}{5})$ | $[0, 5]$ | 25 | – |

1. Выполните симуляцию эволюции случайного чистого состояния под действием заданного гамильтониана и процесса декогеренции, используя уравнение Линдблада и метод конечных разностей.
2. Выполните симуляцию эволюции, используя операторы Крауса и разложение по инфинитизимальным временным интервалам $\Delta t = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$.
3. Постройте график зависимости $F(\rho(0), \rho(t))$ от времени при использовании двух методов моделирования.

3.2 Генерация случайных чисел

Выберите квантовое состояние света и фазу гомодина согласно своему варианту:

| Вариант | Состояние | Фаза гомодина |
|---------|--|-------------------|
| 1 | $ \psi\rangle = (1\rangle + 3\rangle)/\sqrt{2}$ | $\theta = \pi/4$ |
| 2 | $ \psi\rangle \propto \alpha\rangle + -\alpha\rangle, \quad \alpha = 1.5$ | $\theta = \pi/3$ |
| 3 | $ \psi\rangle = 1\rangle$ | $\theta = \pi$ |
| 4 | $ \psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}} 10\rangle + i\sqrt{\frac{1}{6}} 11\rangle$ | $\theta = \pi/10$ |
| 5 | $ \psi\rangle = \alpha\rangle, \quad \alpha = 2e^{i\pi/8}$ | $\theta = 3\pi/4$ |
| 6 | $ \psi\rangle = \frac{1}{2} 1\rangle + \frac{1}{2}e^{i\pi/4} 12\rangle + i\frac{1}{2} 13\rangle + \frac{1}{2} 21\rangle$ | $\theta = 0$ |

1. Определите размерность фокковского пространства, достаточную для моделирования рассматриваемого состояния.
2. Вычислите функцию плотности распределения квадратуры.
3. Сгенерируйте выборку из 10 000 представителей, используя метод Метрополиса. Сравните гистограмму выборки с функцией плотности.
4. Сгенерируйте выборку из 10 000 представителей, используя метод обратной функции. Сравните гистограмму выборки с функцией плотности.

4 Лабораторная работа №4

4.1 Случайные ошибки как квантовый процесс

Произвольное однокубитное преобразование описывается матрицей

$$R(\delta, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} - i \cos \theta \sin \frac{\delta}{2} & -i \sin \theta \sin \frac{\delta}{2} e^{-i\varphi} \\ -i \sin \theta \sin \frac{\delta}{2} e^{i\varphi} & \cos \frac{\delta}{2} + i \cos \theta \sin \frac{\delta}{2} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где θ и φ задают зенитный и азимутальный углы оси вращения состояния на сфере Блоха, а δ — угол вращения.

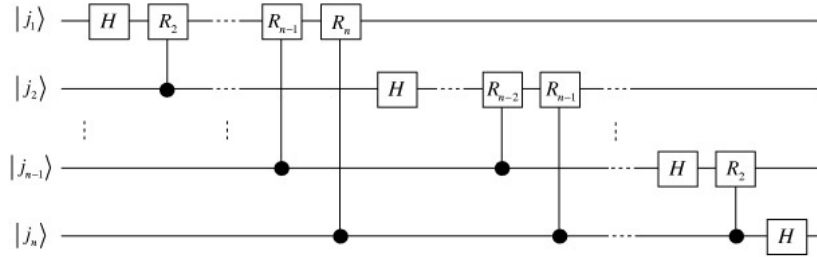
Выберите размерность системы d , случайный оператор U_e и вид распределения e согласно своему варианту:

| Вариант | d | U_e | e |
|---------|-----|---|---------------------------------|
| 1 | 2 | $R(\pi, \pi/2, e)$ | <code>unirnd(0,0.1)</code> |
| 2 | 2 | $R(e\pi/10, \pi/4, \pi)$ | <code>unirnd(-0.2,0.1)</code> |
| 3 | 4 | $R(-\pi/4, \pi/2, \pi/2) \otimes R(\pi/20, \pi/2 + e, 0)$ | <code>normrnd(0,0.1)</code> |
| 4 | 4 | $\text{diag}[1, \exp(i\pi/3), 1, \exp(i\pi/9)]$ | <code>unirnd(-0.05,0.05)</code> |
| 5 | 2 | $R(\pi + e\pi/8, \pi/14, e)$ | <code>normrnd(0.2,0.06)</code> |
| 6 | 4 | $\text{diag}[1, 1, \exp(i\pi/8), \exp(i\pi/4)]$ | <code>normrnd(-0.1,0.4)</code> |

1. Сгенерируйте случайное числовое состояние $|\psi\rangle$ размерности d .
2. Выполните 1 000 численных экспериментов. В каждом эксперименте вычислите $|\varphi\rangle = U_e |\psi\rangle$. Расчитайте вероятность $p = |\langle 0|\varphi\rangle|^2$ и используйте её для генерации результата испытания Бернулли (“0” или “1”). Вычислите общее число k результатов “1”. Оцените вероятность по результатам измерений как $\hat{p} = k/1000$.
3. Выполните описанную в предыдущем пункте процедуру 10 000 раз и постройте гистограмму распределения \hat{p} . Сравните с гистограммой для случая $e = 0$.
4. Вычислите хи-матрицу рассматриваемого процесса и соответствующие операторы Крауса.
5. Вычислите матрицу плотности ρ на выходе полученного процесса и вероятность $p_{\mathcal{E}} = \langle 0|\rho|0\rangle$. Сравните это число с полученными выше гистограммами.

4.2 Зашумлённые квантовые схемы

На Рисунке приведена схема квантового преобразования Фурье (QFT).



Преобразование R_k имеет вид

$$R_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp[i2\pi/(2^k)] \end{pmatrix}.$$

Выберите число кубитов n в схеме, случайный оператор U_e и вид распределения e согласно своему варианту:

| Вариант | n | U_e | e |
|---------|-----|-------------------------------------|---------------------------------|
| 1 | 7 | $R(e\pi, \pi/14, e)$ | <code>normrnd(0,0.06)</code> |
| 2 | 8 | $R(e\pi/10, \pi/4, \pi)$ | <code>unirnd(-0.1,0.1)</code> |
| 3 | 6 | $R(e\pi, \pi/2, e)$ | <code>normrnd(0,0.06)</code> |
| 4 | 5 | $R(e\pi/20, \pi/2 + e, 0)$ | <code>unirnd(-0.03,0.03)</code> |
| 5 | 10 | $R(e\pi/8, e\pi/100, \pi)$ | <code>normrnd(0,0.1)</code> |
| 6 | 5 | $R(-e\pi/4, \pi/4 - e\pi/8, \pi/2)$ | <code>unirnd(-0.1,0.1)</code> |

1. Сгенерируйте случайное чистое состояние $|\psi\rangle$ размерности $d = 2^n$.
2. Выполните моделирование зашумлённого квантового преобразования Фурье для значений уровня ошибки $e = 0, 0.0001, 0.0005, 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1$. Для каждого e выполните 1 000 расчётов состояния $|\varphi\rangle = QFT|\psi\rangle$, где после каждого оператора Адамара действует случайный гейт U_e . Вычислите точность $F = |\langle\varphi_0|\varphi\rangle|^2$, где $|\varphi_0\rangle$ соответствует действию идеального QFT.
3. Постройте график зависимости средней точности от уровня ошибки с доверительными интервалами, соответствующими нижней и верхней квартили точности.

5 Лабораторная работа №5

5.1 Немарковская динамика

Разложение Троттера определяется формулой:

$$\exp(A + B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\exp\left(\frac{A}{n}\right) \exp\left(\frac{B}{n}\right) \right)^n \quad (10)$$

Данное разложение позволяет сводить действие сложного гамильтониана к набору малокубитных операций.

Выберите число кубитов и гамильтониан согласно своему варианту:

| Вариант | n | H |
|---------|-----|---|
| 1 | 6 | $\sum_{k=1}^n Z_k + \sum_{k=2}^n (k-1) X_1 Z_k$ |
| 2 | 5 | $\sum_{k=1}^n Z_k + 4 \sum_{k=1}^{n-1} X_k X_{k+1}$ |
| 3 | 7 | $\sum_{k=1}^n X_k + 4X_1 Z_3 + 9Z_2 X_7 + 9X_4 X_5 + 13Z_6 Z_7$ |
| 4 | 6 | $\sum_{k=1}^n X_k + \sum_{k=1}^n Z_k Z_{n-k+1}$ |
| 5 | 5 | $Z_1 + 2X_2 + 3Z_3 + 4X_4 + 5Z_5 + 5X_1 Z_2 + 5Z_4 X_5$ |
| 6 | 4 | $\sum_{k=1}^n Z_k + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=k+1}^n Z_k X_m$ |

1. Сгенерируйте случайное чистое n -кубитовое состояние $|\psi\rangle$ в котором первый кубит не запутан со всеми остальными. Зафиксируйте random.seed для воспроизводимости эксперимента.
2. Проведите симуляцию эволюции квантового состояния под действием выбранного гамильтониана на временном отрезке $[0, 1]$. В каждый момент времени вычислите *Purity* состояния первого кубита.
3. Выполните троттеризацию выбранного гамильтониана с различным числом разбиений 2, 10, 100. Для каждого числа разбиений проведите симуляцию эволюции квантового состояния с помощью разложения Троттера на одно-/двух-кубитовые преобразования. В каждый момент времени вычислите *Purity* состояния первого кубита.
4. Постройте все полученные графики $Purity(t)$: график из пункта 2 и графики из пункта 3. Постройте графики ошибок троттеризации по сравнению со стандартной симуляцией. Сравните результаты.

5.2 Эффект спинового эха

Выберите число кубитов и гамильтониан согласно своему варианту:

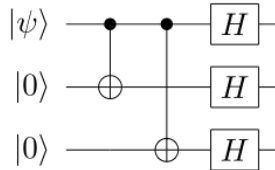
| Вариант | n | H |
|---------|-----|---|
| 1 | 5 | $\sum_{k=1}^n Z_k + \sum_{k=2}^n (k-1)Z_1 Z_k$ |
| 2 | 6 | $\sum_{k=1}^n Z_k + 4 \sum_{k=2}^n Z_1 Z_k$ |
| 3 | 4 | $\sum_{k=1}^n Z_k + 4Z_1 Z_2 + 9Z_1 Z_3 + 16Z_1 Z_4$ |
| 4 | 5 | $1.5 \sum_{k=1}^n Z_k + \sum_{k=2}^n 2^{k-1} Z_1 Z_k$ |
| 5 | 6 | $\sum_{k=1}^n k Z_k + \sum_{k=2}^n Z_1 Z_k$ |
| 6 | 7 | $Z_1 + 2 \sum_{k=2}^n Z_k + 2 \sum_{k=2}^n Z_1 Z_k$ |

1. Сгенерируйте случайное чистое n -кубитовое состояние $|\psi\rangle$ в котором первый кубит не запутан со всеми остальными. Зафиксируйте random.seed для воспроизводимости эксперимента..
2. Проведите симуляцию эволюции квантового состояния под действием выбранного гамильтониана на временном отрезке $[0, 1]$. В каждый момент времени вычислите *Purity* состояния первого кубита. Найдите время фазовой релаксации T_2 (время, за которое недиагональный элемент матрицы плотности состояния первого кубита падает в e раз)
3. Повторно проведите симуляцию эволюции квантового состояния под действием выбранного гамильтониана на временном отрезке $[0, 2T_2]$. В момент времени T_2 подействуйте оператором X_1 на первый кубит. В каждый момент времени вычислите *Purity* состояния первого кубита. Сравните значения *Purity* в моменты времени $t = 0$ и $t = 2T_2$.
4. Построить графики зависимости $Purity(t)$ из пунктов 2 и 3 на отрезке $[0, 2T_2]$.

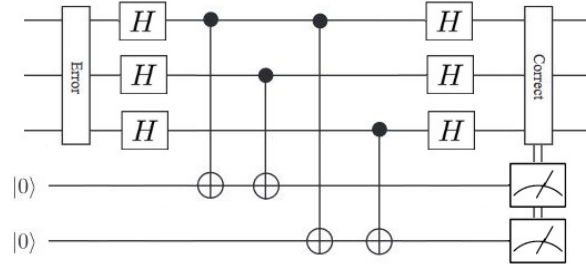
6 Лабораторная работа №6

6.1 Квантовые коды коррекции ошибок

Квантовая схема кодирования трехкубитового кода коррекции, исправляющего фазовые ошибки представлена на рисунке.



Для исправления ошибок вводят дополнительные кубиты с помощью которых определяется синдром ошибки.



Выберите входное квантовое состояние, модель ошибок и правую границу вероятности ошибки согласно своему варианту (для всех вариантов $E_0 = \sqrt{1 - pI}$):

| № | $ \psi\rangle$ | Модель ошибок | p_{max} |
|---|---|--|-----------|
| 1 | $\sqrt{1 - a^2} 0\rangle + a 1\rangle, a = 0.95$ | $E_1 = \sqrt{p}Z$ | 0.4 |
| 2 | $\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle + \exp(\frac{3\pi i}{7}) 1\rangle)$ | $E_1 = \sqrt{0.8p}Z, E_2 = \sqrt{0.2p}S$ | 0.6 |
| 3 | $\frac{1}{\sqrt{3}}(0\rangle + i\sqrt{2} 1\rangle)$ | $E_1 = \sqrt{0.9p}Z, E_2 = \sqrt{0.1p}T$ | 0.7 |
| 4 | $\frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{2} 0\rangle - i\sqrt{3} 1\rangle)$ | $E_1 = \sqrt{0.9p}Z, E_2 = \sqrt{0.1p}Y$ | 0.7 |
| 5 | $\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle - \exp(\frac{7\pi i}{11}) 1\rangle)$ | $E_1 = \sqrt{0.6p}Z, E_2 = \sqrt{0.2p}S, E_3 = \sqrt{0.2p}T$ | 0.7 |
| 6 | $\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle - i 1\rangle)$ | $E_1 = \sqrt{0.8p}Z, E_2 = \sqrt{0.2p} 0\rangle \langle 0 , E_3 = \sqrt{0.2p} 1\rangle \langle 1 $ | 0.6 |

1. Закодируйте входное квантовое состояние, для использования трехкубитового кода коррекции ошибок.
2. Реализовать процедуру исправления фазовой ошибки с помощью добавления двух вспомогательных кубитов.
3. Найти идеальное выходное квантовое состояние, получаемое после процедуры исправления ошибки. Состояние должно быть трехкубитовым, т.е. вспомогательные кубиты необходимо редуцировать.
4. Убедиться, что возникновение фазовой ошибки в любом кубите кода не изменяет квантовое состояние: подействовать оператором Z поочередно на каждый кубит кода, найти фиделити между новым выходным состоянием и состоянием, полученным в пункте 3.
5. Используя корневой подход, найти выходное состояние с учетом выбранной модели ошибок (ошибка действует на каждый кубит кода) и рассчитать фиделити. Прodelать данную процедуру для всех значений вероятности ошибки на отрезке $[0, p_{max}]$.
6. Провести аналогичные вычисления для кубита без кода коррекции. Найти зависимость фиделити от вероятности ошибки на отрезке $[0, p_{max}]$

7. Построить два графика. Оценить, при каких значениях вероятности ошибки код коррекции использовать целесообразно.

7 Лабораторная работа №7

7.1 Анализ характеристик квантового процессора IBM

Выберите квантовую пятикубитовую схему по своему варианту:

| № | Квантовая схема |
|---|---|
| 1 | $H_1, H_3, H_5, CNOT_{12}, CNOT_{54}, Z_1, S_3, T_5$ |
| 2 | $H_1, CNOT_{12}, Z_2, CNOT_{23}, S_3, CNOT_{34}, T_4, CNOT_{45}$ |
| 3 | $H_2, H_4, CNOT_{21}, CNOT_{45}, H_3, CNOT_{32}, CNOT_{34}, T_1, T_5$ |
| 4 | $H_5, CNOT_{45}, T_4, CNOT_{34}, S_3, CNOT_{23}, Z_2, CNOT_{12}, H_1$ |
| 5 | $H_1, H_3, H_5, CNOT_{12}, T_2, CNOT_{23}, T_3, CNOT_{54}, T_4, CNOT_{43}, T_3$ |
| 6 | $H_1, H_2, CNOT_{23}, Z_1, S_2, T_3, CNOT_{34}, H_4, CNOT_{45}, T_5$ |

1. Соберите данную схему на квантовом процессоре IBM (используя их веб-интерфейс или программное API) `ibmq_santiago`. Выполните минимум 8192 прогонов этой схемы для накопления статистики результатов.
2. Извлеките последние параметры калибровки квантового процессора. Для каждого кубита необходимо получить ошибку однокубитовых гейтов (Single-qubit U2 error rate), ошибку двухкубитовых гейтов (CNOT error rate) и ошибки считывания (Readout error).
3. На основе этих параметров постройте модель неидеальной квантовой схемы. Деполяризующий шум, заданный операторами Крауса на основе ошибок гейтов и ошибка считывания, заданная зашумленным POVM оператором.
4. Выполните симуляцию полученной схемы и сравните с результатами, полученными с IBM.

7.2 Анализ эволюции с периодическим гамильтонианом

Пусть гамильтониан системы имеет период T , т.е. $H(t + T_p) = H(t)$ для любых значений t . Тогда теорема Флоке даёт следующее решение уравнения Шредингера:

$$|\psi(t)\rangle = U(0, t_m) \cdot [U(0, T_p)]^m \cdot |\psi(0)\rangle, \quad (11)$$

где $t = mT_p + t_m$, m – целое число, а $U(0, t)$ – унитарный оператор, соответствующий эволюции системы между моментами времени 0 и t .

Для марковской диссепативной системы имеем аналогичное выражение для матрицы плотности

$$\text{vec}[\rho(t)] = G(0, t_m) \cdot [G(0, T_p)]^m \cdot \text{vec}[\rho(0)], \quad (12)$$

где $G(0, t)$ соответствует оператору эволюции (7) на промежутке времени от 0 до t .

Выберите условие задачи согласно своему варианту.

| № | Гамильтониан $H(t)$ | Декогеренция |
|---|---|----------------------|
| 1 | $\cos(2t)\sigma_x \otimes \sigma_0 + \sin(t)\sigma_z \otimes \sigma_y$ | $T_2 = 10$ |
| 2 | $\cos^2(0.5t)\sigma_x$ | $T_1 = 9$ |
| 3 | $8 \cos(t)\sigma_x + \sin(0.25t)\sigma_z$ | $T_2 = 15$ |
| 4 | $\cos(0.3t)\sigma_y$ | $T_1 = 50, T_2 = 20$ |
| 5 | $0.9 \sin(0.4t)\sigma_z \otimes \sigma_z + 0.1 \cos(0.2t)\sigma_0 \otimes \sigma_y$ | $T_2 = 12$ |
| 6 | $1.01 \sin^3(3t)\sigma_x + 0.7 \cos^4(7t)\sigma_z$ | $T_1 = 24$ |

1. Рассчитайте минимальный период T_p гамильтониана.
2. Вычислите результат эволюции состояния $|0\rangle\langle 0|$ на промежутке времени от 0 до $T = 50T_p$, используя подход инфинитезимальных преобразований, либо уравнение Линдблада. Для каждого момента времени t рассчитайте величину $p_0(t) = \langle 0|\rho(t)|0\rangle$.
3. Вычислите $p_0(t)$, используя теорему Флоке. Для этого рассчитайте операторы эволюции для каждого момента времени $t_p \in [0, T_p]$ (достаточно рассмотреть сетку со 100 точками) и сохраните каждый из операторов $G(0, t_p)$ в памяти. После этого примените (12) для вычисления $p_0(t)$ на всех моментах времени от 0 до $T = 50T_p$.
4. Постройте и сравните графики функций $p_0(t)$, полученные двумя способами. Сравните полные времена вычислений с использованием двух способов.