Лабораторная работа №4. Томография квантовых состояний в непрерывных переменных

Произвольное чистое состояние одномодового излучения, записанное в фоковском базисе, имеет вид

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \tag{1}$$

Задача томографии такого состояния сводится к определению всех комплексных амплитуд c_n. Поскольку для любых реальных состояний число фотонов ограничено, будем ограничивать гильбертово пространство сверху некоторым максимальным числом фотонов n_{max}. Тогда

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{n_{max}} c_n |n\rangle. \tag{2}$$

Ошибку такого приближения можно оценить как вероятность того, что при измерении число фотонов для рассматриваемого состояния окажется больше n_{max}:

$$\varepsilon = \sum_{n>n_{max}} |c_n|^2 = 1 - \sum_{n=0}^{n_{max}} |c_n|^2. \tag{3}$$

Заметим, что для состояний с большим средним числом фотонов может иметь смысл также ограничение пространства снизу некоторым n_{min}.

Состояние (2) может быть записано в базисе оператора обобщённой координаты $\hat{x}$ (косинусная компонента поля), имющего непрерывный спектр:

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{n_{max}} c_n \varphi_n(x). \tag{4}$$

Здесь $\varphi(x)$ – собственные функции оператора числа частиц в координатном представлении, которые имеют вид базиса Чебышева–Эрмита:

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!}\right)^{1/2} H_n(x) \exp\bigl(-x^2/2\bigr). \tag{5}$$

Полиномы Эрмита $H(x)$ могут быть расчитаны по рекуррентной формуле:

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 2x, \quad H_n = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x). \tag{6}$$

Информация о модулях $|c_n|$ амплитуд может быть получена с использованием, к примеру, фотодетектора с разрешением по числу фотонов. Это, однако, является технически сложной задачей. Кроме того, такие измерения не дают информацию об относительных фазах между различными c_n. Простая смена измерительного базиса для такого детектирования также оказывается весьма нетривиальной задачей.

Более удобным с практической точки зрения является измерение в базисе квадратурной наблюдаемой, которая имеет вид:

$$\hat{x}_\theta = \hat{x}\cos\theta + \hat{p}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\bigl(\hat{a}e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}\bigr). \tag{7}$$

Здесь θ является параметром наблюдаемой, $\hat{x}$ и $\hat{p}$ – операторы обобщённых координаты и импульса (косинусная и синусная компоненты поля), $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$ – операторы уничтожения и рождения. Делая измерения в базисах, отвечающих различным значениям параметра θ, можно получить полную информацию об амплитудах c_n. Экспериментально это может быть достигнуто за счёт сбивания состояния с мощным когерентным состоянием $|\alpha\rangle$ ($\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$, $|\alpha| \gg 1$) на светоделителе 50/50. На выходах светоделителя располагаются фотодетекторы, сигнал которых поступает на разностную схему. Получаемая разность фототоков является случайной величиной, пропорциональной значению X_θ квадратурной наблюдаемой.

Состояние (2) может быть записано в базисе квадратурной наблюдаемой $\hat{x}_\theta$ по аналогии с (4). Для этого достаточно заметить, что при переходе к данному базису собственные функции оператора числа частиц преобразуются согласно правилу $\varphi_n(x) \to \varphi_n(x_\theta|\theta) = \varphi_n(x_\theta)\exp(in\theta)$. Тогда

$$\psi(x_\theta|\theta) = \sum_{n=0}^{n_{max}} c_n \varphi_n(x_\theta|\theta) = \sum_{n=0}^{n_{max}} c_n e^{in\theta} \varphi_n(x_\theta). \tag{8}$$

Результирующая плотность распределения квадратурной наблюдаемой, таким образом, определяется из правила Борна выражением

$$p(x_\theta|\theta) = |\psi(x_\theta|\theta)|^2. \tag{9}$$

Для моделирования процедуры измерений с заданным параметром θ воспользуемся методом обратных функций. Для этого, прежде всего, необходимо вычислить функцию распределения (*cumulative distribution function*):

$$F(x_\theta|\theta) = \int_{-\infty}^{x_\theta} p(x'_\theta|\theta) dx'_\theta. \tag{10}$$

Случайная величина $F(X_\theta|\theta)$ для X_θ, распределённого по закону (9), имеет равномерное распределение от 0 до 1. Поскольку функция $F(X_\theta|\theta)$ является гладкой и монотонной, $X_\theta = F^{-1}(g)$ является случайной величиной, распределённой по закону (9) (здесь g – равномерно распределённая случайная величина).

Ниже мы будем рассматривать квантовые состояния, полученные в результате действия операторов сдвига

$$D(\alpha) = \exp\bigl(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\bigr) \tag{11}$$

и сжатия

$$S(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2}\bigl(\xi^*\hat{a}^2 - \xi\hat{a}^{\dagger 2}\bigr)\right). \tag{12}$$

Результатом действия оператора сдвига (сжатия) на состояние вакуума $|0\rangle$ является когерентное состояние $|\alpha\rangle$ (сжатое состояние $|\xi\rangle$).

Пусть c есть вектор-столбец амплитуд длины $n_{max}+1$ из выражения (2) (в случае смешанного состояния ранга r вместо вектора ψ рассматривается матрица из r столбцов). Результаты квадратурных измерений для различных θ будем записывать в виде набора $\{(x_j, \theta_j), j = 1, \ldots, n\}$, где n – полный объём выборки.

Реконструкция вектора c методом максимального правдоподобия выполняется по аналогии с тем, как это делалось в случае дискретных перименных. Уравнение правдоподобия для c имеет вид

$$R(c)c = nc, \tag{13}$$

где матрица $R(c)$ имеет следующие матричные элементы:

$$[R(c)]_{kl} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\varphi_k^*(x_j|\theta_j)\varphi_l(x_j|\theta_j)}{p(x_j|\theta_j, c)}. \tag{14}$$

Решение данного уравнения методом простых итераций позволяет получить искомый вектор c (искомую матрицу размерности $(n_{max}+1) \times r$ в случае смешанных состояний). В качестве нулевого приближения может быть взять случайный нормированный вектор длины $n_{max}+1$ (или случайная матрица для смешанных состояний).

Проверка адекватности результата реконструкция может быть выполнена посредством критерия хи-квадрат. Для этого необходимо сперва сгруппировать квадратурные данные для каждого θ таким образом, чтобы в каждом интервале группироки $G_{j,\theta}$ содержалось не менее 5 элементов. Число элементов в j-м интервале обозначим $O_{j,\theta}$. Для каждого интервала группировки также вычисляется теоретическая вероятность относительно полученного вектора c:

$$E_{j,\theta} = n_\theta \int_{x_\theta \in G_{j,\theta}} p(x_\theta|\theta, c) dx_\theta, \tag{15}$$

где n_θ полный объём выборки, приходящийся на измерение с параметром θ. Далее определяется величина хи-квадрат

$$\chi^2 = \sum_{j,\theta} \frac{\left(O_{j,\theta} - E_{j,\theta}\right)^2}{E_{j,\theta}} \tag{16}$$

и соответствующее значение *p-value* (см. Лабораторную работу №3). Число степеней свободы критерия есть $\nu = M - m - \nu_P$, где M – полное число интервалов группировки, m – число нормировочных условий, равное числу различных θ, ν_P – число независимых действительных параметров, опредеюящих вектор c. В случае, если значение *p-value* меньше некоторого наперёд заданного уровня значимости, результат реконструкции считается неадекватным.

Задание

Выберите состояние согласно своему варианту.

Вариант	Состояние
1	$\|\psi\rangle \propto \|\alpha_1\rangle + \|\alpha_2\rangle$, $\alpha_1 = -\alpha_2 = 0.7e^{i\pi/8}$
2	$\|\psi\rangle \propto \|1\rangle + \|\xi\rangle$, $\xi = 0.3$
3	$\|\psi\rangle \propto \|\alpha\rangle + \|1\rangle$, $\alpha = 0.9i$
4	$\|\psi\rangle = S(\xi)\,\|1\rangle$, $\xi = 0.2 + 0.8i$
5	$\|\psi\rangle = D(\alpha)\,\|1\rangle$, $\alpha = -1.2$
6	$\|\psi\rangle = S(\xi)\,\|0\rangle$, $\xi = e^{i\pi/4}$
7	$\|\psi\rangle = S(\xi)D(\alpha)\,\|0\rangle$, $\alpha = 0.7i$, $\xi = 0.2e^{-i\pi/6}$

1. Определите размерность n_{max} гильбертова пространства, достаточную для записи рассматриваемого состояния с точностью не менее $\varepsilon = 10^{-6}$.

2. Постройте распределения (9) квадратурных наблюдаемыех для $\theta = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$.

3. Выполните симуляцию измерений рассмотренных квадратурных наблюдаемых методом обратной функции. Полное число измерений для каждого θ равняется 1000. Для каждого θ постройте гистограмму и соответствующую функции плотности распределения.

4. Выполните реконструкцию состояния методом максимального правдоподобия.

5. На основе реконструированного состояния постройте квадратурные распределения и сравните их с теоретическими истинными распределениями. Определите *fidelity* между истинным и реконструированным состояниями.

6. Сравните реконструированные квадратурные распределения с гистограммами результатов симулированных измерений для каждого θ. Вычислите *p-value* для критерия хи-квадрат.