Лабораторная работа №2. Протоколы квантовых измерений и реконструкция матрицы плотности методом псевдо-инверсии

Рассмотрим набор измерений квантового состояния, заданного в гильбертовом пространстве размерности d. Соответствующее состояние описывается матрицей плотности ρ. Пусть k-му исходу j-го измерения соответствует оператор $P_{j,k}$ такой, что

$$p_{j,k} = \mathrm{Tr}(P_{j,k}\rho) \tag{1}$$

есть вероятность получения соответствующего исхода.

В случае так называемых POVM-измерений для каждого j выполняется равенство $\sum_k P_{j,k} = I$, где I — единичный оператор. Тогда суммарная вероятность по всех возможным исходам измерений равняется единице. Для дискретных систем статистика результатов j-го измерения описывается полиномиальным (мультиномиальным) распределением с распределением вероятностей $p_{j,k}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Если источник состояний является случайным и генерирует в среднем λ состояний в течение времени экспозиции, то статистика измерений описывается независимыми пуассоновскими событиями с интенсивностями $p_j \cdot \lambda$.

Существуют протоколы измерений, в которых каждое измерение содержит всего один исход, отвечающий срабатыванию детектора. Такие измерения зачастую возникают при томографии состояний, закодированных в поляризационные или пространственные моды света. В этом случае статистика измерений описывается биномиальным распределением с вероятностью p_j или распределением Пуассона с интенсивностью $p_j \cdot n$, где n — число измерительных актов (время экспозиции).

В простейшем случае проекционных измерений операторы измерений $P_{j,k}$ являются проекторами на некоторые вектора состояний $|\varphi_{j,k}\rangle$, т.е. $P_{j,k} = |\varphi_{j,k}\rangle\langle\varphi_{j,k}|$. Тогда

$$p_{j,k} = \langle\varphi_{j,k}|\rho|\varphi_{j,k}\rangle \tag{2}$$

Если состояние ψ является чистым и задаётся вектором состояния $|\psi\rangle$, то вместо вероятностей $p_{j,k}$ могут быть рассмотрены амплитуды вероятностей:

$$M_{j,k} = \langle\varphi_{j,k}|\psi\rangle\,. \tag{3}$$

Тогда $p_{j,k} = |M_{j,k}|^2$. Пусть вектор-столбец c задаёт амплитуды состояния $|\psi\rangle$ в вычислительном базисе, а k-я строка матрицы X_j определяется комплексно сопряжёнными амплитудами состояния $|\varphi_{j,k}\rangle$. Составим блочную матрицу X, поместив друг под другом матрицы X_1, X_2 и т.д. Тогда система уравнений (3) может быть записана в матричном виде:

$$M = X\psi, \tag{4}$$

где элементы вектор-столбца M определяются амплитудами $M_{j,k}$. Матрица X определяет протокол квантовых измерений и называется аппаратной матрицей.

Уравнение (4) может быть применено и для смешанного состояния $\rho = \psi\psi^\dagger$, где ψ есть комплексная матрица размерности $d \times r$ (r — ранг квантового состояния), задающая амплитуды очищенного вектора состояния. В этом случае M из (4) является матрицей с r столбцами, а соответствующие вероятности различных исходов равны $p_l = \sum_{q=1}^{r} |M_{lq}|^2$ (здесь индекс l определяется набором из двух индексов $\{j, k\}$).

Система уравнений (1) может быть также переписана в матричном виде. Для этого следует вытянуть матрицу ρ в столбец $\boldsymbol{\rho}$ длины d^2, поместив под первый стобец второй, третий и т.д. Из операторов $P_{j,k}$ следует составить матрицу B, вытянув каждый их них в строку (справа от первой строки помещается вторая, третья и т.д.). В этом случае набор всех вероятностей получается из матричного уравнения

$$p = B\boldsymbol{\rho}. \tag{5}$$

Рассмотрим некоторые протоколы томографии, основанные на проекционных измерениях.

Измерения во взаимно-несмещённых базисах (MUB)

Измерительный базис проекционного POVM-измерения может быть задан унитарной матрицей A, каждый столбец которой задаёт вектор, соответствующий определённому результату измерений. Набор из m_b базисов называется взаимно-несмещённым, если выполняются соотношения

$$|\langle e_j|f_k\rangle|^2 = 1/d, \quad j,k = 1,\dots,d, \tag{6}$$

где ортонормированные наборы векторов $\{|e_j\rangle\}$ и $\{|f_k\rangle\}$ относятся к различным базисам. В случае, когда d есть целая степень простого числа, имеется ровно $m_b = d+1$ таких базисов. Общее число различных исходов при этом есть $d \cdot m_b = d(d+1)$. Поскольку общее числе независимых действительных параметров, характеризующих матрицу плотности полного ранга, есть d^2-1, такие измерения дают достаточное количество уравнений (1). Для размерности $d=2$ MUB могут быть образованы следующими унитарными матрицами:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Для $d=3$:

$$\begin{gathered} A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_3 & \omega_3^2 \\ 1 & \omega_3^2 & \omega_3 \end{pmatrix}, \\ A_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_3 & \omega_3^2 & 1 \\ \omega_3 & 1 & \omega_3^2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_3^2 & \omega_3 & 1 \\ \omega_3^2 & 1 & \omega_3 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $\omega_3 = \exp(2\pi i/3)$ — обобщённый корень третьей степени из 1. Для $d=4$:

$$\begin{gathered} A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ A_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -i & i & i & -i \\ -i & i & -i & i \end{pmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i & -i & i & i \\ -i & i & i & -i \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i & -i & i & i \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -i & i & i & -i \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{9}$$

Случайные измерительные базисы

Набор из $d+1$ случайных измерительных базисов, как правило, обеспечивает информационную полноту и может быть реализован для систем произвольной размерности. Для формирования проекторов в таких измерениях достаточно сгенерировать $m_b = d+1$ случайных унитарных матриц. Их столбцы будут задавать амплитуды векторов для соответствующих проекторов.

Генерация случайной матрицы может быть выполнена посредством QR-разложения матрицы G размерности $d \times d$, каждый элемент которой является случайной комплексной величиной:

$$QR = G, \qquad G_{jk} = \mathcal{N}_{jk}^{(0)} + i\mathcal{N}_{jk}^{(1)}, \quad j,k = 0,\dots,d-1. \tag{10}$$

Здесь все $\mathcal{N}_{jk}^{(0)}$ и $\mathcal{N}_{jk}^{(1)}$ есть независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением, R – верхнетреугольная матрица, а Q – искомая случайная унитарная матрица.

Измерения на основе геометрии правильных многогранников

Рассмотрим случай томографии кубита, в котором в каждом измерении рассматривается только один исход. Запишем состояние, на которое выполняется проецирование при j-м измерении, посредством сферических углов θ_j и ϕ_j на сфере Блоха: $|\varphi_j\rangle = \cos(\theta_j/2)\,|0\rangle + \sin(\theta_j/2)e^{i\phi_j}\,|1\rangle$. Помещая точки, соответствующие сферическим углам, в центры граней правильных многогранников, описанный вокруг сферы Блоха, можно создавать высокосимметричные протоколы измерений.

Оценка квантового состояния посредством псевдо-инверсии

Рассмотрим матрицу измерений B из (5). Пусть она содержит $m > d^2$ строк. Выполним её SVD-разложение: $B = USV^\dagger$, где U — унитарная матрица размерности $m \times m$, S — матрица размерности $m \times d^2$ с неотрицательными сингулярными значениями σ_l $(l = 1, \ldots, d^2)$ на главной диагонали и нулями в остальных позициях, V — унитарная матрица размерности $d^2 \times d^2$. Тогда уравнение (5) может быть переписано в виде

$$Sf = q, \tag{11}$$

где $f = V^\dagger \boldsymbol{\rho}$ — столбец факторов длины d^2, $q = U^\dagger p$ — характеристический столбец длины m. Для того, чтобы система (11) имела точное решение, необходимо, чтобы все последние $m - d^2$ значений характеристического столбца равнялись нулю (критерий адекватности), и все сингулярные значения σ_l были строго положительными (критерий полноты).

Статистические флуктуации приводят к тому, что последние $m - d^2$ элементов вектора q содержат небольшие, отличные от нуля значения, которые в отсутствии систематических (инструментальных) ошибок исчезают в пределе $n \to \infty$. В этой связи мы приравниваем эти элементы к нулю. Ввиду диагонального вида матрицы S система уравнений решается относительно вектора f простым делением: $f_l = q_l/\sigma_l$ $(l = 1, \ldots, d^2)$. Оценка матрицы плотности ρ тогда производится путём формирования квадратной матрицы из вектор-столбца $\boldsymbol{\rho} = Vf$ (операция, обратная вытягиванию в столбец).

Описанная выше процедура даёт точный ответ при отсутствии статистических и систематических ошибок. Наличие статистических флуктуаций значений вектора вероятностей p может приводить к тому, что некоторые собственные значения результирующей матрицы будут отрицательными. Такая матрица не будет положительно определённой и не будет отвечать, таким образом, какому-либо физическому квантовому состоянию. Такая проблема наиболе характерна для состояний неполного ранга, а также для почти чистых состояний. Примером последнего является состояние вида

$$\rho = (1 - \gamma) \, |\psi\rangle\langle\psi| + \gamma I/d \tag{12}$$

для малых значений γ.

Чтобы конечным результатом реконструкции являлось некоторое физическое состояние, следует спроецировать полученную матрицу на множество матриц плотности. Проекция согласно норме Фробениуса осуществляется путём проецирования вектора собственных значений λ_j матрицы на стандартный симплекс (вектор неотрицательных действительных чисел, дающих в сумме единицу). Для этого упорядочим λ_j по невозрастанию и найдём такой максимальный индекс j_0, что $\lambda_{j_0} - w_{j_0} > 0$, где $w_j = (\sum_{i=1}^{j} \lambda_i - 1)/j$. Тогда первые j_0 исправленных собственных значений принимают вид $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j - w_{j_0}$. Остальные значения приравниваются к нулю.

Задание

Выберите размерность пространства и протокол томографии согласно своему варианту:

Вариант	d	Протокол
1	2	MUB
2	3	MUB
3	4	MUB
4	3	Случайные базисы
5	4	Случайные базисы
6	2	Грани тетраэдра
7	2	Грани октаэдра

1. Составьте операторы измерений $P_{j,k}$ для рассматриваемого протокола, а также аппаратную матрицу X из (4) и матрицу измерений B из (5).

2. Сгенерируйте случайное чистое состояние. Убедитесь, что расчёт вероятностей на основе матриц X и B совпадает с результатом применения правила Борна (1).

3. Задайте вероятность деполяризации $\gamma = 0.1$ и сгенерируйте состояние вида (12).

4. Задайте объём выборки $n = 10$, приходящийся на каждое измерение, и выполните симуляцию измерений согласно выбранному протоколу.

5. Оцените вероятности различных исходов как $p_l = k_l/n$, где k_l — количество отсчётов, приходящихся на l-й результат измерений.

6. Выполните реконструкцию состояния методом псевдо-инверсии и вычислите δ, равное абсолютному значению суммы всех отрицательных собственных значений получаемой матрицы плотности.

7. Выполните по 100 повторений пунктов 3–6 для сетки значений γ от 0 до 1 и для $n = 10$, $n = 100$, $n = 1000$. Постройте графики зависимости среднего значения δ от γ для рассмотренных n.

8. Выполните пункты 3–6 для $\gamma = 0$ и $n = 100$, проецируя получаемую матрицу на множество матриц плотности. Постройте гистограмму *fidelity* между истинным и реконструированным состояниями.

Указание. Создайте функцию генерации статистических данных измерений, которая принимает в качестве аргументов только данные о протоколе измерений и матрицу плотности входного состояния. Создайте функцию реконструкции состояния методом псевдоинверсии, которая принимает в качестве аргументов только данные о протоколе измерений и результаты этих измерений.