

УДК 535.14

ИССЛЕДОВАНИЕ АДЕКВАТНОСТИ, ПОЛНОТЫ И ТОЧНОСТИ ПРОТОКОЛОВ КВАНТОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

© 2011 г. Ю. И. Богданов, И. Д. Букеев, А. К. Гавриченко

Физико-технологический институт РАН, 141700 Москва, Россия

E-mail: bogdanov@ftian.ru

Поступила в редакцию 18.04.2011 г.

Рассмотрена новая методология статистического оценивания качества протоколов квантовых измерений, основанная на исследовании полноты, адекватности и точности протоколов квантовых измерений. Оценка полноты базируется на рассмотрении сингулярного разложения специальной матрицы, построенной на основе операторов измерений. Оценка адекватности предполагает наличие избыточности протокола измерений по сравнению с минимально возможным числом строк, необходимых для полного восстановления квантового состояния. Адекватность квантовых измерений оценивается как степень согласованности избыточных статистических данных с законами квантовой теории. Характеристики точности статистического восстановления произвольных квантовых состояний исследуются на основе универсального статистического распределения для потерь точности. Даются примеры применения развитых методов для семи квантовых протоколов, в основе которых лежит геометрия многогранников, обладающих высокой симметрией.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовые состояния, служащие фундаментом современной квантовой физики, оказываются одновременно и основным ресурсом новых квантовых информационных технологий [1–5].

Инструментом для контроля технологии приготовления и преобразования квантовых состояний служит квантовая томография, направленная на восстановление квантовых состояний по статистическим результатам квантовых измерений [6–33].

В наших недавних работах [34–37] были сформулированы количественные критерии для оценки полноты, адекватности и точности квантовых измерений. Эффективность предложенных критериев была подтверждена экспериментально [36, 37].

Настоящая работа преследует две основные цели. Во-первых, основываясь на рассматриваемых критериях, мы стремимся развить весьма общую методологию оценки качества и эффективности произвольных протоколов квантовых измерений. Во-вторых, мы подробно описываем приложение развитой методологии к анализу семи важных для приложений протоколов квантовых измерений, в основе которых лежит геометрия многогранников, обладающих высокой симметрией. Особое внимание уделяется исследованию введенной в настоящей работе функции потерь точности, для которой впервые вычисляются границы для минимальных и максимальных возможных значений.

Развитые методы позволяют сравнивать различные протоколы квантовых измерений между

собой, а также по отношению к фундаментальному уровню точности. Предложенный подход позволяет экспериментатору наилучшим образом распорядиться имеющимися у него ресурсами с целью создания оптимального протокола квантовых измерений.

Работа имеет следующую структуру.

В разд. 2 рассматривается понятие протокола квантовых измерений, являющегося практическим инструментом, связанным с фундаментальной статистической природой квантовых явлений. Описываются понятия амплитуды вероятности и интенсивности генерации событий, даются определения аппаратной матрицы и оператора интенсивности генерации событий, формулируется условие, при выполнении которого протокол образует так называемое неортогональное разложение единицы.

В разд. 3 вводится специальным образом сконструированная матрица измерений. На основе так называемого svd-разложения введенной матрицы формулируются важные понятия полноты и адекватности протокола. Рассматривается метод псевдоинверсии Мура–Пенроуза, служащий для приближенной оценки матрицы плотности. Полученная оценка оказывается хорошим нулевым приближением для получения более точного решения методом максимального правдоподобия.

В разд. 4 рассматривается общее статистическое распределение для потерь точности и его статистические характеристики, а также формулируется количественная граница для максимально возможной точности квантовой томографии.

В разд. 5 описываются результаты математического моделирования характеристик точности семи квантовых протоколов, в основе которых лежит геометрия многогранников, обладающих высокой симметрией.

В разд. 6 сформулированы основные выводы настоящей работы.

2. ПРОТОКОЛ КВАНТОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В соответствии с основными принципами квантовой механики вероятность обнаружить квантовую систему в состоянии $|\varphi\rangle$ при условии, что она была приготовлена в состоянии $|\psi\rangle$, может быть записана в следующем виде (в дираковских обозначениях):

$$P = |\langle\varphi|\psi\rangle|^2. \quad (1)$$

Согласно принципу дополнительности Н. Бора, различные проекционные измерения образуют совокупность взаимно-дополнительных измерений. Рассматриваемая совокупность, в свою очередь, образует протокол квантовых измерений. Вся совокупность квантовых измерений протокола может быть компактно представлена в матричном виде [19–21]:

$$M_j = X_{jl}c_l, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

Здесь c_l ($l = 1, 2, \dots, s$) — компоненты вектора состояния в гильбертовом пространстве размерности s . По повторяющемуся индексу l в формуле (2) предполагается суммирование. Протокол описывает m проекций квантового состояния (поэтому имеет m строк). M_j есть амплитуда вероятности j -й квантовой проекции. Вероятности соответствующих измерений задаются квадратами модулей амплитуд:

$$\lambda_j = |M_j|^2. \quad (3)$$

Параметры λ_j задают интенсивности генерации событий (число регистрируемых событий в единицу времени). Матрица с компонентами X_{jl} , имеющая m строк и s столбцов, задает так называемую аппаратную матрицу протокола квантовых измерений [19–21]. Именно эта матрица описывает формально математически всю совокупность взаимно-дополнительных измерений (j -я строка матрицы X задает бра-вектор $\langle\varphi_j|$ соответствующего проекционного измерения в формуле (1)).

Для смешанного состояния с матрицей плотности ρ соответствующая интенсивность регистрации событий, отвечающих j -й строке протокола, есть

$$\lambda_j = \text{Tr}(\Lambda_j \rho). \quad (4)$$

Здесь $\Lambda_j = X_j^+ X_j$ — оператор интенсивности квантового процесса, X_j есть j -я строка аппаратной матрицы X .

В рассматриваемом случае оператор интенсивности квантового процесса Λ_j является проектором, поэтому

$$\Lambda_j^2 = \Lambda_j. \quad (5)$$

В более общем с формальной точки зрения случае Λ_j — произвольный положительно определенный оператор. Его можно представить как смесь проекционных операторов, рассмотренных выше,

$$\Lambda_j = \sum_k f_k X_j^{(k)+} X_j^{(k)}. \quad (6)$$

Здесь индекс k нумерует различные компоненты смеси, входящие с весами $f_k > 0$.

Такое измерение удобно представлять наглядно как редукцию совокупности проекционных измерений, в которых доступна только суммарная статистика, но недоступны статистические данные по отдельным компонентам. Обычное проекционное измерение есть частный случай записи (6), в которой $f_1 = 1, f_2 = f_3 = \dots = 0$.

Пусть матрица I , равная сумме по всем строкам протокола от произведений времен экспозиции t_j на операторы интенсивности Λ_j , пропорциональна единичной матрице E :

$$I = \sum_{j=1}^m t_j \Lambda_j = I_0 E, \quad (7)$$

где I_0 — постоянная, задающая суммарную интенсивность.

Протокол, удовлетворяющий условию (7), сводится в общем случае к так называемому неортогональному разложению единицы [38]. Заметим, что в математической теории такие измерения рассматриваются в качестве наиболее общего расширения традиционных измерений фон Неймана, основанных на ортогональном разложении единицы. В то же время реальные экспериментальные протоколы квантовых измерений зачастую не удовлетворяют условию (7). В качестве примеров можно привести экспериментальные исследования, проведенные в работах [8, 19, 21–23, 36, 37]. Резонность требования (7) основана на соображениях, связанных с сохранением полной вероятности. В реальных же экспериментах с использованием схемы регистрации событий экспериментатор настраивает установку на выделение, как правило, только одной проекции квантового состояния (при этом представители, отвечающие всем остальным проекциям, про-

сто не регистрируются). Таким образом, реальные эксперименты (по техническим причинам) обычно не обеспечивают регистрацию всех представителей квантового статистического ансамбля и в силу этого не связаны условием сохранения полной вероятности. Наш подход разработан для анализа произвольных реальных протоколов квантовых измерений, основанных на регистрации элементарных событий, и не ограничен требованием (7). Если, однако, рассматриваемое условие выполняется, то анализ протокола упрощается.

Суммарная интенсивность генерации событий задает условие нормировки в виде

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j t_j = n, \quad (8)$$

где n — суммарное по всем строкам протокола ожидаемое число событий, t_j — время экспозиции для j -й строки.

Условие (8) заменяет собой традиционное условие нормировки $\text{Tr}(\rho) = 1$ для матрицы плотности.

3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ МЕТОДОМ ПСЕВДО-ИНВЕРСИИ МУРА–ПЕНРОУЗА

Для описания всей совокупности измерений квантового протокола удобно каждую матрицу интенсивности квантового процесса Λ_j размерности $s \times s$ вытянуть в виде одной строки длины s^2 (вторую строку поместить справа от первой и т.д.). Припишем каждой такой строке B_j вес, определяемый соответствующим временем экспозиции t_j . Составим из таких строк матрицу B размерности $m \times s^2$, которую будем называть матрицей измерений для томографического протокола. Будем предполагать, что $m \geq s^2$. В случае проекционных измерений, задаваемых строками X_j ($j = 1, \dots, m$) аппаратной матрицы X , строки B_j матрицы измерений B могут быть вычислены на основе тензорного произведения строки X_j и комплексно-сопряженной строки X_j^* :

$$B_j = t_j X_j^* \otimes X_j. \quad (9)$$

В конкретных примерах в настоящей работе будем считать, что все времена экспозиций равны одному и тому же значению, принимаемому за единицу.

С использованием матрицы измерений B все результаты протокола могут быть компактно записаны в матричном виде:

$$B\rho = K. \quad (10)$$

Здесь ρ — матрица плотности, записанная в форме одного столбца (второй столбец ниже первого и т.д.). Для упрощения записи будем использовать то же самое обозначение ρ для нового объекта. Вектор-столбец K длины m служит для записи числа регистрируемых событий. Если ρ — точная теоретическая матрица плотности, то элементы столбца K отвечают ожидаемому числу событий, которые будут зарегистрированы.

Алгоритм решения уравнения (10) удобно сформулировать на языке сингулярного разложения матриц (singular value decomposition svd) [39, 40]. Такой способ нахождения решений системы линейных уравнений (10) лежит в основе метода псевдо-инверсии Мура–Пенроуза [41].

Представим матрицу B в виде svd-разложения:

$$B = USV^+, \quad (11)$$

где U и V — унитарные матрицы, а S — диагональная неотрицательно определенная матрица (элементы диагонали этой матрицы называют сингулярными значениями). Размерности рассматриваемых матриц соответственно равны: $m \times m$ для U , $m \times s^2$ для S , $s^2 \times s^2$ для V .

Введем новые переменные. Вместо независимой переменной — столбца ρ — будем рассматривать унитарно связанную с ней переменную f , которую назовем столбцом факторов,

$$f = V^+ \rho. \quad (12)$$

Аналогично вместо исходного столбца измерений K будем рассматривать унитарно связанный с ним столбец Q , который назовем характеристическим столбцом,

$$Q = U^+ K. \quad (13)$$

В новых обозначениях рассматриваемая система, очевидно, может быть записана в следующей форме:

$$Sf = Q. \quad (14)$$

Полученная система элементарна, так как S — диагональная матрица. Ее анализ позволит нам классифицировать измерения с точки зрения их адекватности и полноты [35].

Пусть $m > s^2$, т.е. число измерений превышает число элементов матрицы плотности. Рангом модели q будем называть число ненулевых сингулярных значений матрицы B . Очевидно, что $q \leq s^2$. В матрице S последние $m - q$ строк заведомо нулевые. Отсюда следует, что, для того чтобы система была совместной, необходимо, чтобы и в характеристическом столбце Q последние $m - q$ значений также были тождественно равны нулю. Полученное условие будем называть условием адекватности измерений. Если оно не выполня-

ется, то имеет место неадекватность модели: статистические данные заведомо не соответствуют никакой квантово-механической матрице плотности. Это может означать, например, что неправильно выполнен эксперимент (или расчет аппаратной матрицы протокола). Заметим, что проверка адекватности может быть выполнена только в том случае, когда протокол содержит в себе некоторую избыточность ($m > q$). Заметим также, что рассматриваемая проверка будет точной только в том случае, когда известны точные значения ожидаемого числа событий в каждой строке протокола. Для реальных измерений соответствие между ожидаемым и регистрируемым числом событий только приближенное. В этом случае проверка адекватности измерений сводится к проверке соответствующей статистической гипотезы [34].

Пусть модель адекватна. Если все сингулярные значения заведомо отличны от нуля, т.е. $q = s^2$, то имеет место безусловная полнота: решение существует и оно единственно. Протокол измерения полностью определяет любое квантовое состояние (как чистое, так и смешанное), которое только может быть задано в рассматриваемом гильбертовом пространстве.

В этом случае находим факторный столбец путем деления элементов характеристического столбца на соответствующие сингулярные значения:

$$f_j = Q_j/S_j \quad j = 1, 2, \dots, s^2. \quad (15)$$

В результате находим искомую матрицу плотности посредством унитарного преобразования

$$\rho = Vf. \quad (16)$$

В силу унитарности матрицы V столбец факторов f определяет степень чистоты квантового состояния:

$$\text{Tr} \rho^2 = \sum_{j=1}^q |f_j|^2. \quad (17)$$

Пусть, наконец, $q < s^2$, т.е. некоторые из сингулярных значений равны нулю. В этом случае для ненулевых сингулярных значений имеем

$$f_j = Q_j/S_j, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (18)$$

Полученные таким образом факторы f_j ($j = 1, 2, \dots, q$) будем называть определенными.

В то же время для нулевых сингулярных значений имеем уравнения, отвечающие неопределенности “ноль, деленный на ноль”:

$$0f_j = 0, \quad j = q+1, q+2, \dots, s^2. \quad (19)$$

Полученные таким образом факторы f_j ($j = q+1, q+2, \dots, s^2$) будем называть неопределенными.

В качестве решений последних уравнений могут быть взяты произвольные комплексные числа. Рассматриваемая ситуация соответствует неполноте измерений. Система уравнений имеет бесконечное множество решений. Однако не все они отвечают физическим матрицам плотности. Физическими решениями будут только те, которые задают эрмитову и неотрицательно определенную матрицу плотности. Формально все такие решения можно получить путем “сканирования” по всем возможным значениям неопределенных факторов. Понятно, что реально такую процедуру можно выполнить, если только размерность пространства неопределенных факторов невысока.

Регуляризованным (нормальным) решением будем называть решение, отвечающее выбору нулевых значений для всех неопределенных факторов: $f_j = 0$, $j = q+1, q+2, \dots, s^2$. В силу унитарности связи между матрицей плотности и вектором факторов регуляризованное решение задает минимальный уровень чистоты восстанавливаемого квантового состояния, поскольку в этом случае

$$\text{Tr} \rho^2 \geq \sum_{j=1}^q |f_j|^2.$$

Мы видим, что в случае неполного протокола любые дополнительные измерения могут приводить только к увеличению чистоты состояния (или оставлять ее неизменной). Если же регуляризованное решение уже описывает чистое состояние, то новые измерения никак не повлияют на восстановленное состояние. Другими словами, в этом случае, несмотря на, вообще говоря, неполный протокол измерения, мы получаем полную информацию о рассматриваемом квантовом состоянии. Такой протокол будем называть условно полным: имеет место полнота при условии, что рассматриваются некоторые чистые состояния, специальным образом выбранные. Такого рода ситуация имеет место, например, в экспериментах типа “который путь” (which way) [35, 42].

В дальнейшем будем предполагать, что имеет место безусловная полнота ($q = s^2$). Формулы (15), (16) могут быть использованы для приближенного восстановления матрицы плотности, если в качестве правой части уравнения (10) взять экспериментально зарегистрированные частоты событий. Недостаток такого метода, однако, заключается в том, что в силу статистических флуктуаций экспериментальных данных реконструированная матрица плотности не всегда будет положительно определенной (компоненты смеси, имеющие нулевые или малые веса, могут быть реконструированы как компоненты с малыми отри-

цательными весами). Несмотря на отмеченный недостаток, представленный способ восстановления служит хорошим нулевым приближением для рассматриваемого нами метода максимального правдоподобия (компоненты с малыми отрицательными весами, если они возникают при псевдоинверсии, зануляются). Отметим, что метод максимального правдоподобия свободен от рассматриваемого недостатка, поскольку условие положительной определенности заложено в самой его природе. В то же время использование решения, полученного методом псевдо-инверсии, в качестве нулевого приближения существенно ускоряет поиск решения методом максимального правдоподобия.

4. УНИВЕРСАЛЬНОЕ СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛЯ ПОТЕРЬ ТОЧНОСТИ И МАКСИМАЛЬНО ВОЗМОЖНАЯ ТОЧНОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ

Количественной характеристикой точности статистического восстановления квантового состояния служит так называемая степень согласия (fidelity) F между неизвестным квантовым состоянием и его реконструкцией. В общем случае рассматриваемая величина дается следующей формулой [2, 43]:

$$F = \left(\text{Tr} \sqrt{\rho_0^{1/2} \rho \rho_0^{1/2}} \right)^2, \quad (20)$$

где ρ_0 и ρ — теоретическая и восстановленная матрицы плотности соответственно. В формуле (20) предполагается обычная нормировка следа матрицы плотности на единицу.

В частном случае чистых нормированных на единицу состояний рассматриваемая характеристика определяется формулой

$$F = |\langle c_0 | c \rangle|^2, \quad (21)$$

где c_0 и c — теоретический и восстановленный векторы состояния.

Естественность характеристики (20) связана с важной теоремой Ульмана [2, 43]. Согласно этой теореме, выражение (20) задает достижимый максимум от выражения (21) для всех возможных чистых векторов состояний c_0 и c , до которых могут быть дополнены смешанные состояния ρ_0 и ρ . Можно констатировать, что наш подход соответствует явному построению состояний, о которых говорится в теореме Ульмана.

Степень согласия (21) имеет простую вероятностную интерпретацию. Если в качестве измерительного базиса для неизвестного состояния c_0 выбрать известный реконструированный вектор состояния c и ортогональное дополнение к нему, то F будет задавать вероятность совпадения неиз-

вестного состояния с восстановленным (квантовая система, приготовленная в состоянии c_0 , будет обнаружена при измерении в состоянии c с вероятностью F).

Величину $dF = 1 - F$ естественно назвать потерей точности. Потеря точности оказывается случайной величиной, асимптотическое распределение которой можно представить в виде [34]

$$1 - F = \sum_{j=1}^{j_{\max}} d_j \xi_j^2, \quad (22)$$

где $d_j \geq 0$ — неотрицательные коэффициенты, $\xi_j \sim N(0,1)$, $j = 1, \dots, j_{\max}$ — независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией, $j_{\max} = (2s - r)r - 1$, где r — ранг смеси (число ненулевых собственных значений матрицы плотности). В частности, $j_{\max} = 2s - 2$ для чистых состояний, для которых $r = 1$, и $j_{\max} = s^2 - 1$ для смешанных состояний полного ранга, для которых $r = s$.

Рассматриваемое распределение является естественным обобщением распределения хи-квадрат. Последнее соответствует частному случаю $d_1 = d_2 = \dots = d_{j_{\max}} = 1$. Представленное распределение естественно назвать неоднородным распределением хи-квадрат. В рассматриваемом нами асимптотическом пределе параметры d_j оказываются обратно пропорциональными объему выборки (общему числу зарегистрированных событий) n , т.е. $d_j \sim 1/n$. Указанная зависимость позволяет легко осуществлять перерасчет от одного объема выборки к другому. Метод расчета вектора d подробно описан в [34].

Из (22) следует, что среднее значение потери точности равно

$$\langle 1 - F \rangle = \sum_{j=1}^{j_{\max}} d_j. \quad (23)$$

Нетрудно показать также, что дисперсия для потери точности есть

$$\sigma^2 = 2 \sum_{j=1}^{j_{\max}} d_j^2. \quad (24)$$

Для полученного распределения могут быть аналитически вычислены и моменты более высокого порядка. Например, асимметрия (skewness)

β_1 и эксцесс (excess kurtosis) β_2 распределения могут быть вычислены по формулам

$$\beta_1 = \frac{8 \sum_{j=1}^{j_{\max}} d_j^3}{\sigma^3}, \quad (25)$$

$$\beta_2 = \frac{48 \sum_{j=1}^{j_{\max}} d_j^4}{\sigma^4}. \quad (26)$$

Напомним, что для случайной величины x рассматриваемые характеристики по определению есть

$$\beta_1 = \frac{M[(x - M(x))^3]}{\sigma^3}, \quad (27)$$

$$\beta_2 = \frac{M[(x - M(x))^4]}{\sigma^4} - 3. \quad (28)$$

Здесь символ M обозначает операцию математического ожидания.

Рассмотрим частный случай квантового состояния, задаваемого однородной матрицей плотности, которая пропорциональна единичной матрице. Такое состояние смеси можно наглядно представить как “белый шум” (все веса главных компонент смеси одинаковые). Пусть также квантовый томографический протокол сводится к проекционным измерениям, образующим неортогональное разложение единицы. Тогда имеет место простая связь между вектором d размерности $s^2 - 1$, определяющим распределение потерь точности, и вектором сингулярных значений матрицы измерений B (из вектора сингулярных значений размерности s^2 следует удалить самое большое значение, отвечающее за нормировку). Обозначим значком b редуцированный вектор сингулярных значений размерности $s^2 - 1$. Искомая связь между векторами имеет вид

$$d_j = \frac{C}{nb_j^2}, \quad j = 1, 2, \dots, s^2 - 1, \quad (29)$$

где постоянная C дается выражением

$$C = \frac{\sum_j b_j^2}{4(s-1)}. \quad (30)$$

Для рассматриваемых ниже протоколов, основанных на многогранниках,

$$d_j = \frac{m^l}{4snb_j^2}, \quad (31)$$

где m — число граней многогранника, l — число кубитов в регистре.

Из (29) очевидно, что

$$\frac{d_{\max}}{d_{\min}} = \left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}} \right)^2. \quad (32)$$

Для рассматриваемых ниже протоколов, основанных на многогранниках

$$\frac{b_{\max}}{b_{\min}} = (\sqrt{3})^{l-1}. \quad (33)$$

В этом случае число обусловленности матрицы B есть

$$\text{cond}(B) = (\sqrt{3})^l. \quad (34)$$

Напомним, что по определению число обусловленности матрицы есть отношение максимального сингулярного значения к минимальному. Заметим также, что в определении (34) учитываются все сингулярные значения, в то время как в (33) отбрасывается максимальное сингулярное значение, отвечающее за нормировку.

Рассмотрим снова протокол, задаваемый проекционными измерениями, образующими неортогональное разложение единицы. Можно показать, что в этом случае выполняется условие

$$\frac{1}{4n} \sum_{j=1}^v \frac{1}{d_j} = s - 1. \quad (35)$$

Здесь v — число параметров, задающих состояние,

$$v = j_{\max} = (2s - r)r - 1. \quad (36)$$

Рассмотрим следующую простую оптимизационную задачу: найти минимальное значение потерь точности (23) при условии (35). Решение задачи, как нетрудно видеть, достигается, когда $d_1 = d_2 = \dots = d_v$. В этом случае, средние потери точности достигают своего минимального значения

$$\langle 1 - F \rangle_{\min} = \frac{v^2}{4n(s-1)}. \quad (37)$$

Заметим, что условие $d_1 = d_2 = \dots = d_v$ задает не только минимум средних потерь, но и минимум дисперсии потерь.

В качестве параметра, характеризующего качество протокола квантовых измерений, удобно ввести величину, которая не зависит от объема выборки n ,

$$L = n \langle 1 - F \rangle = n \sum_{j=1}^{j_{\max}} d_j. \quad (38)$$

Результаты численных экспериментов, задающие максимальные потери точности для томографии чистых состояний посредством протоколов, задаваемых различными многогранниками

	1 кубит ($s = 2, L_{\min} = 1$)	2 кубита ($s = 4, L_{\min} = 3$)	3 кубита ($s = 8, L_{\min} = 7$)
Тетраэдр ($m = 4$)	$3/2 = 1.5$	4.442971458	≈ 10.4
Куб ($m = 6$)	$9/8 = 1.125$	≈ 3.5839	≈ 8.2
Октаэдр ($m = 8$)	$9/8 = 1.125$	3.4708(3)	≈ 7.9
Додекаэдр ($m = 12$)	$36/35$	≈ 3.42	≈ 7.8
Икосаэдр ($m = 20$)	$45/44$	≈ 3.39	≈ 7.8
Фуллерен ($m = 32$)	$\approx 234/233$	≈ 3.38	≈ 7.7
Многогранник, двойственный фуллерену ($m = 60$)	1.0041037488	≈ 3.38	≈ 7.7

Введенную величину будем называть функцией потерь. Она является функцией квантового состояния и характеризует асимптотические свойства протокола измерений.

Как следует из (37), минимально возможные (оптимальные) потери даются формулой

$$L_{\min}^{\text{opt}} = \frac{v^2}{4(s-1)}. \quad (39)$$

Для чистых состояний $v = 2s - 2$, поэтому для них

$$L_{\min}^{\text{opt}} = s - 1. \quad (40)$$

Для смешанных состояний полного ранга $v = s^2 - 1$, поэтому для них

$$L_{\min}^{\text{opt}} = \frac{(s+1)^2(s-1)}{4}. \quad (41)$$

5. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Ниже представлены результаты численных экспериментов по томографии одно- и многокубитовых квантовых состояний.

В основе однокубитовых протоколов лежат правильные многогранники, а также многогранники, обладающие высокой симметрией. Правильные (платоновы) многогранники используются для обеспечения наиболее симметричного и равномерного распределения состояний на сфере Блоха. Состояния, которые задают проекционные квантовые измерения, определяются направлениями из центра сферы Блоха к центрам граней многогранников. Таким образом, число граней многогранника определяет число строк протокола квантовых измерений и составляет соответственно 4 для тетраэдра, 6 для куба, 8 для октаэдра, 12 для додекаэдра, 20 для икосаэдра. Поскольку

указанные пять тел исчерпывают все множество правильных многогранников, поиск протоколов квантовых измерений на сфере Блоха, обладающих высокой симметрией, с числом строк более 20 побуждает нас обратиться к многогранникам, которые, хотя и не являются правильными, но обладают высокой симметрией. В качестве таких многогранников были выбраны фуллерен (усеченный икосаэдр), задающий протокол квантовых измерений из 32 строк (по числу граней фуллерена), а также многогранник, двойственный по отношению к фуллерену, задающий протокол квантовых измерений из 60 строк (по числу его граней или, что тоже самое, по числу вершин фуллерена) – пентакис додекаэдр.

Многокубитовые протоколы, рассматриваемые в настоящей работе, образованы проекционными квантовыми измерениями на состояния, которые являются тензорными произведениями рассматриваемых однокубитовых состояний. Если однокубитовый протокол образован многогранником с m гранями и соответственно имеет m строк, то соответствующий ему l -кубитовый протокол будет иметь m^l строк.

Заметим, что однокубитовый протокол, основанный на тетраэдре, был впервые предложен в работе [25]. Аналогичные протоколы для пяти правильных многогранников исследовались численно методом Монте-Карло в работе [28]. В настоящей работе благодаря использованию разработанного нами ранее универсального метода статистического восстановления квантовых состояний, основанного на процедуре очищения [34], удалось радикально повысить точность и полноту исследования произвольных квантовых состояний, включая квантовые состояния в гильбертовых пространствах высоких размерностей. Универсальное статистическое распределение для потерь точности (22) позволяет, в известном

смысле, осуществлять полный анализ точности квантовой томографии для любых протоколов измерения и любых состояний (как чистых, так и смешанных).

В таблице представлены результаты численных экспериментов для чистых квантовых состояний с числом кубитов от одного до трех.

Точность каждого протокола может быть охарактеризована посредством двустороннего неравенства для потерь: $L_{\min} \leq L \leq L_{\max}$. Это неравенство задает довольно узкий диапазон, внутри которого гарантированно лежит точность восстановления произвольного состояния.

Численные эксперименты показывают, что минимально возможные потери L_{\min} определяются теоретически найденным пределом (40). Другими словами, теоретическая нижняя граница для чистых состояний оказывается достижимой, поскольку существуют чистые состояния, для которых потери принимают минимально возможные значения (40). Верхняя граница L_{\max} , приведенная в таблице, есть результат численной оптимизации.

Для однокубитовых протоколов по мере роста числа проецируемых направлений на сфере Блоха максимальные потери приближаются к минимально возможному. В пределе бесконечного числа точек, непрерывно заполняющих сферу Блоха, получаем оптимальный протокол, для которого точность восстановления не зависит от восстанавливаемого состояния.

Для многокубитовых протоколов это не так. Так, для двухкубитовых протоколов при увеличении числа граней многогранников максимальные потери выходят на уровень $L_{\max} \approx 3.37\text{--}3.38$ при минимально возможном значении $L_{\min} = 3$. Аналогично для трехкубитовых состояний соответствующие величины равны $L_{\max} \approx 7.7$ и $L_{\min} = 7$. Полученные результаты объясняются тем, что рассматриваемые нами протоколы включают проектирование только на незапутанные состояния.

С практической точки зрения важно, что все рассматриваемые протоколы позволяют восстанавливать произвольные многокубитовые квантовые состояния с высокой точностью, которая близка к максимально возможной. Например, если мы используем для восстановления двухкубитовых чистых состояний протокол, основанный на октаэдре, то среднее значение точности для различных состояний будет лежать в довольно узком диапазоне $1 - 3.47/n \leq \langle F \rangle \leq 1 - 3/n$. Понятно, что при увеличении объема выборки указанное двустороннее неравенство гарантирует быстрое приближение точности к 100% для произвольного состояния. Отметим также, что протоколы, основанные на многогранниках с небольшим чис-

лом граней (тетраэдр, куб), несколько уступая в точности многогранникам с большим числом граней, значительно проще последних в реализации.

Дробь, представленная в таблице для однокубитовых протоколов на идеальных правильных многогранниках (первые пять значений) подтверждаются численно с очень высокой точностью (правильными оказываются все 16 вычисляемых десятичных знаков, что, вероятно, свидетельствует о том, что представленные значения задают точные границы).

Переходя к рассмотрению томографии смешанных состояний, отметим прежде всего, что для смешанных состояний не существует конечной верхней границы для потерь точности (потери L могут быть сколь угодно велики). Соответствующие высокие потери характерны для смешанных состояний, близких к чистым состояниям. В самом деле число действительных параметров, задающих смешанное состояние полного ранга в гильбертовом пространстве размерности s , равно $s^2 - 1$, что значительно больше по сравнению с чистым состоянием, для которого требуется только $2s - 2$ действительных параметров. В случае смешанного состояния, в котором преобладает одна (главная) компонента, компоненты с малыми весами слишком слабо влияют на статистические данные, не обеспечивая роста информации для восстановления резко выросшего числа параметров. Численные эксперименты полностью подтверждают рассмотренные соображения.

В то же время нижняя граница для потерь точности имеет смысл и для смешанных состояний. В этом случае оптимальные (минимальные) потери L_{\min} реализуются для квантовых состояний, задаваемых однородной матрицей плотности. Соответствующую оценку для L_{\min} нетрудно получить на основе формул (29)–(31). Результат дается формулой

$$L_{\min} = \left[n \sum_j d_j \right]_{\min} = \sum_j \frac{m^j}{4sb_j^2} = \frac{10^l - 1}{4}. \quad (42)$$

Эта величина зависит от числа кубитов, но не зависит от типа многогранника. Она задает минимально возможные потери для рассматриваемых протоколов, которые не используют проектирование на запутанные состояния.

В общем случае для любых протоколов, в том числе и использующих проектирование на запутанные состояния, минимальные (оптимальные) потери даются выражением, непосредственно следующим из (41),

$$L_{\min}^{\text{opt}} = \frac{(2^l + 1)^2 (2^l - 1)}{4}. \quad (43)$$

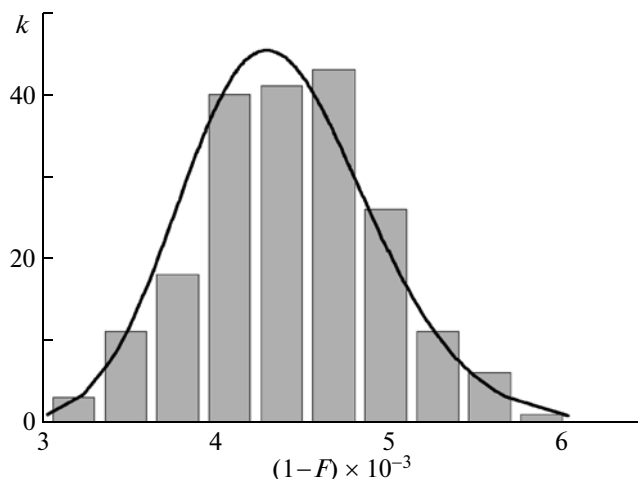


Рис. 1. Проверка универсального статистического распределения для потерь точности. Кривая задает теоретическое распределение, гистограмма — результаты численного эксперимента.

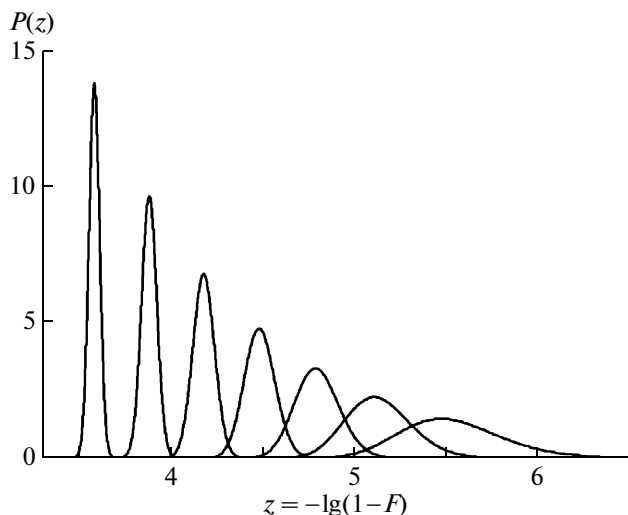


Рис. 2. Точность восстановления состояния Белла и GHZ-состояния в зависимости от числа кубитов. Кривые справа налево: 2 кубита (6 параметров), 3 кубита (14 параметров), 4 кубита (30 параметров), 5 кубитов (62 параметра), 6 кубитов (126 параметров), 7 кубитов (254 параметра), 8 кубитов (510 параметров).

Из сравнения формул (42), (43) мы видим, что рассматриваемые протоколы обеспечивают минимально возможные (оптимальные) потери для восстановления смешанных состояний полного ранга только в случае однокубитовых состояний. В многокубитовом случае протоколы, обеспечивающие минимально возможные потери при восстановлении смешанных состояний, должны заведомо содержать в себе проекции на запутанные квантовые состояния.

На рис. 1 представлены результаты численных экспериментов по проверке универсального ста-

тистического распределения для потерь точности (22). Было проведено 200 экспериментов. Объем выборки в каждом эксперименте составлял 1 млн. ($n = 10^6$). Протокол измерения был основан на тетраэдре. Тестировалось четырехкубитовое состояние, представляющее собой смесь GHZ-состояния и однородной матрицы плотности. Матрица плотности рассматриваемого состояния есть

$$\rho = f \frac{E}{4} + (1-f)|\text{GHZ}\rangle\langle\text{GHZ}|,$$

где E — единичная матрица размерности (16×16) , $|\text{GHZ}\rangle$ — GHZ-состояние Гринбергера–Хорна–Цайлингера (Greenberger–Horne–Zeilinger),

$$|\text{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1111\rangle),$$

f — вес состояния, задаваемого однородной матрицей плотности. В нашем случае $f = 0.5$.

Рассматриваемое распределение является многопараметрическим. Размерность вектора параметров составляет 255.

Полученные данные говорят о хорошем согласии между результатами численного эксперимента и теорией с высоким критическим уровнем значимости, который составил 0.65 согласно критерию хи-квадрат.

На рис. 2 демонстрируется зависимость точности восстановления состояния Белла и GHZ-состояния от числа кубитов. Представлены регистры с числом кубитов от двух до восьми. Протокол измерения основан на тетраэдре. Объем выборки 1 млн. Из рисунка видно, что при увеличении числа кубитов точность реконструкции падает, а ширина распределения уменьшается.

Заметим, например, что для восстановления 8-кубитового чистого квантового состояния требуется оценка 510 параметров. Столько же параметров содержит в себе в рассматриваемом случае и универсальное распределение для потерь точности.

6. ВЫВОДЫ

Сформулируем основные результаты настоящей работы.

На основе специальным образом сконструированной матрицы измерений формулируются важные понятия полноты и адекватности протокола. Протокол оказывается информационно полным, если число томографически дополнительных друг по отношению к другу измерений оказывается равным числу параметров состояния, подлежащих оценке. Математически это условие сводится к требованию строгой положительности всех сингулярных значений матрицы измерений. Томографически полный протокол обеспечивает состоятельные оценки произвольных состояний (как чистых, так и смешанных). Адекватность квантовых измерений означает

внутреннюю согласованность между статистическими данными и теоретической моделью квантового состояния. Проверка адекватности возможна только в том случае, когда протокол обладает некоторой избыточностью (число строк превышает число оцениваемых параметров).

Рассмотрены статистические характеристики универсального распределения точности, сформулирована количественная граница для максимально возможной точности квантовой томографии. Проанализированы границы точности для различных квантовых состояний и различных протоколов. Разработанный подход нацелен на томографию многокубитовых квантовых состояний и допускает восстановление как чистых, так и смешанных состояний произвольного ранга.

Подробно описаны результаты математического моделирования характеристик точности семи квантовых протоколов, в основе которых лежит геометрия многогранников, обладающих высокой симметрией.

Разработанный подход направлен на повышение точности и эффективности процедур томографии квантовых состояний и квантовых операций. Результаты работы могут быть использованы для реализации логических элементов квантовых компьютеров и отладки процедур управления квантовыми состояниями в технологии квантовой криптографии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валиев К.А., Кокин А.А. Квантовые компьютеры: надежда и реальность. Ижевск: РХД, 2001. 352 с.
2. Нильсен М., Чанг И. Квантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир, 2006. 824 с.
3. Физика квантовой информации. Квантовая криптография. Квантовая телепортация. Квантовые вычисления / Под. ред. Боумейстера Д., Экерта А., Цайлингера А. Пер. с англ. под ред. Кулика С.П. и Шмаонова Т.А. М.: Постмаркет, 2002. 376 с.
4. Валиев К.А. // УФН. 2005. Т. 175. С. 3–39.
5. Genovese M. // Phys. Rep. 2005. V. 413. P. 319.
6. Vogel K., Risken H. // Phys. Rev. A. 1989. V. 40. P. 2847–2849.
7. Opatrny T., Welsch D.-G., Vogel W. // quant-ph/9703026.
8. James D.F., Kwiat P.G., Munro W.J., White A.G. // Phys. Rev. A. 2001. V. 64. P. 052312.
9. Langford N.K. et al. // quant-ph/0312072.
10. Molina-Terriza G. et al. // quant-ph/0401183.
11. Hradil Z. // Phys. Rev. A. 1997. V. 55. P. 1561–1564.
12. Banaszek K. // Phys. Rev. A. 1998. V. 57. P. 5013–5015.
13. Banaszek K. et al. // Phys. Rev. A. 2000. V. 61. P. 010304.
14. D'Ariano G.M., Paris M. G.A., Sacchi M.F. // Phys. Rev. A. 2000. V. 62. P. 023815.
15. Lvovsky A.I. et al. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 050402.
16. Zavatta A. et al. // Phys. Rev. A. 2004. V. 70. P. 053821.
17. Allevi A. et al. // Phys. Rev. A. 2009. V. 80. P. 022114.
18. Zambra G. et al. // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95. P. 063602.
19. Bogdanov Yu.I., Chekhova M.V., Krivitsky L.A., Kulik S.P., Penin A.N., Kwek L.C., Zhukov A.A., Oh C.H., Tey M.K. // Phys. Rev. A. 2004. V. 70. P. 042303.
20. Bogdanov Yu.I. // arXiv:quant-ph/0312042.
21. Богданов Ю.И., Кривицкий Л.А., Кулик С.П. // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 78. С. 804–809.
22. Bogdanov Yu.I., Chekhova M.V., Kulik S.P., Maslennikov G.A., Zhukov A.A., Oh C.H., Tey M.K. // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. P. 230503.
23. Bogdanov Yu.I., Moreva E.V., Maslennikov G.A., Galeev R.F., Straupe S.S., Kulik S.P. // Phys. Rev. A. 2006. V. 73. P. 063810.
24. D'Ariano G.M., Mataloni P., Sacchi M.F. // Phys. Rev. A. 2005. V. 71. P. 062337.
25. Rehacek J., Englert B.-G., Kaszlikowski D. // Phys. Rev. A. 2004. V. 70. P. 052321.
26. Ling A. et al. // Phys. Rev. A. 2006. V. 74. P. 022309.
27. Ling A. et al. // arXiv:0807.0991.
28. de Burgh N.D. et al. // Phys. Rev. A. 2008. V. 78. P. 052122.
29. Asorey M. et al. // Phys. Rev. A. 2008. V. 77. P. 042115.
30. Mikami H., Kobayashi T. // Phys. Rev. A. 2007. V. 75. P. 022325.
31. Lanyon B.P. et al. // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. P. 060504.
32. Genovese M., Traina P. // arXiv:quant-ph/07111288.
33. Brida G. et al. // arXiv:quant-ph/0907.4117.
34. Богданов Ю.И. // ЖЭТФ. 2009. Т. 135. С. 1068–1078.
35. Bogdanov Yu.I., Bogdanov A.Yu., Nuianzin S.A., Gavrichenko A.K. // Quantum Computers and Computing. 2008. V. 8. P. 5–40; arXiv:quant-ph/0812.4808.
36. Bogdanov Yu.I., Brida G., Genovese M., Kulik S.P., Moreva E.V., Shurupov A.P. // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 106. P. 010404.
37. Богданов Ю.И., Кулик С.П., Морева Е.В., Тихонов И.В., Гавриченко А.К. // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 91. В. 12. С. 758.
38. Холево А.С. Статистическая структура квантовой теории. М.—Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2003. 192 с.
39. Kress R. Numerical Analysis. New York: Springer Verlag, 1998.
40. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Энциклопедия линейной алгебры. Электронная система ЛИНЕАЛ. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 544 с.
41. Penrose R. // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1955. V. 51. P. 406.
42. Богданов Ю.И., Валиев К.А., Нуязин С.А., Гавриченко А.К. // Микроэлектроника. 2010. Т. 39. С. 243–264.
43. Uhlmann A. // Phys. Rev. A. 2000. V. 62. P. 032307; arXiv:quant-ph/9909060.