Лабораторная работа №5. Томография квантовых процессов

Пусть ρ есть матрица плотности некоторого состояния, заданного в гильбертовом пространстве размерности d. Её преобразование под действием квантового процесса $\mathcal{E}$ может быть описано с использованием операторного разложения Крауса:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{k=1}^{r} E_k \rho E_k^{\dagger}. \tag{1}$$

Здесь E_k операторы Крауса, а число r этих операторов задаёт ранг квантового процесса. Для того, чтобы рассматриваемый процесс сохранял нормировку матрицы плотности, необходимо выполнения условия

$$\sum_{k=1}^{r} E_k^{\dagger} E_k = I_d \tag{2}$$

Здесь и ниже I_d обозначает единичную матрицу размерности $d \times d$. Легко видеть, что случай $r = 1$ описывает унитарный квантовый процесс с единственным оператором Крауса.

Введём матричный базис $\{A_m, m = 1, \ldots, d^2 : \mathrm{Tr}\left(A_m^{\dagger} A_n\right) = \delta_{mn}\}$ и запишем через него разложение (1):

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{m,n=0}^{d^2-1} \chi_{mn} A_m \rho A_n^{\dagger}. \tag{3}$$

Здесь была введена комплексная эрмитова матрица размерности $d^2 \times d^2$:

$$\chi = ee^{\dagger}, \tag{4}$$

где матрица e имеет размерность $d^2 \times r$ и задаётся коэффициентами разложения операторов Крауса по введённому базису:

$$E_k = \sum_{m=0}^{d^2-1} e_{mk} A_m. \tag{5}$$

Наиболее естественным является следующий операторный базис (такой базис называют стандартным):

$$A_m = |m_2\rangle\langle m_1|, \quad m = m_1 \cdot d + m_2, \quad m_1, m_2 = 0, \ldots, d-1. \tag{6}$$

На пересечении $(m_1 + 1)$-го столбца и $(m_2 + 1)$-ой строки матрицы оператора A_m находится единица, а все остальные матричные элементы равны нулю:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad A_{d^2-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

В таком базисе k-й столбец матрицы e из (4) получается путём вытягивания матрицы k-го оператора Крауса в столбец (второй столбец помещается под первый, затем идёт третий и т.д.).

Из определения (4) видно, что матрица χ является неотрицательно определённой. Она задана в гильбертовом пространстве размерности d^2, которое можно представить как тензорное произведение пространств подсистем A и B размерности d каждая. Тогда условие сохранение следа (2) для матрицы χ выражается в виде:

$$\mathrm{Tr}_B(\chi) = I_d, \tag{8}$$

Полный след матрицы χ равен d.

Описание процесса в терминах операторов Крауса и матрицы процесса χ полностью эквивалентны, и могут быть сведены друг к другу. Однако, как можно видеть из (4), операторы Крауса определены с точностью до весьма широкого унитарного произвола. В самом деле, матрицы e и eV, где V — унитарная матрица размерности $r \times r$, порождают одну и ту же матрицу χ и определяют, таким образом, один и тот же квантовый процесс.

Аналогично, операторы Крауса могут быть легко вычислены на основе матрицы χ посредством её спектрального разложения: $\chi = UDU^\dagger$, где U — унитарная унитарная матрица собственных векторов, а D — диагональная матрица собственных значений матрицы χ. Тогда $e = U\sqrt{D}$, и матрицы операторов Крауса вычисляются из столбцов матрицы e путём выполнения процедуры, обратной вытягиванию в столбец. Отсюда также можно видеть, что ранг матрицы χ задаёт ранг квантового процесса. Матрица χ ранга 1 определяет унитарный квантовый процесс.

Поскольку матрица процесса обладает всеми теми же свойствами, что и матрица плотности, заданная в пространстве большей размерности, для реконструкции процесса могут использоваться методы реконструкции квантовых состояний. В частности, использование корневого подхода и решение уравнения правдоподобия позволяют получить матрицу e с заданным числом столбцов r (заданным рангом квантового процесса).

Рассмотрим квантовое состояние, описываемое матрицей плотности ρ. Пусть над этим состоянием выполняется процесс $\mathcal{E}$, после чего производится измерение с операторами P_l. Тогда вероятность получения l-го результата определяется выражением

$$p_l = \mathrm{Tr}[\mathcal{E}(\rho)P_l] = \mathrm{Tr}(\chi\Lambda_l), \quad \Lambda_l = \rho^* \otimes P_l. \tag{9}$$

Таким образом, описанное измерение статистически эквивалентно измерению квантового состояния χ в гильбертовом пространстве размерности d^2 с операторами измерения Λ_l. Подавая на вход процесса различные квантовые состояния и выполняя на выходе различные измерения, можно получить такой набор операторов $\Lambda_{j,l}$ (индекс j задаёт измерительную схему, а l — индекс результата измерения в этой схеме), который будет обеспечивать информационную полноту относительно реконструкции матрицы χ.

Ниже мы будем рассматривать протокол измерений, в котором на вход процесса подаётся m_p различных состояний, и каждое из этих состояний подвергается одному из m_m измерений. Тогда в общей сложности необходимо реализовать $m = m_p \cdot m_m$ измерительных схем.

Пусть j-я схема измерений повторялась n_j раз, в результате чего были получены числа отсчётов $k_{j,l}$, а соответствующие эффективные операторы измерений есть $\Lambda_{j,l}$. Реконструкция матрицы e из (4) может быть выполнена с использованием того же алгоритма, которым выполнялась реконструкция квантового состояния в разделе: решается уравнение правдоподобия с нулевым приближением, полученным в результате псевдо-инверсии с проецированием. Из полученной матрицы e далее вычисляется матрица процесса:

$$\chi = d \cdot \frac{ee^\dagger}{\mathrm{Tr}(e^\dagger e)}. \tag{10}$$

Полученный результат, однако, в общем случае не будет удовлетворять свойству сохранения следа (8). Пусть $\Pi_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ — проектор на некоторое состояние $|\varphi\rangle$. Введём фиктивный оператор измерения $\Lambda_\varphi = \Pi_\varphi \otimes E$. Из уравнения (8) можно видеть, что соответствующая вероятность есть

$$p_\varphi = \mathrm{Tr}(\chi\Lambda_\varphi) \equiv \mathrm{Tr}_{AB}(\chi\Lambda_\varphi) = \mathrm{Tr}_A(\mathrm{Tr}_B(\chi)\Pi_\varphi) = \mathrm{Tr}_A(I_d\Pi_\varphi) = 1. \tag{11}$$

Таким образом, описанное выше фиктивное измерение матрицы χ посредством оператора Λ_φ для сохраняющих след процессов даёт одну и ту же вероятность вне зависимости от $|\varphi\rangle$ и конкретного вида рассматриваемого процесса. Число отсчётов в таком фиктивном измерении асимптотически равняется числу измерений: $k_\varphi = n_\varphi$. Таким образом, дополняя исходный протокол измерений операторами $\Lambda_{\varphi_1}, \Lambda_{\varphi_2}, \ldots$ такими, что $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \ldots\}$ является информационно полным набором векторов для подсистемы A, можно обеспечить автоматическое выполнение условия сохранения следа в результате реконструкции. При этом для обеспечения достаточной точности выполнения данного условия, следует взять $n_\varphi = 1000 \cdot \max_j(n_j)$ для каждого φ.

Для оценки близости истинного χ и реконструированного $\hat{\chi}$ процессов будем использовать меру *fidelity* для квантовых состояний:

$$F(\chi, \hat{\chi}) = \left(\mathrm{Tr}\sqrt{\sqrt{\rho_\chi}\rho_{\hat{\chi}}\sqrt{\rho_\chi}}\right)^2, \tag{12}$$

где $\rho_\chi = \chi/d$ есть квантовое состояние, соответствующее процессу.

Задание

Выберите размерность пространства и протокол томографии согласно своему варианту:

Вариант	d	Входные состояния	Набор измерений
1	2	Грани тетраэдра	MUB
2	3	15 случайных состояний	MUB
3	4	20 случайных состояний	MUB
4	3	Вектора MUB	Случайные базисы
5	4	Вектора MUB	Случайные базисы
6	2	Вектора MUB	Грани тетраэдра
7	2	Вектора MUB	Грани октаэдра

1. Составьте эффективные операторы измерения $\Lambda_{j,l}$ квантового процесса.
2. На основе полученных операторов составьте матрицу измерений B и определите её число обусловленности. Является ли рассматриваемый протокол информационно полным?
3. Сгенерируйте статистические данные для случайного унитарного процесса, полагая, что на каждую измерительную схему приходится по 100 измерений.
4. Дополните исходный протокол измерений фиктивными операторами измерений, используя все вектора MUB для соответствующей размерности.
5. На основе результатов симулированных измерений, дополненных асимптотическими результатами фиктивных измерений, выполните реконструкцию квантового процесса. Вычислите *fidelity* между истинным и реконструированным процессами.
6. Выполните описанные выше процедуры 100 раз и постройте гистограмму *fidelity*.