Лабораторная работа №1. Измерение оптических состяний

Рассмотрим дефазированное квантовое состояние света вида

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\,|n\rangle\langle n|, \tag{1}$$

где $|n\rangle$ есть состояние, содержащее ровно n фотонов, а $p(n)$ – вероятность получения такого состояния. Измерение состояния в базисе $|n\rangle$ может быть выполнено с использованием фотодетектора, разрешающего число фотонов. Статистика фотоотсчётов в этом случае задаётся распределением $p(n)$. Введём для этого распределения производящую функцию:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p(n). \tag{2}$$

Производящая функция полностью описывает рассматриваемое распределение:

$$p(n) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}G(0), \tag{3}$$

а также позволяет удобным образом вычислять факториальные моменты:

$$\mathbb{E}[n(n-1)\dots(n-k+1)] = \frac{\partial^k}{\partial z^k}G(1) \tag{4}$$

для k-го факториального момента. Легко видеть, что первый факториальный момент равняется среднему числу фотонов μ, а второй позволяет рассчитать дисперсию. Заметим, что k-й факториальный момент пропорционален автокорреляционной функции k-го порядка:

$$g^{(k)} = \frac{1}{\mu^k}\frac{\partial^k}{\partial z^k}G(1). \tag{5}$$

Преобразование исходного состояния (1) посредством линейных оптических элементов позволяет измерять не только статистику фотоотсчётов, но и ряд других наблюдаемых. Пусть U есть такое преобразование над N входными модами, первая из которых находится в состоянии ρ. Тогда на выходе преобразования получим состояние $U(\rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_N)U^\dagger$, где $\rho_1 = \rho$ – состояние изучаемой входной моды, а ρ_j $(j = 2, \dots, N)$ – состояния других входных мод, которые, как правило, считаются известным. Измерение статистики фотоотсчётов в каждой из выходных мод эквивалентно измерению наблюдаемой $U^\dagger(\hat{n}_1, \dots, \hat{n}_N)U$.

Пусть в качестве линейного преобразования выступает светоделитель 50/50 с матрицей

$$U = \exp\Big(\frac{\pi}{4}\Big(a_1^\dagger \otimes a_2 - a_1 \otimes a_2^\dagger\Big)\Big), \tag{6}$$

а вторая входная мода находится в вакуумном состояния $\rho_2 = |0\rangle\langle 0|$. Тогда можно получить, что измерение кросс-корреляционной функции на детекторах эквивалентно измерению 2-го факториального момента распределения $p(n)$:

$$\mathrm{Tr}\big(\hat{n}_1\hat{n}_2 U(\rho_1 \otimes |0\rangle\langle 0|)U^\dagger\big) = \mathrm{Tr}\big((U^\dagger \hat{n}_1\hat{n}_2 U)(\rho_1 \otimes |0\rangle\langle 0|)\big) = \mathrm{Tr}(\hat{n}_1(\hat{n}_1 - 1)\rho_1). \tag{7}$$

Измерив также среднее значение числа фотонов, можно получить величину автокорреляционной функции второго порядка. Аналогичным образом может быть выполнено измерение автокорреляционной функции более высоких порядков.

Пусть теперь входное состояние второй моды есть $\rho_2 = |\alpha\rangle\langle\alpha|$, где $|\alpha\rangle$ – когерентное состояние с параметром $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$. Тогда измерение разностного фототока на выходе светоделителя будет пропорционально измерению квадратурной наблюдаемой исходного состояния (для больших $|\alpha|$):

$$\mathrm{Tr}\big((\hat{n}_1 - \hat{n}_2)U(\rho_1 \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha|)U^\dagger\big) = \mathrm{Tr}\big((U^\dagger(\hat{n}_1 - \hat{n}_2)U)(\rho_1 \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha|)\big) \propto \mathrm{Tr}((\hat{x}_1\cos\theta + \hat{p}_1\sin\theta)\rho_1). \tag{8}$$

Задание. Выберите статистическое распределение фотонов квантового состояния согласно своему варианту.

№	Тип распределения	Параметры
1	Тепловое	$\mu = 0.3$
2	Тепловое	$\mu = 0.41$
3	Пуассона	$\mu = 0.18$
4	Пуассона	$\mu = 0.27$
5	Компаунд-пуассона	$\mu = 0.5$, $a = 2$
6	Компаунд-пуассона	$\mu = 0.3$, $a = 200$
7	Компаунд-пуассона	$\mu = 0.23$, $a = 5$

1. Определите размерность гильбертова пространства d, достаточную для моделирования распределения с ошибкой, не превышающей 10^{-5}.

2. Используя (2), вычислите и постройте производящую функцию распределения по числу фотонов. Сравните с теоретическим значением функции.

3. Вычислите матрицу плотности на выходе светоделителя 50/50 при измерении автокорреляционной функции ($\rho_1 = \rho$, $\rho_2 = |0\rangle\langle 0|$). Вычислите и постройте распределения $p_{12}(n_1, n_2)$, $p_1(n)$, $p_2(n)$.

4. Выполните моделирование процедуры измерения выходного состояния. Накопите статистику по 1000 независимым экспериментам. Рассчитайте $\overline{n_1 n_2}$, $\overline{n_1}$, $\overline{n_2}$. Вычислите $g^{(2)} = \overline{n_1 n_2}/(\overline{n_1} \cdot \overline{n_2})$.

5. Выполните описанный эксперимент 100 раз. По результатам экспериментов оцените среднее значение и стандартное отклонение оценки величины $g^{(2)}$. Сравните с теоретическим значением, получаемым из (5).

6. Вычислите матрицу плотности на выходе светоделителя 50/50 при гомодинном измерении ($\rho_1 = \rho$, $\rho_2 = |\alpha\rangle\langle\alpha|$, $\alpha = 5e^{i\theta}$). Вычислите распределение $p_{12}(n_1, n_2)$.

7. Выполните моделирование процедуры измерения выходного состояния. Получите одну случайную пару значений n_1 и n_2 и вычислите $x_\theta = (n_1 - n_2)/(|\alpha|\sqrt{2})$.

8. Выполните описанный эксперимент 1000 раз. Постройте гистограмму x_θ. Рассмотрите значения фазы гомодина $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$.

9. Рассмотрите чистое состояние $\rho = |\rho\rangle\langle\rho|$, где $|\rho\rangle = \sum_n \sqrt{p(n)}\,|n\rangle$. Повторите с ним описанные выше задания. Покажите, что корреляционные измерения нечувствительны к фазе квантового состояния, а гомодинные – чувствительные.

Указание. При гомодинном измерении общее число задействованных фотонов выше, чем число фотонов на каждом из входов светоделителя. Поэтому при моделировании пространство каждой моды должно быть расширено до размерности $d + d_\alpha$, где d_α – размерность пространства моды гомодина.