**Задачи по теме «Статистика фотонов»**

**1. Производящие функции, статистика фотонов и корреляции на примере компаунд-распределения Пуассона**

В основе настоящего раздела лежит так называемое компаунд-распределение Пуассона (другое название – обобщенное отрицательное биномиальное распределение).

Рассмотрим это распределение на языке производящих функций. Напомним соответствующее определение. Пусть  - вероятность зарегистрировать  событий, - параметр распределения (одномерный или многомерный). По умолчанию, под регистрацией событий будем понимать регистрацию фотонов. Производящая функция, по определению, есть:

 (1)

Здесь ()– формальная действительная или комплексная переменная, смысл которой станет очевиден ниже.

Производящие функции содержат в себе полную информацию о случайной величине. В частности, вероятность того, что дискретная случайная величина примет значение  выражается через -ую производную производящей функции в точке , а так называемый -ый факториальный момент выражается через -ую производную производящей функции в точке .

 (2)

 (3)

Здесь символ  обозначает операцию математического ожидания.

**Задача 1:** Докажите справедливость формул (2) и (3)

Величина, стоящая в формуле (3) слева, называется -ым факториальным моментом. В частности, при помощи первого и второго факториальных моментов среднее и дисперсия случайной величины могут быть найдены по формулам:

 (4)

 (5)

**Задача 2:** Докажите справедливость формул (4) и (5)

Математический аппарат производящих функций генетически связан с аппаратом характеристических функций. Действительно, рассмотрим целочисленную случайную величину и положим . Тогда, рассматриваемая в зависимости от аргумента , производящая функция будет тождественна характеристической функции:



Для распределения Пуассона с параметром среднего  производящая функция есть:

 (6)

**Задача 3:** Используя формулы (2) и (6), покажите, что распределение вероятностей Пуассона есть:

,  (7)

На фундаментальном уровне распределение Пуассона возникает при измерении числа частиц в когерентном состоянии. Напомним, что когерентное состояние есть следующая суперпозиция фоковских состояний: , . Здесь - произвольное комплексное число. Нетрудно видеть, что число частиц действительно удовлетворяет распределению Пуассона, причем среднее число частиц в когерентной моде равно , где - параметр распределения Пуассона.



**Задача 4:** Используя формулы (4) и (5), покажите, что среднее и дисперсия распределения Пуассона совпадают, т.е.:

 (8)

Пусть теперь параметр распределения Пуассона  сам является случайной величиной, имеющей гамма-распределение с плотностью вероятности:

 (9)

где . Здесь  – гамма-функция.

Напомним, что гамма- функция, по определению, задается следующим интегралом



Очевидно, что в частном случае, когда , гамма-распределение сводится к показательному (экспоненциальному) распределению. Этому распределению соответствует тепловое состояние. Нетрудно видеть, что в терминах распределений Глаубера- Сударшана, в фазовом пространстве когерентных состояний, где  и , гамма-распределение (9) при  превращается в двумерное гауссово распределение. Таким образом, тепловое состояние есть гауссово состояние в фазовом пространстве.

**Задача 5:** Убедитесь в том, что распределение (9) нормировано на единицу. Покажите, что среднее и дисперсия гамма-распределения задаются формулами:

 (10)

 (11)

Рассматриваемая смесь распределений имеет следующую производящую функцию:

 (12)

**Задача 6:** Докажите справедливость формулы (12)

Можно показать, что математическое ожидание для полученного распределения равно  (задача 11), поэтому оно может быть переписано в следующем виде:

 (13)

Таким образом, компаунд-распределение Пуассона определяется двумя параметрами:  – среднее число фотонов,  – параметр кластеризации (группировки) фотонов. Этот параметр может быть также назван параметром когерентности: чем выше , тем ближе рассматриваемое распределение к обычному распределению Пуассона, которое отвечает когерентному состоянию. Действительно, нетрудно видеть, что при  формула (13) дает производящую функцию для распределения Пуассона с параметром . В этом случае мы используем свойство непрерывности соответствия между множеством производящих функций и соответствующим множеством распределений. Другими словами, предельный переход на языке производящих функций и предельный переход на языке распределений, эквивалентны.

**Задача 7:** Покажите, что для любого распределения вероятностей учет оптических потерь приводит к следующему преобразованию аргумента производящей функции:  где – коэффициент прохождения, ,  – доля поглощенной энергии излучения.

Указание. Считайте, что каждый фотон, независимо от других, выживает с вероятностью  При этом, вероятность того, что из  фотонов выживает ровно  определяется биномиальным законом: , где .

Из результата задачи 7 непосредственно следует, что для компаунд- распределения Пуассона (13) учет оптических потерь приводит к тому, что соответствующее среднее число фотонов просто умножается на постоянный множитель: .

Случай  отвечает тепловому состоянию:

 (14)

Распределение вероятностей для компаунд-распределения Пуассона, согласно (2), есть:

 (15)

Здесь  – вероятность обнаружить  фотонов,  – произведение из  множителей:

 (16)

Предполагается также, что .

**Задача 8:** Докажите справедливость формулы (15).

**Задача 8а:** Решите в рамках компьютерного практикума следующие задачи:

1. Разработайте алгоритм и функцию (код) для расчета компаунд- распределения Пуассона (15). Проверьте численно справедливость формул (22) и (23) для среднего и дисперсии для различных параметров распределения.
2. Разработайте в соответствии с определением (1) код для производящей функции компаунд- распределения Пуассона. Убедитесь в справедливости формулы (13).
3. Разработайте код для расчета факториальных моментов и автокорреляционных функций компаунд- распределения Пуассона. Убедитесь в справедливости формул (25).

**Задача 8б:** Решите в рамках компьютерного практикума следующие задачи:

1. Опираясь на результаты задачи 8а, разработайте метод и алгоритм генерации статистических выборок из компаунд- распределения Пуассона.
2. Убедитесь в приближённой справедливости формул для среднего и дисперсии с точностью до статистических флуктуаций. С этой целью разработайте соответствующий статистический критерий, обеспечивающий проверку соответствия между теоретической моделью и экспериментальными данными.
3. Убедитесь в приближённой справедливости формул для факториальных моментов и автокорреляционных функций компаунд- распределения Пуассона с точностью до статистических флуктуаций. Разработайте соответствующий статистический критерий, обеспечивающий проверку соответствия между теоретической моделью и экспериментальными данными.

**Задача 8в:** Решите в рамках компьютерного практикума следующие задачи:

1. Рассматривая тепловое состояние как гауссово состояние в фазовом пространстве, разработайте метод, алгоритм и функцию (код) для генерации статистических выборок из теплового состояния для различных значений среднего числа фотонов.
2. Убедитесь в приближённой справедливости формул для среднего, дисперсии и корреляционных функций (вплоть до 5-го порядка) с точностью до статистических флуктуаций. Разработайте соответствующие статистические критерии, обеспечивающие проверку соответствия между теоретической моделью, основанной на геометрическом распределении, и экспериментальными данными

Формула (15) для распределения вероятностей может применяться при всех . В этом случае функция  может быть вычислена не только по формуле (16), но также посредством гамма-функции:

 (17)

Кроме того, распределение (15) является осмысленным и при отрицательных целых числах , где . Такие распределения могут служить для описания   
- фотонных состояний при условии, что . Случай  соответствует ситуации, когда было приготовлено ровно  фотонов, случай можно интерпретировать, как ситуацию, когда некоторые из  фотонов были потеряны с определенной конечной вероятностью в результате декогерентизации. В этом случае распределение сводится к биномиальному распределению с вероятностью  успеха (выживания фотона) и описывает вероятность того, что из  фотонов выживет ровно  фотонов. Наконец, случай, когда ,  отвечает ситуации, когда имеется ноль фотонов с вероятностью единица.

Производящая функция  – фотонных состояний следует из (13) при  и имеет вид:

 (18)

Заметим, что распределение (18) не может быть рассмотрено как смесь типа (9).

**Задача 9:** Покажите, что производящая функция (18) порождает биномиальное распределение вероятностей:

, где ,  (19)

Величина  задает вероятность появления  успехов в серии из  независимых испытаний при условии, что в каждом отдельном испытании вероятность успеха равна .

**Задача 10:** Покажите, что среднее и дисперсия биномиального распределения задаются формулами:

 (20)

 (21)

Согласно (4)-(5), среднее и дисперсия для компаунд-распределения Пуассона есть:

 (22)

 (23)

**Задача 11:** Докажите справедливость формул (22) и (23).

Из (23) следует, что распределение является сверх-пуассоновским при  и суб- пуассоновским при .

Автокорреляционная функция -го порядка для нулевой временной задержки непосредственно определяется соответствующим факториальным моментом и может быть выражена через -ую производную производящей функции в точке .

 (24)

Из (4) следует, что всегда .

Резонность определения (24) следует из характера экспериментов со схемами совпадения, когда регистрируется одновременное срабатывание  различных детекторов фотонов. При этом, вероятность срабатывания первого детектора пропорциональна числу фотонов  в моде; вероятность срабатывания второго детектора, при условии срабатывания первого, уже пропорциональна  и т.д.

Для компаунд-распределения Пуассона из (24) имеем:



Например,  для  (тепловой источник);  для  (однофотонное состояние);  при  (когерентное состояние).

Автокорреляционная функция произвольного -го порядка для компаунд-распределения Пуассона дается формулой:

 (25)

**Задача 12:** Докажите справедливость формулы (25).

**2. Условные распределения, отвечающие вычитанию (отщеплению) фотонов**

Для отщепления фотона используется делитель пучка с малым коэффициентом отражения. Посредством постселекции выделяются только те представители ансамбля, в которых был отщеплен фотон. Таким образом, рассматриваются условные распределения числа фотонов (при условии, что был отщеплен фотон). Представители статистического ансамбля, в которых не был отщеплен фотон, просто отбрасываются.

Рассмотрим делитель пучка с конечным коэффициентом отражения . Вероятность того, что на вход делителя поступит фотонов равна , при этом ровно один отразится с вероятностью . Итоговая вероятность получить состояние с  фотоном равна , где  – нормировочный множитель. Таким образом, исходная зависимость от  в распределении  изменяется посредством множителя . Заметим, что при исчезающе малых  учитывать следует только множитель , поскольку в этом случае . На языке операторов уничтожения  и рождения  вычитание фотона приводит к следующему преобразованию матрицы плотности: 

**Задача 1.** Покажите, что рассматриваемое условное распределение, возникающее при отщеплении одного фотона делителем пучка с бесконечно малым коэффициентом отражения, обладает следующим замечательным свойством: тип распределения не меняется, не изменяется также параметр , а параметры  и  изменяются по следующим простым правилам:

 (1)

 (2)

Здесь  и – параметры  и  после отщепления фотона.

При отщеплении  фотонов имеем:

 (3)

 (4)

**Задача 2:** Докажите справедливость формул (3) и (4).

**Задача 2а:** Решите в рамках компьютерного практикума следующие задачи

1. Разработайте метод, алгоритм и функцию (код) для расчета условных распределений, возникающих при отщеплении одного, двух и трёх фотонов в условиях исчезающе малого коэффициента отражения.
2. Убедитесь в справедливости формул (1)- (4)

Для теплового источника , поэтому

 (5)

В частности  (при отщеплении одного фотона среднее число фотонов возрастает вдвое).

Такое увеличение среднего числа фотонов не таит в себе какого-либо парадокса. Действительно, в данном случае речь идет не об исходном, а об условном распределении. Для каждого представителя исходного распределения вероятность попадания в выборку из условного распределения тем выше, чем больше фотонов содержит данный представитель. Факт регистрации фотона с одной стороны говорит о том, что фотонов после делителя стало на один меньше, чем было до делителя. Но с другой стороны, отщепление и регистрация фотона происходит чаще для тех групп, в которых фотонов на входе было больше, чем в среднем (для таких групп соответственно больше фотонов и на выходе). В случае тепловых состояний этот второй фактор имеет решающее значение.

Представленные формулы отвечают делителю пучка с бесконечно малым коэффициентом отражения.

**Задача 3:** Покажите, что при учете конечного коэффициента отражения  формула (1) для  не меняется, а формула (2) для  модифицируется следующим образом

 (6)

Покажите также, что параметр  перестает быть инвариантом и изменяется следующим образом:

 (7)

При исчезающе малых  формула (6) переходит в (2), а выражение (7) становится инвариантом.

Формулы (1), (6) и (7) можно использовать как рекуррентные при вычислении параметров условных распределений, возникающих при отщеплении двух и более фотонов.

Представленные результаты являются следствиями общих результатов, которые мы описываем ниже

**Задача 3а**: Решите в рамках компьютерного практикума следующие задачи:

1. Разработайте метод, алгоритм и функцию (код) для расчета условных распределений, возникающих при отщеплении одного, двух и трёх фотонов при учете конечного коэффициента отражения.
2. Убедитесь в справедливости формул (6) и (7)

**Задача 4:** Покажите, что при исчезающе малом коэффициенте отражения  производящая функция  распределения, отвечающего отщеплению одного фотона, определяется первой производной  от производящей функции исходного распределения:

 (8)

**Задача 5:** Покажите, что при конечном коэффициенте отражения  представленная выше формула модифицируется следующим образом:

 (9)

Последовательное применение формулы (8) приводит к общему выражению для производящей функции , отвечающей отщеплению  фотонов:

,  (10)

Здесь,  и т.д.- средние значения для состояний с отщеплением соответственно одного, двух и более фотонов. Последовательное измерение этих величин позволяет нам получить корреляционные функции произвольного порядка:

,  (11)

Отсюда, в частности, следует, что корреляционная функция второго порядка определяется отношением среднего  для состояния с отщеплением одного фотона к среднему  исходного состояния:

 (12)

Мы видим также, что в общем случае имеется следующая рекуррентная связь, позволяющая выразить корреляционную функцию -го порядка через корреляционную функцию -го порядка:

,  (13)

Важно отметить, что корреляционные характеристики условных состояний, возникающих при отщеплении фотонов, могут быть выражены через корреляции исходного состояния.

**Задача 6:** Покажите, что корреляционная функция -го порядка для распределения с отщеплением  фотонов  может быть выражена через корреляционные функции исходного распределения:

, ,  (14)

**3. Квадратурные распределения**

В случае теплового состояния ,  и распределение вероятностей принимает следующий вид:

 (1)

Вероятности (1) образуют геометрическую прогрессию со знаменателем . В теории вероятностей и статистике такое распределение называют геометрическим. С точки зрения физики рассматриваемое распределение для числа фотонов в моде отвечает закону Планка для излучения черного тела.

Рассматриваемые вероятности задают веса смеси из соответствующих состояний осциллятора.

 (2)

Здесь  – собственные функции гармонического осциллятора, задающие базисный набор функций Чебышева-Эрмита. Явный вид рассматриваемых функций дается следующей формулой

 (3)

Распределение (2) образует диагональ матрицы плотности. Сама матрица плотности есть:

 (4)

Для вычисления суммы ряда (4) используем известную из теории специальных функций следующую формулу разложения, относящуюся к полиномам Чебышева- Эрмита:

 (5)

Здесь снова  – знаменатель геометрической прогрессии.

В результате получим:

 (6)

Здесь  – дисперсия распределения.

**Задача 1.** Явным вычислением докажите формулу (6).

**Задача 1а:** Решите в рамках компьютерного практикума следующие задачи:

1. На основе рекуррентных формул для полиномов Чебышева- Эрмита, разработайте функцию (код) для расчета собственных функций гармонического осциллятора (3)
2. Убедитесь численно в справедливости формулы (5), относящейся к полиномам Чебышева- Эрмита, при различных значениях переменных
3. Разработайте функцию (код) для численного расчета суммы (4) для матрицы плотности и убедитесь в её согласии с аналитической формулой (6)

Если положить , то можно увидеть, что формула (6) соответствует хорошо известному выражению для матрицы плотности осциллятора с частотой  при температуре .

Плотность координатного распределения находим как диагональ матрицы плотности:

 (7)

Рассмотрим теперь распределение числа фотонов в тепловом состоянии при условии, что был отщеплен один фотон.

В этом случае вместо распределения (1) имеем следующее распределение для числа фотонов :

 (8)

В приведенной формуле  – среднее число фотонов в исходном тепловом состоянии. После удаления одного фотона среднее число фотонов становится равным , а соответствующий параметр кластеризации .

**Задача 2.** Получите (8) как следствие общей формулы (1.15) для , .

Получим теперь формулу для квадратурного распределения теплового состояния с одним отщепленным фотоном. Умножив обе части равенства (5) на , получим:

 (9)

Теперь продифференцируем обе части полученного равенства (9) по . В результате получим (ограничимся здесь диагональю )

 (10)

С использованием (10) уже нетрудно получить следующее выражение для квадратурного распределения теплового состояния с одним отщепленным фотоном (в приближении исчезающе малого коэффициента отражения делителя):

 (11)

**Задача 3.** Явным вычислением убедитесь в справедливости формулы (11).

Для делителя пучка с конечным коэффициентом отражения имеем:

 (12)

Здесь параметр  определяется формулой (2.6).

В общем случае произвольного компаунд-распределения Пуассона матрица плотности есть:

 (13)

Соответствующее квадратурное распределение есть:

 (14)

Распределение (14) является симметричным относительно начала координат, поэтому все его нечетные моменты равны нулю.

**Задача 3а:** Решите в рамках компьютерного практикума следующие задачи:

1. На основе формулы (14) разработайте функцию (код) для расчета квадратурного распределения для компаунд-распределения Пуассона
2. Убедитесь, что в частном случае отщепления одного фотона, полученное распределение согласуется с аналитическим результатом (11)

**Задача 4.** Покажите, что дисперсия случайной величины  распределения (14) не зависит от  и дается следующей формулой:

 (15)

Вывод формулы (15) основан на решении следующей вспомогательной задачи.

**Задача 5.** Покажите, что дисперсия координаты  в -ом состоянии осциллятора есть:

,  (16)

Указание. Воспользуйтесь представлением оператора координаты через операторы уничтожения и рождения.

Из выражения (16), путем усреднения по распределению числа фотонов, непосредственно следует (15), если учесть, что для компаунд- распределения Пуассона среднее число фотонов есть .

Для полученного распределения, с использованием описанного выше метода, могут быть аналитически вычислены и моменты более высокого порядка. В частности, асимметрия (skewness) тождественно равна нулю (), а эксцесс (excess)  распределения может быть вычислен по формуле:

 (17) Напомним, что для случайной величины  рассматриваемые характеристики, по определению, есть

 (18)

 (19)

Вывод формулы (17) сводится к последовательному решению следующих задач.

**Задача 6.** Покажите, что четвертый момент для координаты  в -ом состоянии осциллятора есть:

,  (20)

**Задача 7.** Путем усреднения выражения (20) покажите, что четвертый момент для квадратуры  выражается через производные производящей функции по следующей формуле:

 (21)

Покажите также, что для компаунд- распределения Пуассона , 

**Задача 8.** С учетом результатов задач 4, 6 и 7 докажите справедливость формулы (17) для эксцесса.

**Задача 8а:** Решите в рамках компьютерного практикума следующие задачи:

1. Убедитесь численно в справедливости формул (16) и (20) для второго и четвертого моментов функций гармонического осциллятора.
2. Убедитесь численно в справедливости формул (15) и (17) для дисперсии и эксцесса квадратурного компаунд- распределения Пуассона.

Если измерить экспериментально дисперсию  квадратуры и ее эксцесс , то на основе представленных выше формул можно оценить среднее число фотонов и параметр их когерентности (кластеризации) :

 (22)

 (23)

**Задача 9.** Покажите справедливость формулы (23)

Формулы (22)-(23) составляют основу метода моментов для оценки параметров распределения  и .

Расчеты показывают, что оценки моментов весьма близки к более совершенным оценкам по методу максимального правдоподобия.

**Задача 9а:** Решите в рамках компьютерного практикума следующие задачи:

1. Разработайте метод, алгоритм и функцию (код) для генерации статистических выборок из квадратурного компаунд- распределения Пуассона. Постройте графики, аналогичные представленным ниже на рисунке 1.
2. Убедитесь в приближённой справедливости формул (15) и (17) для дисперсии и эксцесса квадратурного распределения с точностью до статистических флуктуаций. С этой целью разработайте соответствующий статистический критерий, обеспечивающий проверку соответствия между теорией и экспериментальными данными.

На рисунке 1, представленном ниже, сравниваются квадратурные распределения для исходного теплового состояния (вверху) и условные состояния, из которых отщеплен соответственно один фотон (средний рисунок) и два фотона (нижний рисунок). По горизонтальной оси отложено значение квадратурной наблюдаемой , по вертикальной оси представлено число наблюдаемы событий (гистограммы) и соответственно число событий, ожидаемое согласно реконструированным квадратурным распределениям  (сплошные кривые).

|  |
| --- |
| а) |
| б) |
| в) |

Рисунок 1. Сравнение квадратурных распределений, полученных в результате численного эксперимента (гистограммы) с модельными аппроксимациями (сплошные кривые); а) для исходного теплового состояния; б) для условного состояния, из которого отщеплен один фотон; в) для условного состояния, из которого отщеплено два фотона.

Гистограммы отвечают данным численных экспериментов, сплошные кривые – моделям, полученным методом максимального правдоподобия.

Объем выборки во всех рассматриваемых случаях .

Вверху представлено исходное тепловое состояние, которое содержит в среднем 5 фотонов. Соответствующие оценки для среднего: максимального правдоподобия  и моментов  (при точном значении 5). Точный параметр группирования фотонов в случае теплового состояния . Соответствующие оценки для *a*: максимального правдоподобия  и моментов . Критерий хи-квадрат показывает, что экспериментальные данные согласуются с моделью (уровень значимости , параметр хи-квадрат , число степеней свободы ).

На среднем рисунке представлено условное распределение, отвечающее отщеплению одного фотона. Для коэффициента отражения делителя , согласно формуле (2.6), после отщепления одного фотона в условном распределении имеется в среднем 6 фотонов (вместо 10 для исчезающе малого коэффициента отражения делителя). Соответствующие оценки для среднего: максимального правдоподобия  и моментов . Точный параметр группирования фотонов в этом случае . Соответствующие оценки для : максимального правдоподобия  и моментов . Критерий хи-квадрат показывает, что экспериментальные данные согласуются с моделью (, , ).

На нижнем рисунке представлено условное распределение, отвечающее отщеплению двух фотонов. Применяя дважды формулу (2.6) для коэффициента отражения делителя , получаем, что после отщепления второго фотона среднее число фотонов становится равным 6.23077. Соответствующие оценки для среднего: максимального правдоподобия  и моментов . Точный параметр группирования фотонов в этом случае . Соответствующие оценки для : максимального правдоподобия  и моментов . Критерий хи-квадрат показывает, что экспериментальные данные согласуются с моделью  
 (, , ).

**4. Делитель пучка: перевод одномерного распределения в двумерное распределение, корреляция каналов**

Для двумерного распределения вероятностей  производящая функция  определяется следующей формулой:

 (1)

Здесь  и  (,) – формальные действительные или комплексные переменные.

Зная производящую функцию  и вычисляя производные в точке (, ), можно построить соответствующее двумерное распределение вероятностей:

 (2)

Производящая функция  удовлетворяет условию нормировки .

**Задача 1.** Покажите, что производные от двумерной производящей функции  в точке ,  задают соответствующие факториальные моменты. Покажите, что общая формула для факториального момента порядка () задается формулой:

 (3)

В частности, первые и вторые производные определяют следующие моменты первого и второго порядков:

,  (4)

, ,  (5)

Рассмотрим теперь применение полученных формул к описанию действия делителя пучка. Пусть на вход делителя пучка поступает состояние, содержащее случайное число фотонов . Пусть соответствующее распределение вероятностей есть . Предположим, что каждый фотон, независимо от других фотонов, на выходе светоделителя оказывается в первом канале с вероятностью  и, соответственно, во втором канале с вероятностью . Тогда, двумерное распределение вероятностей  на выходе будет определяться произведением исходного распределения  и биномиального распределения:

,  (6)

**Задача 2.** Покажите, что на языке производящих функций учет делителя пучка приводит к преобразованию исходной переменной  в линейную комбинацию новых переменных  и : . Соответствующее преобразование производящих функций есть:  (7)

**Задача 3.** Покажите, что, если  - среднее число фотонов на входе, то - среднее число фотонов в первом канале, а - среднее число фотонов во втором канале. Покажите также, что второй смешанный момент может быть вычислен по формуле:  .

Из представленных формул непосредственно следует, что:

 (8)

Формула (8) может быть использована для измерения корреляционной функции второго порядка  в эксперименте. Заметим, что эта формула справедлива и тогда, когда измеряется не само число фотонов непосредственно, а только сигнал, пропорциональный числу фотонов. Величина  оценивается как среднее значение от произведения сигналов в каналах, а  как произведение средних сигналов.

Если случайные величины и независимы, то . В этом случае . Напомним, что именно такая ситуация имеет место для обычного распределения Пуассона.

**Задача 4.** Покажите, что, дисперсии числа фотонов в каналах и коэффициент корреляции Пирсона могут быть рассчитаны по формулам:

,

 (9)

 (10)

**Задача 4а:** Решите в рамках компьютерного практикума следующие задачи:

1. Разработайте метод, алгоритм и функцию (код) для генерации статистических выборок в выходных каналах. Рассмотрите 4 случая, когда на входе соответственно выборки из биномиального распределения, распределения Пуассона, компаунд- распределения Пуассона и состояния сжатого вакуума.
2. Убедитесь в приближённой справедливости формул, представленных выше в задачах 3 и 4, с точностью до статистических флуктуаций. С этой целью разработайте соответствующие статистические критерии, обеспечивающие проверку соответствия между теорией и экспериментальными данными.

Можно показать, что, согласно определению, всегда выполняется неравенство . Расчет коэффициента корреляции по приведенной формуле всегда удовлетворяет необходимому условию . В частном случае фоковского состояния, когда число фотонов строго задано, . В этом случае можно сказать, что имеются 100% отрицательные корреляции. Если из  строго фиксированного числа фотонов на входе в первом канале было зафиксировано фотонов, то со 100% вероятностью можно предсказать, что во втором канале будет зарегистрировано  фотонов.

**5. Многоуровневая иерархия компаунд- распределений Пуассона**

Выше в разделе 1 мы предположили, что параметр среднего  в распределении Пуассона становится нестабильной (случайной) величиной. Стабилизация среднего была достигнута путем усреднения по гамма- распределению, что привело нас к компаунд- распределению Пуассона. Однако, полученное таким образом распределение является только распределением первого уровня (если считать исходное распределение Пуассона распределением нулевого уровня). Если предположить, что среднее значение  в компаунд- распределении Пуассона само является нестабильной (случайной) величиной, то можно прийти к распределениям второго и более высоких уровней. Физическая причина возникновения таких распределений следующая. Стабилизация среднего значения внутри кадра с конечной длительностью экспозиции  является неполной. Различные кадры формируются, вообще говоря, в различных условиях и при рассмотрении совокупности таких кадров нужно учитывать их неоднородность (вариации среднего от кадра к кадру). Подобные вариации можно учесть в модели 2-го уровня. Различные группы кадров также могут быть неоднородны между собой, что будет приводить к модели 3-го уровня и т.д.

Давайте формализуем описание рассматриваемой иерархии распределений. Представим компаунд- распределение Пуассона первого уровня в следующем виде:

 (1)

Предположим теперь, что среднее значение  в (1) становится случайной величиной, при этом будем считать, что параметр  остается константой (). Если предположить далее, что нестабильность  описывается гамма- распределением с параметрами  и , то возникнет переход от модели 1-го уровня к модели второго уровня. Заметим, что переход от исходного распределения Пуассона нулевого уровня к распределению первого уровня (1) может быть осуществлен следующей простой формальной заменой:

 (2)

Тогда, усредняя выражение (1) с использованием гамма- распределения с параметрами  и , получим для производящей функции компаунд- распределения Пуассона 2-го уровня:

 (3)

Здесь - общее (генеральное) среднее значение,  и - параметры, относящиеся к 1-му и 2-му уровням иерархии соответственно. Можно также ввести параметры группировки на соответствующих уровнях, считая, по определению, что , . Отметим, что при , ,  модель второго уровня переходит в модель первого уровня.

Заметим, что, осуществляя описанную процедуру последовательно, можно получить следующие рекуррентные формулы для иерархической цепочки распределений:

, , ,  (4)

Наряду с параметрами , можно ввести параметры , 

Среднее значение и дисперсия числа фотонов для рассматриваемого распределения даются следующими формулами:

 (5)

 (6)

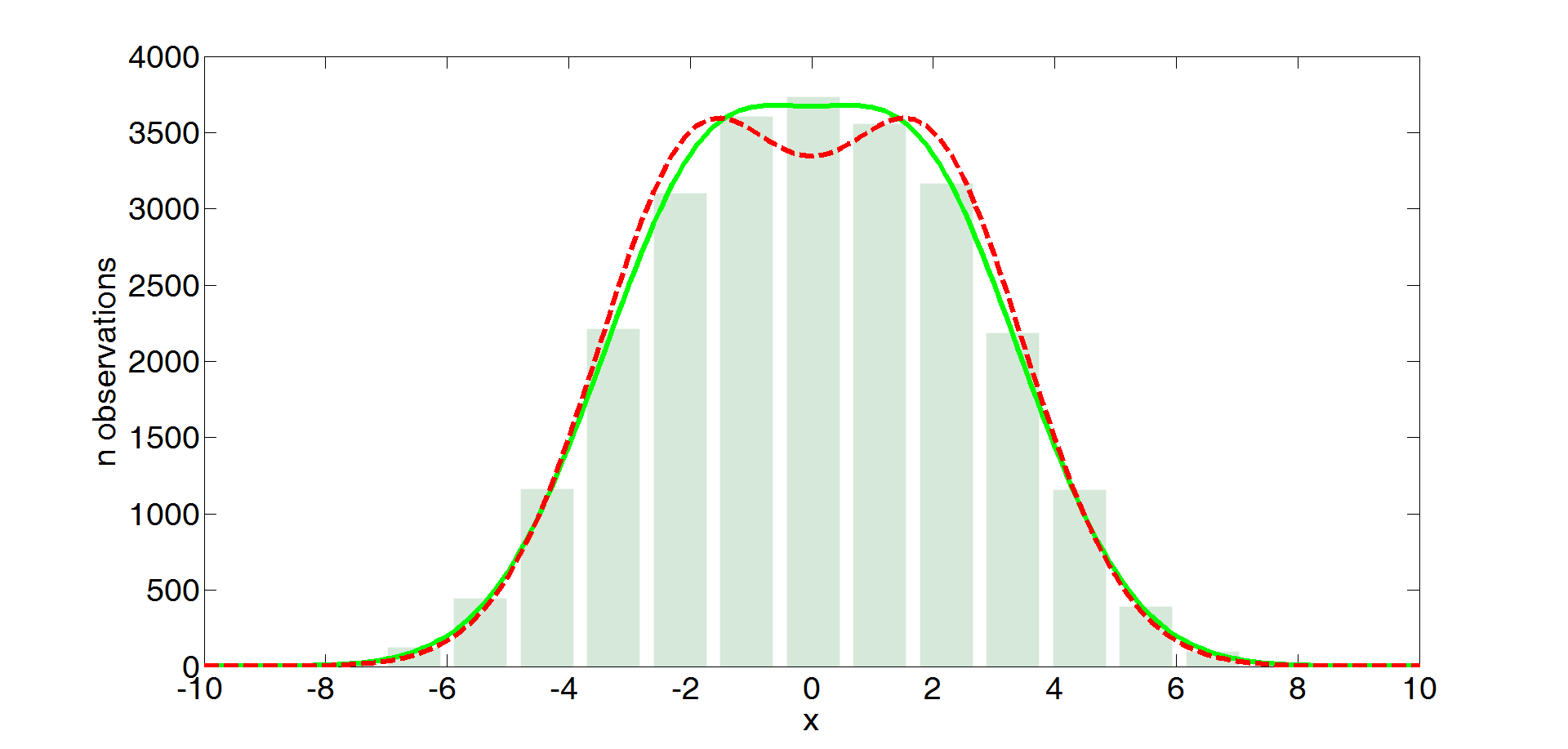
**Задача 1:** Докажите справедливость формул (5) и (6) для среднего и дисперсии многоуровнего иерархического компаунд- распределения Пуассона

**Задача 1а:** Решите в рамках компьютерного практикума следующие задачи:

1. Разработайте метод, алгоритм и функцию (код) для генерации статистических выборок из компаунд- распределения Пуассона 2-го уровня, задаваемого формулой (3).
2. Убедитесь с использованием разработанного кода в приближённой справедливости формул (5) и (6) для среднего и дисперсии с точностью до статистических флуктуаций. С этой целью разработайте соответствующие статистические критерии, обеспечивающие проверку соответствия между теорией и экспериментальными данными.

Проведенные численные и реальные эксперименты демонстрируют возможность уточнения идеальной одноуровневой модели посредством учета поправок 2-го уровня.

Сказанное иллюстрируется рисунком, который отвечает условному распределению с одним отщеплённым фотоном.



Здесь гистограмма отражает экспериментальные данные, штриховая линия показывает идеальную одноуровневую модель с , сплошная кривая отвечает двухуровневой модели с , , везде . Мы видим, что уточненная двухуровневая модель более адекватно отражает экспериментальные данные по сравнению с идеальной теорией (в частности, она объясняет отсутствие локального минимума на кривой плотности вероятности в центре). Отметим также, что при больших значениях , поправки второго уровня становятся исчезающе малыми.

**6. Сжатый вакуум: производящие и корреляционные функции**

Производящая функция для распределения фотонов в состоянии сжатого вакуума есть:

 (1)

Здесь  - параметр сжатия. Напомним, что оператор сжатия (squeezing operator) есть , где .

Соответствующее распределение вероятностей, порождаемое представленной производящей функцией, отлично от нуля только в четных точках (фотоны рождаются парами):

, ,  (2)

**Задача 1:** Отталкиваясь от производящей функции распределения фотонов в состоянии сжатого вакуума (1), докажите справедливость формулы (2) для распределения вероятностей.

Среднее число фотонов  в состоянии сжатого вакуума есть:

 (3)

Производящая функция для условного распределения, возникающего при отщеплении одного фотона, есть:

 (4)

Среднее число фотонов  в состоянии с одним отщеплённым фотоном соответственно есть:  (5)

Из полученных выражений следует, что корреляционная функция второго порядка  есть:

 (6)

Аналогично находим, что:

, 

Можно показать, что факториальные моменты и корреляции произвольного порядка  определяются следующими общими формулами (суммы содержат конечное число элементов):

 (7)

 (8)

Здесь - целая часть числа 

**Задача 2.** Докажите справедливость формул (7) и (8).

**Задача 2а:** Решите в рамках компьютерного практикума следующие задачи:

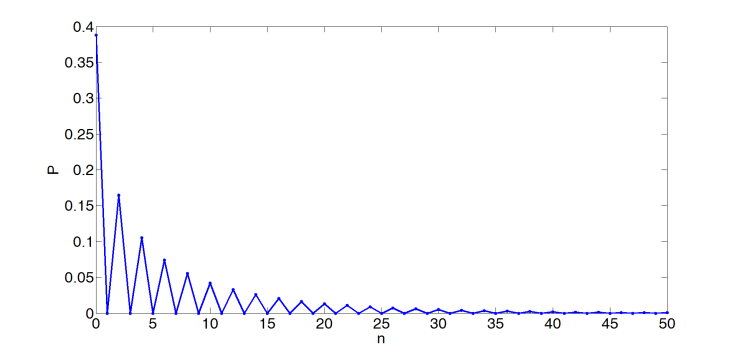
1. Разработайте метод, алгоритм и функцию (код) для генерации статистических выборок из распределения фотонов в состоянии сжатого вакуума, задаваемого формулой (2).
2. Убедитесь с использованием разработанного кода в приближённой справедливости представленных выше формул для среднего значения числа фотонов и корреляционных функций различных порядков. С этой целью разработайте соответствующие статистические критерии, обеспечивающие проверку соответствия между теорией и экспериментальными данными.

**Задача 3.** Пусть сжатое состояние поступает на симметричный делитель. Покажите, что совместное распределение мод на выходе характеризуется следующим числом Шмидта:

 (9)

Заметим, что развитая нами теория может быть приложена также к более общему случаю сжатого когерентного состояния. Представленные выше аналитические формулы подтверждаются численными расчетами.

На рисунке представлен для примера случай .



Представим также некоторые основные параметры рассматриваемого состояния: , , , , , 

**7. Некоторые дополнительные свойства производящих функций и распределений**

В настоящем разделе мы рассмотрим два дополнительных свойства производящих функций и распределений, которые бывают весьма полезны для приложений.

**Задача 1.** Покажите, что производящая функция суммы независимых целочисленных случайных величин равна произведению производящих функций отдельных слагаемых, т.е.:

 (1)

Приведем некоторые примеры применения описанного свойства.

Для отдельного испытания с вероятностью успеха  в схеме Бернулли производящая функция, очевидно, есть: . Тогда, для серии из  независимых испытаний, используя свойство (1), сразу получим производящую функцию биномиального распределения .

Производящая функция одномодового теплового состояния есть:  (здесь - среднее число фотонов в рассматриваемой моде). Тогда, при регистрации суммарного числа фотонов от  независимых тепловых мод, получим многомодовое тепловое состояние, производящая функция которого будет равна . Здесь - это, по-прежнему, среднее число фотонов в одной моде; понятно, что среднее число фотонов во всем состоянии равно . Мы видим также, что полученное распределение есть частный случай компаунд - распределения Пуассона при целочисленном значении параметра .

Второе свойство основано на обобщении следующего простого наблюдения. Нетрудно заметить, что аргумент  в производящей функции  сам является производящей функцией, которая отвечает однофотонному состоянию. Рассмотрим теперь сложную производящую функцию , которая является композицией производящих функций  и .

**Задача 2.** Покажите, что сложная производящая функция  характеризует сумму случайного числа случайных слагаемых, причем  задает число слагаемых в сумме, а  характеризует каждое из слагаемых. Предполагается, что все рассматриваемые здесь случайные величины независимы.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пусть - производящая функция - фотонного состояния Фока. Заменим  на производящую функцию , взяв в качестве таковой одномодовое тепловое поле: . В результате получим, что рассматриваемая композиция распределений снова приводит к многомодовому тепловому полю: .

Рассмотренный пример является довольно тривиальным, поскольку фоковское состояние характеризуется строго фиксированным числом частиц. Следующая простая задача дает пример композиции распределений, каждое из которых описывает случайное (нефиксированное) число частиц.

**Задача 3.** Покажите, что многоуровневая иерархия компаунд - распределений Пуассона порождает соответствующую иерархию сложных производящих функций , , где - производящая функция распределения Пуассона,  (функция  определена в разделе 5). Покажите, что все распределения  имеют равное единице среднее:  (откуда следует, что параметр  есть среднее число фотонов в компаунд - распределении )

Обычное распределение Пуассона является компаунд - распределением нулевого уровня (). Оно представляет собой композицию распределения Пуассона и однофотонного состояния . Аналогично, компаунд - распределение первого уровня () задается производящей функцией , где . Распределение произвольного уровня можно найти по рекуррентным формулам, приведенным в разделе 5.

**Задача 4.** Покажите, что производящая функция  порождает следующее распределение вероятностей: , , 

Таким образом, алгоритм разыгрывания случайных величин из компаунд- распределения Пуассона уровня , может быть следующим. Вначале разыгрываем случайное число  из распределения Пуассона с параметром . Затем разыгрываем и складываем  величин из распределения . В результате получим одно случайное число из компаунд- распределения Пуассона уровня .

Понятно, что соответствующий алгоритм может быть также построен непосредственно на формулах, приведенных в разделе 5.