

Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и
вычислительной физики,
Физико-механический институт

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе №4
по дисциплине «Интервальный анализ»

Выполнил студент гр. 5030102/80201
Кирпиченко С. Р.
Руководитель
Баженов А. Н.

Санкт-Петербург
2021

Содержание

	Страница
1 Постановка задачи	4
1.1 Использование теоремы Зюзина	4
1.2 Использование субдифференциального метода Ньютона	4
2 Теория	4
2.1 Теорема Зюзина	4
2.2 Субдифференциальный метод Ньютона	4
3 Реализация	5
4 Результаты	5
4.1 Итерационный процесс с разложением матрицы на диагональную и недиагональную части	5
4.2 Итерационный процесс по субградиентному методу Ньютона	6
5 Обсуждение	7

Список иллюстраций

	Страница
1 Изображение брусов при решении задачи (1)	5
2 Зависимость радиусов брусов от числа итераций при решении задачи (1) .	5
3 Решение задачи (2) субградиентным методом Ньютона, $\tau = 1$	6
4 Решение задачи (3) субградиентным методом Ньютона, $\tau = 1$	6
5 Решение задачи (3) субградиентным методом Ньютона, $\tau = 0.05$	7

1 Постановка задачи

1.1 Использование теоремы Зюзина

Дана ИСЛАУ

$$\begin{cases} [1, 4] \cdot x_1 + [0.5, 0.7] \cdot x_2 = [-1, 1] \\ [0.8, 1.2] \cdot x_1 + [3, 5] \cdot x_2 = [-3, 3] \end{cases} \quad (1)$$

Для нее необходимо построить итерационную схему с разложением матрицы на диагональную и недиагональную части по теореме Зюзина, а также провести вычисления и привести иллюстрации:

- Брусов итерационного процесса
- Радиусов решения в зависимости от номера итерации

1.2 Использование субдифференциального метода Ньютона

Даны две ИСЛАУ:

$$\begin{cases} [3, 4] \cdot x_1 + [5, 6] \cdot x_2 = [-3, 3] \\ [-1, 1] \cdot x_1 + [-3, 1] \cdot x_2 = [-1, 2] \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} [3, 4] \cdot x_1 + [5, 6] \cdot x_2 = [-3, 4] \\ [-1, 1] \cdot x_1 + [-3, 1] \cdot x_2 = [-1, 2] \end{cases} \quad (3)$$

Необходимо построить итерационную схему субдифференциального метода Ньютона, провести вычисления и привести иллюстрации брусков итерационного процесса, а также сравнить полученные результаты для систем (2) и (3).

2 Теория

2.1 Теорема Зюзина

Пусть в интервальной линейной системе уравнений

$$\mathbf{C}x = \mathbf{d}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{KR}^{n \times n}, \mathbf{d} \in \mathbb{KR}^n$$

правильная проекция матрицы \mathbf{C} имеет диагональное преобладание. Тогда формальное решение системы существует и единственно.

Итерационный процесс строится следующим образом

$$\mathbf{D} = \text{diag}\{\mathbf{c}_{ii}\}_{i=1}^n \quad \mathbf{E} = \mathbf{C} \ominus \mathbf{D}$$

$$\mathbf{C}x = \mathbf{d} \Leftrightarrow \mathbf{D}x = \mathbf{d} \ominus \mathbf{E}x$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \text{inv } \mathbf{D} \cdot (\mathbf{d} \ominus \mathbf{E}\mathbf{x}^k), \quad k = 0, 1, \dots$$

2.2 Субдифференциальный метод Ньютона

Итерационная процедура субдифференциального метода Ньютона описывается следующей формулой:

$$x^k = x^{k-1} - \tau(D^{k-1})^{-1}\mathcal{F}(x^{k-1}),$$

где $\mathcal{F}(x) = \text{sti}(\mathbf{C} \cdot \text{sti}^{-1}(x)) - x + \text{sti}(\mathbf{d})$ (sti - операция стандартного погружения, отображения из \mathbb{KR}^n в \mathbb{R}^{2n}), D^{k-1} - какой-нибудь субградиент отображения \mathcal{F} в точке x^{k-1} , τ - константа, в данной работе выбрана единицей.

3 Реализация

Для осуществления вычислений и визуализации результатов использовалась среда Octave с библиотекой полной интервальной арифметики kinterval.

4 Результаты

4.1 Итерационный процесс с разложением матрицы на диагональную и недиагональную части

Здесь и далее пунктиром обозначено допусковое множество Ξ_{tol} рассматриваемой ИСЛАУ. Также здесь и далее начальный брус обозначен синим цветом. Число итераций - 10.

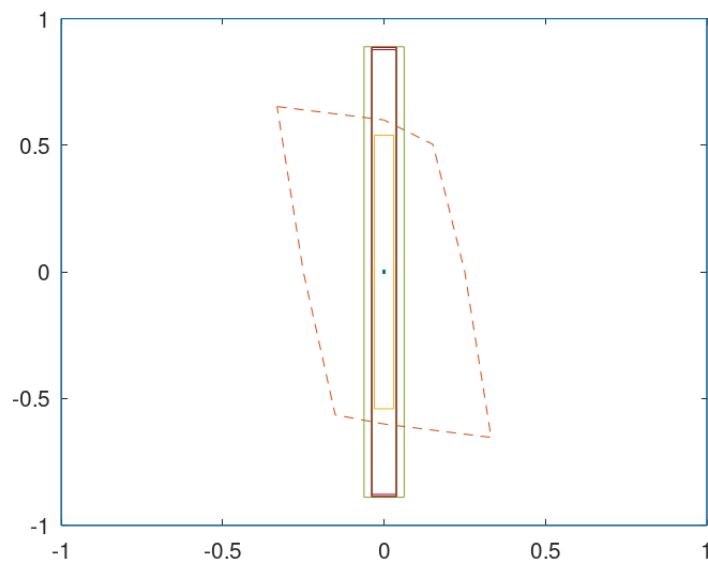


Рис. 1: Изображение брусков при решении задачи (1)

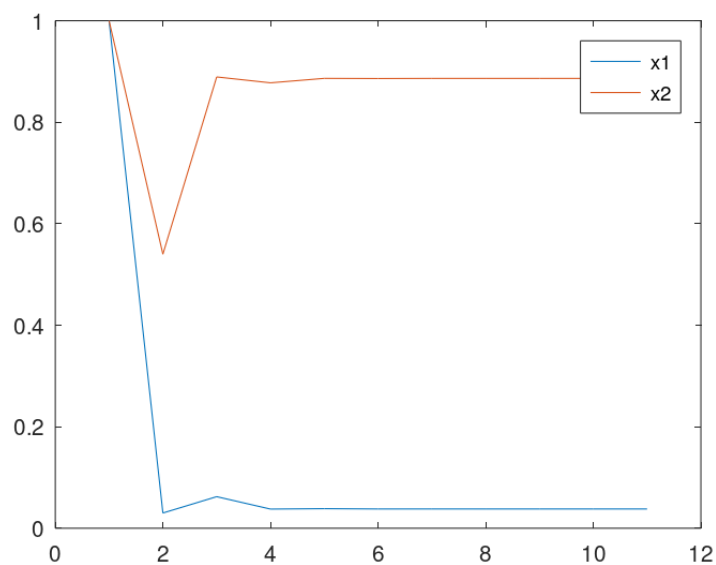


Рис. 2: Зависимость радиусов брусков от числа итераций при решении задачи (1)

4.2 Итерационный процесс по субградиентному методу Ньютона

Здесь и далее брусы, полученные по мере итераций обозначены пунктирными линиями с мелкой штриховкой, последний брус - сплошной линией красного цвета. При решении задачи (2) использовался параметр $\tau = 1$, финальный брус получен на четвертой итерации метода.

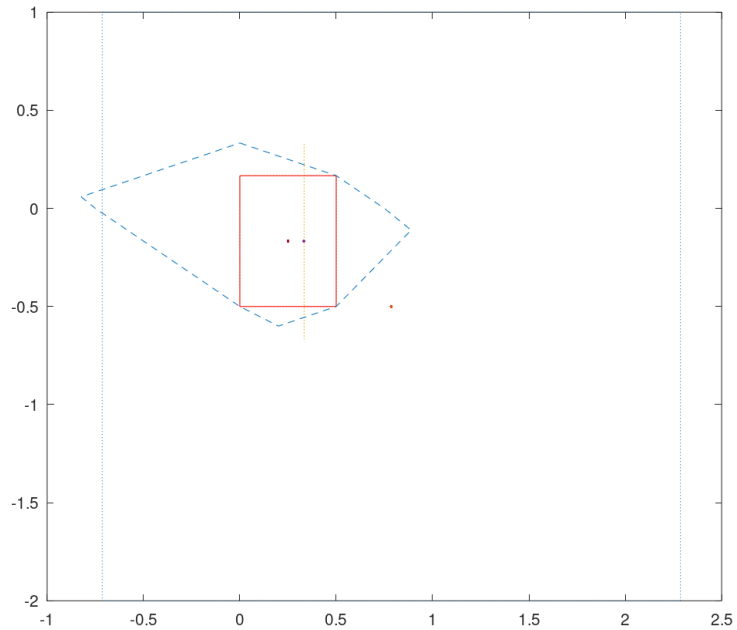


Рис. 3: Решение задачи (2) субградиентным методом Ньютона, $\tau = 1$

Решение задачи (3) с параметром $\tau = 1$. Число итераций - 300.

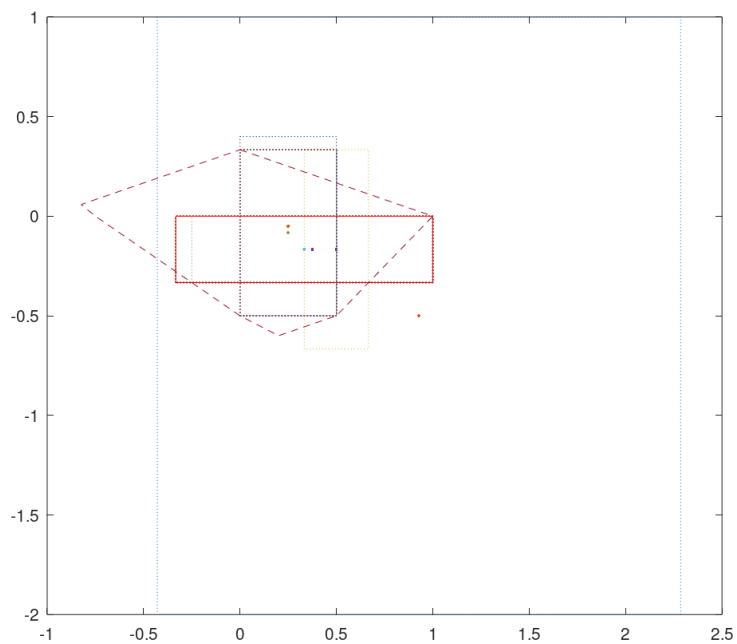


Рис. 4: Решение задачи (3) субградиентным методом Ньютона, $\tau = 1$

Решение задачи (3) с параметром $\tau = 0.05$. Число итераций - 300.

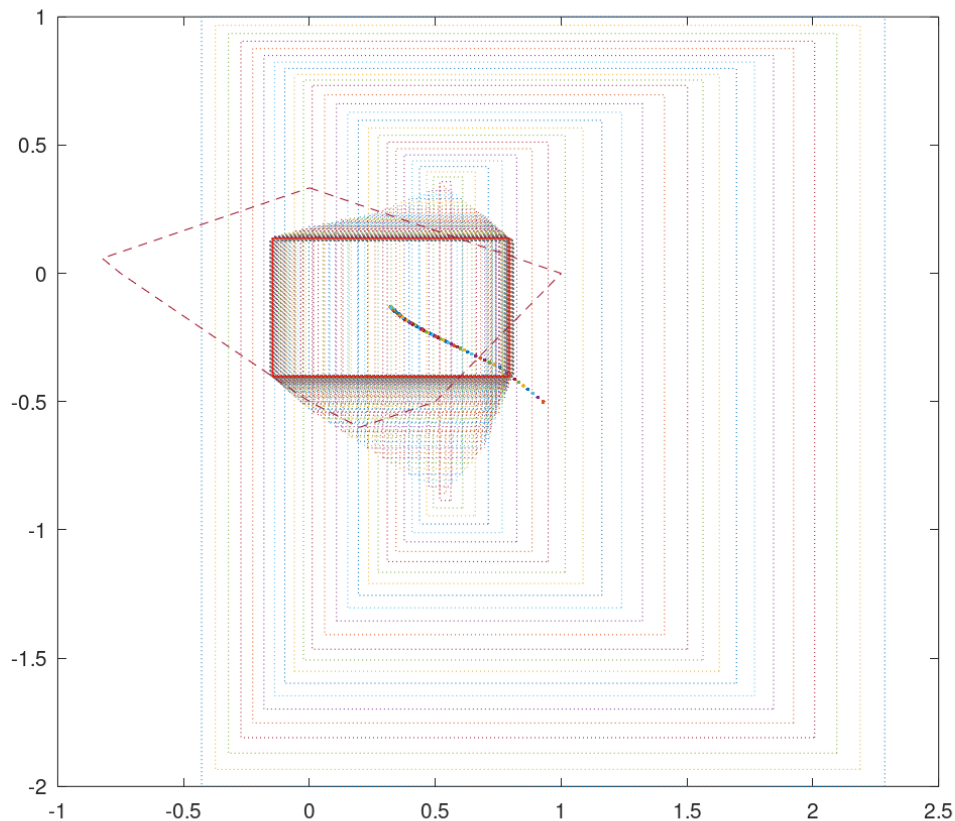


Рис. 5: Решение задачи (3) субградиентным методом Ньютона, $\tau = 0.05$

5 Обсуждение

1. Сопоставляя графики 1 и 2, обнаруживаем, что на второй итерации метод выдал более адекватную внутреннюю оценку Ξ_{tol} , чем на последней. Финальный результат выходит за пределы допускового множества. Середина брусов практически не меняется по мере итераций. После пятой итерации наблюдается стагнация в размере брусков.
2. При решении задачи 2 получена точная внутренняя оценка Ξ_{tol} , субградиентный метод Ньютона сошелся очень быстро - после четвертой итерации итерационный процесс остановился.
3. При решении задачи 3 не была получена внутренняя оценка Ξ_{tol} . Тем не менее, результат адекватный - около 85% площади полученного бруса находится внутри допускового множества. Метод проделал все 300 итераций вплоть до заданных извне ограничений.
4. При уменьшении параметра τ получен другой брус. Он все еще не является строгой внутренней оценкой Ξ_{tol} , но эта оценка более удачна, так как полученный брус больше по площади, чем предыдущий, и еще большая его часть лежит внутри допускового множества.
5. С меньшим параметром τ изменение брусков по мере итераций меньше, эти изменения более плавные. Судя по графику 5, можно предположить, что при устремлении

числа итераций к бесконечности, все же можно получить точную внутреннюю оценку. Такой вывод нельзя сделать, опираясь на график 4.

Исходный код

С исходным кодом программы и отчета можно ознакомиться в репозитории <https://github.com/Stasychbr/IntervalArith>.