Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и
вычислительной физики,
Физико-механический институт

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

# Отчет по лабораторной работе №2
# по дисциплине «Интервальный анализ»

Выполнил студент гр. 5030102/80201
Кирпиченко С. Р.
Руководитель
Баженов А. Н.

Санкт-Петербург
2021

# Содержание

**Страница**

# Список иллюстраций

**Страница**

# 1 Постановка задачи

## 1.1 Внешнее оценивание множества решений ИСЛАУ в $\mathbb{IR}$

Дана ИСЛАУ

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 = [2,\ 4] \\ \mathbf{x}_1 - [1,\ 2] \cdot \mathbf{x}_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Необходимо произвести оценку внешнего множества решений с помощью метода Кравчика и:

- Определить спектральный радиус матрицы
- Провести оценку начального бруса решения
- Проиллюстрировать положение брусов при итерациях
- Проиллюстрировать радиусы брусов при итерациях
- Проиллюстрировать расстояние центров брусов при итерациях до центра последнего бруса

## 1.2 Внешнее оценивание множества решений нелинейных задач в $\mathbb{IR}$

Дана нелинейная система уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 = [2,\ 4] \\ \frac{\mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_2} = [1,\ 2] \end{cases} \tag{2}$$

Необходимо произвести оценку внешнего множества решений с помощью метода Кравчика и:

- Проиллюстрировать положение брусов при итерациях
- Проиллюстрировать радиусы брусов при итерациях
- Проиллюстрировать расстояние центров брусов при итерациях до центра последнего бруса

# 2 Теория

## 2.1 Внешнее множество решений

Под внешним множеством решений понимается объединенное множество решений, образованное решениями всех точечных систем $F(a, x) = b$

$$\Xi_{\text{uni}} = \{x \in \mathbb{R}^n | \exists a \in \mathbf{a},\ \exists b \in \mathbf{b} :\ F(a, x) = b\}$$

## 2.2 Метод Кравчика

Метод Кравчика - это итерационная процедура уточнения двусторонней границы решений системы n уравнений с n неизвестными $F(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \mathbf{X} \subset \mathbb{IR}^n$, определенной на некотором брусе $\mathbf{X}$. Данный метод позволяет не только произвести оценку, но и убедиться, что решений не существует.

Отображение $\mathscr{K}(\mathbf{X}, \overline{x}) = \overline{x} - \Lambda \cdot F(\overline{x}) - (I - \Lambda \cdot \mathbf{L}) \cdot (\mathbf{X} - \overline{x})$ называется оператором Кравчика на $\mathbf{X}$ относительно точки $\overline{x}$. Если $\rho(I - \Lambda \cdot \mathbf{L}) < 1$, то по теореме Шрёдера у отображения существует единственная неподвижная точка, являющаяся решением рассматриваемой системы уравнений.

Метод Кравчика заключается в построении последовательности $\{\mathbf{X}^k\}_{k=0}^{\infty}$ по формуле

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k \cap \mathscr{K}(\mathbf{X}^k, \overline{x}^k)$$

Начальный брус, точки $\overline{x}$, предобуславливатель $\Lambda$ и матрица $\mathbf{L}$ выбираются исходя из эмпирических соображений для каждой конкретной системы уравнений. Для решения задачи (2) будут использованы следующие формулы:

$$\mathbf{X}^0 = \begin{pmatrix} [0.1,\ 5] \\ [0.1,\ 5] \end{pmatrix},\ \overline{x}^k = \operatorname{mid}\mathbf{X}^k,\ \Lambda = \Lambda(\mathbf{x}) = (\operatorname{mid} J(\mathbf{x}))^{-1},\ \mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x})$$

где $J(\mathbf{x})$ - якобиан.

Частный случай метода Кравчика для ИСЛАУ выглядит следующим образом:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \big(\Lambda \cdot \mathbf{b} + (I - \Lambda \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}^k\big) \cap \mathbf{x}^k,$$

где $\mathbf{A}$ - матрица ИСЛАУ, $\mathbf{b}$ - вектор правой части. Для решения задачи (1) предобуславливатель будет выбран как $\Lambda = (\operatorname{mid}\mathbf{A})^{-1}$.

### 2.3 Выбор начального приближения

Для систем общего вида выбор начального бруса - отдельная задача, которая не поддается обобщению. Тем не менее, в случае ИСЛАУ справедливо следующее утверждение:

$$\eta = ||I - \Lambda \cdot \mathbf{A}||_\infty < 1 \Rightarrow \Xi_{\text{uni}} \subset \begin{pmatrix} [-\theta,\ \theta] \\ \cdots \\ [-\theta,\ \theta] \end{pmatrix},\ \theta = \frac{||\Lambda \cdot \mathbf{b}||_\infty}{1 - \eta}$$

В качестве начального приближения при решении задачи (1) будет использована эта оценка внешнего множества решений.

## 3 Реализация

Для осуществления вычислений и визуализации результатов использовалась среда Matlab с библиотекой интервальной арифметики IntLab.

## 4 Результаты

### 4.1 Спектральный радиус $|I - \Lambda\mathbf{A}|$

Для того, чтобы итерационный процесс сходился, необходимо, чтобы спектральный радиус матрицы $|I - \Lambda\mathbf{A}|$ был меньше 1.

$$|I - \Lambda\mathbf{A}| \approx \begin{pmatrix} 0 & 0.2857 \\ 0 & 0.1429 \end{pmatrix}$$

$$\rho(|I - \Lambda\mathbf{A}|) \approx 0.1429 < 1$$

Итерационный процесс сходящийся, можно пользоваться методом Кравчика.

### 4.2 Оценка бруса начального положения

$||I - \Lambda \cdot \mathbf{A}||_\infty \approx 0.2857 < 1$. Следовательно, можно воспользоваться описанным выше способом выбора $\mathbf{X}^0$.

$$\theta = \frac{||\Lambda \cdot \mathbf{b}||_\infty}{1 - \eta} \approx 2.4 \Rightarrow \mathbf{X}^0 = \begin{pmatrix} [-2.4,\ 2.4] \\ [-2.4,\ 2.4] \end{pmatrix}$$

### 4.3 Результаты применения метода Кравчика для задачи (1)

Если построить 4 прямые и найти область, образованную их пересечением, то получим $\Xi_{\mathrm{uni}}$ для рассматриваемой задачи.

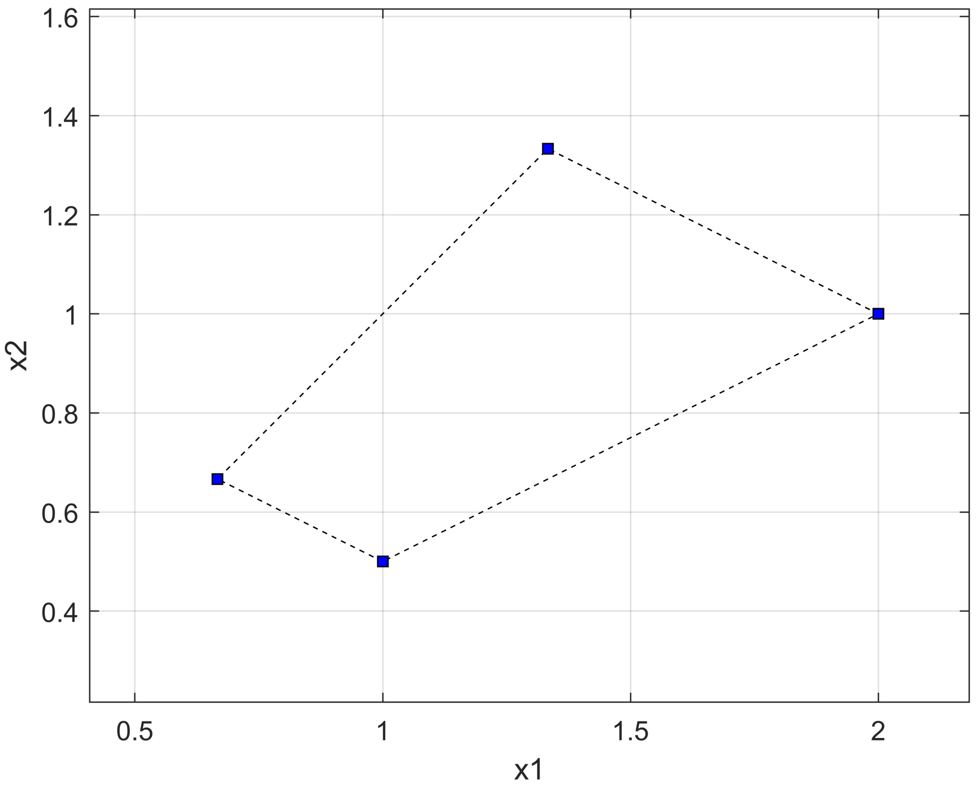


Рис. 1: Множество $\Xi_{\mathrm{uni}}$

Результатом выполнения метода Кравчика являются следующие брусы:

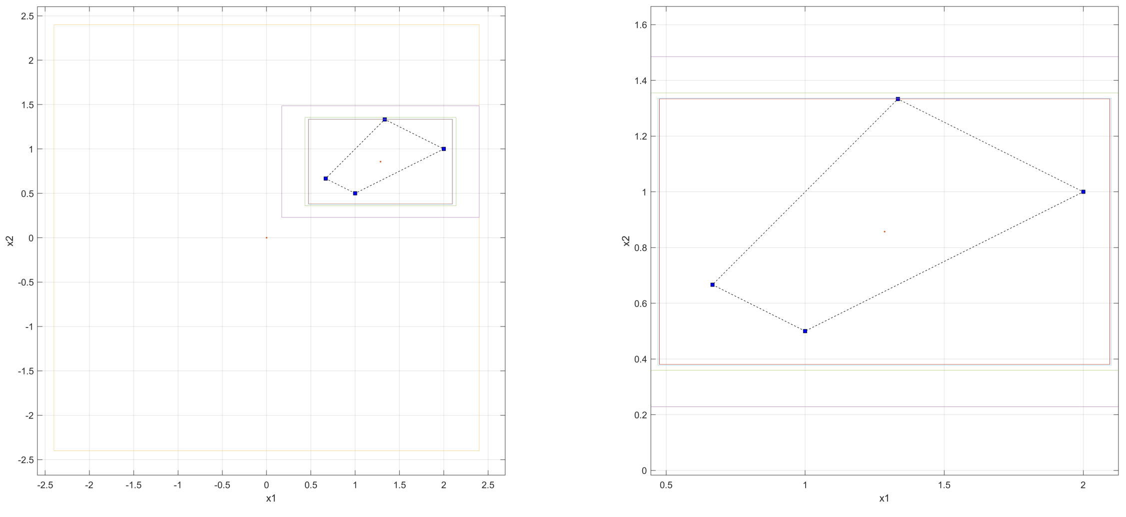

Рис. 2: Иллюстрация работы метода Кравчика для ИСЛАУ

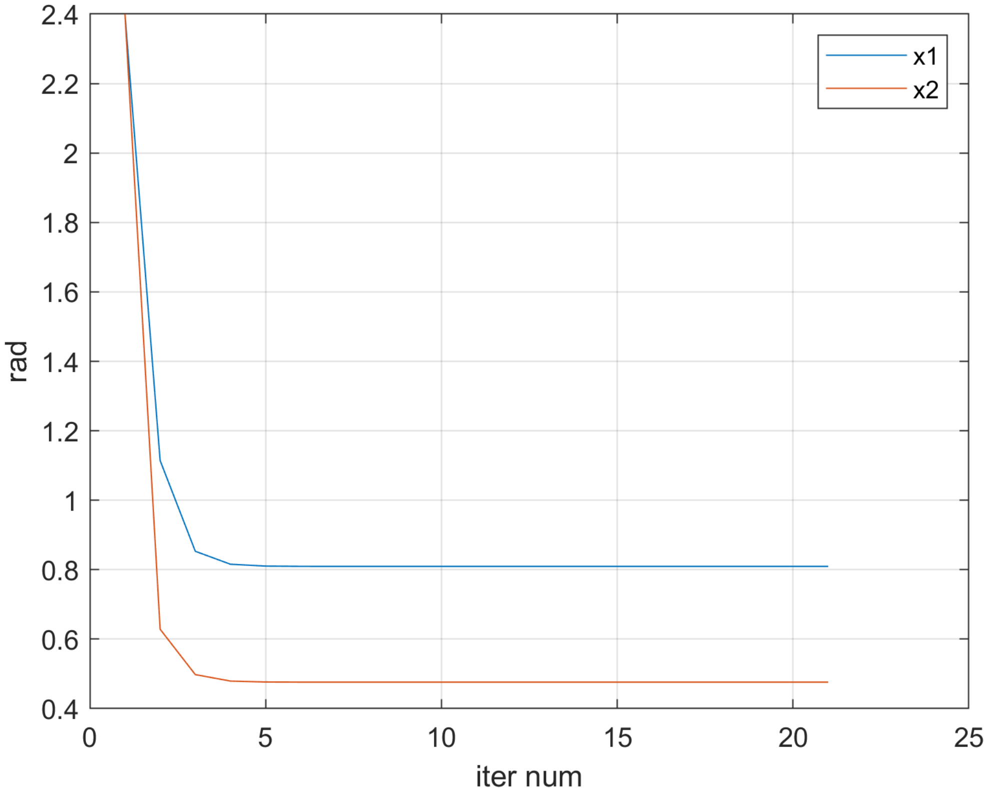


Рис. 3: График радиусов брусов для ИСЛАУ

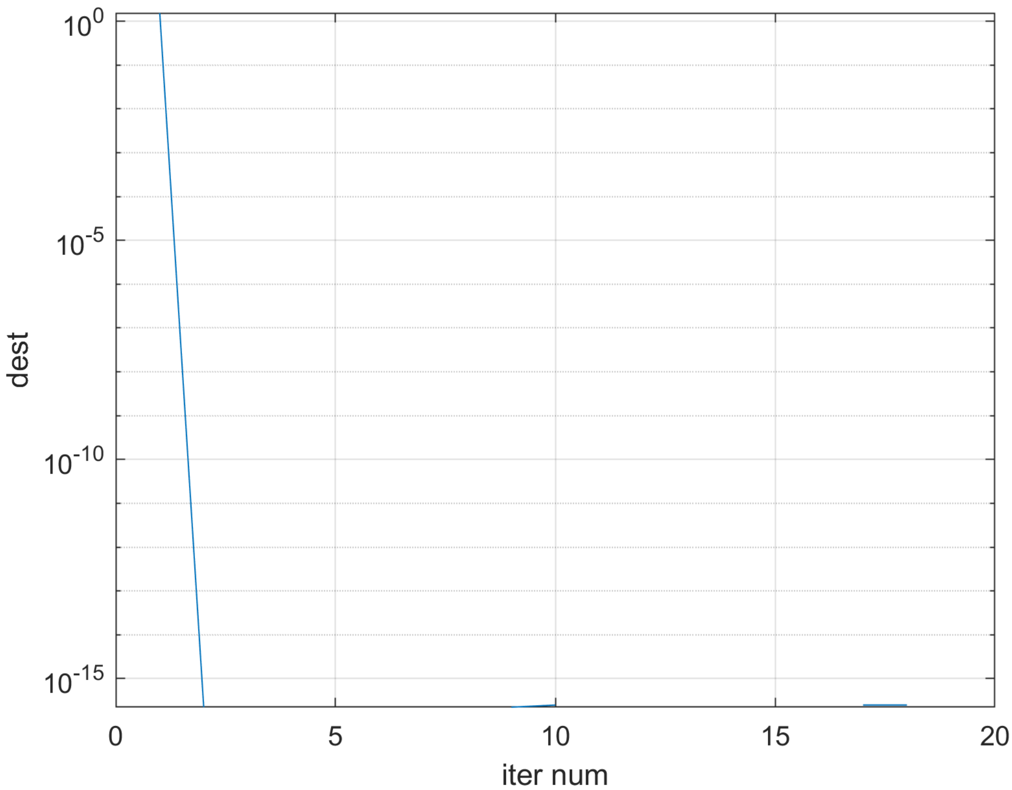


Рис. 4: График сходимости брусов для ИСЛАУ

### 4.4 Результаты применения метода Кравчика для задачи (2)

Так как задачи являются эквивалентными в смысле геометрической интерпретации, то $\Xi_{\text{uni}}$ остается таким же, как на графике 1.

Результатом выполнения метода Кравчика являются следующие брусы:

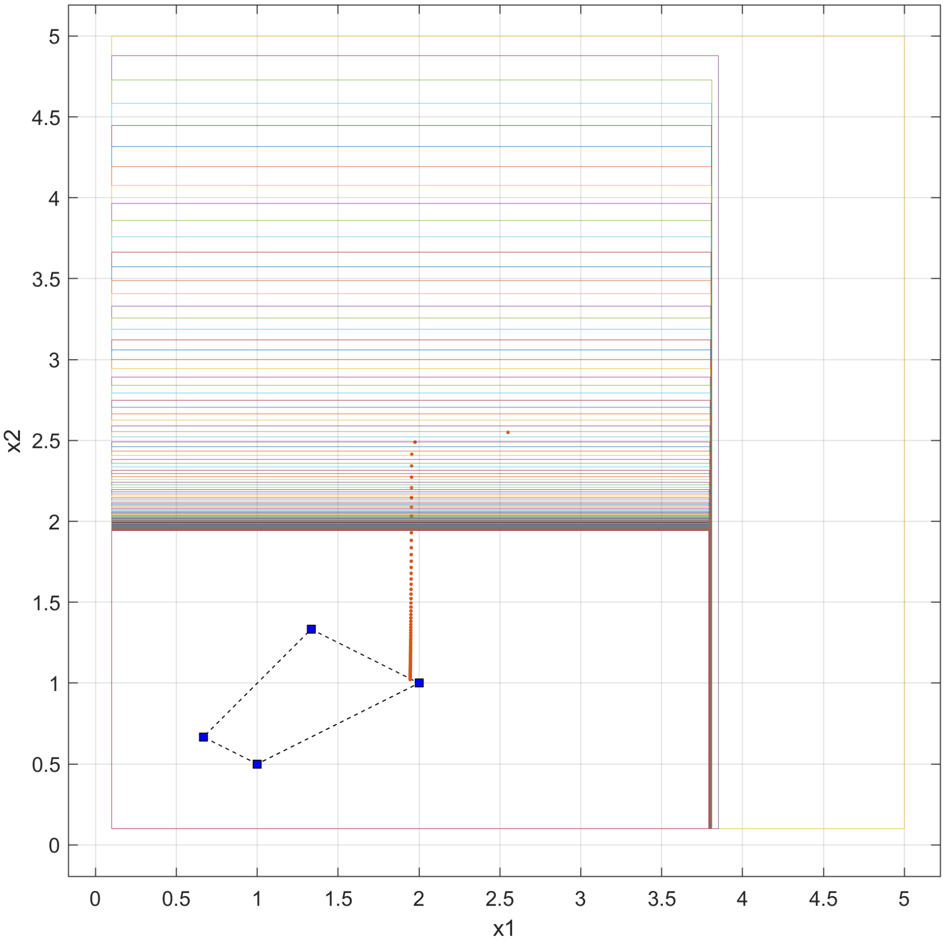


Рис. 5: Иллюстрация работы метода Кравчика для нелинейной системы

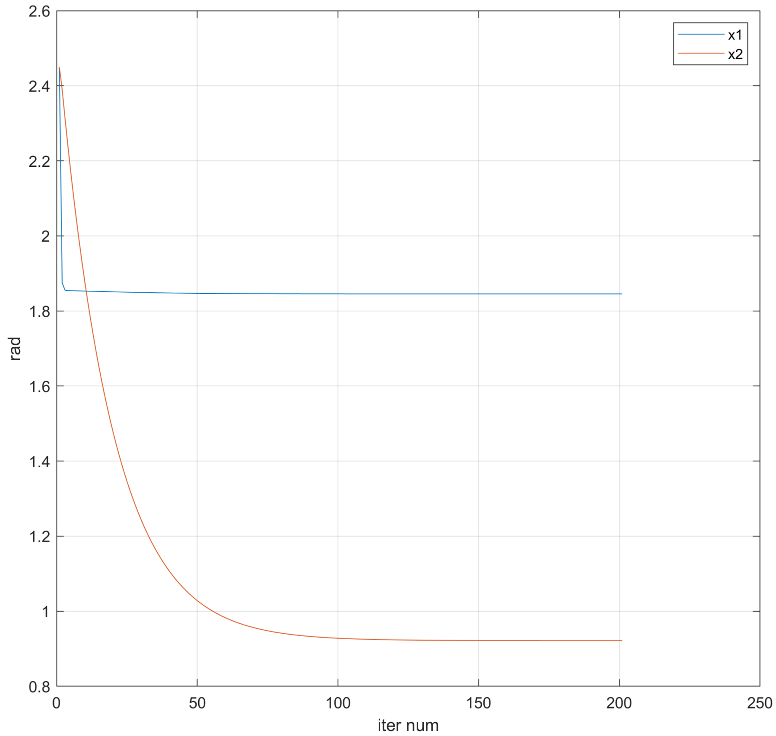


Рис. 6: График радиусов брусов для нелинейной системы

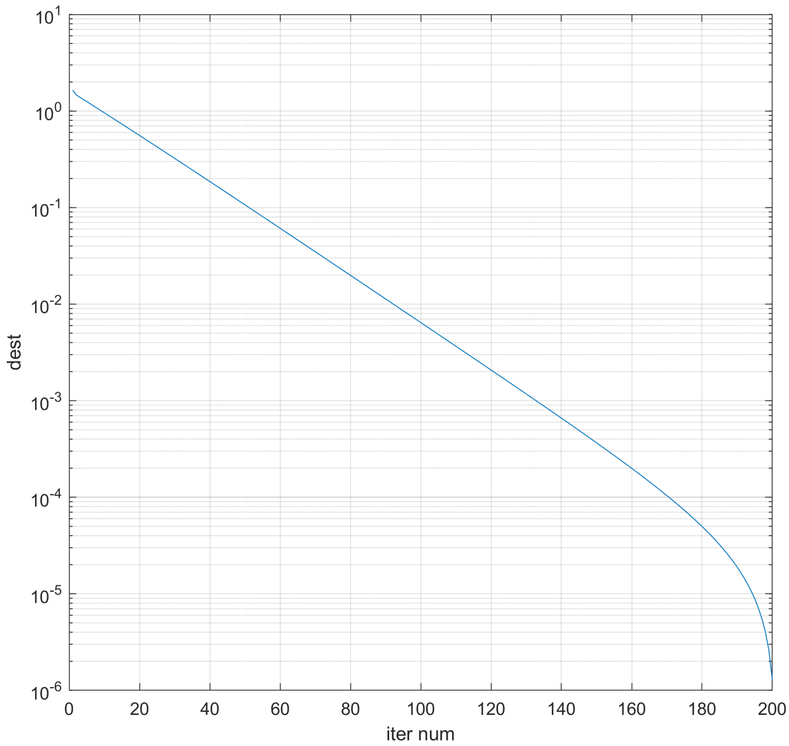


Рис. 7: График сходимости брусов для нелинейной системы

# 5 Обсуждение

1. Метод Кравчика для ИСЛАУ показал очень быструю сходимость: из грубой начальной оценки метод пришел к брусу, мало отличающемуся от последнего в построенной последовательности, за 4 итерации, если делать вывод на основании графика 3 радиусов, и за 2 итерации, если делать вывод на основании графика 4 расстояния между центрами брусов.

2. Из графика 2 видно, что на последних итерациях уточняется лишь та грань бруса, по которой и так получено очень точное приближение. Можно сделать вывод, что процесс не сойдется к интервальной оболочке множества $\Xi_{\text{uni}}$.

3. При решении задачи (2) была использована начальная оценка так, чтобы брус $\mathbf{X}^0$ лежал в первом ортанте, иначе в якобиане появляется операция деления на интервал, содержащий 0. Сходимость более медленная, чем в предыдущем случае.

4. По графикам 5 и 6 видно, что вновь в основном происходит уточнение лишь одной грани бруса.

5. Исходя из графика 7 можно сделать вывод, что в отличие от задачи 1, в задаче 2 движение центра брусов не прекращается даже спустя число итераций, на порядок превосходящее число итераций, на котором остановился предыдущий метод. Тем не менее, сходимость замедляется по мере построений.

6. Сравнивая графики 2 и 5, приходим к выводу, что интерпретация задачи как ИСЛАУ дала намного более точное решение. В первом случае получили брус, отличающийся от интервальной оболочки $\Xi_{\text{uni}}$ на величину порядка 0.1 по каждой грани (на одной из граней получено точное значение). В случае рассмотрения задачи как системы нелинейных уравнений получили уточнение лишь по двум граням, погрешность порядка единицы.

## Исходный код

С исходным кодом программы и отчета можно ознакомиться в репозитории `https://github.com/Stasychbr/IntervalArith`.