Mateusz Stasiak
Indeks: 262339

Weryfikacja hipotez statystycznych

1. Zadanie 1

1.1. Wstęp

Hipotezą zerową nazywamy założenie, że wartość średnia μ naszych danych wyniesie 1.5. Hipotezę tę oznaczamy symbolem H_0 i piszemy $H_0\colon \mu = \mu_0 = 1.5$. Drugą hipotezę nazywamy hipotezą alternatywną i oznaczamy ją przez H_1. W naszym przypadku:

(a) $H_1\colon \mu \neq \mu_0$
(b) $H_1\colon \mu > \mu_0$
(c) $H_1\colon \mu < \mu_0$.

Jeśli zachodzi hipoteza zerowa, to nasze dane mają rozkład $N(1.5{,}0.2)$. Do weryfikacji H_0 będziemy potrzebować jakiejś statystyki testowej. Zauważmy, że parametr σ jest znany i wynosi 0.2, dlatego mądrym pomysłem będzie wykorzystanie średniej z dostępnych obserwacji. Ta zmienna losowa $\overline{X}$ ma rozkład $N(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Zatem najwygodniej będzie dodatkowo przeprowadzić standaryzację tej średniej i użyć statystyki

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \qquad Z \sim N(0{,}1).$$

Gdy hipoteza zerowa H_0 jest fałszywa, wzór na statystykę Z można zapisać następująco:

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \underbrace{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\sim N(0,1)} + \frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Ze wzoru widać, że kluczem do weryfikacji hipotezy jest sprawdzenie czy statystyka Z przyjmuje wartości charakterystyczne dla założonego rozkładu $N(0{,}1)$. Jeśli nie, to niepoprawny będzie również rozkład przewidywany dla $\overline{X}$, a tym samym odrzucimy naszą hipotezę zerową. Zbiór liczb, które prowadzą do odrzucenia hipotezy H_0 na korzyść H_1 nazywamy zbiorem krytycznym C. Jego rozmiar zależy od miary dokładności wykonywanego testu, czyli tzw. poziomu istotności. Wyznacza on prawdopodobieństwo popełnienia błędu pierwszego rodzaju - odrzucenia hipotezy zerowej, gdy jest ona prawdziwa. Poziom istotności oznaczamy poprzez symbol α. W zadaniu przyjmujemy, że jest on równy 0.05.

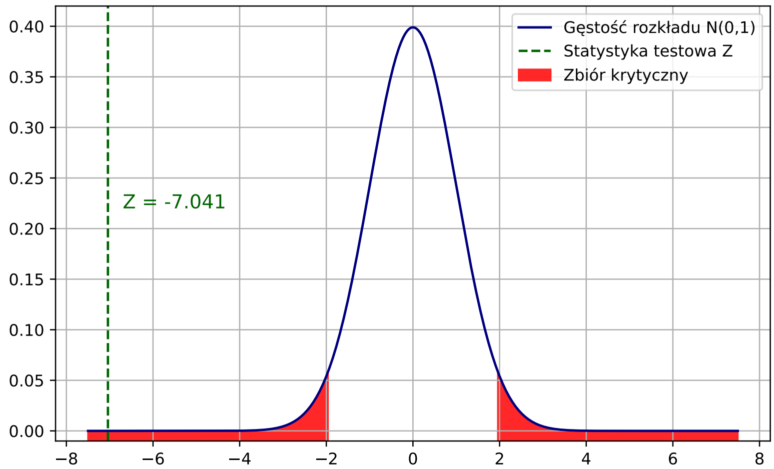
Wprowadźmy jeszcze pojęcie p-wartości. Jest to najmniejszy poziom istotności α, przy którym zaobserwowana wartość statystyki testowej Z prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej H_0.

1.2. Hipoteza alternatywna $\boldsymbol{H_1\colon \mu \neq 1.5}$, $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$

Z teorii estymacji przedziałowej dla danych z rozkładu normalnego wiemy, że $P_{H_0}(z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant Z \leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = P_{H_0}(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant Z \leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$. Powyższe kwantyle rozkładu $N(0{,}1)$ wynoszą $z_{0.025} = -1.96$ oraz $z_{0.975} = 1.96$. Zbiór krytyczny testu przyjmuje wtedy postać

$$C = \left\{Z : Z \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}} \vee Z \geqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = \{Z : Z \leqslant -1.96 \vee Z \geqslant 1.96\}.$$

Ponieważ statystyka testowa Z wynosi -7.041, czyli znajduje się w przedziale krytycznym, to odrzucamy hipotezę zerową H_0 i przyjmujemy hipotezę alternatywną H_1. Zilustrujmy powyższy wniosek.



Rysunek 1. Zbiór krytyczny C dla hipotezy zerowej H_0, jeśli $H_1\colon \mu \neq \mu_0$

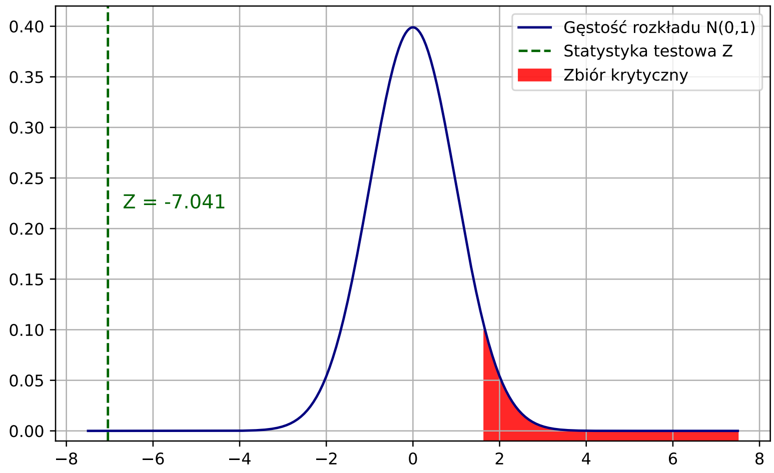
P-wartość dla tego podpunktu wynosi $\alpha_p = 2P_{H_0}(Z > |z_{\alpha_p}|) = 2-2P_{H_0}(Z \leqslant |-7.041|) = 2-2F_Z(7.041) = 1.909 \cdot 10^{-12}$.

1.3. Hipoteza alternatywna $\boldsymbol{H_1\colon \mu > 1.5}$, $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$

Z teorii estymacji przedziałowej dla danych z rozkładu normalnego wiemy, że $P_{H_0}(Z \geqslant z_{1-\alpha}) = \alpha$. Kwantyl rzędu $1-\alpha$ rozkładu $N(0{,}1)$ wynosi $z_{0.95} = 1.6449$. Zbiór krytyczny testu przyjmuje wtedy postać

$$C = \{Z : Z \geqslant z_{1-\alpha}\} = \{Z : Z \geqslant 1.6449\}.$$

Ponieważ statystyka testowa $Z = -7.041$ jest mniejsza niż 1.6449, czyli nie znajduje się w przedziale krytycznym, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej H_0. Zilustrujmy powyższy wniosek.



Rysunek 2. Zbiór krytyczny C dla hipotezy zerowej H_0, jeśli $H_1\colon \mu > \mu_0$

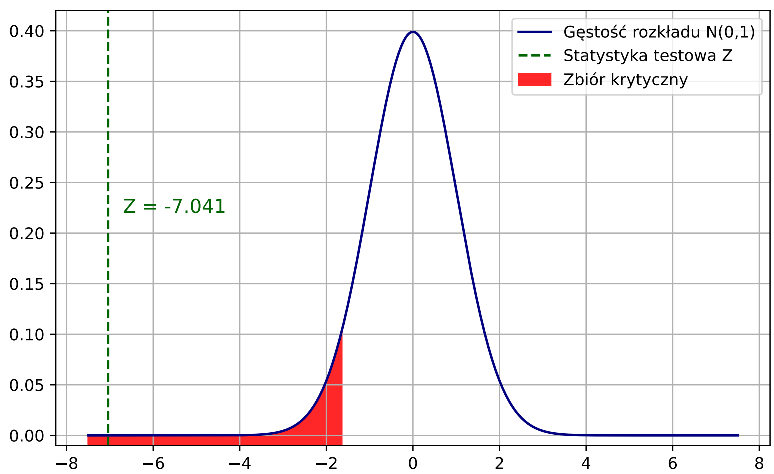
P-wartość dla tego podpunktu wynosi $\alpha_p = P_{H_0}(Z > z_{\alpha_p}) = 1 - P_{H_0}(Z \leqslant -7.041) = 1 - F_Z(-7.041) \approx 1$.

1.4. Hipoteza alternatywna $H_1\colon \mu < 1.5$, $\alpha = 0.05$

Z teorii estymacji przedziałowej dla danych z rozkładu normalnego wiemy, że $P_{H_0}(Z \geqslant z_{1-\alpha}) = P_{H_0}(Z \leqslant -z_{1-\alpha}) = P_{H_0}(Z \leqslant z_\alpha) = \alpha$. Kwantyl rzędu α rozkładu $N(0{,}1)$ wynosi $-z_{0.95} = z_{0.05} = -1.6449$. Zbiór krytyczny testu przyjmuje wtedy postać

$$C = \{Z : Z \leqslant z_\alpha\} = \{Z : Z \leqslant -1.6449\}\,.$$

Ponieważ statystyka testowa $Z = -7.041$ jest mniejsza niż -1.6449, czyli wpada do przedziału krytycznego, to odrzucamy hipotezę zerową H_0 i przyjmujemy hipotezę alternatywną H_1. Zilustrujmy powyższy wniosek.



Rysunek 3. Zbiór krytyczny C dla hipotezy zerowej H_0, jeśli $H_1\colon \mu < \mu_0$

P-wartość dla tego podpunktu wynosi $\alpha_p = P_{H_0}(Z \leqslant z_{\alpha_p}) = P_{H_0}(Z \leqslant -7.041) = F_Z(-7.041) = 9.543 \cdot 10^{-13}$.

Przypomnijmy, że poziom istotności α to z definicji miara dokładności wykonywanego testu. Przyjęcie niższego poziomu istotności w powyższych podpunktach spowoduje zmniejszenie przedziału krytycznego, a w konsekwencji zmniejszenie p-wartości. Analogicznie dla zwiększenia poziomu istotności α.

1.5. Wnioski dla hipotezy $H_0\colon \mu = 1.5$

Podsumujmy zebrane informacje w tabeli:

Hipoteza H_1	Kwantyle z	Statystyka Z	Zbiór krytyczny C	Hipoteza H_0	P-wartość
$\mu \neq 1.5$	$z_{0.025} = -1.96, z_{0.975} = 1.96$	-7.041	$(-\infty, -1.96) \cup (1.96,\infty)$	odrzucona	$1.909 \cdot 10^{-12}$
$\mu > 1.5$	$z_{0.95} = 1.6449$	-7.041	$(1.6449,\infty)$	przyjęta	≈ 1
$\mu < 1.5$	$z_{0.05} = -1.6449$	-7.041	$(-\infty, -1.6449)$	odrzucona	$9.543 \cdot 10^{-13}$

Biorąc pod uwagę przyjmowane hipotezy alternatywne H_1, możemy wysnuć wniosek, że nasze dane pochodzą z rozkładu normalnego, gdzie μ ma wartość mniejszą niż 1.5. Zgadza się to z p-wartością bliską 1 przy $H_1\colon \mu > 1.5$.

2. Zadanie 2

2.1. Wstęp

Hipotezą zerową nazywamy założenie, że wariancja σ^2 naszych danych wyniesie 1.5. Hipotezę tę oznaczamy symbolem H_0 i piszemy $H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2 = 1.5$. Drugą hipotezę nazywamy hipotezą alternatywną i oznaczamy ją przez H_1. W naszym przypadku:

(a) $H_1\colon \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
(b) $H_1\colon \sigma^2 > \sigma_0^2$
(c) $H_1\colon \sigma^2 < \sigma_0^2$.

Jeśli zachodzi hipoteza zerowa, to nasze dane mają rozkład $N(0.2,\sqrt{1.5})$. Zauważmy, że parametr μ jest znany i wynosi 0.2. Do weryfikacji H_0 będziemy potrzebować jakiejś statystyki testowej. W celu zbadania wariancji w rodzinie rozkładów normalnych używa się statystyki

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}, \qquad \text{gdzie } S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mu - x_i)^2.$$

Ta zmienna losowa χ^2 ma rozkład χ^2 z $(n-1)$ stopniami swobody. Gdy hipoteza zerowa H_0 jest fałszywa, wzór na statystykę χ^2 można zapisać następująco:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \underbrace{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}_{\sim\chi^2_{n-1}} \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}.$$

Ze wzoru widać, że kluczem do weryfikacji hipotezy jest sprawdzenie czy statystyka χ^2 przyjmuje wartości charakterystyczne dla jej założonego rozkładu χ^2_{n-1}. Jeśli nie, to niepoprawny będzie również rozkład $N(0.2,\sqrt{1.5})$ przewidywany dla naszych danych, a tym samym odrzucimy hipotezę zerową. Zbiór liczb, które prowadzą do odrzucenia hipotezy H_0 na korzyść H_1 nazywamy zbiorem krytycznym C. Jego rozmiar zależy od miary dokładności wykonywanego testu, czyli tzw. poziomu istotności. Wyznacza on prawdopodobieństwo popełnienia błędu pierwszego rodzaju - odrzucenia hipotezy zerowej, gdy jest ona prawdziwa. Poziom istotności oznaczamy poprzez symbol α. W zadaniu przyjmujemy, że jest on równy 0.05.

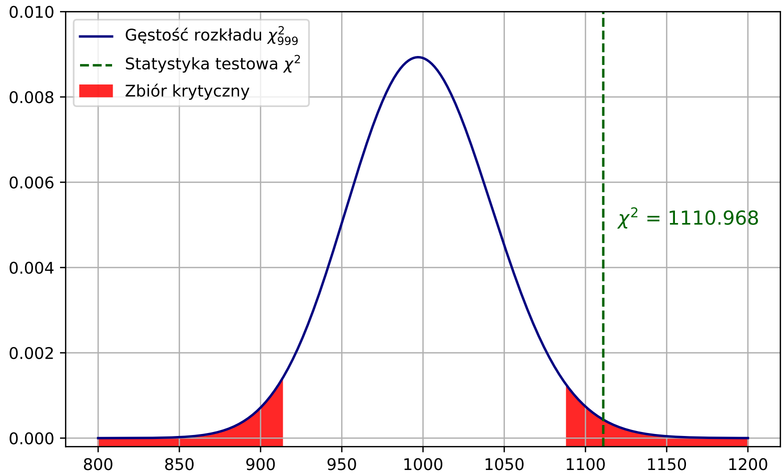
Wprowadźmy jeszcze pojęcie p-wartości. Jest to najmniejszy poziom istotności α, przy którym zaobserwowana wartość statystyki testowej χ^2 prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej H_0.

2.2. Hipoteza alternatywna $H_1\colon \sigma^2 \neq 1.5$, $\alpha = 0.05$

Z teorii estymacji przedziałowej dla danych z rozkładu normalnego wiemy, że $P_{H_0}(x_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \chi^2 \leqslant x_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$. Powyższe kwantyle rozkładu χ^2_{n-1} wynoszą $x_{0.025} = 913.3$ oraz $x_{0.975} = 1088.49$. Zbiór krytyczny testu przyjmuje wtedy postać

$$C = \left\{\chi^2 : \chi^2 \leqslant x_{\frac{\alpha}{2}} \vee \chi^2 \geqslant x_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = \left\{\chi^2 : \chi^2 \leqslant 913.3 \vee \chi^2 \geqslant 1088.49\right\}.$$

Ponieważ statystyka testowa χ^2 wynosi 1110.968, czyli znajduje się w przedziale krytycznym, to odrzucamy hipotezę zerową H_0 i przyjmujemy hipotezę alternatywną H_1. Zilustrujmy powyższy wniosek.



Rysunek 4. Zbiór krytyczny C dla hipotezy zerowej H_0, jeśli $H_1\colon \sigma^2 \neq 1.5$

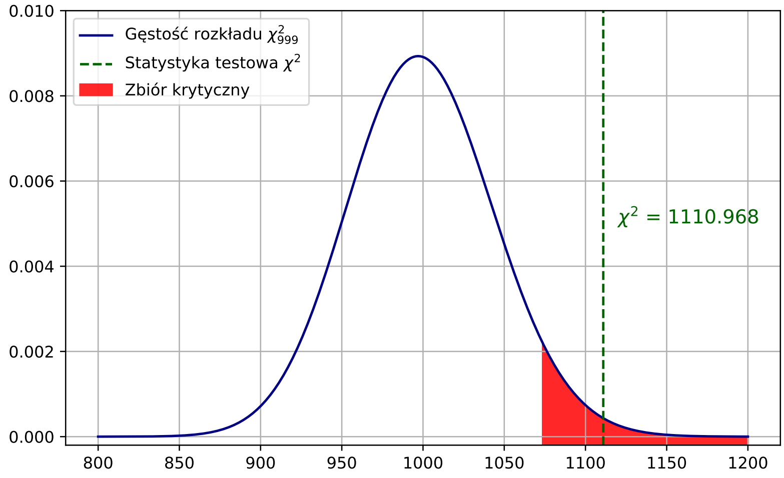
P-wartość dla tego podpunktu wynosi $\alpha_p = 2P_{H_0}(\chi^2 > |x_{\alpha_p}|) = 2 - 2P_{H_0}(\chi^2 \leqslant |x_{\alpha_p}|) = 2 - 2F_{\chi^2_{999}}(1110.968) = 0.015$.

2.3. Hipoteza alternatywna $H_1\colon \sigma^2 > 1.5$, $\alpha = 0.05$

Z teorii estymacji przedziałowej dla danych z rozkładu normalnego wiemy, że $P_{H_0}(\chi^2 \geqslant x_{1-\alpha}) = \alpha$. Kwantyl rzędu $1-\alpha$ rozkładu χ^2_{999} wynosi $x_{0.95} = 1073.64$. Zbiór krytyczny testu przyjmuje wtedy postać

$$C = \left\{\chi^2 : \chi^2 \geqslant x_{1-\alpha}\right\} = \left\{\chi^2 : \chi^2 \geqslant 1073.64\right\}.$$

Ponieważ statystyka testowa $\chi^2 = 1110.968$ jest większa niż 1073.64, czyli wpada do przedziału krytycznego, to odrzucamy hipotezę zerową H_0 i przyjmujemy hipotezę alternatywną H_1. Zilustrujmy powyższy wniosek.



Rysunek 5. Zbiór krytyczny C dla hipotezy zerowej H_0, jeśli $H_1\colon \sigma^2 > 1.5$

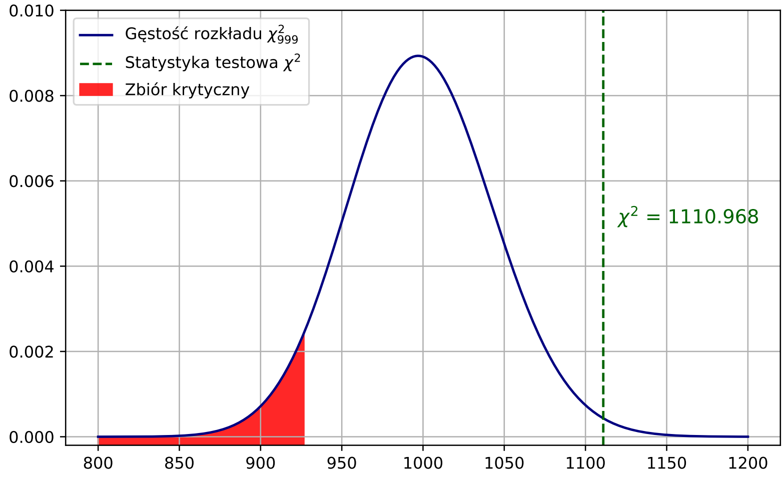
P-wartość dla tego podpunktu wynosi $\alpha_p = P_{H_0}(\chi^2 > x_{\alpha_p}) = 1 - P_{H_0}(\chi^2 \leqslant 1110.968) = 1 - F_{\chi^2_{999}}(1110.968) = 0.0075$.

2.4. Hipoteza alternatywna $H_1\colon \sigma^2 < 1.5$, $\alpha = 0.05$

Z teorii estymacji przedziałowej dla danych z rozkładu normalnego wiemy, że $P_{H_0}(\chi^2 \geqslant x_{1-\alpha}) = P_{H_0}(\chi^2 \leqslant x_\alpha) = \alpha$. Kwantyl rzędu α rozkładu χ^2_{999} wynosi $x_{0.05} = 926.63$. Zbiór krytyczny testu przyjmuje wtedy postać

$$C = \left\{\chi^2 : \chi^2 \leqslant x_\alpha\right\} = \left\{\chi^2 : \chi^2 \leqslant 926.63\right\}.$$

Ponieważ statystyka testowa $\chi^2 = 1110.968$ jest większa niż 926.63, czyli nie znajduje się w przedziale krytycznym, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej H_0. Zilustrujmy powyższy wniosek.



Rysunek 6. Zbiór krytyczny C dla hipotezy zerowej H_0, jeśli $H_1\colon \sigma^2 < 1.5$

P-wartość dla tego podpunktu wynosi $\alpha_p = P_{H_0}(\chi^2 \leqslant x_{\alpha_p}) = P_{H_0}(\chi^2 \leqslant 1110.968) = F_{\chi^2}(1110.968) = 0.992$.

Przypomnijmy, że poziom istotności α to z definicji miara dokładności wykonywanego testu. Przyjęcie niższego poziomu istotności w powyższych podpunktach spowoduje zmniejszenie przedziału krytycznego, a w konsekwencji zmniejszenie p-wartości. Analogicznie dla zwiększenia poziomu istotności α.

2.5. Wnioski dla hipotezy $H_0\colon \sigma^2 = 1.5$

Podsumujmy zebrane informacje w tabeli:

Hipoteza H_1	Kwantyle x	Statystyka χ^2	Zbiór krytyczny C	Hipoteza H_0	P-wartość
$\sigma^2 \neq 1.5$	$x_{0.025} = 913.3, x_{0.975} = 1088.49$	1110.968	$(-\infty$,913.3) $\cup$ (1088.49,∞)	odrzucona	0.015
$\sigma^2 > 1.5$	$x_{0.95} = 1073.64$	1110.968	(1073.64,∞)	odrzucona	0.0075
$\sigma^2 < 1.5$	$x_{0.05} = 926.63$	1110.968	$(-\infty$,926.63)	przyjęta	0.992

Biorąc pod uwagę przyjmowane hipotezy alternatywne H_1, możemy wysnuć wniosek, że nasze dane pochodzą z rozkładu normalnego, gdzie σ^2 ma wartość większą niż 1.5. Zgadza się to z p-wartością bliską 1 przy $H_1\colon \sigma^2 < 1.5$.

3. Zadanie 3

3.1. Wstęp

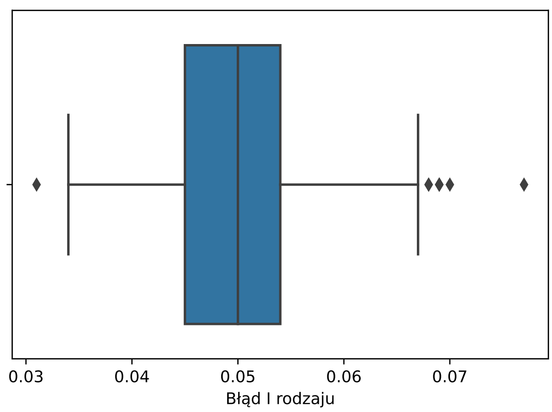
Błąd pierwszego rodzaju to prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej, gdy ta jest prawdziwa. Jego teoretyczna wartość jest równa poziomowi istotności α. Aby wyznaczyć symulacyjnie błąd I rodzaju musimy wygenerować prostą próbę losową z rozkładu normalnego o parametrach zgodnych z H_0 ($\mu = 1.5$ oraz $\sigma = 0.2$) i sprawdzić ile razy odrzucimy hipotezę zerową. Algorytm:

1. Ustalamy $\alpha = 0.05, n = 1000$
2. Generujemy $X_1, \ldots, X_n$ - prostą próbę losową z rozkładu $N(\mu,\sigma)$ (parametry zgodne z H_0)
3. Wyznaczamy wartość statystyki testowej Z lub χ^2
4. Wyznaczamy obszar krytyczny (jego postać zależy od hipotezy alternatywnej H_1)
5. Sprawdzamy, czy statystyka Z lub χ^2 jest w obszarze krytycznym
6. Powtarzamy kroki od 2) do 5) N = 1000 razy i zliczamy ile razy statystyka Z lub χ^2 jest w obszarze krytycznym
7. Ilość Z (lub χ^2) w obszarze krytycznym podzielone przez N to w przybliżeniu błąd I rodzaju

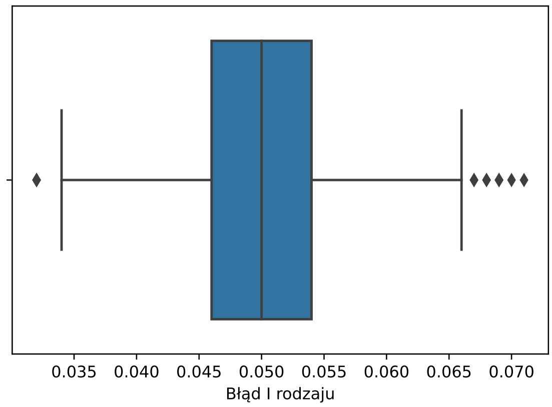
Błąd drugiego rodzaju to prawdopodobieństwo przyjęcia fałszywej hipotezy zerowej i odrzucenia prawdziwej hipotezy alternatywnej. Jego wartość zależy m.in. od tego jak daleko jesteśmy od hipotezy zerowej, tzn. ile wynosi wartość parametru μ (lub σ^2). Aby wyznaczyć symulacyjnie błąd II rodzaju musimy wygenerować prostą próbę losową z rozkładu normalnego o parametrach zgodnych z H_1 (ale blisko tych z H_0) i sprawdzić ile razy przyjmujemy hipotezę zerową. Algorytm:

1. Ustalamy $\alpha = 0.05, n = 1000$. Wartości parametrów μ i σ dobieramy zgodnie z hipotezą alternatywną H_1, ale blisko hipotezy zerowej H_0 - przykładowo oddalone maksymalnie o 0.03 od wartości z H_0)
2. Generujemy $X_1, \ldots, X_n$ - prostą próbę losową z rozkładu $N(\mu,\sigma)$
3. Wyznaczamy wartość statystyki testowej Z lub χ^2
4. Wyznaczamy obszar krytyczny (jego postać zależy od hipotezy alternatywnej H_1)
5. Sprawdzamy, czy statystyka Z lub χ^2 jest poza obszarem krytycznym
6. Powtarzamy kroki od 2) do 5) N = 1000 razy i zliczamy ile razy statystyka Z lub χ^2 jest poza obszarem krytycznym
7. Ilość Z (lub χ^2) poza obszarem krytycznym podzielone przez N to w przybliżeniu błąd II rodzaju

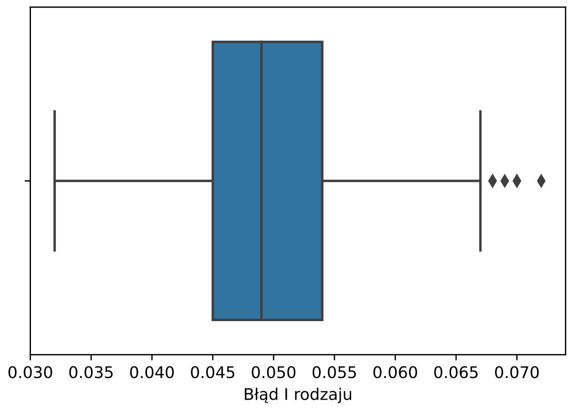
3.2. Wyniki symulacji błędu I rodzaju dla testów μ



Rysunek 7. Wykres pudełkowy przedstawiający wartości błędów I rodzaju dla μ przy hipotezie alternatywnej H_1: $\mu \neq 1.5$

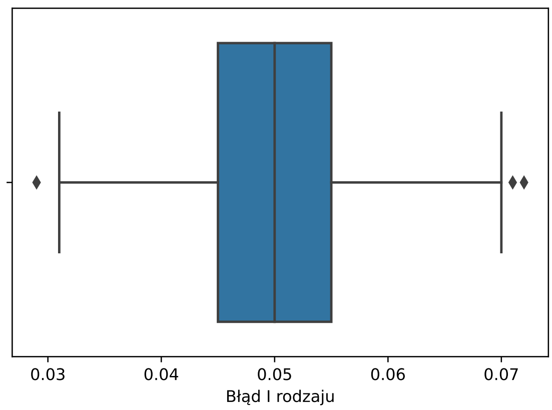


Rysunek 8. Wykres pudełkowy przedstawiający wartości błędów I rodzaju dla μ przy hipotezie alternatywnej $H_1\colon \mu > 1.5$

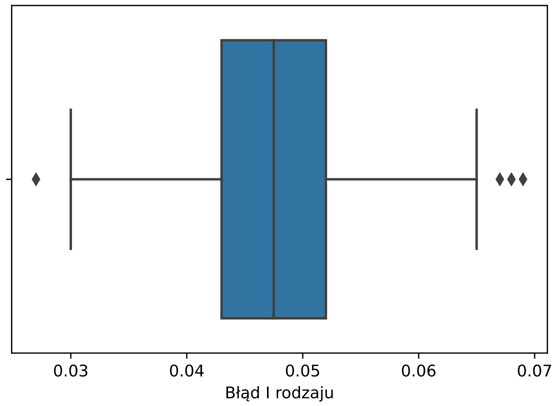


Rysunek 9. Wykres pudełkowy przedstawiający wartości błędów I rodzaju dla μ przy hipotezie alternatywnej $H_1\colon \mu < 1.5$

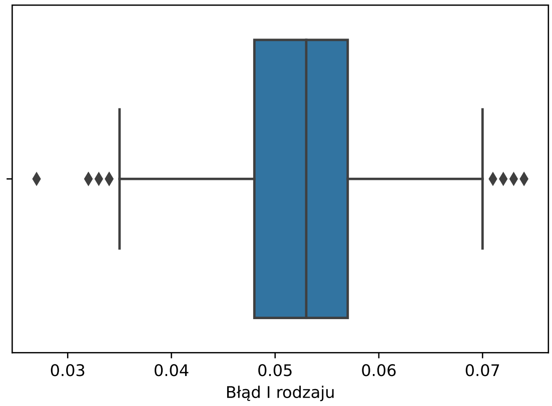
3.3. Wyniki symulacji błędu I rodzaju dla testów σ^2



Rysunek 10. Wykres pudełkowy przedstawiający wartości błędów I rodzaju dla σ^2 przy hipotezie alternatywnej $H_1\colon \sigma^2 \neq 1.5$



Rysunek 11. Wykres pudełkowy przedstawiający wartości błędów I rodzaju dla σ^2 przy hipotezie alternatywnej $H_1\colon \sigma^2 > 1.5$

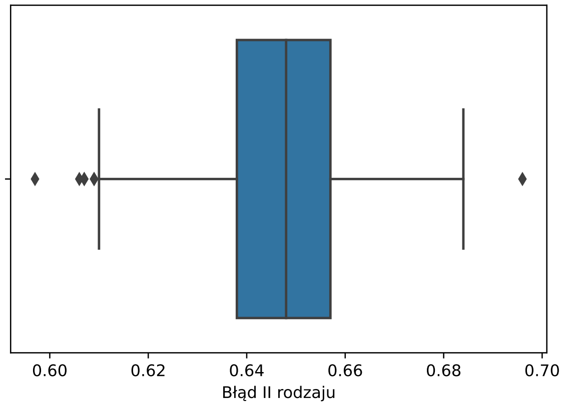


Rysunek 12. Wykres pudełkowy przedstawiający wartości błędów I rodzaju dla σ^2 przy hipotezie alternatywnej $H_1\colon \sigma^2 < 1.5$

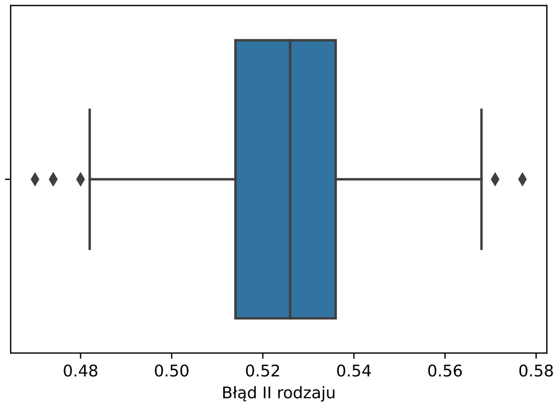
3.4. Wnioski dla symulacji błędów I rodzaju

Wartości wszystkich wykresów pudełkowych oscylują wokół 0.05. Tyle samo wynosi poziom istotności α, czyli teoretyczna wartość błędu I rodzaju. Możemy zatem wnioskować, że testy zostały przeprowadzone poprawnie.

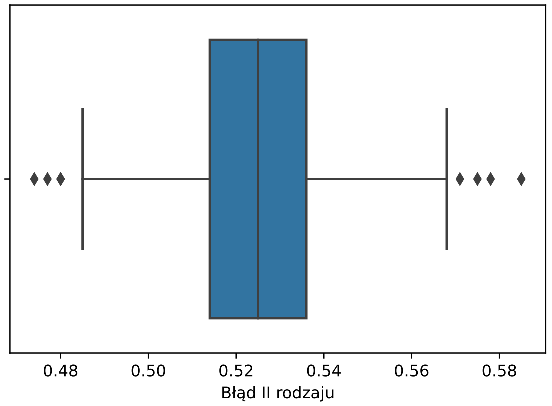
3.5. Wyniki symulacji błędu II rodzaju dla testów μ



Rysunek 13. Wykres pudełkowy przedstawiający wartości błędów II rodzaju dla $\mu = 1.51$ przy hipotezie alternatywnej $H_1 \colon \mu \neq 1.5$

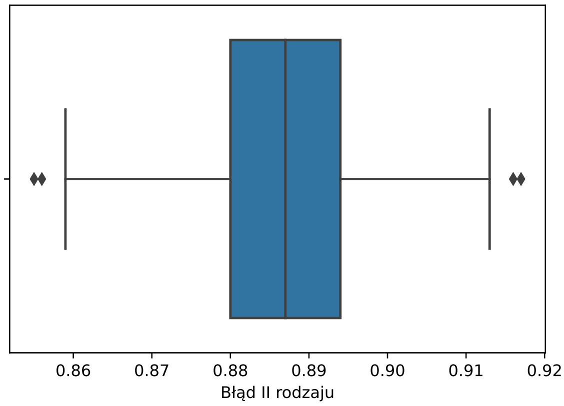


Rysunek 14. Wykres pudełkowy przedstawiający wartości błędów II rodzaju dla $\mu = 1.51$ przy hipotezie alternatywnej $H_1 \colon \mu > 1.5$

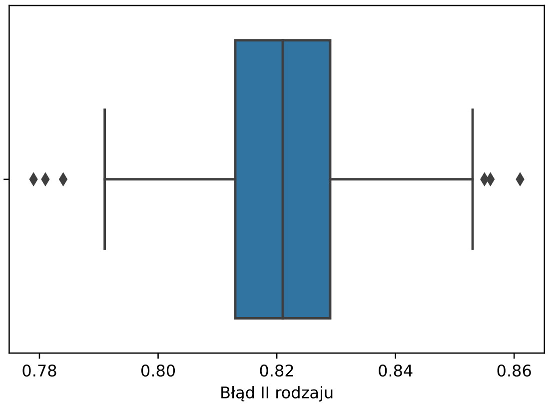


Rysunek 15. Wykres pudełkowy przedstawiający wartości błędów II rodzaju dla testów $\mu = 1.49$ przy hipotezie alternatywnej $H_1 \colon \mu < 1.5$

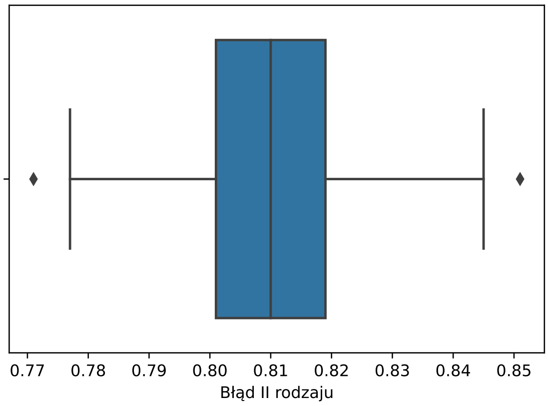
3.6. Wyniki symulacji błędu II rodzaju dla testów σ^2



Rysunek 16. Wykres pudełkowy przedstawiający wartości błędów II rodzaju dla $\sigma^2 = 1.55$ przy hipotezie alternatywnej $H_1\colon \sigma^2 \neq 1.5$



Rysunek 17. Wykres pudełkowy przedstawiający wartości błędów II rodzaju dla $\sigma^2 = 1.55$ przy hipotezie alternatywnej $H_1\colon \sigma^2 > 1.5$



Rysunek 18. Wykres pudełkowy przedstawiający wartości błędów II rodzaju dla $\sigma^2 = 1.45$ przy hipotezie alternatywnej $H_1\colon \sigma^2 < 1.5$

3.7. Wnioski dla symulacji błędów II rodzaju

Podsumujmy zebrane informacje w tabelach.

Hipoteza alternatywna H_1	μ	Wartość średnia błędu II rodzaju	Średnia moc testu
$\mu \neq 1.5$	1.51	0.64722	0.35278
$\mu > 1.5$	1.51	0.525405	0.474595
$\mu < 1.5$	1.49	0.525083	0.474917

Hipoteza alternatywna H_1	σ^2	Wartość średnia błędu II rodzaju	Średnia moc testu
$\sigma^2 \neq 1.5$	1.55	0.886972	0.113028
$\sigma^2 > 1.5$	1.55	0.82109	0.17891
$\sigma^2 < 1.5$	1.45	0.809961	0.190039

Zauważmy, że wartość średnia błędu II rodzaju i średnia moc testu sumują się do 1. Dwa ostatnie rzędy pierwszej tabeli przyjmują podobne wartości ze względu na dobór parametrów i symetrię rozkładu normalnego.