

Symulacje Komputerowe

Raport: **2**

Temat sprawozdania **Proces Ryzyka i ruch Browna**

Nazwisko i Imię prowadzącego kurs **dr Michał Balcerek**

Wykonawca:	
Imię i Nazwisko, nr indeksu	Adrianna Ziobroniewicz, 262227 Mateusz Stasiak, 262339
Wydział	Wydział Matematyki, W13
Termin zajęć:	Wtorek, 11 ¹⁵
Numer grupy ćwiczeniowej	T00-70d
Data oddanie sprawozdania:	4 stycznia 2023
Ocena końcowa	

Adnotacje dotyczące wymaganych poprawek oraz daty otrzymania poprawionego sprawozdania

Spis treści

1. Zadanie 1	3
1.1. Wstęp	3
1.1.1. Proces ryzyka	3
1.1.2. Jednorodny proces Poissona	3
1.2. Dane do zadania	4
1.3. Dopasowanie klasycznego modelu ryzyka do danych	5
1.3.1. Koszt polisy	5
1.3.2. Rozkład wysokości wypłacanych odszkodowań \mathbf{X}_i	5
1.3.3. Intensywność wypłacania ubezpieczeń	7
1.3.4. Bezpieczeństwo firmy	9
1.4. Wnioski	10
2. Symulacje procesu ryzyka	10
2.1. Definicja bankructwa	11
2.2. Prawdopodobieństwo ruiny dla skończonego horyzontu czasowego	11
2.3. Prawdopodobieństwo ruiny dla nieskończonego horyzontu czasowego	11
2.4. Wnioski	12
3. Zadanie 2	12
3.1. Ruch Browna, inaczej proces Wienera	12
3.1.1. Średni czas wyjścia z przedziału $[a,b]$	14
3.1.2. Prawdopodobieństwo wyjścia przez b - bierzemy pod uwagę dyskretyzację	15
3.2. Podsumowanie	16

1. Zadanie 1

1.1. Wstęp

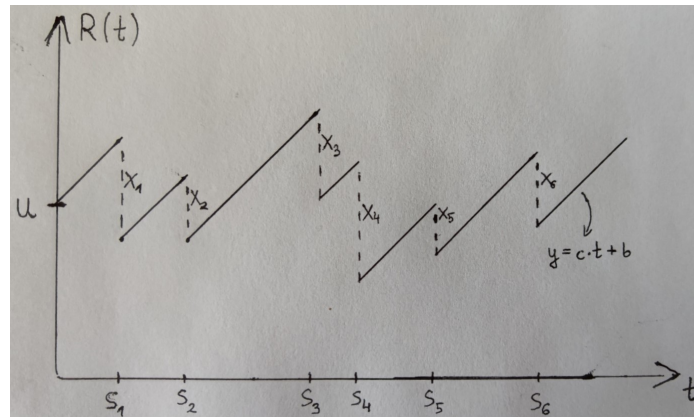
1.1.1. Proces ryzyka

Proces ryzyka to proces stochastyczny opisujący kapitał firmy ubezpieczeniowej na horyzoncie czasowym T . Zadany jest wzorem

$$R(t) = u + c(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad \text{gdzie :} \quad (1)$$

1. $t \in [0, T]$
2. $u > 0$ to kapitał początkowy
3. $c(t)$ to premia (przychody ze sprzedaży polis)
4. $N(t)$ to proces liczący straty
5. X_i to zmienne losowe iid. reprezentujące wysokości wypłacanych odszkodowań, $\mathbb{E}X_i = \mu$, $X_i > 0$, $X_i \perp\!\!\!\perp N(t)$.

Klasyczny proces ryzyka zakłada liniowy przychód ze sprzedaży polis, tzn. $c(t) = c \cdot t$. Charakteryzuje się on również tym, że momenty wypłacania ubezpieczeń są generowane z jednorodnego procesu Poissona o intensywności λ_p .



Rysunek 1. Klasyczny proces ryzyka (rysunek autora)

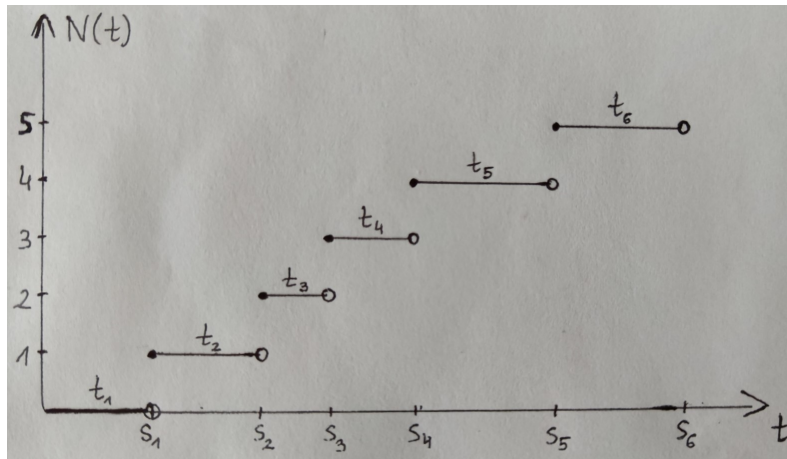
1.1.2. Jednorodny proces Poissona

Jednorodnym procesem Poissona z intensywnością $\lambda_p > 0$ nazywamy proces liczący $\{N(t), t \geq 0\}$, który spełnia następujące warunki:

1. $N(0) = 0$
2. $N(t)$ ma niezależne i stacjonarne przyrosty
3. $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda_p t)$, tzn. $P(N(t) = n) = e^{-\lambda_p t} \cdot \frac{(\lambda_p t)^n}{n!}$

Zauważmy, że średnia liczba obserwacji, które pojawiły się do momentu t wynosi $\mathbb{E}(N(t)) = \lambda_p t$. Dlatego parametr λ_p nazywany jest intensywnością pojawiania się zdarzeń losowych. Algorytm generowania tego procesu wygląda następująco:

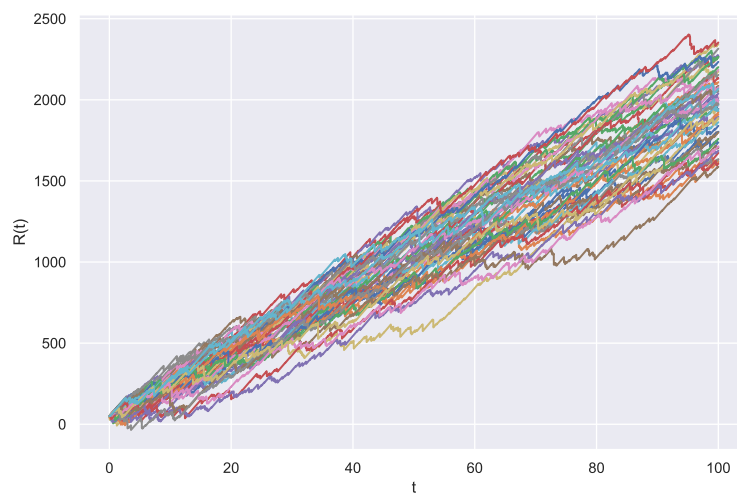
1. Tworzymy zmienną $S = 0$.
2. Generujemy $t_i \sim \text{Exp}(\lambda_p)$. Jest to czas oczekiwania na i -ty skok.
3. Jeśli $S + t_i < T$ to dodajemy wartość t_i do S i wracamy do punktu 2. Jeśli nie, kończymy algorytm.
4. Kolejne wartości S są wartościami jednorodnego procesu Poissona, które reprezentują momenty skoków.



Rysunek 2. Jednorodny proces Poissona (rysunek autora)

1.2. Dane do zadania

W tym zadaniu pracujemy na danych otrzymanych od prowadzącego. Plik zawiera 50 trajektorii pewnego procesu ryzyka, który został wysymulowany na odcinku $[0, 100]$, z krokiem czasowym $h = 0.01$. Kapitał początkowy to $u = 50$. Plik ma rozszerzenie `.p`, zatem możemy go wczytać używając języka programowania Python za pomocą polecenia `pickle.load(open('ŚcieżkaDoPliku', 'rb'))`.

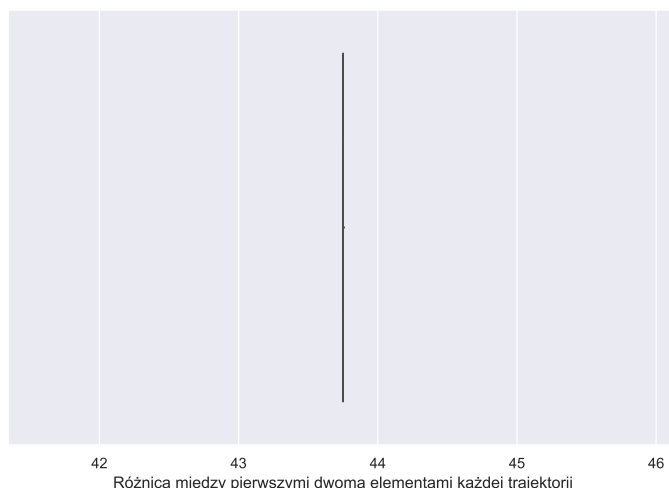


Rysunek 3. Otrzymane 50 trajektorii procesu ryzyka

1.3. Dopasowanie klasycznego modelu ryzyka do danych

1.3.1. Koszt polisy

Cenę ubezpieczenia możemy prosto wyznaczyć porównując ze sobą dwa pierwsze elementy każdej trajektorii. Uzasadnia to fakt, że kupienie polisy jest niezbędne, aby później klient mógł otrzymać odszkodowanie.



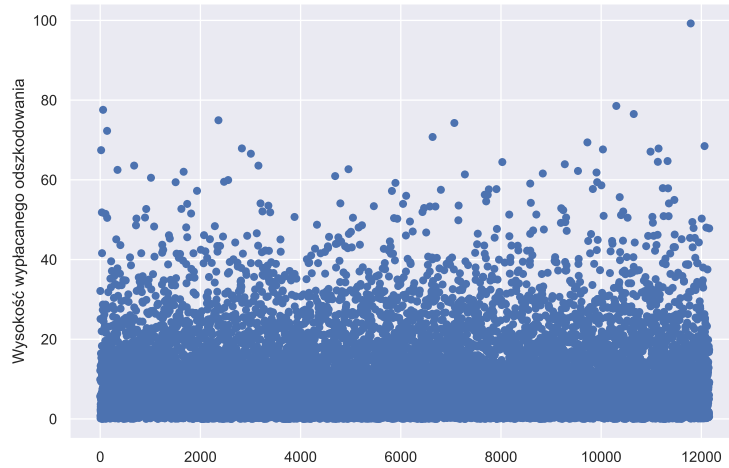
Rysunek 4. Wykres pudełkowy różnic między pierwszymi dwoma elementami każdej trajektorii

Dla otrzymanych danych, wszystkie trajektorie mają wspomniany przychód równy 0.4375. Jako że elementy są od siebie oddalone o czas $h = 0.01$, to przyjmujemy premię $c = 43.75$.

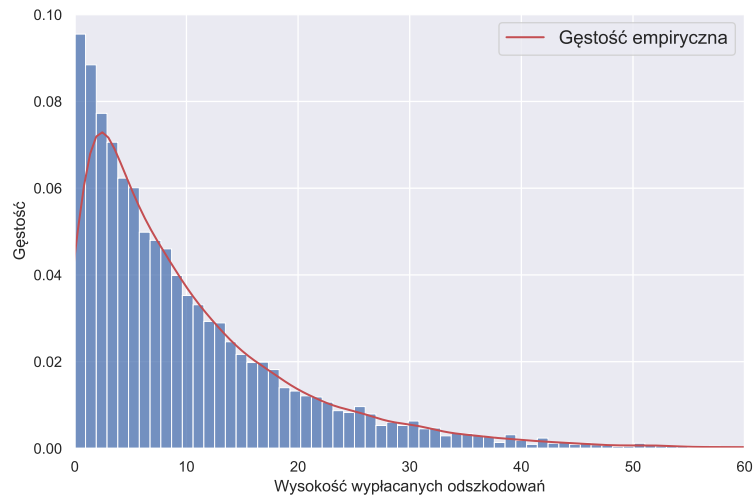
1.3.2. Rozkład wysokości wypłacanych odszkodowań X_i

Aby dopasować klasyczny model ryzyka do powyższych danych, należy znaleźć rozkład zmiennej losowej X_i , która wyznacza wartość i -tej szkody (wypłaconego odszkodowania). Rozkład X_i jest taki sam dla każdej z trajektorii. Dlatego najłatwiej będzie wyodrębnić wszystkie spadki z otrzymanych danych, narysować ich histogram, a następnie przy pomocy gęstości empirycznej i wykresu typu QQ-plot odczytać typ i parametry gęstości rozkładu X_i .

Wysokości wypłacanych odszkodowań obliczamy porównując ze sobą wartości sąsiadujących elementów każdej trajektorii. Przypomnijmy, że owe punkty są rozmieszczone co $h = 0.01$, a kapitał firmy rośnie poprzez liniowy przychód ze sprzedaży polis. Dlatego jeśli różnica między dwoma sąsiadującymi punktami wynosi $c \cdot 0.01$, to w danym momencie nie nastąpiło wypłacenie odszkodowania. W innym wypadku, należy policzyć różnicę między wartością uwzględniającą sam przychód a rzeczywistym kapitałem.

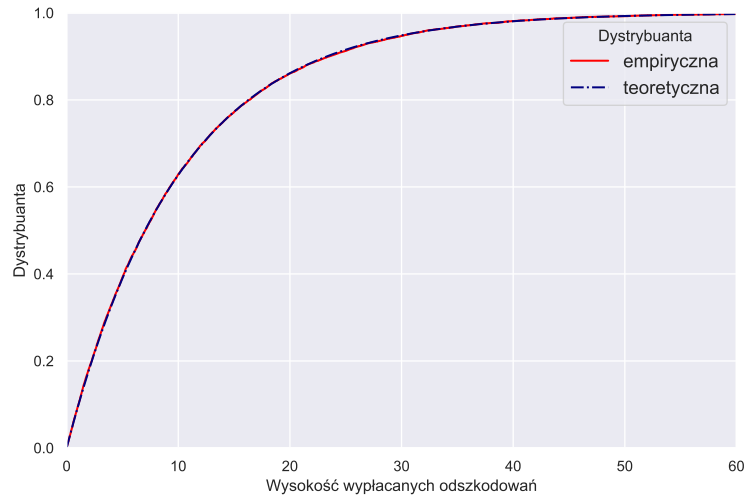


Rysunek 5. Wykres punktowy wartości wypłacanych odszkodowań X_i

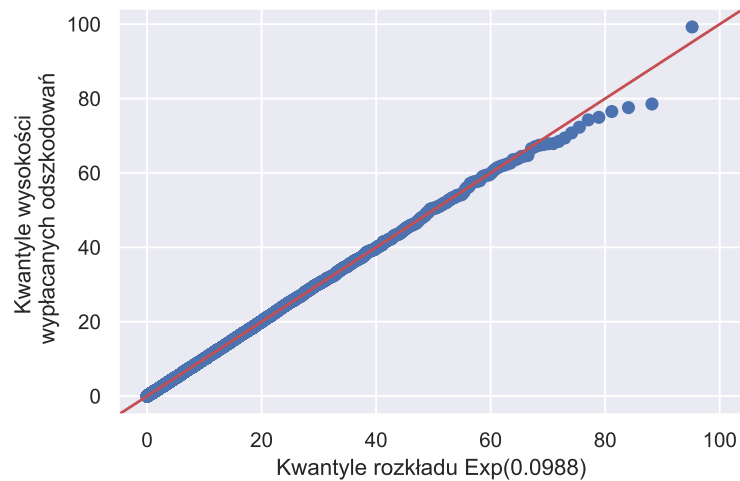


Rysunek 6. Histogram wartości wypłacanych odszkodowań X_i

Zauważmy, że histogram ma kształt typowy dla rozkładu wykładniczego. Zweryfikujemy tę hipotezę poprzez wyliczenie potencjalnego parametru λ_x , a następnie porównanie empirycznej dystrybucyjnej i wykresu kwantylowego z wartościami teoretycznymi. Przypomnijmy, że dla rozkładu wykładniczego $\frac{1}{\lambda_x} = \mathbb{E}X_i = \bar{X} = 10.119 = \frac{1}{0.0988}$.



Rysunek 7. Porównanie dystrybuanty empirycznej z teoretyczną dla rozkładu $Exp(0.0988)$

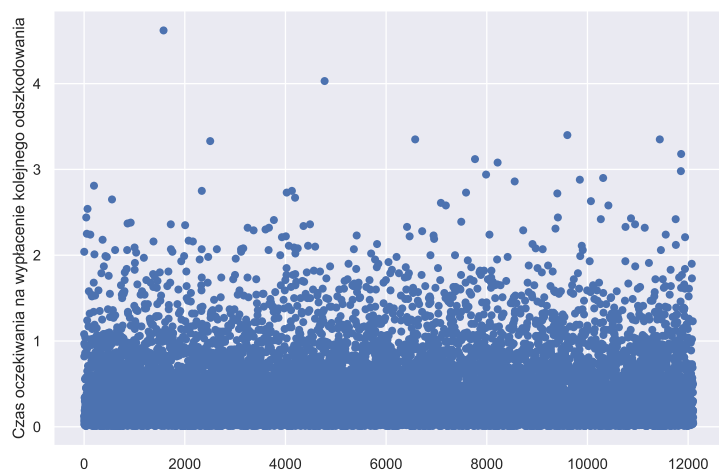


Rysunek 8. Wykres kwantylowy dla wartości wypłacanych odszkodowań z argumentem $Exp(0.0988)$

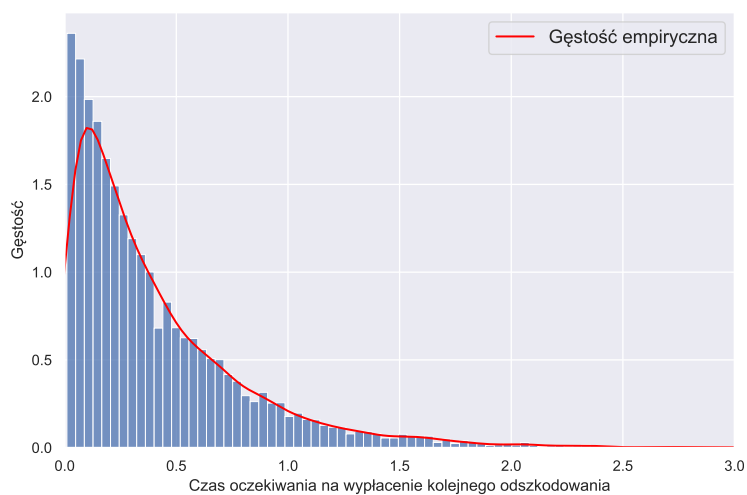
Dystrybuanty pokrywają się, a wykres kwantylowy stanowi linię prostą nachyloną do osi OX pod kątem 45 stopni. Oznacza to, że prawidłowo dopasowaliśmy rozkład zmiennej losowej $X_i \sim Exp(0.0988)$.

1.3.3. Intensywność wypłacania ubezpieczeń

Kolejnym krokiem jest wyznaczenie intensywności wypłacania ubezpieczeń. Inaczej mówiąc, musimy znaleźć parametr λ_p jednorodnego procesu Poissona. W tym celu znajdziemy momenty pojawienia się spadków kapitału. Następnie wyliczymy czasy oczekiwania na kolejne skoki. Przy pomocy histogramu, dystrybuanty empirycznej i wykresu kwantylowego zbadamy rozkład tych zmiennych losowych. Ze względu, że jest to klasyczny model ryzyka, parametr tego rozkładu będzie odpowiadał λ_p w jednorodnym procesie Poissona.

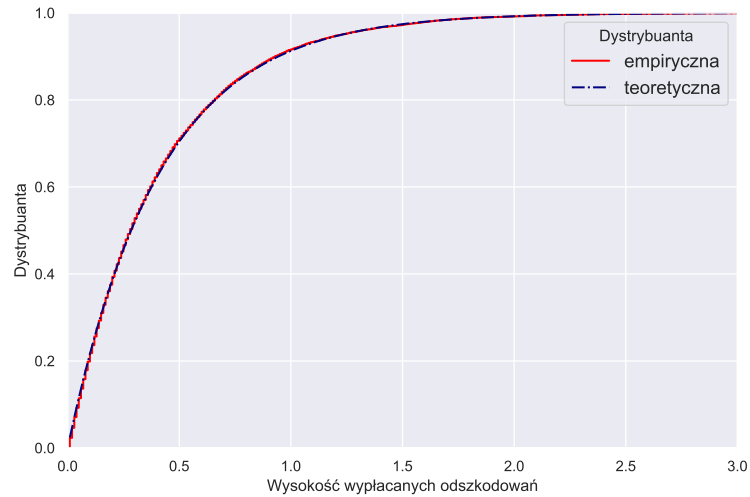


Rysunek 9. Wykres punktowy czasów oczekiwania na wypłacenie kolejnego odszkodowania

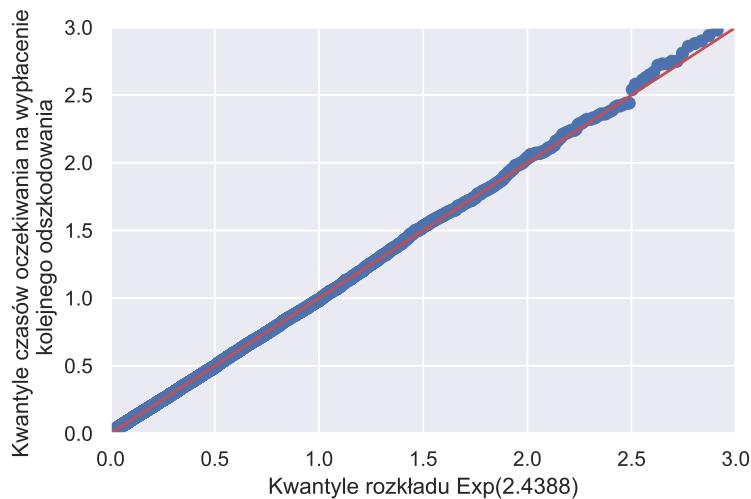


Rysunek 10. Histogram czasów oczekiwania na wypłacenie kolejnego odszkodowania

Zauważmy, że histogram ma kształt typowy dla rozkładu wykładniczego. Zweryfikujemy tę hipotezę poprzez wyliczenie potencjalnego parametru λ_p , a następnie porównanie empirycznej dystrybucyjności i wykresu kwantylowego z wartościami teoretycznymi. Przypomnijmy, że dla rozkładu wykładniczego $\frac{1}{\lambda_p} = \mathbb{E}t_i = \bar{t} = 0.41 = \frac{1}{0.41}$.



Rysunek 11. Porównanie dystrybuanty empirycznej z teoretyczną dla rozkładu $Exp(2.4388)$



Rysunek 12. Wykres kwantylowy dla czasów oczekiwania na wypłacenie kolejnego odszkodowania z argumentem $Exp(2.4388)$

Dystrybuanty pokrywają się, a wykres kwantylowy stanowi linię prostą nachyloną do osi OX pod kątem 45 stopni. Oznacza to, że prawidłowo dopasowaliśmy rozkład zmiennej losowej t_i . Czasy oczekiwania na wypłacenie kolejnego odszkodowania są z rozkładu $Exp(2.4388)$, zatem nasz proces liczący (jednorodny proces Poissona) przyjmuje parametr intensywności $\lambda_p = 2.4388$.

1.3.4. Bezpieczeństwo firmy

Bezpieczeństwo finansowe stanowi priorytet każdej firmy. Dlatego wysokość ceny polisy jest determinowana przez tzw. narzut bezpieczeństwa θ zgodnie ze wzorem $c = (1 + \theta)\lambda_p \mathbb{E}X_i$. Obliczmy narzut dla otrzymanych danych:

$$\theta = \frac{c}{(\mathbb{E}X_i) \cdot \lambda_p} - 1 = 0.7728.$$

1.4. Wnioski

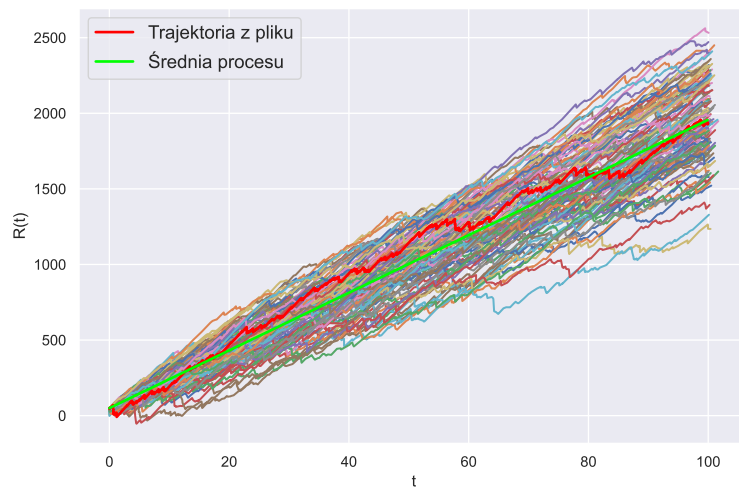
W tej części zadania udało nam się dopasować klasyczny model ryzyka do otrzymanych danych. Ustaliliśmy, że premia $c = 43.75$, wysokości odszkodowań X_i mają rozkład $Exp(0.0988)$, a intensywność wypłacania ubezpieczeń wynosi $\lambda_p = 2.4388$. Wysoka wartość parametru $\theta = 0.7728$ pozwala przypuszczać, że procesy ryzyka symulowane w drugiej części zadania rzadko kiedy zakończą się bankructwem.

2. Symulacje procesu ryzyka

Ta część zadania polega na wysymulowaniu 100 trajektorii klasycznego procesu ryzyka $R(t)$ z parametrami obliczonymi w poprzedniej sekcji. Następnie zajmiemy się analizą stworzonych danych pod kątem bankructwa. Algorytm symulacji przebiega następująco:

1. Generujemy jednorodny proces Poissona $N(t)$ na $[0, T]$. Czasy oczekiwania na kolejne spadki mają rozkład $Exp(2.4388)$.
2. Generujemy $X_1, X_2, \dots, X_{N(t)}$. Wysokości spadków mają rozkład $Exp(0.0988)$.
3. Ustalamy początkowy kapitał u i podstawiamy wartości do wzoru numer 1 na stronie 3.

Otrzymaną wiązkę zestawiamy na wykresie ze średnią procesu oraz jedną trajektorią z pliku z danymi.



Rysunek 13. Porównanie 100 wysymulowanych trajektorii $R(t)$ ze średnią procesu oraz jedną trajektorią z pliku

Czerwona i zielona trajektoria biegną przez wygenerowaną wiązkę klasycznego procesu ryzyka. Świadczy to o poprawności wykonanej przez nas symulacji.

2.1. Definicja bankructwa

Bankructwo to moment, w którym wartość procesu ryzyka $R(t)$ pierwszy raz spadnie poniżej zera. Możemy go zapisać w postaci:

$$\tau(u) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t \geq 0 : R(t) < 0\}.$$

2.2. Prawdopodobieństwo ruiny dla skończonego horyzontu czasowego

Rozpatrując skończony horyzont czasowy, możemy policzyć prawdopodobieństwo, że firma zbankrutuje do pewnego momentu T :

$$\Psi(u, T) \stackrel{\text{def}}{=} P(\tau(u) < T).$$

Jedną z metod wyznaczenia powyższego prawdopodobieństwa jest metoda Monte Carlo. Algorytm działania wygląda następująco:

1. Generujemy N trajektorii procesu ryzyka $R_1(t), \dots, R_N(t)$ na przedziale $[0, T]$.
2. Wyznaczamy liczbę trajektorii n , które spadły poniżej zera na przedziale $[0, T]$. $n = \#\{i \in \{1, \dots, N\} : \min R_i(t) < 0\}$.
3. Podstawiamy do wzoru $\Psi(u, T) = \frac{n}{N}$.

Po przeprowadzeniu symulacji Monte Carlo otrzymaliśmy wyniki $\Psi(50, 100) = 0.065$ oraz $\Psi(50, 200) = 0.0691$. Oznacza to, że zaledwie kilka procent trajektorii kończy się bankructwem. Zgadza się to z wysoką wartością parametru θ w sekcji 1.3.4.

2.3. Prawdopodobieństwo ruiny dla nieskończonego horyzontu czasowego

Rozpatrując nieskończony horyzont czasowy, możemy policzyć prawdopodobieństwo, że firma kiedykolwiek zbankrutuje. W tym przypadku nie ustalamy konkretnego przedziału czasowego, więc wzór nie zależy od T :

$$\Psi(u) \stackrel{\text{def}}{=} P(\tau(u) < \infty).$$

Powyższe prawdopodobieństwo możemy aproksymować za pomocą wzoru Pollaczka-Chinczyna o postaci:

$$\Psi(u) = \frac{\theta}{1 + \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \theta}\right)^n B_n(u), \quad \text{gdzie :}$$

- $B_n(u) = P(Y_1 + \dots + Y_n > u)$
- Y_i to zmienne losowe iid. o gęstości $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - F_{X_i}(x)}{\mu}$, gdzie $\mu = \mathbb{E}X_i$.

Wyznaczanie prawdopodobieństwa ruiny $\Psi(u)$ dla nieskończonego horyzontu czasowego za pomocą metody Monte Carlo ma następujący algorytm:

1. Tworzymy tablicę Z o rozmiarze N .
2. Generujemy zmienną losową $K \sim \text{Geom}(\frac{\theta}{1+\theta})$.
3. Generujemy zmienne losowe iid. Y_1, \dots, Y_K , każda z nich o gęstości $f(x) = \frac{1-F_{X_i}(x)}{\mu}$.
4. Jeśli $Y_1 + \dots + Y_K > u$ wstawiamy $Z[i] = 1$, w przeciwnym razie $Z[i] = 0$.
5. Powtarzamy N razy kroki od 2 do 4.
6. Podstawiamy do wzoru $\Psi(u) = \frac{Z[1]+\dots+Z[N]}{N}$.

Po przeprowadzeniu symulacji Monte Carlo otrzymaliśmy wynik $\Psi(50) = 0.06809$. Niskie prawdopodobieństwo ruiny ponownie zgadza się z wysoką wartością parametru θ w sekcji 1.3.4.

Przypomnijmy, że wysokości wypłacanych odszkodowań pochodzą z rozkładu wykładniczego. Pozwala to na obliczenie wartości teoretycznej prawdopodobieństwa ruiny przy nieskończonym horyzoncie czasowym. Analityczny wzór dany jest wzorem:

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+\theta} \cdot \exp\left(-\lambda_X u \cdot \frac{\theta}{1+\theta}\right)$$

Podstawiając $u = 43.75$, $\theta = 0.7728$, $\lambda_X = 0.0988$ otrzymujemy $\Psi(50) = 0.0654$.

2.4. Wnioski

Dzięki parametrom wyliczonym w pierwszej części zadania udało się nam przeprowadzić symulacje klasycznego procesu ryzyka. Wygenerowane trajektorie pasują do tych otrzymanych od prowadzącego. Następnie wyznaczyliśmy prawdopodobieństwo bankructwa dla omawianego klasycznego modelu ryzyka. Rząd tych wartości zgadza się z naszymi oczekiwaniami względem parametru θ . Co więcej, wykazaliśmy niewielką różnicę między prawdopodobieństwem ruiny dla horyzontu $T = 100$ i $T = 200$. Oczywiście, dwie obserwacje to za mało, by wyciągnąć jakieś wnioski. Mimo to, wstępnie możemy założyć, że dla wysokich wartości parametru θ , długość horyzontu nie ma wpływu na prawdopodobieństwo ruiny. Rozpatrując nieskończony horyzont czasowy porównaliśmy wzór analityczny z aproksymacją Pollaczka-Chinczyna. Mała rozbieżność wyników potwierdza prawidłowe przeprowadzenie symulacji procesu ryzyka.

3. Zadanie 2

3.1. Ruch Browna, inaczej proces Wienera

Ruch Browna należy do procesów H - samopodobnych. Mówimy o procesie Wienera, gdy

1. $B(0)=0$

2. $B(t)$ ma niezależne, stacjonarne przyrosty.

3. $B(t) \sim N(0, t)$

4. $B(t)$ ma ciągłe trajektorie.

$B(t)$ jest $\frac{1}{2}$ - samopodobny, $B(at) = a^{\frac{1}{2}} B(t)$, $H = \frac{1}{2}$.

Symulacja trajektorii $B(t)$

Cel: Chcemy wygenerować trajektorię $B(t)$ w punktach t_0, t_1, \dots, t_n , gdzie $t_i = ih$, $h = \frac{1}{n}$, $i=0, 1, \dots, n$.

Chcemy wygenerować wektor $(B(t_0), B(t_1), \dots, B(t_n))$. Zauważmy, że

$B(t_k) - B(t_{k-1}) \stackrel{d}{=} B(t_k - t_{k-1}) = B(h)$. Zatem wystarczy generować przyrosty $B(t)$.

Ruch Browna nazywany jest również procesem gaussowskim.

Algorytm

1. $B(t_0) = 0$, $(t_0 = 0)$

2. $B(t_{i+1}) = B(t_i) + h^{\frac{1}{2}} \xi_i$, $i=0, 1, \dots, n-1$,
 $\xi_0, \dots, \xi_{n-1} - iid$, $\xi_i \sim N(0, 1)$,
 $h^{\frac{1}{2}} \xi_i \sim N(0, h)$



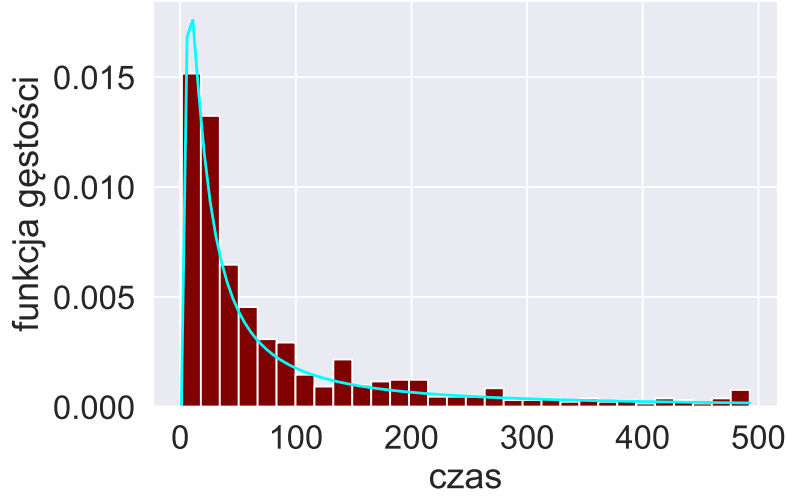
Rysunek 14. Trajektorie procesu Wienera

Ze wzoru $\sqrt{2t \log(\log t)}$, gdzie $t = 50$, otrzymujemy wynik w przybliżeniu ≈ 11.68 . Możemy zobaczyć, że nasze trajektorie oscylują właśnie pomiędzy asymptotami wyliczonymi ze wzorów $\sqrt{2t \log(\log t)}$ oraz $-\sqrt{2t \log(\log t)}$.

Własności trajektorii:

1. ciągłe
2. nieróżniczkowalne
3. niekończące wahania na zadanym odcinku.

Funkcja gęstości ruchu Browna prezentuje się w następujący sposób:



Rysunek 15. Funkcja gęstości wyznaczona dla procesu Wienera

3.1.1. Średni czas wyjścia z przedziału $[a, b]$

Dla procesu B_t^0 bez przesunięcia o x możemy definiować czas pierwszego uderzenia w ustalonym punkcie a :

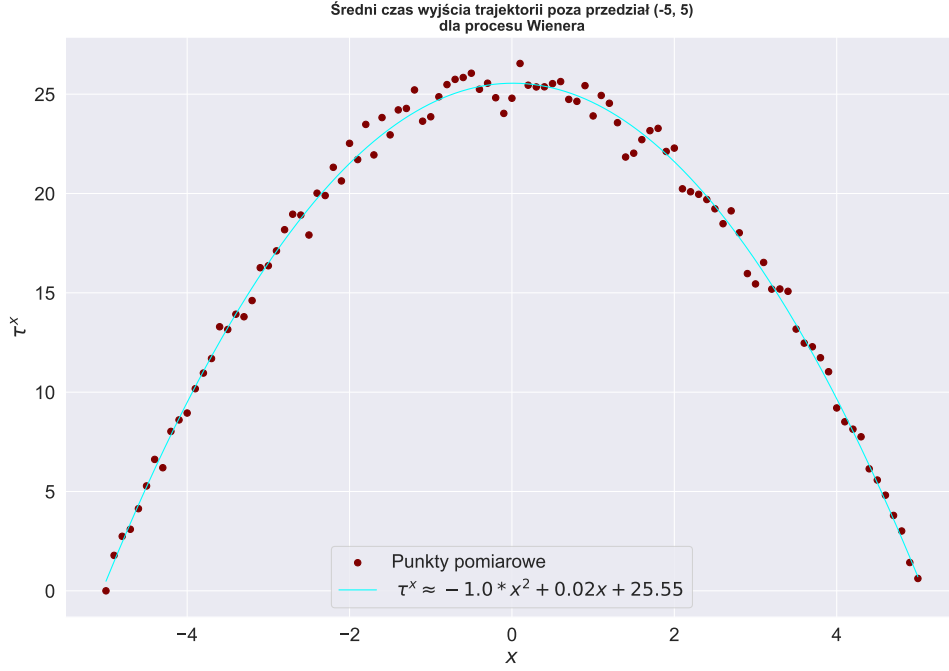
$$\tau^x = \inf \{t \geq 0 : B_t^x = a\}.$$

Dla przesunięcia:

Niech $\{B_t^x\}_{t \geq 0}$ będzie ruchem Browna startującym z $x \in \mathbb{R}$, a τ^x czasem wyjścia tego procesu z ustalonego przedziału $[a, b]$, czyli

$$\tau^x = \inf \{t \geq 0 : B_t^x \notin [a, b]\}.$$

Tutaj przyjęliśmy $b = -a$, a jeśli przyjmiemy $x \in [a, b]$, to przesuwanie o tą stałą nie zmieni naszego wyniku końcowego. Parametr $b = 5$, został wybrany tak aby wartości mniejsze od $\sqrt{2t \log(\log(t))} \approx 11,68$ były na pewno w takim czasie przyjmowane, przyjęliśmy $t = 50$, dla $x = 2$. Można pokazać, że $E\tau^x < \infty$. Dodatkowo wiemy, że średnia w próbie jest dobrym estymatorem wartości oczekiwanej. Estymacja czasów wyjścia trajektorii poza przedział była przeprowadzana za pomocą symulacji Monte Carlo (algorytmem dla uśredniania czasów, a nie binarnych wartości).



Rysunek 16. Średni czas wyjścia z zadanego przedziału dla procesu Wienera wraz z krzywą dopasowania.

Wyniki symulacji zaprezentowane na tym rysunku pokazują nam, że punkty pomiarowe kształtem przypominają parabolę. Prawdą jest, że w środku przedziału czas musi być najdłuższy, gdyż tutaj wariancja rośnie razem z czasem. Symetryczność wykresu wynika z rozkładu normalnego, który charakteryzuje ruch Browna. Mogliśmy podejrzewać, że nasz wykres będzie wielomianem, za pomocą pakietów obliczyliśmy, że $\tau^x \approx -1x^2 + 0.02x + 25.55$. Dla procesu Wienera wartość wyjścia wynosi $E\tau = ab$, gdzie τ jest czasem wyjścia z przedziału $[-a, b]$.

3.1.2. Prawdopodobieństwo wyjścia przez b - bierzemy pod uwagę dyskretyzację

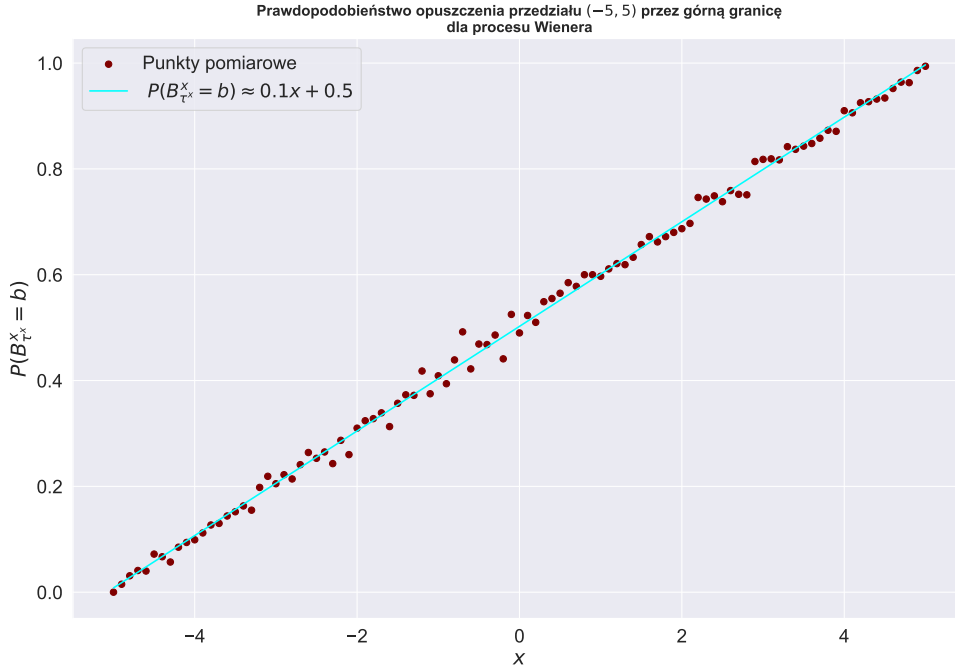
Proces uśredniania prawdopodobieństw jest podobny do wcześniejszych opisów uśredniania czasu wyjścia. Zajmujemy się badaniem prawdopodobieństwa $P(B_{\tau^x}^x = b)$, tutaj dodajemy tylko funkcję która sprawdza nam czy w momencie τ^x proces wykracza nam poza granicę b . Korzystając z własności mamy przekształcenie wzoru $P(B_{\tau^y}^y) = 1$, gdzie τ^y jest czasem wyjścia procesu z przedziału $[0, 1]$. Ponownie korzystamy z metody Monte Carlo. Dyskretyzacja polega na tym, że generując dyskretne punkty, a nie ciągłą trajektorię nigdy nie trafimy dokładnie w punkt b , tylko zawsze będzie coś więcej. Czyli w tym przypadku przy czasie wyjścia sprawdzamy $B_{\tau^x}^x \geq b$. Ponieważ $B_{\tau^x}^x$ może przyjmować jedynie dwie wartości a lub b , przekształcamy prawdopodobieństwo i otrzymujemy

$$P(B_{\tau^x}^x = b) = P(B_{\tau^y}^y \geq 1).$$

Na wykresie widzimy zależność liniową $P(B_{\tau^y}^y \geq 1) = y$ dla $y \in [0, 1]$. Ko-

rzystając z równości przedstawionej powyżej oraz $y = \frac{x-a}{b-a}$, szukane przez nas prawdopodobieństwo możemy przybliżyć funkcją

$$P(B_{\tau^x}^x = b) = \frac{x-a}{b-a}.$$



Rysunek 17. Prawdopodobieństw wyjścia przez górną granicę dla zadanego przedziału przez proces Wienera wraz z krzywą dopasowania

Kształt przypomina zwykłą prostą i nie jest to dla nas zaskoczeniem, bazując na poprzednich wynikach. Możemy tutaj zobaczyć monotoniczność, bo bliska odległość do którejś z granic powoduje większe prawdopodobieństwo wyjścia przez nią. W momencie, gdy odległości $a = b$, to ich prawdopodobieństwa też są równe, co możemy zobaczyć w naszym przypadku.

3.2. Podsumowanie

W zadaniu drugim głównie korzystamy z własności procesu Wienera. Opis teoretyczny tego procesu pozwolił nam na dokładniejsze zrozumienie i wyznaczenie czasu opuszczenia przedziału oraz oszacowanie prawdopodobieństwa w momencie, gdy odbywa się to przez górną granicę.